Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Slaven Kožić

Glavni potprostori standardnih reprezentacija algebre $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2013.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Slaven Kožić

Principal subspaces of standard representations for algebra $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2013

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Slaven Kožić

Glavni potprostori standardnih reprezentacija algebre $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$

DOKTORSKI RAD

Mentor: prof. dr. sc. Mirko Primc

Zagreb, 2013.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Slaven Kožić

Principal subspaces of standard representations for algebra $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$

DOCTORAL THESIS

Supervisor: prof. dr. sc. Mirko Primc

Zagreb, 2013

Ova se disertacija predaje na ocjenu Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu u svrhu stjecanja znanstvenog stupnja doktora prirodnih znanosti iz područja prirodnih znanosti, polja matematike.

Zahvaljujem svom mentoru, prof. dr. sc. Mirku Primcu, koji mi je predložio temu ovog rada, na njegovoj susretljivosti, savjetima i na vrlo poticajnoj suradnji iz koje sam mnogo naučio.

Zahvaljujem članovima Seminara za algebru na slušanju mojih seminara kao i na brojnim korisnim komentarima i diskusijama.

Na kraju, zahvaljujem svojoj majci Ružici na konstantnoj podršci.

Sadržaj

Uvod

Kvantne grupe se prvi put pojavljuju u fizikalnoj literaturi, u radovima L. D. Fadeeva, N. Yu. Reshetikhina i L. A. Takhtadzhyana ([12] i [13]). Nešto kasnije V. G. Drinfeld ([10]) i M. Jimbo ([22]) dolaze do otkrića klase Hopfovih algebri, koje se mogu dobiti kao q-deformacije univerzalnih omotačkih algebri pridruženih Kac-Moodyjevim algebrama. Definicija kvantne grupe dana je u terminima Chevalleyjevih generatora i relacija, koje ovise o pripadnoj generaliziranoj Cartanovoj matrici. Time su dobiveni važni primjeri Hopfovih algebri koje nisu niti komutativne niti kokomutativne.

Za slučaj afinih Kac-Moodyjevih algebri Drinfeld je otkrio novu realizaciju ([9]) kvantnih grupa, tj. kvantnih afinih algebri, koja je u velikoj mjeri slična realizaciji afinih Kac-Moodyjevih algebri pomoću algebri petlji. Struktura Hopfove algebre na kvantnim grupama omogućava definiciju tenzorskog produkta reprezentacija. Za svoju realizaciju kvantnih afinih algebri Drinfeld je dao i jednu novu strukturu Hopfove algebre ([7]) jer ona klasična nema zatvorenu formu za generatore iz njegove realizacije. Drinfeldova realizacija je omogućila, između ostalog, dolazak do čitavog niza rezultata iz teorije reprezentacija kvantnih afinih algebri. I. B. Frenkel i N. Jing ([16]) realizirali su ireducibilne $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module najveće težine nivoa 1, kada je $\hat{\mathfrak{g}}$ tipa $(ADE)^{(1)}$, napisavši eksplicitne formule za djelovanje operatora $x^{\pm}_{\alpha_i}(z)$ iz Drinfeldove realizacije. Spomenutu realizaciju možemo primijeniti i na module viših nivoa realizirajući ih kao podmodule tenzorskog produkta modula nivoa 1. Slični rezultati dobiveni su i za neke druge kvantne afine algebre, npr. ireducibilne $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module najveće težine nivoa 1, kada je $\hat{\mathfrak{g}}$ tipa $B_n^{(1)}$, konstruirali su D. Bernard ([3]) te N. Jing i K. C. Misra ([30]), module nivoa 2, kada je $\hat{\mathfrak{g}}$ tipa $A_1^{(1)}$, M. Idzumi ([20]) te N. Jing ([23]), module nivoa $-1/2$ i 1, kada je $\hat{\mathfrak{g}}$ tipa $C_n^{(1)}$, N. Jing, Y. Koyama i K. C. Misra ([28] i [29]) itd. U terminima Drinfeldove realizacije su J. Ding, T. Miwa i B. Feigin ([8] i [6]), koristeći realizaciju modula nivoa 1 ([16]), zapisali uvjet kvantne integrabilnosti za ireducibilne $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-module najveće težine. Radi se o analogonu relacija integrabilnosti za Liejevu algebru $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ do kojih su došli J. Lepowsky i M. Primc u [34]. Kvantna integrabilnost kaže da je na svakom ireducibilnom $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-modulu najveće težine nivoa c

$$x^+_{\alpha_i}(z_1)x^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{c+1})=0 \qquad \text{i} \qquad \bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots \bar{x}^+_{\alpha_i}(z_{c+1})=0,$$

ako je

$$z_1/z_2 = z_2/z_3 = \ldots = z_c/z_{c+1} = q^{-2}.$$

Jedno važno svojstvo reprezentacija kvantnih grupa, koje je dokazao G. Lusztig ([38]), je da je, grubo govoreći, teorija reprezentacija Kac-Moodyjeve Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ jednaka teoriji reprezentacija kvantne grupe $U_q(\mathfrak{g})$. Spomenutim rezultatom možemo, npr. ireducibilne $U(\mathfrak{g})$-module najveće težine shvatiti kao klasični limes ireducibilnih $U_q(\mathfrak{g})$-modula najveće težine, čime se uspostavlja i jednakost njihovih karaktera. Međutim, teorija reprezentacija kvantnih grupa se u nekim elementima bitno razlikuje od teorije reprezentacija pripadnih Liejevih algebri. Primjerice, ako sa $\mathfrak{g}$ označimo prostu Liejevu algebru pridruženu afinoj Liejevoj algebri $\hat{\mathfrak{g}}$, onda na prirodan način možemo definirati evaluacijski homomorfizam $U(\hat{\mathfrak{g}}) \to U(\mathfrak{g})$, a potom i evaluacijske module. Kod kvantne afine algebre je egzistencija evaluacijskog homomorfizma $U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to U_q(\mathfrak{g})$ netrivijalan problem, kojeg je riješio M. Jimbo za slučaj $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ ([21]). Njegov homomorfizam nam omogućava definiciju evaluacijskih modula za algebru $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$, a potom i operatora ispreplitanja, koje su uveli I. B. Frenkel i N. Yu. Reshetikhin ([17]). U [32] je Y. Koyama napisao eksplicitne formule za operatore ispreplitanja nivoa 1 za algebru $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$. Verteks-operatore tog tipa ćemo promatrati i u ovom radu. Ako prosta Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ nije tipa A_n, evaluacijski homomorfizam $U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to U_q(\mathfrak{g})$ ne postoji, ali i tada se može uvesti pojam evaluacijskog modula, a zatim i operatora ispreplitanja. Egzaktne formule za operatore ispreplitanja nivoa 1 izvedene su i za algebre $U_q(B_n^{(1)})$ ([30]), $U_q(C_n^{(1)})$ ([27]) i $U_q(D_n^{(1)})$ ([26]).

Jedan fundamentalan problem vezan uz kvantne grupe jest pronaći teoriju kvantnih verteks-algebri za koju se kvantne verteks-algebre mogu pridružiti kvantnim afinim algebrama na sličan način na koji su algebre verteks-operatora pridružene afinim Liejevim algebrama. Dosad su brojni matematičari proučavali različite teorije kvantnih verteks-algebri, npr. H.-S. Li ([36] i [37]), E. Frenkel i N. Reshetikhin ([15]), P. Etingof i D. Kazhdan ([11]), R. Borcherds ([4]) te I. I. Anguelova i M. J. Bergvelt ([1]). Na kraju ovog rada povezat ćemo jednu našu konstrukciju s teorijom kvantnih verteks-algebri, koju je razvio H.-S. Li.

Opišimo sada ukratko temu ovog rada. Neka je $\mathfrak{g}$ prosta Liejeva algebra s trokutastom dekompozicijom

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \otimes \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{n}_+,$$

gdje je $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ njena Cartanova podalgebra, a $\mathfrak{n}_\pm \subset \mathfrak{g}$ direktne sume jednodimenzionalnih podalgebri od $\mathfrak{g}$ koje odgovaraju njenim pozitivnim (negativnim) korijenima. Tada možemo promatrati nezakrenutu afinu Liejevu algebru

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

s pripadnom dekompozicijom

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}}_- \otimes \hat{\mathfrak{h}} \otimes \hat{\mathfrak{n}}_+,$$

gdje je

$$\hat{\mathfrak{n}}_\pm = \mathfrak{n}_\pm \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \qquad \text{i} \qquad \hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$$

Označimo s $L(\Lambda)$ jedinstveni ireducibilni $\hat{\mathfrak{g}}$-modul najveće težine Λ, koja je dominantna integralna, i s $v_\Lambda \in L(\Lambda)$ vektor najveće težine Λ. Definiramo glavni potprostor $W(\Lambda)$ s

$$W(\Lambda) = U(\hat{\mathfrak{n}}_+) \cdot v_\Lambda.$$

Glavne potprostore za afinu Liejevu algebru tipa $A_1^{(1)}$ su uveli B. Feigin i A. Stoyanovsky u [14]. U svom radu oni su konstruirali baze glavnih potprostora modula $L(\Lambda)$ oblika bv_Λ, gdje je b monom kvazičestica. G. Georgiev je u [18] proširio njihove rezultate na afine Liejeve algebre tipa $A_n^{(1)}$, $n \geq 1$, konstruiravši baze istog tipa za sve glavne potprostore modula $L(\Lambda)$, gdje je Λ integralna dominantna težina oblika

$$\Lambda = c_0\Lambda_0 + c_j\Lambda_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,\ c_0, c_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{1}$$

Kvantna afina algebra $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ ima dekompoziciju

$$U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \cong U_q(\hat{\mathfrak{n}}_-) \otimes U_q(\hat{\mathfrak{h}})_0 \otimes U_q(\hat{\mathfrak{n}}_+) \quad \text{(izomorfizam vektorskih prostora).} \tag{2}$$

Nadalje, za dominantnu integralnu težinu Λ možemo definirati ireducibilne $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module $L(\Lambda)$ najveće težine Λ s vektorom najveće težine v_Λ. Motivirani definicijom za afine Liejeve algebre možemo na sličan način uvesti glavne potprostore $W(\Lambda)$:

$$W(\Lambda) = U_q(\hat{\mathfrak{n}}_+) \cdot v_\Lambda.$$

Glavni cilj ovog rada je za kvantnu afinu algebru $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ konstruirati bazu glavnog potprostora $W(\Lambda)$ kada je Λ oblika (1). Teorem 5.7 nam daje traženu bazu:

Teorem 5.7 *Za svaku dominantnu integralnu težinu oblika (1) skup*

$$\left\{ bv_\Lambda \mid b \in \mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \right\}$$

je baza glavnog potprostora $W(\Lambda)$.

Pritom je skup $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ jednak

$$\mathfrak{B}_{W(\Lambda)} = \bigcup_{\substack{0\le m_{r_n^{(1)},n}\le\ldots\le m_{1,n}\le c\\ \ldots\\ 0\le m_{r_1^{(1)},1}\le\ldots\le m_{1,1}\le c}}$$

$$\Big\{ x^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(l_{r_n^{(1)},n}) \cdots x^+_{m_{1,n}\alpha_n}(l_{1,n}) \cdots x^+_{m_{r_1^{(1)},1}\alpha_1}(l_{r_1^{(1)},1}) \cdots x^+_{m_{1,1}\alpha_1}(l_{1,1}) \;\Big|$$

$$\Big|\; l_{r,i} \le \sum_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} \min\{m_{r,i}, m_{s,i-1}\} - \sum_{s=1}^{m_{r,i}} \delta_{ij_s} - \sum_{m_{t,i}>m_{r,i}} 2m_{r,i} - m_{r,i},$$

$$l_{r+1,i} \le l_{r,i} - 2m_{r,i} \text{ ako je } m_{r+1,i} = m_{r,i}$$

$$\text{za sve } l_{r,i} \in \mathbb{Z},\ i = 1,2,\ldots,n,\ r = 1,2,\ldots,r_i^{(1)} \Big\}.$$

Sada ćemo, redom po poglavljima, ukratko opisati sadržaj rada.

Prvo poglavlje započinjemo uvođenjem oznaka i ponavljanjem nekih činjenica iz teorije afinih Liejevih algebri. Potom definiramo kvantnu grupu $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ pridruženu nezakrenutoj afinoj Liejevoj algebri $\hat{\mathfrak{g}}$. Nakon spomenute definicije, izražene u terminima Chevalleyjevih generatora, iskazujemo Drinfeldovu realizaciju kvantnih afinih algebri. Nju ćemo koristiti u čitavom radu i dekompozicija (2), koja prirodno proizlazi iz spomenute realizacije, omogućit će nam definiciju glavnih potprostora u trećem poglavlju. Na kraju navodimo i strukturu Hopfove algebre $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$, koju je pronašao Drinfeld.

U drugom poglavlju, koje je također uvodnog karaktera, bavimo se reprezentacijama kvantne afine algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Prvo ćemo nabrojati neke osnovne pojmove i činjenice iz teorije reprezentacija kao što su težinski i integrabilni moduli, konstrukcija Vermaovih modula te konstrukcija i klasifikacija ireducibilnih modula najveće težine. Iskazat ćemo i teorem potpune reducibilnosti, koji će nam omogućiti vrlo korisnu konstrukciju ireducibilnih modula najveće težine nivoa c kao podmodula tenzorskog produkta c ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1. Zatim ćemo navesti realizaciju ireducibilnih $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-modula $L(\Lambda_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$, koju su otkrili I. B. Frenkel i N. Jing ([16]). Poglavlje završavamo Ding-Feiginovim operatorima $\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)$, $i = 1,2,\ldots,n$, iz [6]. Oni su komutativni analogon verteks-operatora $x^+_{\alpha_i}(z)$ iz Drinfeldove realizacije i poslužit će nam u trećem poglavlju za definiciju kvazičestica tipa 2. Na samom kraju izvodimo velik broj relacija između verteks-operatora, koje nam daje Drinfeldova realizacija.

U trećem poglavlju, na način analogan onome za afine Liejeve algebre, definiramo glavni potprostor $W(\Lambda)$ pridružen ireducibilnom $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-modulu najveće težine Λ s

$$W(\Lambda) = U_q(\hat{\mathfrak{n}}_+) \cdot v_\Lambda.$$

Naš prvi rezultat ovdje odnosi se na redoslijed kojim koeficijenti verteks-operatora $x^+_{\alpha_i}(z)$, $i = 1,2,\ldots,n$, a zatim i operatora $\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)$, $i = 1,2,\ldots,n$, djeluju na maksimalan vektor

v_Λ. Dokazat ćemo da je svaki vektor iz $W(\Lambda)$ linearna kombinacija vektora koje dobijemo kada na v_Λ djelujemo prvo koeficijentima od $x^+_{\alpha_1}(z)$, pa koeficijentima od $x^+_{\alpha_2}(z)$, ... i tek na kraju koeficijentima od $x^+_{\alpha_n}(z)$. Analogan rezultat vrijedit će i za operatore $\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)$. Sljedeći cilj bit će nam definirati analogon kvazičestica iz članka [18]. Tamo su kvazičestice naboja $m \in \mathbb{N}$ i boje $i = 1, 2, \ldots, n$, za Liejevu algebru $\mathfrak{sl}_{n+1}$, dobivene kao koeficijenti reda

$$x^+_{m\alpha_i}(z) = (x^+_{\alpha_i}(z))^m.$$

Za kvantnu afinu algebru $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ gornji produkt, zbog nekomutativnosti operatora $x^+_{\alpha_i}(z)$, ne mora biti dobro definiran pa ćemo stoga postupiti malo drugačije. Prvo ćemo uvesti kvazičestice tipa 1 naboja $m \in \mathbb{N}$ i boje $i = 1, 2, \ldots, n$ kao koeficijente od

$$x^+_{m\alpha_i}(z) := \lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}} \left(\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right)\right) x^+_{\alpha_i}(z_1) \ldots x^+_{\alpha_i}(z_m).$$

Tako definirane kvazičestice, čak niti kada su iste boje i, neće komutirati i to će nam biti glavna motivacija za uvođenje kvazičestica tipa 2 (naboja $m \in \mathbb{N}$ i boje $i = 1, 2, \ldots, n$). Njih ćemo definirati pomoću Ding-Feiginovih operatora ([6]) kao koeficijente reda

$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z) := \bar{x}^+_{\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^2) \cdots \bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{2(m-1)}).$$

Za njih će vrijediti relacija

$$[\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1), \bar{x}^+_{k\alpha_i}(z_2)] = 0.$$

Kvocijenti susjednih varijabli u definiciji kvazičestica tipa 1 i 2 iznose q^{-2}. Jedan razlog tome je kvantna integrabilnost koja kaže da će kvazičestica naboja većeg od nivoa ireducibilnog modula najveće težine djelovati na njemu kao nuloperator. Drugi razlog je malo delikatniji. S obzirom da je poznata samo realizacija ireducibilnih $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-modula najveće težine nivoa 1 ([16]), prilikom rada s modulima viših nivoa koristit ćemo realizaciju modula nivoa c kao podmodula tenzorskog produkta c modula nivoa 1. Pritom će djelovanje verteks-operatora $x^+_{m\alpha_i}(z)$ na tenzorskom produktu biti određeno koproduktom Δ, čiju je definiciju dao Drinfeld. Formula za spomenuto djelovanje sastojat će se od c^m sumanada te će ona, upravo zbog načina na koji smo definirali kvazičestice, poprimiti jednostavniji oblik, koji će nam omogućiti daljnje račune s kvazičesticama.

U četvrtom poglavlju ćemo, slično definiciji skupa $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$, definirati i skup $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$, monoma kvazičestica tipa 2 i zatim vidjeti da je skup $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$ sistem izvodnica glavnog potprostora $W(\Lambda)$, koji je pridružen dominantnoj integralnoj težini Λ oblika (1). Dokaz da on razapinje glavni potprostor bit će proveden u duhu članka [18]. Primjenu istog tipa dokaza kao u tom članku omogućit će nam upravo komutativnost kvazičestica tipa 2 iste boje. Valja napomenuti kako se sličan dokaz ne može provesti za kvazičestice tipa 1 i kako je to upravo glavni razlog uvođenja kvazičestica tipa 2 u prethodnom poglavlju. U dokazu ćemo krenuti od jednog sistema izvodnica $\bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$ za $W(\Lambda)$ i zatim, pomoću određenog skupa relacija između kvazičestica tipa 2, induktivno pokazati kako se svaki vektor iz $\bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$ može zapisati kao linearna kombinacija vektora iz $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$. Za provođenje tog postupka bit će nam potrebne tri skupine relacija između kvazičestica tipa 2. Prva skupina relacija je kvantna integrabilnost ([8]), koju ćemo formulirati u terminima kvazičestica tipa 1 i 2. Druga skupina relacija daje nam informaciju o najnižoj potenciji proizvoljnog produkta operatora $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$ različitih boja primijenjenog na maksimalan vektor v_Λ:

$$\begin{aligned} A(z_{r_n^{(1)}}, \ldots, z_1) & \left(\prod_{i=2}^{n} \prod_{r=1}^{r_i^{(1)}} \prod_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} \prod_{t=1}^{m_{(r,s),i}} \left(1 - q^{2(t+m_{r,i}-m_{(r,s),i})} \frac{z_{s,i-1}}{z_{r,i}} \right) \right) \\ & \cdot \bar{x}^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(z_{r_n^{(1)},n}) \cdots \bar{x}^+_{m_{1,1}\alpha_1}(z_{1,1}) v_\Lambda \\ & \in \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{r=1}^{r_i^{(1)}} z_{r,i}^{\sum_{s=1}^{m_{r,i}} \delta_{ij_s} - \sum_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} m_{(r,s),i}} \right) W(\Lambda)[[z_{r_n^{(1)}}, \ldots, z_1]]. \end{aligned} \tag{3}$$

Pritom je s A označen određeni Taylorov red, s j_s funkcija

$$j_s = \begin{cases} 0, & \text{ako je } s = 1, 2, \ldots, c_0, \\ j, & \text{ako je } s = c_0 + 1, \ldots, c_0 + c_j \end{cases}$$

i $m_{(r,s),i} = \min\{m_{r,i}, m_{s,i-1}\}$. Kako bismo došli do rezultata (3), morat ćemo proučiti djelovanje kvazičestica na tenzorskom produktu ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1. Formula za to djelovanje bit će određena koproduktom Δ i sastojat će se od sumanada tenzorskih produkata verteks-operatora nivoa 1. Upravo zahvaljujući načinu na koji smo definirali kvazičestice, vidjet ćemo kako će se velik broj tih sumanada poništiti, dajući konačnoj formuli bitno jednostavniji oblik. Nadalje, izvest ćemo relacije kvazi-kompatibilnosti između verteks-operatora $x^+_{m\alpha_i}(z)$ i $x^+_{k\alpha_{i-1}}(z)$ susjednih boja:

Teorem 4.8 *Za svaku dominantnu integralnu težinu Λ, za svaki $i = 2, 3, \ldots, n$ i za sve naboje $m, k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\prod_{r=1}^{\min\{m,k\}} \left(z_1 - q^{1-2(r+m-\min\{m,k\})} z_2 \right) x^+_{m\alpha_i}(z_1) x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2) \in \mathrm{Hom}(L(\Lambda), L(\Lambda)((z_1, z_2))).$$

Nešto kompliciranije relacije dobit ćemo i između operatora $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$ i $\bar{x}^+_{k\alpha_{i-1}}(z)$ te ćemo pomoću njih dokazati (3). Treća skupina relacija sastojat će se od relacija između kvazičestica iste boje i. Preciznije, vidjet ćemo da između operatora $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$ i $\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z)$, $m \leq k$, postoji $2m$ nezavisnih relacija.

$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{-2m})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) = \bar{x}^+_{(m+k)\alpha_i}(zq^{-2m}), \tag{1}$$
$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{-2(m-1)})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) = \bar{x}^+_{\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{(m+k-1)\alpha_i}(zq^{-2(m-1)}), \tag{2}$$
$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$
$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{-2(m-(m-1))})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) = \bar{x}^+_{(m-1)\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{(k+1)\alpha_i}(zq^{-2(m-(m-1))}), \tag{m}$$
$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{2k})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) = \bar{x}^+_{(m+k)\alpha_i}(z), \tag{m+1}$$
$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{2(k-1)})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) = \bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{2(k-1)})\bar{x}^+_{(m+k-1)\alpha_i}(z), \tag{m+2}$$
$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$
$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{2(k-(m-1))})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) = \bar{x}^+_{(m-1)\alpha_i}(zq^{2(k-(m-1))})\bar{x}^+_{(k+1)\alpha_i}(z). \tag{2m}$$

U petom poglavlju ćemo definirati skup $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ za dominantnu integralnu težinu Λ oblika (1), dokazati da je skup $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$ linearno nezavisan i zatim, koristeći vezu između skupova $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ i $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$ te rezultate iz četvrtog poglavlja, da je on baza glavnog potprostora $W(\Lambda)$. Dokaz linearne nezavisnosti provodimo slično kao u [18] i u njemu koristimo projekcije glavnog potprostora $W(\Lambda)$ i operatore $\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Operatore slične operatorima $\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z)$, kada je $i = 1$ ili $i = n$, promatrao je već Y. Koyama u [32]. Ovdje ćemo spomenute operatore definirati za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ i to tako da vrijedi

$$[x^+_{\alpha_j}(z_1), \mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z_2)] = 0$$

za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Naime, gornja relacija komutativnosti će se pokazati kao dovoljan uvjet da bi se ti operatori mogli iskoristiti u dokazu linearne nezavisnosti. Valja napomenuti kako se dokaz linearne nezavisnosti, koji ćemo mi ovdje provesti za skup $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$, ne bi mogao analogno provesti i za skup $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$ iako je i on, kao što ćemo na kraju i vidjeti, linearno nezavisan.

U šestom poglavlju vidjet ćemo da se kvazičestice tipa 1, tj. pripadni verteks-operatori, mogu na prirodan način definirati u okviru teorije kvantnih verteks-algebri, koju je razvio H.-S. Li u [36] i [37]. Za uređen par $(a(z), b(z))$ redova iz $\mathrm{Hom}(V, V((z)))$, gdje je V vektorski prostor, za koje postoji polinom p takav da je

$$p(z_1, z_2)a(z_1)b(z_2) \in \mathrm{Hom}(V, V((z_1, z_2))),$$

iskazat ćemo definiciju operatora

$$Y^{(\alpha)}_{\mathcal{E}}(a(z), z_0)b(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (a(z)_{(\alpha,l)}b(z))z_0^{-l-1} \in (\mathrm{End}\, V)[[z_0^{\pm 1}, z^{\pm 1}]].$$

Zatim ćemo dokazati da je za svaki $m \in \mathbb{N}$ i za sve $i = 1, 2, \ldots, n$

$$x^+_{(m+1)\alpha_i}(z) = \left(\prod_{r=1}^{m} \prod_{s=r+1}^{m+1} \frac{1}{1 - q^{2(s-r)+2}} \right)$$
$$\cdot\, x^+_{\alpha_i}(z)_{-1} \Big(\ldots \big(x^+_{\alpha_i}(zq^{2(m-2)})_{-1} (x^+_{\alpha_i}(zq^{2(m-1)})_{-1} x^+_{\alpha_i}(zq^{2m})) \big) \ldots \Big).$$

Gornjom relacijom možemo proširiti pojam kvazičestice tipa 1 na sve restringirane $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-module.

Poglavlje 1

Kvantna afina algebra $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$

U ovom prvom, uvodnom poglavlju definirat ćemo kvantnu afinu algebru $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ i zatim navesti neke osnovne rezultate vezane uz njenu strukturu. Nakon klasične definicije kvantne grupe preko Chevalleyjevih generatora navest ćemo i onu drugu, Drinfeldovu. U ostatku rada ćemo uglavnom koristiti Drinfeldovu realizaciju te će svi glavni rezultati ovog rada biti iskazani u terminima Drinfeldovih generatora.

U drugoj točki uvest ćemo dvije različite strukture Hopfove algebre. Pritom će nas najviše zanimati formula za koprodukt Δ jer ćemo u kasnijim poglavljima često raditi s tenzorskim produktima modula kvantne grupe. Upravo će se zbog toga druga struktura pokazati praktičnijom jer će nam omogućavati jednostavniji rad s verteks-operatorima.

Većina tvrdnji iz ovoga poglavlja vrijedi za proizvoljnu Kac-Moodyjevu Liejevu algebru, no kako su ionako svi glavni rezultati ovog rada dokazani za slučaj kada je $\hat{\mathfrak{g}}$ afina Liejeva algebra tipa $A_n^{(1)}$, pretpostavljat ćemo od samog početka da je $\hat{\mathfrak{g}}$ afina Liejeva algebra.

1.1 Kvantna afina algebra $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$

Točku započinjemo ponavljanjem nekih osnovnih pojmova i činjenica iz teorije afinih Liejevih algebri, koji se mogu pronaći u knjizi [31].

Neka je $\hat{A} = (a_{ij})_{i,j=0}^n$ generalizirana Cartanova matrica afinog tipa i neka je

$$S = \operatorname{diag}(s_0, s_1, \ldots, s_n)$$

dijagonalna matrica takva da je matrica $S\hat{A}$ simetrična. Matricu S ćemo fiksirati zahtjevom da su svi njeni elementi s_i za $i = 0, 1, \ldots, n$ relativno prosti prirodni brojevi.

Neka je $\hat{\mathfrak{h}}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$ s bazom $\{\alpha_0^\vee, \alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee, d\}$. Označimo sa α_i za $i = 0, 1, \ldots, n$ linearne funkcionale iz $\hat{\mathfrak{h}}^*$ takve da vrijedi

$$\alpha_i(\alpha_j^\vee) = a_{ji}, \quad \alpha_i(d) = \delta_{i0} \quad \text{za sve } i, j = 0, 1 \ldots, n.$$

Definiramo skup korijena $\hat{\Pi}$ i skup kokorijena $\hat{\Pi}^\vee$ s

$$\hat{\Pi} := \{\alpha_i \,|\, i = 0, 1, \ldots, n\} \qquad \text{i} \qquad \hat{\Pi}^\vee := \{\alpha_i^\vee \,|\, i = 0, 1, \ldots, n\}\,.$$

Tada uređena trojka $(\hat{\mathfrak{h}}, \hat{\Pi}, \hat{\Pi}^\vee)$ čini realizaciju matrice $\hat{A}$. Afinu Kac-Moodyjevu algebru pridruženu matrici $\hat{A}$ označavat ćemo sa $\hat{\mathfrak{g}}$.

Slobodnu Abelovu grupu $\hat{Q}$ ranga $n+1$,

$$\hat{Q} := \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i,$$

generiranu svim α_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, zovemo korijenskom rešetkom. Uvedimo i oznaku

$$\hat{Q}^+ := \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i.$$

Označimo sa Λ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, jedinstvene elemente iz $\hat{\mathfrak{h}}^*$ koji zadovoljavaju

$$\Lambda_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}, \quad \Lambda_i(d) = 0 \quad \text{za sve } i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Centar Liejeve algebre $\hat{\mathfrak{g}}$ je jednodimenzionalan i generiran elementom

$$c = c_0\alpha_0^\vee + c_1\alpha_1^\vee + \ldots + c_n\alpha_n^\vee \in \hat{\mathfrak{h}}.$$

Nadalje, imaginarni korijeni Liejeve algebre $\hat{\mathfrak{g}}$ su cjelobrojni višekratnici od

$$\delta = d_0\alpha_0 + d_1\alpha_1 + \ldots + d_n\alpha_n \in \hat{\mathfrak{h}}^*.$$

Pritom su nenegativni cijeli brojevi $c_0, c_1, \ldots, c_n$ i $d_0, d_1, \ldots, d_n$, u ovisnosti o tipu Liejeve algebre $\hat{\mathfrak{g}}$, dani u [31]. Za tip $A_n^{(1)}$, koji ćemo promatrati u ovom radu, svi brojevi c_i i d_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, jednaki su 1 pa je

$$c = \alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \ldots + \alpha_n^\vee \qquad \text{i} \qquad \delta = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Označimo sa $\hat{P}$ pripadnu težinsku rešetku, tj. slobodnu Abelovu grupu ranga $n+2$ generiranu svim Λ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, i $\frac{1}{d_0}\delta$. Elemente od $\hat{P}$ ćemo zvati težinama, a elemente od

$$\hat{P}^+ := \left\{\Lambda \in \hat{P} \,|\, \Lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ za sve } i = 0, 1, \ldots, n\right\}$$

dominantnim integralnim težinama. Kako bismo naglasili kada radimo sa integralnim težinama iz $\hat{P}$ koje su dominantne, u radu ćemo uvijek takve težine označavati velikim slovom Λ (uz, ukoliko je potrebno, odgovarajući indeks). Nivo dominantne integralne težine $\Lambda \in \hat{P}^+$ definiramo kao nenegativan cijeli broj $\Lambda(c)$. Označimo sa $\hat{P}^\vee$ slobodnu Abelovu grupu ranga $n+2$ i s bazom $\alpha_0^\vee, \alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee$ i d.

Na prostoru $\hat{\mathfrak{h}}^*$ postoji simetrična invarijantna bilinearna forma $(\cdot,\cdot)\colon \hat{\mathfrak{h}}^* \times \hat{\mathfrak{h}}^* \to \mathbb{C}$ koja zadovoljava

$$(\alpha_i, \alpha_j) = s_i a_{ij}, \quad (\delta, \alpha_i) = (\delta, \delta) = 0 \quad \text{za sve } i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Nezakrenutu afinu Liejevu algebru $\hat{\mathfrak{g}}$ možemo realizirati na vektorskom prostoru

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

uz komutator

$$\begin{aligned}
[x \otimes t^m, y \otimes t^k] &= [x, y] \otimes t^{m+k} + m\delta_{m+k\,0}(x, y)c; \\
[d, x \otimes t^m] &= mx \otimes t^m; \\
[c, u] &= 0
\end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathfrak{g}$, $m, k \in \mathbb{Z}$ i $u \in \hat{\mathfrak{g}}$. Pritom je $\mathfrak{g} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ prosta Liejeva algebra, pridružena Cartanovoj matrici $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, s Cartanovom podalgebrom $\mathfrak{h} \subset \hat{\mathfrak{h}}$, koja je razapeta vektorima $\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee$. Označimo sa Q pripadnu korijensku rešetku

$$Q := \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n \subset \mathfrak{h}^*,$$

sa P težinsku rešetku od $\mathfrak{g}$,

$$P := \mathbb{Z}\lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\lambda_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\lambda_n \subset \mathfrak{h}^*.$$

Jasno, generatori korijenske rešetke Q su restrikcije odgovarajućih elemenata skupa $\hat{\Pi}$ na podalgebru $\mathfrak{h}$, a generatori težinske rešetke su elementi prostora $\mathfrak{h}^*$ odabrani tako da vrijedi

$$\lambda_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij} \quad \text{za sve } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Sada ćemo, slijedeći redoslijed izlaganja iz knjige [19], uvesti pojam kvantne afine algebre.

Za cijeli broj m, prirodan broj k i nepoznanicu q definiramo q-brojeve,

$$[m]_q := \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}$$

i q-faktorijele,

$$[0]_q! := 1, \quad [k]_q! := [k]_q[k-1]_q \cdots [1]_q.$$

Za nenegativne cijele brojeve $m \geq k \geq 0$ definiramo q-binomne koeficijente,

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[m]_q!}{[k]_q![m-k]_q!}.$$

Svi su oni očito elementi polja $\mathbb{C}(q)$ međutim, može se dokazati da se oni nalaze čak i u prstenu $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$.

Definicija 1.1 Kvantna afina algebra $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ je asocijativna algebra sa jedinicom 1 nad poljem $\mathbb{C}(q^{1/2})$ generirana elementima e_i, f_i za $i = 0, 1, \ldots, n$ i q^h za $h \in \hat{P}^\vee$ i relacijama

$$
\begin{aligned}
&q^0 = 1, \quad q^h q^{h'} = q^{h+h'} \quad \text{za sve } h, h' \in \hat{P}^\vee;\\
&q^h e_i q^{-h} = q^{\alpha_i(h)} e_i \quad \text{za sve } h \in \hat{P}^\vee, i = 0, 1, \ldots, n;\\
&q^h f_i q^{-h} = q^{-\alpha_i(h)} f_i \quad \text{za sve } h \in \hat{P}^\vee, i = 0, 1, \ldots, n;\\
&e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \quad \text{za sve } i, j = 0, 1, \ldots, n;\\
&\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} e_i^{1-a_{ij}-k} e_j e_i^k = 0 \quad \text{za sve } i, j = 0, 1, \ldots, n, i \neq j;\\
&\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} f_i^{1-a_{ij}-k} f_j f_i^k = 0 \quad \text{za sve } i, j = 0, 1, \ldots, n, i \neq j.
\end{aligned}
$$

Pritom je

$$q_i := q^{s_i}, \quad K_i := q^{s_i \alpha_i^\vee} \quad \text{za sve } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Kako su za kvantnu afinu algebru $U_q(A_n^{(1)})$ svi brojevi s_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, jednaki 1, vrijedi $q_i = q$ za sve $i = 0, 1, \ldots, n$ pa ćemo stoga u kasnijim poglavljima često izostavljati indekse kod q-brojeva, q-faktorijela i q-binomnih koeficijenata i pisati kraće

$$[m], \quad [m]!, \quad \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}.$$

Neka su U_q^+ (U_q^-) podalgebre algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ generirane svim e_i (f_i) za $i = 0, 1, \ldots, n$. Neka je U_q^0 podalgebra algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ generirana svim q^h za $h \in \hat{P}^\vee$. Sljedeći teorem se često naziva i trokutastom dekompozicijom od $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

Teorem 1.2 *Postoji izomorfizam vektorskih prostora*

$$U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \cong U_q^- \otimes U_q^0 \otimes U_q^+.$$

Izomorfizam iz gornjeg teorema se realizira kao množenje. Dokaz teorema se može vidjeti u [19].

Sada ćemo iskazati Drinfeldovu realizaciju kvantne afine algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ za nezakrenute Liejeve algebre $\hat{\mathfrak{g}}$.

Definicija 1.3 Algebra $U_q(\hat{\mathfrak{g}})_0$ je asocijativna algebra s jedinicom 1 nad poljem $\mathbb{C}(q^{1/2})$ generirana elementima $x_{\alpha_i}^{\pm}(k)$, $a_i(l)$, $K_i^{\pm 1}$, $\gamma^{\pm 1/2}$ i $q^{\pm d}$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $l \neq 0$ i relacijama

$$
\begin{aligned}
&[\gamma^{\pm 1/2}, u] = 0 \text{ za sve } u \in U_q(\hat{\mathfrak{g}})_0;\\
&K_i K_j = K_j K_i, \quad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1;\\
&[a_i(k), a_j(l)] = \delta_{k+l\,0} \frac{[a_{ij}k]_{q_i}}{k} \frac{\gamma^k - \gamma^{-k}}{q_j - q_j^{-1}};\\
&[a_i(k), K_j^{\pm 1}] = [q^{\pm d}, K_j^{\pm 1}] = 0;\\
&q^d x^{\pm}_{\alpha_i}(k) q^{-d} = q^k x^{\pm}_{\alpha_i}(k), \quad q^d a_i(l) q^{-d} = q^k a_i(l);\\
&K_i x^{\pm}_{\alpha_j}(k) K_i^{-1} = q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)} x^{\pm}_{\alpha_j}(k);\\
&[a_i(k), x^{\pm}_{\alpha_j}(l)] = \pm \frac{[a_{ij}k]_{q_i}}{k} \gamma^{\mp |k|/2} x^{\pm}_{\alpha_j}(k+l);\\
&x^{\pm}_{\alpha_i}(k+1) x^{\pm}_{\alpha_j}(l) - q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)} x^{\pm}_{\alpha_j}(l) x^{\pm}_{\alpha_i}(k+1)\\
&\quad = q^{\pm(\alpha_i,\alpha_j)} x^{\pm}_{\alpha_i}(k) x^{\pm}_{\alpha_j}(l+1) - x^{\pm}_{\alpha_j}(l+1) x^{\pm}_{\alpha_i}(k);\\
&[x^{+}_{\alpha_i}(k), x^{-}_{\alpha_j}(l)] = \frac{\delta_{ij}}{q_i - q_i^{-1}} \left(\gamma^{\frac{k-l}{2}} \psi_i(k+l) - \gamma^{\frac{l-k}{2}} \phi_i(k+l) \right),
\end{aligned}
$$

gdje su elementi $\psi_i(m)$ i $\phi_i(m)$ za $m \in \mathbb{Z}$ dani formulama

$$
\phi_i(z) := \sum_{r=0}^{\infty} \phi_i(-r) z^r := K_i^{-1} \exp\left(-(q_i - q_i^{-1}) \sum_{r=1}^{\infty} a_i(-r) z^r \right),
$$

$$
\psi_i(z) := \sum_{r=0}^{\infty} \psi_i(r) z^{-r} := K_i \exp\left((q_i - q_i^{-1}) \sum_{r=1}^{\infty} a_i(r) z^{-r} \right);
$$

$$
\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_{q_i} x^{\pm}_{\alpha_i}(l_{\sigma_1}) \cdots x^{\pm}_{\alpha_i}(l_{\sigma_s}) x^{\pm}_{\alpha_j}(k) x^{\pm}_{\alpha_i}(l_{\sigma_{s+1}}) \cdots x^{\pm}_{\alpha_i}(l_{\sigma_m}) = 0
$$

za $i \neq j$ i za sve $l_1, l_2, \ldots, l_m \in \mathbb{Z}$, gdje je $m = 1 - a_{ij}$.

Ako nije drugačije navedeno, sve gornje relacije vrijede za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$ i $k, l \in \mathbb{Z}$ za koje su pripadni generatori definirani. Pritom je

$$
\psi_i(m) = \phi_i(-m) = 0 \quad \text{za } m < 0.
$$

Prva suma u posljednjoj relaciji označava sumaciju po svim permutacijama σ skupa $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Ponekad se centralni element γ označava sa q^c. Tu oznaku opravdava činjenica da se modul nivoa c definira kao modul na kojem γ djeluje kao skalar q^c.

Za element $x \in U_q(\hat{\mathfrak{g}})_0$ ćemo reći da je stupnja $k \in \mathbb{Z}$ ako vrijedi

$$
q^d x q^{-d} = q^k x.
$$

Iz relacija u definiciji 1.3 vidimo da su, npr. svi elementi $x^{\pm}_{\alpha_i}(k) \in U_q(\hat{\mathfrak{g}})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, stupnja k.

Sljedeći teorem je dokazan u [9].

Teorem 1.4 *Za nezakrenutu afinu Liejevu algebru $\hat{\mathfrak{g}}$ asocijativne algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ i $U_q(\hat{\mathfrak{g}})_0$ s jedinicom 1 nad poljem $\mathbb{C}(q^{1/2})$ su izomorfne.*

Gornji rezultat, poznat pod nazivom Drinfeldova realizacija, će nam biti vrlo važan u ostatku ovog rada jer ćemo čitavo vrijeme koristiti upravo definiciju 1.3. Kao što možemo vidjeti u [24], postoji izomorfizam $U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to U_q(\hat{\mathfrak{g}})_0$ koji na sljedeći način djeluje na generatorima iz definicije 1.1:

$$e_i \mapsto x^+_{\alpha_i}(0), \quad f_i \mapsto x^-_{\alpha_i}(0), \quad q^{\alpha_i^\vee} \mapsto K_i, \quad q^d \mapsto q^d \quad \text{za sve } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Formule za slike generatora e_0 i f_0 su nešto kompliciranije pa ih stoga izostavljamo. One se mogu pronaći u članku [24].

Neka je V vektorski prostor. S $V[[z_1, \ldots, z_m]]$ ćemo označavati prostor svih Taylorovih redova u varijablama $z_1, z_2, \ldots, z_m$ i s koeficijentima iz V, a sa $V((z_1, \ldots, z_m))$ prostor svih odozdo omeđenih Laurentovih redova u varijablama $z_1, z_2, \ldots, z_m$ i s koeficijentima iz V, tj.

$$V((z_1, \ldots, z_m)) = V[[z_1, \ldots, z_m]][z_1^{-1}, \ldots, z_m^{-1}].$$

Za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ možemo promatrati formalne Laurentove redove s koeficijentima iz $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$:

$$x^{\pm}_{\alpha_i}(z) := \sum_{r \in \mathbb{Z}} x^{\pm}_{\alpha_i}(r) z^{-r-1} \in U_q(\hat{\mathfrak{g}})[[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_m^{\pm 1}]]. \tag{1.1}$$

Primijetimo kako se tada neke od relacija iz definicije 1.3 mogu zapisati i pomoću redova, npr. za fiksne $i, j = 1, 2, \ldots, n$, jednakosti

$$\begin{aligned} &x^{\pm}_{\alpha_i}(k+1) x^{\pm}_{\alpha_j}(l) - q^{\pm(\alpha_i, \alpha_j)} x^{\pm}_{\alpha_j}(l) x^{\pm}_{\alpha_i}(k+1) \\ &\quad = q^{\pm(\alpha_i, \alpha_j)} x^{\pm}_{\alpha_i}(k) x^{\pm}_{\alpha_j}(l+1) - x^{\pm}_{\alpha_j}(l+1) x^{\pm}_{\alpha_i}(k), \end{aligned}$$

gdje su $k, l, \in \mathbb{Z}$, ekvivalentne su jednakosti

$$(z_1 - q^{\pm(\alpha_i, \alpha_j)} z_2) x^{\pm}_{\alpha_i}(z_1) x^{\pm}_{\alpha_j}(z_2) = (q^{\pm(\alpha_i, \alpha_j)} z_1 - z_2) x^{\pm}_{\alpha_j}(z_2) x^{\pm}_{\alpha_i}(z_1). \tag{1.2}$$

Specijalno, za $i = j$ i $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$, jednakost (1.2) glasi

$$(z_1 - q^{\pm 2} z_2) x^{\pm}_{\alpha_i}(z_1) x^{\pm}_{\alpha_i}(z_2) = (q^{\pm 2} z_1 - z_2) x^{\pm}_{\alpha_i}(z_2) x^{\pm}_{\alpha_i}(z_1). \tag{1.3}$$

Neka je V modul kvantne afine algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Pisat ćemo $x^{\pm}_{\alpha_i}(r)$ za linearan operator na V koji odgovara djelovanju elementa $x^{\pm}_{\alpha_i}(r) \in U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ na V. Za djelovanje izraza (1.1) na V pisat ćemo opet

$$x^{\pm}_{\alpha_i}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} x^{\pm}_{\alpha_i}(r) z^{-r-1} \in (\operatorname{End} V)[[z, z^{-1}]]. \tag{1.4}$$

Iako ovdje koristimo jednaku oznaku za dvije različite stvari, iz konteksta će uvijek biti jasno na što se točno misli. Takav način označavanja koristit ćemo i za preostale redove s kojima smo se dosad susreli ($\phi_i(z)$, $\psi_i(z)$, $a_i(z)$ za $i = 1, 2, \ldots, n$) i sve njih ćemo, u duhu članka [6], zvati verteks-operatorima. U slučaju da je za svaki vektor v modula V

$$x^{\pm}_{\alpha_i}(z)v = \sum_{r\in\mathbb{Z}} x^{\pm}_{\alpha_i}(r)vz^{-r-1} \in V((z)),$$

tj.

$$x^{\pm}_{\alpha_i}(r)v = 0 \qquad \text{za dovoljno velike } r,$$

reći ćemo da verteks-operator $x^{\pm}_{\alpha_i}(z)$ djeluje restringirano na V. Naravno, sasvim analogno možemo definirati restringirano djelovanje i za proizvoljan red $a(z) \in (\operatorname{End} V)[[z^{\pm 1}]]$.

Za $i = 1, 2, \ldots, n$ sa $U_q(\hat{\mathfrak{n}}^{\pm}_i)$ označimo podalgebru algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ generiranu svim $x^{\pm}_{\alpha_i}(m)$ za $m \in \mathbb{Z}$. Sa $U_q(\hat{\mathfrak{n}}_{\pm})$ označimo podalgebru od $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ generiranu svim $x^{\pm}_{\alpha_i}(m)$ za $m \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Sa $U_q(\hat{\mathfrak{h}})_0$ označimo podalgebru od $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ generiranu svim $a_i(l)$, $K_i^{\pm 1}$, $\gamma^{\pm 1/2}$ i $q^{\pm d}$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \neq 0$. Tada vrijedi dekompozicija dokazana u [2]:

Teorem 1.5 *Postoji izomorfizam vektorskih prostora*

$$U_q(\hat{\mathfrak{g}}) \cong U_q(\hat{\mathfrak{n}}_-) \otimes U_q(\hat{\mathfrak{h}})_0 \otimes U_q(\hat{\mathfrak{n}}_+).$$

1.2 Hopfova algebra $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$

Poznato je da su kvantizirane omotačke algebre Hopfove algebre. Sljedeći teorem daje nam jedan način na koji se može definirati Hopfova struktura. On vrijedi za proizvoljnu afinu Liejevu algebru $\hat{\mathfrak{g}}$. Njegov iskaz i dokaz se mogu pronaći u [19].

Teorem 1.6 *Na algebri $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ postoji struktura Hopfove algebre takva da vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\Delta(q^h) = q^h \otimes q^h;\\
&\Delta(e_i) = e_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes e_i, \quad \Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + K_i \otimes f_i;\\
&\varepsilon(q^h) = 1, \quad \varepsilon(e_i) = \varepsilon(f_i) = 0;\\
&S(q^h) = q^{-h}, \quad S(e_i) = -e_iK_i, \quad S(f_i) = -K_i^{-1}f_i
\end{aligned}$$

za sve $h \in \hat{P}^\vee$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Kako ćemo se u ovom radu pretežno koristiti Drinfeldovom realizacijom, htjeli bismo zapisati kako gornja preslikavanja Δ, ε i S djeluju na verteks-operatorima. Nažalost, rezultat toga bila bi vrlo komplicirana formula koja, uz samo ove verteks-operatore koje imamo, ne bi imala zatvorenu formu. Upravo zbog toga, u ovom radu ćemo koristiti sljedeću strukturu Hopfove algebre koju je definirao Drinfeld:

Teorem 1.7 *Na algebri $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ postoji struktura Hopfove algebre za koju vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&\Delta(q^{c/2}) = q^{c/2} \otimes q^{c/2};\\
&\Delta(x^+_{\alpha_i}(z)) = x^+_{\alpha_i}(z) \otimes 1 + \phi_i(zq^{c_1/2}) \otimes x^+_{\alpha_i}(zq^{c_1});\\
&\Delta(x^-_{\alpha_i}(z)) = 1 \otimes x^-_{\alpha_i}(z) + x^-_{\alpha_i}(zq^{c_2}) \otimes \psi_i(zq^{c_2/2});\\
&\Delta(\phi_i(z)) = \phi_i(zq^{-c_2/2}) \otimes \phi_i(zq^{c_1/2});\\
&\Delta(\psi_i(z)) = \psi_i(zq^{c_2/2}) \otimes \psi_i(zq^{-c_1/2});\\
&\varepsilon(q^c) = 1, \quad \varepsilon(x^\pm_{\alpha_i}(z)) = 0, \quad \varepsilon(\phi_i(z)) = \varepsilon(\psi_i(z)) = 1;\\
&S(q^c) = q^{-c};\\
&S(x^+_{\alpha_i}(z)) = -\phi_i(zq^{-c/2})^{-1} x^+_{\alpha_i}(zq^{-c});\\
&S(x^-_{\alpha_i}(z)) = -x^-_{\alpha_i}(zq^{-c})\psi_i(zq^{-c/2})^{-1};\\
&S(\phi_i(z)) = \phi_i(z)^{-1}, \quad S(\psi_i(z)) = \psi_i(z)^{-1}
\end{aligned}
$$

za sve $i = 1, 2, \ldots, n$. Pritom je s q^{c_1} označeno djelovanje centralnog elementa q^c na prvom, a s q^{c_2} djelovanje na drugom faktoru tenzorskog produkta.

Raspišimo formulu za $\Delta(x^+_{\alpha_i}(z))$ iz gornjeg teorema:

$$
\begin{aligned}
\Delta(x^+_{\alpha_i}(z)) &= x^+_{\alpha_i}(z) \otimes 1 + \phi_i(zq^{c_1/2}) \otimes x^+_{\alpha_i}(zq^{c_1})\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} (x^+_{\alpha_i}(s) \otimes 1) z^{-s-1} + \left(\sum_{r\geq 0} \phi_i(-r) q^{rc_1/2} z^r\right) \otimes \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}} x^+_{\alpha_i}(s) q^{-(s+1)c_1/2} z^{-s-1}\right)\\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}} (x^+_{\alpha_i}(s) \otimes 1) z^{-s-1} + \sum_{r\geq 0}\sum_{s\in\mathbb{Z}} (q^{(r-s-1)c/2}\phi_i(-r) \otimes x^+_{\alpha_i}(s)) z^{r-s-1}.
\end{aligned}
$$

Iz gornjeg računa je jasno da definicija koprodukta Δ iz prethodnog teorema, da bi bila dobra, zahtijeva proširenje algebre $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ do nekog njenog upotpunjenja. Međutim, koprodukt će nam u ovom radu biti potreban samo za konstrukciju tenzorskih produkata određenih $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-modula. Svi verteks-operatori, koji se javljaju kao argumenti koprodukta u teoremu 1.7, djelovat će restringirano na svim modulima, koje ćemo promatrati u ovom radu, što će nam osiguravati dobru definiranost gornjih izraza na svim vektorima tih modula. Teorem 1.7 je preuzet iz [8]. Eksplicitni dokaz za algebru $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ dan je u [7].

Poglavlje 2

Reprezentacije kvantne afine algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$

U ovom poglavlju bavit ćemo se reprezentacijama kvantnih afinih algebri. Nakon prve točke, u kojoj ćemo nabrojati neke osnovne definicije i činjenice o njihovim modulima, ograničit ćemo se na algebru $U_q(A_n^{(1)})$. Za nju ćemo u drugoj točki opisati Frenkel-Jingovu realizaciju ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1. Zatim ćemo, u trećoj točki, uvesti Ding-Feiginove operatore $\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)$ i popisati velik broj relacija između verteks-operatora, koje ćemo trebati u kasnijim poglavljima.

2.1 Reprezentacije kvantne afine algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$

U ovoj točki iznosimo neke osnovne definicije i rezultate o reprezentacijama kvantne afine algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$, pritom slijedeći redoslijed izlaganja iz [19].

Za $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modul V kažemo da je težinski ako ima rastav na težinske potprostore

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \hat{P}} V_\lambda, \quad \text{gdje je} \quad V_\lambda = \left\{ v \in V \mid q^h v = q^{\lambda(h)} v \text{ za sve } h \in \hat{P}^\vee \right\}. \tag{2.1}$$

Tada sve potprostore $V_\lambda \neq 0$ iz dekompozicije (2.1) zovemo težinskim potprostorima, a vektore $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$, težinskim vektorima. Skup svih težina $\lambda \in \hat{P}$ za koje je $V_\lambda \neq 0$ označavat ćemo s $\operatorname{wt} V$ dok ćemo njegove elemente zvati težinama modula V. Za težinski $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modul V koji ima konačnodimenzionalne težinske potprostore definiramo karakter, na isti način kao i kod afinih Liejevih algebri:

$$\operatorname{ch} V := \sum_\mu \dim V_\mu \, e^\mu,$$

gdje su e^μ elementi grupovne algebre $\mathbb{C}[\hat{P}]$.

Propozicija 2.1 *Podmodul težinskog modula je težinski modul.*

Za $\lambda \in \hat{P}$ označimo s $D(\lambda)$ skup

$$D(\lambda) := \left\{ \mu \in \hat{P} \mid \mu \leq \lambda \right\}.$$

Pritom je parcijalni uređaj "$\leq$" definiran kao i kod afinih Liejevih algebri:

$$\text{definiramo da je } \mu \leq \lambda, \text{ ako je } \lambda - \mu \in \hat{Q}^+,$$

gdje je $\hat{Q}^+$ pozitivna korijenska rešetka od $\hat{\mathfrak{g}}$.

Kategorija $\mathcal{O}^q$ sastoji se od svih težinskih modula s konačnodimenzionalnim težinskim potprostorima za koje postoji konačno mnogo težina $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \hat{P}$ za koje je

$$\operatorname{wt} V \subseteq D(\lambda_1) \cup \ldots \cup D(\lambda_k).$$

Morfizmi kategorije $\mathcal{O}^q$ su upravo homomorfizmi $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modula. Kao i kod afinih Liejevih algebri, i ovdje će nam važni primjeri modula iz kategorije $\mathcal{O}^q$ biti moduli najveće težine. Za modul V kažemo da je modul najveće težine $\lambda \in \hat{P}$ ako postoji vektor $v_\lambda \in V$, $v_\lambda \neq 0$, takav da vrijedi

$$\begin{aligned}
&e_i v_\lambda = 0 \text{ za sve } i = 0, 1, \ldots, n; \\
&q^h v_\lambda = q^{\lambda(h)} v_\lambda \text{ za sve } h \in \hat{P}^\vee; \\
&V = U_q(\hat{\mathfrak{g}}) v_\lambda.
\end{aligned}$$

Tada vektor v_λ zovemo maksimalan vektor ili vektor najveće težine. Koristeći teorem 1.2 dokazuje se da se moduli V najveće težine zaista nalaze u kategoriji $\mathcal{O}^q$ te da je $\dim V_\lambda = 1$ kada je λ najveća težina.

Za $\lambda \in \hat{P}$ promatramo lijevi ideal $J(\lambda)$ u algebri $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ generiran svim elementima

$$e_i \quad \text{za} \quad i = 0, 1, \ldots, n \qquad \text{i} \qquad q^h - q^{\lambda(h)} 1 \quad \text{za} \quad h \in \hat{P}^\vee.$$

Tada kvocijent $U_q(\hat{\mathfrak{g}})/J(\lambda)$ označavamo s $M(\lambda)$. Uz lijevo množenje $M(\lambda)$ postaje $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modul kojeg onda nazivamo Vermaovim modulom. To je modul najveće težine λ s maksimalnim vektorom $1 + J(\lambda)$.

Teorem 2.2 *Neka je $\lambda \in \hat{P}$.*

(1) Svaki $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modul najveće težine λ je homomorfna slika Vermaovog modula $M(\lambda)$.

(2) Vermaov modul $M(\lambda)$ ima jedinstven maksimalan podmodul.

Druga tvrdnja prethodnog teorema omogućava nam konstrukciju ireducibilnih $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modula kao kvocijenta Vermaovog modula $M(\lambda)$ po njegovom jedinstvenom maksimalnom podmodulu. Dobiveni ireducibilni podmodul ćemo označavati s $L(\lambda)$ i zvati ireducibilni modul najveće težine λ.

Za težinski $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modul V ćemo reći da je integrabilan ako na njemu svi e_i i f_i za $i = 0, 1, \ldots, n$ djeluju lokalno nilpotentno, tj. ako za svaki vektor $v \in V$ postoji prirodan broj m takav da je za sve $i = 0, 1, \ldots, n$

$$e_i^l v = f_i^l v = 0 \quad \text{za sve } l \geq m.$$

Definiramo kategoriju $\mathcal{O}^q_{\text{int}}$ kao kategoriju svih integrabilnih modula iz $\mathcal{O}^q$. Njeni morfizmi su upravo homomorfizmi $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modula. Preciznije, kategorija $\mathcal{O}^q_{\text{int}}$ sastoji se od svih $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modula V koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

(1) Modul V je težinski i svi njegovi težinski potprostori su konačnodimenzionalni;

(2) Postoji konačno mnogo težina $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \hat{P}$ takvih da je

$$\text{wt}\, V \subseteq D(\lambda_1) \cup \ldots \cup D(\lambda_k);$$

(3) Svi elementi e_i i f_i za $i = 0, 1, \ldots, n$ djeluju lokalno nilpotentno na V.

Sljedeći teorem daje nam nužan i dovoljan uvjet da bi se ireducibilan modul najveće težine nalazio u kategoriji $\mathcal{O}^q_{\text{int}}$.

Teorem 2.3 *Ireducibilan modul $L(\Lambda)$ je integrabilan ako i samo ako je Λ dominantna integralna težina, tj. ako i samo ako je $\Lambda \in \hat{P}^+$.*

Jedno od fundamentalnih svojstava kvantnih grupa je da, grubo govoreći, struktura algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ i njenih reprezentacija teži strukturi algebre $U(\hat{\mathfrak{g}})$ i njenih reprezentacija kada se q približava 1. Radi se o rezultatu koji je prvi put dokazan u [38]. Kako bi za njegov precizni iskaz bilo potrebno mnogo prostora, u idućem teoremu ćemo samo pobrojati dvije njegove važne posljedice. Valja naglasiti kako se oznaka $L(\Lambda)$, koju smo uveli za ireducibilni $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modul najveće težine $\Lambda \in \hat{P}^+$, često koristi i kao oznaka za ireducibilni $U(\hat{\mathfrak{g}})$-modul najveće težine $\Lambda \in \hat{P}^+$.

Teorem 2.4 *(1) Karakteri ireducibilnog $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modula $L(\Lambda)$ najveće težine $\Lambda \in \hat{P}^+$ i ireducibilnog $U(\hat{\mathfrak{g}})$-modula $L(\Lambda)$ najveće težine Λ su jednaki.*

(2) Svaki ireducibilan $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modul u kategoriji $\mathcal{O}^q_{\text{int}}$ je izomorfan nekom $L(\Lambda)$ za neki $\Lambda \in \hat{P}^+$.

Ovo kratko izlaganje o teoriji reprezentacija kvantne afine algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ završavamo teoremom potpune reducibilnosti i jednom njegovom posljedicom.

Teorem 2.5 *Svaki $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modul iz kategorije $\mathcal{O}^q_{\text{int}}$ izomorfan je direktnoj sumi ireducibilnih modula $L(\Lambda)$, $\Lambda \in \hat{P}^+$.*

Korolar 2.6 *Tenzorski produkt konačnog broja $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modula iz kategorije $\mathcal{O}^q_{\mathrm{int}}$ je potpuno reducibilan.*

Označimo s Λ integralnu dominantnu težinu iz $\hat{P}^+$,

$$\Lambda = c_0\Lambda_0 + c_1\Lambda_1 + \ldots + c_n\Lambda_n, \quad c_0, c_1 \ldots, c_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Ako je $\hat{\mathfrak{g}}$ tipa $A_n^{(1)}$, onda je nivo c težine Λ jednak

$$c = c_0 + c_1 + \ldots + c_n.$$

Naravno, tada će centralni element $\gamma \in U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ djelovati na modulu $L(\Lambda)$ kao skalar q^c pa ćemo reći da je $L(\Lambda)$ modul nivoa c. Prema korolaru 2.6, ireducibilni modul $L(\Lambda)$ sadržan je u tenzorskom produktu ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1:

$$L(\Lambda) \subset L(\Lambda_0)^{\otimes c_0} \otimes L(\Lambda_1)^{\otimes c_1} \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_n)^{\otimes c_n}.$$

Pritom je njegov maksimalni vektor v_Λ jednak

$$v_\Lambda = v_{\Lambda_0}^{\otimes c_0} \otimes v_{\Lambda_1}^{\otimes c_1} \otimes \cdots \otimes v_{\Lambda_n}^{\otimes c_n}$$

i čitav modul $L(\Lambda)$ se može dobiti djelovanjem algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ na vektor v_Λ. Opisana konstrukcija ireducibilnog modula $L(\Lambda)$ kao podmodula tenzorskog produkta ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1 jedna je od važnih tehnika, karakterističnih za kvantne grupe (i pripadne Liejeve algebre), koju ćemo često koristiti u narednim poglavljima.

Koristeći strukturu Hopfove algebre iz teorema 1.7 možemo izvesti formule za djelovanje verteks-operatora $x_{\alpha_i}^+(z)$ na tenzorskom produktu c ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1. Za $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ uvedimo oznaku

$$\Delta^{(0)} := 1 \quad \text{i} \quad \Delta^{(r)} := (\underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{r-1} \otimes \Delta)\Delta^{(r-1)}. \tag{2.2}$$

Tada iz formule za koprodukt slijedi da je na tenzorskom produktu c ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1

$$\Delta^{(c-1)}(x_{\alpha_i}^+(z)) = \sum_{l=1}^{c} x_{\alpha_i}^{+(l,c)}(z), \tag{2.3}$$

gdje je

$$x_{\alpha_i}^{+(l,c)}(z) = \underbrace{\phi_i(zq^{\frac{1}{2}}) \otimes \phi_i(zq^{\frac{3}{2}}) \otimes \cdots \otimes \phi_i(zq^{l-\frac{3}{2}})}_{l-1} \otimes x_{\alpha_i}^+(zq^{l-1}) \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{c-l}.$$

Formulu (2.3) ćemo često koristiti pa ćemo stoga ovdje eksplicitno zapisati kako ona izgleda primijenjena na verteks-operator $x_{\alpha_i}^+(z)$ kada modul $L(\Lambda)$ nivoa $c = 4$ konstruiramo kao podmodul tenzorskog produkta četiri modula nivoa 1. Formula nam tada daje $c = 4$ sumanda

$$\begin{aligned}\Delta^{(3)}(x^+_{\alpha_i}(z)) = {} & x^+_{\alpha_i}(z) \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \\ & +\phi_i(zq^{1/2}) \otimes x^+_{\alpha_i}(zq) \otimes 1 \otimes 1 \\ & +\phi_i(zq^{1/2}) \otimes \phi_i(zq^{3/2}) \otimes x^+_{\alpha_i}(zq^2) \otimes 1 \\ & +\phi_i(zq^{1/2}) \otimes \phi_i(zq^{3/2}) \otimes \phi_i(zq^{5/2}) \otimes x^+_{\alpha_i}(zq^3).\end{aligned}$$

Ako bismo htjeli izračunati formulu za djelovanje od $\Delta^{(c-1)}$ na produktu 2 ili više verteks-operatora, samo bismo iskoristili činjenicu da je koprodukt Δ homomorfizam, tj. da je

$$\Delta(x^+_{\alpha_{i_1}}(z_1)x^+_{\alpha_{i_2}}(z_2)\cdots x^+_{\alpha_{i_m}}(z_m)) = \Delta(x^+_{\alpha_{i_1}}(z_1))\Delta(x^+_{\alpha_{i_2}}(z_2))\cdots\Delta(x^+_{\alpha_{i_m}}(z_m)) \tag{2.4}$$

i zatim svaki od m faktora izračunali kao gore. Općenito, kod tenzorskog produkta c modula, koprodukt $\Delta^{(c-1)}$ svakog verteks-operatora sastoji se od c sumanada pa će se koprodukt u (2.4), produkta m verteks-operatora, sastojati od c^m sumanada. Ovdje ćemo kao primjer zapisati jedan takav sumand kada je $m = 4$ i $c = 4$. Zbog preglednosti pišemo svaki faktor tenzorskog produkta u posebnom retku i to tako da se operatori koji odgovaraju istoj varijabli nalaze jedni ispod drugih:

$$\begin{array}{ccccc} & x^+_{\alpha_{i_1}}(z_1) & \phi_{i_2}(z_2q^{1/2}) & \phi_{i_3}(z_3q^{1/2}) & \phi_{i_4}(z_4q^{1/2}) \\ \otimes & & x^+_{\alpha_{i_2}}(z_2q) & \phi_{i_3}(z_3q^{3/2}) & x^+_{\alpha_{i_4}}(z_4q) \\ \otimes & & & \phi_{i_3}(z_3q^{5/2}) & \\ \otimes & & & x^+_{\alpha_{i_3}}(z_3q^3). & \end{array} \tag{2.5}$$

U formuli za koprodukt ova četiri operatora, koji djeluju na tenzorskom produktu četiri modula nivoa 1, imali bismo točno $c^m = 4^4 = 256$ sumanada.

2.2 Frenkel-Jingova realizacija

Definiramo kvantnu Heisenbergovu algebru $U_q(\hat{\mathfrak{h}})$ nivoa $c \in \mathbb{N}$ kao podalgebru algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ generiranu elementima $a_i(k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i centralnim elementom $\gamma^{\pm 1} = q^{\pm c}$. U njoj vrijede relacije

$$[a_i(k), a_j(l)] = \delta_{k+l\,0}\frac{[a_{ij}k]_{q_i}}{k}\frac{\gamma^k - \gamma^{-k}}{q_j - q_j^{-1}}$$

za $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Kada je $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ možemo izostaviti indekse i pisati

$$[a_i(k), a_j(l)] = \delta_{k+l\,0}\frac{[a_{ij}k]}{k}\frac{\gamma^k - \gamma^{-k}}{q - q^{-1}} \tag{2.6}$$

za $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Označimo s $U_q(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ podalgebru od $U_q(\hat{\mathfrak{h}})$ generiranu svim $a_i(-k)$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Neka je V $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modul nivoa c iz kategorije $\mathcal{O}^q_{\text{int}}$. Jasno je da V na prirodan način postaje i $U_q(\hat{\mathfrak{h}})$-modul. Definiramo na V:

$$E^{\pm}_{-}(a_i, z) := \exp\left(\mp \sum_{r \geq 1} \frac{q^{\mp cr/2}}{[cr]} a_i(-r) z^r \right);$$
$$E^{\pm}_{+}(a_i, z) := \exp\left(\pm \sum_{r \geq 1} \frac{q^{\mp cr/2}}{[cr]} a_i(r) z^{-r} \right).$$

U gornjim formulama smo umjesto γ pisali q^c jer na modulu nivoa c element γ djeluje upravo kao množenje skalarom q^c. Primijetimo kako su oba operatora dobro definirana jer indeks sumacije r (u obje sume) kreće od 1.

Heisenbergova algebra $U_q(\hat{\mathfrak{h}})$ ima prirodnu realizaciju na $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$, simetričnoj algebri generiranoj elementima $a_i(-k)$ za $k \in \mathbb{N}$ i $i = 1, 2, \ldots, n$. Njeni generatori djeluju na $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} q^{\pm c} &\ \ldots\ \text{skalarno množenje s } q^{\pm c}; \\ a_i(k) &\ \ldots\ \sum_{j=1}^{n} \frac{[a_{ij}k]_{q_i}}{k} \frac{q^{kc} - q^{-kc}}{q_j - q_j^{-1}} \frac{\partial}{\partial a_j(-k)}; \\ a_i(-k) &\ \ldots\ \text{operator množenja s } a_i(-k), \end{aligned}$$

gdje je $i = 1, 2, \ldots, n$, $k \in \mathbb{N}$. Dobiveni ireducibilan $U_q(\hat{\mathfrak{h}})$-modul ćemo označavati s $K(c)$.

Odsada promatramo kvantnu afinu algebru $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$, gdje je Liejeva algebra $\hat{g}$ tipa $A_n^{(1)}$. Iskazat ćemo Frenkel-Jingovu realizaciju ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1 iz članka [16]. Prvo definiramo zakrenutu grupovnu algebru $\mathbb{C}\{P\}$ težinske rešetke P proste Liejeve algebre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$. Označimo s $\mathbb{C}\{P\}$ asocijativnu algebru zadanu generatorima $e^{\alpha_2}, e^{\alpha_3}, \ldots e^{\alpha_n}$ i e^{λ_n} i relacijama

$$e^{\alpha_i} e^{\alpha_j} = (-1)^{(\alpha_i, \alpha_j)} e^{\alpha_j} e^{\alpha_i};$$
$$e^{\alpha_i} e^{\lambda_n} = (-1)^{\delta_{in}} e^{\lambda_n} e^{\alpha_i}$$

za sve $i, j = 2, 3, \ldots, n$. Za $\alpha = m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 + \ldots + m_n\alpha_n + m_{n+1}\lambda_n \in P$ ćemo element $e^{m_2\alpha_2} e^{m_3\alpha_3} \cdots e^{m_n\alpha_n} e^{m_{n+1}\lambda_n} \in \mathbb{C}\{P\}$ zapisivati kraće kao e^{α}. Uz opisanu notaciju definiramo sljedeće elemente algebre $\mathbb{C}\{P\}$:

$$e^{\alpha_1} := e^{-2\alpha_2} e^{-3\alpha_3} \cdots e^{-n\alpha_n} e^{(n+1)\lambda_n};$$
$$e^{\lambda_i} := e^{-\alpha_{i+1}} e^{-2\alpha_{i+2}} \cdots e^{-(n-i)\alpha_n} e^{(n+1)\lambda_n}$$

za $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Iz definicionih relacija algebre $\mathbb{C}\{P\}$ mogu se dokazati sljedeće jednakosti:

Propozicija 2.7 *Za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi*

$$\begin{aligned} e^{\alpha_i} e^{\alpha_j} &= (-1)^{(\alpha_i, \alpha_j)} e^{\alpha_j} e^{\alpha_i}; \\ e^{\alpha_1} e^{\lambda_n} &= (-1)^n e^{\lambda_n} e^{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Za $\mu \in P$ definiramo djelovanje od z^μ na prostoru $\mathbb{C}\{P\}$ tako da za svaki $e^\lambda \in \mathbb{C}\{P\}$ vrijedi

$$z^\mu e^\lambda = z^{(\mu, \lambda)} e^\lambda$$

i zatim ga proširimo po linearnosti. Operator lijevog množenja s e^μ na prostoru $\mathbb{C}\{P\}$ označavat ćemo s e^μ.

Označimo s $\mathbb{C}\{Q\}$ podalgebru od $\mathbb{C}\{P\}$ generiranu elementima e^{α_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Za $i = 0, 1, \ldots, n$ definiramo vektorski prostor

$$\mathbb{C}\{Q\} e^{\lambda_i} := \left\{ a e^{\lambda_i} \mid a \in \mathbb{C}\{Q\} \right\} \subset \mathbb{C}\{P\}.$$

Navodimo rezultat iz članka [16]:

Teorem 2.8 *Za svaki $i = 0, 1, \ldots, n$ na prostoru*

$$K(1) \otimes \mathbb{C}\{Q\} e^{\lambda_i}$$

postoji struktura $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-modula takva da je

$$\begin{aligned} x^\pm_{\alpha_j}(z) &= E^\pm_-(-a_j, z) E^\pm_+(-a_j, z) \otimes e^{\pm\alpha_j} z^{\pm\alpha_j} \\ &= \exp\left(\pm \sum_{r \geq 1} \frac{q^{\mp r/2}}{[r]} a_j(-r) z^r \right) \exp\left(\mp \sum_{r \geq 1} \frac{q^{\mp r/2}}{[r]} a_j(r) z^{-r} \right) \otimes e^{\pm\alpha_j} z^{\pm\alpha_j} \qquad (2.7) \end{aligned}$$

za sve $j = 1, 2, \ldots, n$. Dobiveni $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-modul izomorfan je ireducibilnom modulu $L(\Lambda_i)$.

Generatori $K^\pm_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, djeluju na $K(1) \otimes \mathbb{C}\{Q\} e^{\lambda_i}$ kao operatori $q^{\pm\alpha_j}$ pa na $K(1) \otimes \mathbb{C}\{Q\} e^{\lambda_i}$ imamo

$$\phi_j(z) = \exp\left(-(q - q^{-1}) \sum_{r=1}^{\infty} a_j(-r) z^r \right) \otimes q^{-\alpha_j}; \qquad (2.8)$$

$$\psi_j(z) = \exp\left((q - q^{-1}) \sum_{r=1}^{\infty} a_j(r) z^{-r} \right) \otimes q^{\alpha_j}. \qquad (2.9)$$

Primijetimo kako svi verteks-operatori, $x^\pm_{\alpha_i}(z)$, $\phi_i(z)$, $\psi_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, djeluju restringirano na ireducibilnim modulima najveće težine, tj. kako primijenjeni na proizvoljan vektor v takvog modula daju red s konačno mnogo negativnih potencija varijable z. Realizaciju ireducibilnih modula iz teorema 2.8 zvat ćemo kraće Frenkel-Jingovom realizacijom.

U sljedećoj lemi su popisane neke relacije između operatora u Frenkel-Jingovoj realizaciji, koje će nam trebati kasnije.

Lema 2.9 *Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa 1 vrijedi*

$$
\begin{aligned}
x^+_{\alpha_i}(r)e^{\lambda_j} &= \varepsilon_{ij}e^{\lambda_j}x^+_{\alpha_i}(r+\delta_{ij});\\
x^+_{\alpha_i}(r)e^{\alpha_j} &= (-1)^{(\alpha_i,\alpha_j)}e^{\alpha_j}x^+_{\alpha_i}(r+2\delta_{ij}-\delta_{i\,j-1}-\delta_{i\,j+1});\\
\phi_i(s)e^{\lambda_j} &= q^{-\delta_{ij}}e^{\lambda_j}\phi_i(s);\\
\phi_i(s)e^{\alpha_j} &= q^{-2\delta_{ij}+\delta_{i\,j-1}+\delta_{i\,j+1}}e^{\alpha_j}\phi_i(s)
\end{aligned}
$$

za neki $\varepsilon_{ij} \in \{\pm 1\}$ *i za sve* $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Dokaz. Dokažimo prvu jednakost. Očito je dovoljno provjeriti kako operator e^{λ_j} komutira sa $e^{\alpha_i}z^{\alpha_i}$. Iz propozicije 2.7 slijedi da je

$$e^{\alpha_i}e^{\lambda_j} = \varepsilon_{ij}e^{\lambda_j}e^{\alpha_i}$$

za neki $\varepsilon_{ij} = \pm 1$ pa imamo

$$e^{\alpha_i}z^{\alpha_i}e^{\lambda_j} = e^{\alpha_i}e^{\lambda_j}z^{\alpha_i+\delta_{ij}} = \varepsilon_{ij}e^{\lambda_j}e^{\alpha_i}z^{\alpha_i+\delta_{ij}}.$$

Dakle, na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa 1 vrijedi

$$x^+_{\alpha_i}(z)e^{\lambda_j} = \varepsilon_{ij}e^{\lambda_j}z^{\delta_{ij}}x^+_{\alpha_i}(z). \tag{2.10}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz z^{-r-1}, $r \in \mathbb{Z}$, s lijeve i desne strane jednakosti (2.10), slijedi prva jednakost leme.

Preostale jednakosti dokazuju se slično. U dokazu treće i četvrte jednakosti koristi se formula (2.8). □

Sada, slijedeći pristup u [23] i [25], uvodimo pojam Z-verteks-operatora. Za cijeli broj a i prirodan broj c definiramo funkciju $f_a(z;c)$ sa

$$f_a(z;c) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{[ar]}{[cr]}\frac{z^r}{r}\right).$$

Na ireducibilnom modulu V najveće težine nivoa c za $i = 1, 2, \ldots, n$ definiramo verteks-operator $Z^{\pm}(a_i, z)$,

$$Z^{\pm}(a_i, z) := E^{\pm}_{-}(a_i, z)x^{\pm}_{\alpha_i}(z)E^{\pm}_{+}(a_i, z).$$

Primijetimo kako je $Z^{\pm}(a_i, z)$ dobro definiran zbog restringiranog djelovanja od $x^{\pm}_{\alpha_i}(z)$ na modulu V.

Sljedeće dvije propozicije dokazane su u [23].

Propozicija 2.10 *Za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$ na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c vrijede relacije:*

$$
\begin{aligned}
&E_-^{\pm}(a_i, z_1)E_+^{\pm}(a_j, z_2) = E_+^{\pm}(a_j, z_2)E_-^{\pm}(a_i, z_1) f\left(q^{\mp c}\frac{z_1}{z_2}\right);\\
&E_-^{\pm}(a_i, z_1)E_+^{\mp}(a_j, z_2) = E_+^{\mp}(a_j, z_2)E_-^{\pm}(a_i, z_1) f\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-1};\\
&E_-^{\pm}(a_i, z_1)x_{\alpha_j}^{\pm}(z_2) = x_{\alpha_j}^{\pm}(z_2)E_-^{\pm}(a_i, z_1) f\left(q^{\mp c}\frac{z_1}{z_2}\right)^{-1};\\
&E_-^{\pm}(a_i, z_1)x_{\alpha_j}^{\mp}(z_2) = x_{\alpha_j}^{\mp}(z_2)E_-^{\pm}(a_i, z_1) f\left(\frac{z_1}{z_2}\right);\\
&E_+^{\pm}(a_i, z_1)x_{\alpha_j}^{\pm}(z_2) = x_{\alpha_j}^{\pm}(z_2)E_+^{\pm}(a_i, z_1) f\left(q^{\mp c}\frac{z_2}{z_1}\right);\\
&E_+^{\pm}(a_i, z_1)x_{\alpha_j}^{\mp}(z_2) = x_{\alpha_j}^{\mp}(z_2)E_+^{\pm}(a_i, z_1) f\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{-1};\\
&\left[\phi_i(z_1), E_-^{\pm}(a_j, z_2)\right] = \left[\psi_i(z_1), E_+^{\pm}(a_j, z_2)\right] = 0;\\
&\phi_i(z_1)E_+^{\pm}(a_j, z_2) = E_+^{\pm}(a_j, z_2)\phi_i(z_1)\frac{z_2 - q^{\mp a_{ij}\mp c/2}z_1}{z_2 - q^{\pm a_{ij}\mp c/2}z_1};\\
&\psi_i(z_1)E_-^{\pm}(a_j, z_2) = E_-^{\pm}(a_j, z_2)\psi_i(z_1)\frac{z_1 - q^{\pm a_{ij}\mp c/2}z_2}{z_1 - q^{\mp a_{ij}\mp c/2}z_2},
\end{aligned}
$$

gdje je $f(z) = f_{a_{ij}}(z; c)$.

Propozicija 2.11 *Za sve $i = 1, 2, \ldots, n$ na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c vrijede relacije:*

$$
\begin{aligned}
&E_-^{+}(a_i, z)E_-^{-}(a_i, zq^{-c}) = 1;\\
&E_-^{+}(-a_i, z)E_-^{-}(-a_i, zq^{c}) = \phi_i(zq^{c/2})K_i;\\
&E_+^{+}(-a_i, z)E_+^{-}(-a_i, zq^{-c}) = \psi_i(zq^{-c/2})K_i^{-1};\\
&E_+^{+}(a_i, z)E_+^{-}(a_i, zq^{c}) = 1.
\end{aligned}
$$

Sljedeći teorem je posljedica relacija iz prethodne dvije propozicije. Njegov dokaz se može vidjeti u [23].

Teorem 2.12 *Za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$ na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c vrijede relacije:*

$$
\begin{aligned}
&f(q^{\mp c}z_2/z_1)^{-1}(z_1 - q^{\pm a_{ij}}z_2)Z^{\pm}(a_i, z_1)Z^{\pm}(a_j, z_2)\\
&\qquad = f(q^{\mp c}z_1/z_2)^{-1}(q^{\pm a_{ij}}z_2)Z^{\pm}(a_j, z_2)Z^{\pm}(a_i, z_1);\\
&f(z_2/z_1)Z^{+}(a_i, z_1)Z^{-}(a_j, z_2) - f(z_1/z_2)Z^{-}(a_j, z_2)Z^{+}(a_i, z_1)\\
&\qquad = \frac{\delta_{ij}}{q - q^{1}}\left(K_i\delta(q^{-c}z_1/z_2) - K_i^{-1}\delta(q^{c}z_1/z_2)\right).
\end{aligned}
$$

Definiramo vakuumski potprostor Ω_V sa

$$\Omega_V := \left\{ v \in V \mid E_+^{\pm}(a_i, z)v = E_+^{\pm}(-a_i, z)v = v \text{ za sve } i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Teorem 2.13 *Neka je V modul nivoa c. Postoji izomorfizam vektorskih prostora*

$$\begin{aligned} K(c) \otimes \Omega_V &\to V \\ u \otimes v &\mapsto \iota(u)v, \end{aligned}$$

gdje je preslikavanje ι ulaganje $K(c) \cong S(\hat{\mathfrak{h}}^-) \cong U_q(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ (izomorfizmi vektorskih prostora) u $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Tada je za $i = 1, 2, \ldots, n$

$$x_{\alpha_i}^{\pm}(z) = E_-^{\pm}(-a_i, z) E_+^{\pm}(-a_i, z) \otimes Z^{\pm}(a_i, z).$$

Dokaz teorema se može pronaći u [23]. Njime je problem pronalaženja realizacije ireducibilnih modula najveće težine sveden na problem određivanja pripadnih Z-operatora i vakuumskih potprostora.

2.3 Ding-Feiginovi operatori

U ovoj točki ćemo izložiti konstrukciju operatora $\bar{x}_{\alpha_i}^{+}(z)$ iz članka [6] J. Dinga i B. Feigina i nabrojati nekoliko relacija između verteks-operatora, koje će nam trebati u kasnijim poglavljima.

Neka je V ireducibilni $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-modul iz kategorije $\mathcal{O}_{\text{int}}^q$ nivoa c. Za $i = 1, 2, \ldots, n$ definiramo na V

$$k_i^+(z) := \exp\left((q - q^{-1}) \sum_{r \geq 1} \frac{-q^{2r + \frac{cr}{2}}}{1 + q^{2r}} a_i(r) z^{-r} \right). \tag{2.11}$$

Sada, kao u [6], za $i = 1, 2, \ldots, n$, definiramo verteks-operatore $\bar{x}_{\alpha_i}^{+}(z)$ na V formulom

$$\bar{x}_{\alpha_i}^{+}(z) := x_{\alpha_i}^{+}(z) k_i^+(z). \tag{2.12}$$

Gornja definicija je dobra jer $x_{\alpha_i}^{+}(z)$ i $k_i^+(z)$ djeluju restringirano na V. Primijetimo da produkt iz (2.12) ne bi bio dobro definiran kada bi koeficijenti oba reda s desne strane jednakosti, umjesto kao operatori na V, bili promatrani kao elementi algebre $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$. Naime, svi koeficijenti desne strane koji stoje uz z^r za fiksan $r \in \mathbb{Z}$ ne čine sumabilnu familiju (u smislu [33]).

Prilikom promatranja verteks-operatora $x_{\alpha_i}^{+}(z)$ i $\bar{x}_{\alpha_i}^{+}(z)$ indeks i ćemo često zvati bojom. Motivacija za takvu terminologiju dolazi iz članka [18] i bit će objašnjena u idućem poglavlju. Jedno važno svojstvo verteks-operatora $\bar{x}_{\alpha_i}^{+}(z)$, navedeno u članku [6], jest da oni sa nesusjednim bojama međusobno komutiraju:

Teorem 2.14 *Za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$, takve da je $a_{ij} = 0$, vrijedi*

$$\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2) = \bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1);$$
$$\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_j}(z_2) = \bar{x}^+_{\alpha_j}(z_2)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1).$$

Pomoću teorema 1.7 lako možemo izvesti formulu za djelovanje koprodukta Δ na operatoru $k^+_i(z)$,

$$\Delta(k^+_i(z)) = k^+_i(zq^{c_2/2}) \otimes k^+_i(zq^{-c_1/2}),$$

a zatim, koristeći (2.2), i formulu za djelovanje operatora $k^+_i(z)$ na tenzorskom produktu c ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1:

$$\Delta^{(c-1)}(k^+_i(z)) = k^+_i(zq^{1/2}) \otimes k^+_i(z) \otimes \cdots \otimes k^+_i(zq^{(3-c)/2}) \otimes k^+_i(zq^{(1-c)/2}). \tag{2.13}$$

U gornjoj formuli je razlika potencija od q na j-toj i $(j+1)$-voj komponenti jednaka $1/2$ za $j = 1, 2, \ldots, c-2$ te jednaka 1 za $j = c-1$.

Neka je V ireducibilan $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modul najveće težine nivoa c. Za $i, j = 1, 2, \ldots, n$ i $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definiramo normalno uređen produkt operatora $a_i(k)$ i $a_j(l)$ na V sa

$$: a_i(k)a_j(l) := \begin{cases} a_i(k)a_j(l), & \text{ako je } k \leq l \\ a_j(l)a_i(k), & \text{ako je } k > l. \end{cases} \tag{2.14}$$

Slično možemo definirati i normalno uređen produkt $m > 2$ operatora na V. Za operatore $a_{i_r}(k_r)$, $i_r = 1, 2, \ldots, n$, $k_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r = 1, 2, \ldots, m$, sa

$$: a_{i_1}(k_1)a_{i_2}(k_2) \ldots a_{i_m}(k_m) := a_{i_{\sigma_1}}(k_{\sigma_1})a_{i_{\sigma_2}}(k_{\sigma_2}) \cdot \ldots \cdot a_{i_{\sigma_m}}(k_{\sigma_m}), \tag{2.15}$$

gdje je $\sigma \in \mathcal{S}_m$ bilo koja permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, m\}$ za koju je

$$k_{\sigma_1} \leq k_{\sigma_2} \leq \ldots \leq k_{\sigma_m}.$$

Dakle, normalno uređenim produktom množimo operatore $a_i(k)$ tako da se svi operatori $a_i(k)$ za $k < 0$ nađu lijevo od svih operatora $a_j(l)$ za $l > 0$. Htjeli bismo promatrati normalno uređene produkte verteks-operatora iz Frenkel-Jingove realizacije pa ćemo za $\alpha, \beta \in Q$, gdje je Q korijenska rešetka proste Liejeve algebre $\mathfrak{sl}_{n+1}$, definirati

$$: e^{\alpha} z_1^{\alpha} e^{\beta} z_2^{\beta} := e^{\alpha} e^{\beta} z_1^{\alpha} z_2^{\beta}.$$

Uz ovakve se definicije normalno uređen produkt prirodno proširuje na verteks-operatore iz Frenkel-Jingove realizacije, npr.

$$\begin{aligned} &: x^{\pm}_{\alpha_i}(z_1)x^{\pm}_{\alpha_j}(z_2) : \\ &\quad = E^{\pm}_{-}(-a_i, z_1)E^{\pm}_{-}(-a_j, z_2)E^{\pm}_{+}(-a_i, z_1)E^{\pm}_{+}(-a_j, z_2) \otimes e^{\pm\alpha_i}e^{\pm\alpha_j}z_1^{\pm\alpha_i}z_2^{\pm\alpha_j}. \end{aligned}$$

U sljedećoj lemi popisane su neke relacije između verteks-operatora koje ćemo kasnije koristiti.

Lema 2.15 *Neka su $i, j = 1, 2, \ldots, n$ takvi da je $a_{ij} = -1$ i neka je c prirodan broj.*

(a) *Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c vrijede formule*

$$
\begin{aligned}
k_i^+(z_1)x_{\alpha_i}^+(z_2) &= \frac{1 - q^2\frac{z_2}{z_1}}{1 - \frac{z_2}{z_1}} x_{\alpha_i}^+(z_2)k_i^+(z_1),\\
k_i^+(z_1)x_{\alpha_j}^+(z_2) &= \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{q^r - q^{-r}}{r(q^{2r}+1)} \left(\frac{z_2 q^2}{z_1}\right)^r\right) x_{\alpha_j}^+(z_2)k_i^+(z_1),\\
k_i^+(z_1)\phi_j(z_2) &= \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{(q - q^{-1})^2 q^{2r+\frac{rc}{2}}[-r][rc]}{r(1+q^{2r})} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^r\right) \phi_j(z_2)k_i^+(z_1).
\end{aligned}
$$

(b) *Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa 1 vrijede formule*

$$
\begin{aligned}
x_{\alpha_i}^+(z_1)x_{\alpha_i}^+(z_2) &= z_1^2\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)\left(1 - q^{-2}\frac{z_2}{z_1}\right) : x_{\alpha_i}^+(z_1)x_{\alpha_i}^+(z_2) :,\\
x_{\alpha_i}^+(z_1)\phi_i(z_2 q^{\frac{1}{2}}) &= q^2 \frac{1 - q^{-2}\frac{z_2}{z_1}}{1 - q^2\frac{z_2}{z_1}} \phi_i(z_2 q^{\frac{1}{2}})x_{\alpha_i}^+(z_1),\\
k_i^+(z_1)\phi_i(z_2) &= \frac{\left(1 - q^{\frac{3}{2}}\frac{z_2}{z_1}\right)^2}{\left(1 - q^{\frac{7}{2}}\frac{z_2}{z_1}\right)\left(1 - q^{-\frac{1}{2}}\frac{z_2}{z_1}\right)} \phi_i(z_2)k_i^+(z_1),\\
x_{\alpha_i}^+(z_1)x_{\alpha_j}^+(z_2) &= \frac{1}{z_1}\frac{1}{1 - q^{-1}\frac{z_2}{z_1}} : x_{\alpha_i}^+(z_1)x_{\alpha_j}^+(z_2) :,\\
x_{\alpha_i}^+(z_1)\phi_j(z_2 q^{1/2}) &= q^{-1}\frac{1 - q\frac{z_2}{z_1}}{1 - q^{-1}\frac{z_2}{z_1}} \phi_j(z_2 q^{1/2})x_{\alpha_i}^+(z_1).
\end{aligned}
$$

Dokaz. Sve gornje jednakosti se dokazuju na sličan način. Neke od njih mogu se pronaći u literaturi, npr. sve jednakosti iz tvrdnje (b) osim treće mogu se vidjeti u [8], prva jednakost iz tvrdnje (a) u [6].

Dokažimo drugu jednakost u tvrdnji (a). Znamo da je

$$
\begin{aligned}
k_i^+(z_1) &= \exp\left((q - q^{-1})\sum_{r\geq 1} \frac{-q^{2r+\frac{cr}{2}}}{1+q^{2r}} a_i(r) z_1^{-r}\right),\\
x_{\alpha_j}^+(z_2) &= \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{q^{-cr/2}}{[cr]} a_j(-r) z_2^r\right) \exp\left(-\sum_{r\geq 1} \frac{q^{-cr/2}}{[cr]} a_j(r) z_2^{-r}\right) \otimes Z^+(a_j, z_2)
\end{aligned}
$$

pa je stoga dovoljno izračunati komutatore između

$$
\exp\left((q - q^{-1})\sum_{r\geq 1} \frac{-q^{2r+\frac{cr}{2}}}{1+q^{2r}} a_i(r) z_1^{-r}\right) \quad \text{i} \quad \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{q^{-cr/2}}{[cr]} a_j(-r) z_2^r\right).
$$

Naime, preostala dva faktora od $x^+_{\alpha_j}(z_2)$ komutiraju sa $k_i^+(z_1)$. Računamo

$$\begin{aligned}
&\left[(q-q^{-1})\sum_{r\geq 1}\frac{-q^{2r+\frac{cr}{2}}}{1+q^{2r}}a_i(r)z_1^{-r},\sum_{s\geq 1}\frac{q^{-cs/2}}{[cs]}a_j(-s)z_2^s\right]\\
&\qquad=(q-q^{-1})\sum_{r\geq 1}\sum_{s\geq 1}\frac{-q^{2r+\frac{cr}{2}}}{1+q^{2r}}\frac{q^{-cs/2}}{[cs]}[a_i(r),a_j(-s)]\frac{z_2^s}{z_1^r}\\
&\qquad=(q-q^{-1})\sum_{r\geq 1}\sum_{s\geq 1}\frac{-q^{2r+\frac{cr}{2}}}{1+q^{2r}}\frac{q^{-cs/2}}{[cs]}\delta_{r-s\,0}\frac{[-r]}{r}[cr]\frac{z_2^s}{z_1^r}\\
&\qquad=(q-q^{-1})\sum_{r\geq 1}\frac{q^{2r+\frac{cr}{2}}}{1+q^{2r}}\frac{q^{-cr/2}}{[cr]}\frac{[r]}{r}[cr]\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^r\\
&\qquad=(q-q^{-1})\sum_{r\geq 1}\frac{q^{2r}[r]}{(1+q^{2r})r}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^r\\
&\qquad=\sum_{r\geq 1}\frac{q^r-q^{-r}}{(1+q^{2r})r}\left(\frac{z_2q^2}{z_1}\right)^r.
\end{aligned}$$

Gornjim računom dokazali smo

$$k_i^+(z_1)E^+_-(-a_j,z_2)=\exp\left(\sum_{r\geq 1}\frac{q^r-q^{-r}}{(1+q^{2r})r}\left(\frac{z_2q^2}{z_1}\right)^r\right)E^+_-(-a_j,z_2)k_i^+(z_1).$$

Sada pomoću te jednakosti, u nekoliko koraka, slijedi tražena tvrdnja

$$\begin{aligned}
&k_i^+(z_1)x^+_{\alpha_j}(z_2)=k_i^+(z_1)E^+_-(-a_j,z_2)E^+_+(-a_j,z_2)\otimes Z^+(a_j,z_2)\\
&\quad=\exp\left(\sum_{r\geq 1}\frac{q^r-q^{-r}}{(1+q^{2r})r}\left(\frac{z_2q^2}{z_1}\right)^r\right)E^+_-(-a_j,z_2)k_i^+(z_1)E^+_+(-a_j,z_2)\otimes Z^+(a_j,z_2)\\
&\quad=\exp\left(\sum_{r\geq 1}\frac{q^r-q^{-r}}{(1+q^{2r})r}\left(\frac{z_2q^2}{z_1}\right)^r\right)E^+_-(-a_j,z_2)E^+_+(-a_j,z_2)k_i^+(z_1)\otimes Z^+(a_j,z_2)\\
&\quad=\exp\left(\sum_{r\geq 1}\frac{q^r-q^{-r}}{(1+q^{2r})r}\left(\frac{z_2q^2}{z_1}\right)^r\right)x^+_{\alpha_j}(z_2)k_i^+(z_1).
\end{aligned}$$

Preostale jednakosti dokazuju se sličnim računom pa stoga izostavljamo njihov dokaz.

□

Često ćemo u kasnijim poglavljima modul nivoa c realizirati kao podmodul tenzorskog produkta c modula nivoa 1 i zatim, na svakom od tenzorskih faktora, primijenjivati formule iz dijela (b) leme 2.15. Razlog tome je što neke od formula iz spomenute leme znamo, zahvaljujući Frenkel-Jingovoj realizaciji, napisati na modulima nivoa 1, ali ne i na modulima viših nivoa.

Valja napomenuti kako se formule slične onima iz leme 2.15 mogu izvesti i za operatore $x^-_{\alpha_i}(z)$, $i=1,2,\ldots,n$. Međutim, u nastavku ovog rada one nam neće biti potrebne pa su stoga izostavljene.

Poglavlje 3

Glavni potprostori i kvazičestice

Cilj ovog poglavlja je uvesti pojam glavnog potprostora i pojam kvazičestice za ireducibilne module najveće težine kvantne afine algebre $U_q(A_n^{(1)})$. U čitavom poglavlju, kao i u ostatku ovog rada, promatrat ćemo isključivo tu algebru pa to stoga nećemo posebno naglašavati u iskazima definicija i teorema. Dakle, odsada pa nadalje ćemo s $\hat{\mathfrak{g}}$ označavati afinu Liejevu algebru tipa $A_n^{(1)}$.

U prvoj točki ćemo definirati glavne potprostore kao potprostore ireducibilnih modula najveće težine razapete vektorima koji se dobiju kada koeficijentima verteks-operatora, $x^+_{\alpha_i}(z)$ djelujemo na maksimalni vektor. Odmah potom ćemo dokazati kako je svaki vektor glavnog potprostora linearna kombinacija vektora koji se dobiju kada na maksimalni vektor djelujemo prvo koeficijentima od $x^+_{\alpha_1}(z)$, pa koeficijentima od $x^+_{\alpha_2}(z)$, $\ldots$, i tek zatim koeficijentima od $x^+_{\alpha_n}(z)$. Na kraju ćemo dokazati analogan rezultat i za verteks-operatore $\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)$.

U članku [18] G. Georgieva kvazičestice naboja $m \in \mathbb{N}$ su, za afinu Liejevu algebru tipa $A_n^{(1)}$, uvedene kao koeficijenti produkta m verteks-operatora. U drugoj točki bismo, prilikom definiranja kvazičestica, htjeli slijediti isti pristup međutim, za razliku od teorije afinih Liejevih algebri, ovdje produkt m verteks-operatora (u istoj varijabli) nije dobro definiran. Nakon što definiramo kvazičestice (tipa 1), vidjet ćemo da će im, za razliku od kvazičestica za afine Liejeve algebre, nedostajati jedno važno svojstvo - kvazičestice iste boje neće komutirati. Dakle, iako bismo mogli reći da smo definirali kvantni analogon kvazičestica iz rada [18], s njima nećemo moći na isti način, kao u spomenutom članku, doći do sistema izvodnica glavnog potprostora.

Upravo zbog toga u trećoj točki slijedimo Ding-Feiginovu konstrukciju iz članka [6] i uvodimo i drugu definiciju, kvazičestica tipa 2, koje komutiraju kada su iste boje. Na kraju uvodimo dva uređaja nad monomima kvazičestica tipa 2, koji će nam biti potrebni u jednom kasnijem, induktivnom dokazu. Definicije oba uređaja podudaraju se s uređajima koje je uveo G. Georgiev u [18].

3.1 Glavni potprostori

Definicija 3.1 Neka je v_Λ maksimalni vektor ireducibilnog $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modula najveće težine $\Lambda \in \hat{P}^+$. Definiramo glavni potprostor $W(\Lambda)$ sa

$$W(\Lambda) := U_q(\hat{\mathfrak{n}}_+)v_\Lambda.$$

Lema 3.2 *Za svaki $\Lambda \in \hat{P}^+$ vrijedi*

$$W(\Lambda) = U_q(\hat{\mathfrak{n}}_n^+)U_q(\hat{\mathfrak{n}}_{n-1}^+)\dots U_q(\hat{\mathfrak{n}}_1^+)v_\Lambda.$$

Dokaz. Tvrdnja se dokazuje pomoću relacije

$$x_{\alpha_i}^+(k+1)x_{\alpha_j}^+(l) - q^{(\alpha_i,\alpha_j)}x_{\alpha_j}^+(l)x_{\alpha_i}^+(k+1) = q^{(\alpha_i,\alpha_j)}x_{\alpha_i}^+(k)x_{\alpha_j}^+(l+1) - x_{\alpha_j}^+(l+1)x_{\alpha_i}^+(k), \quad (3.1)$$

$k, l \in \mathbb{Z}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, u definiciji 1.3 algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})_0 \cong U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ i restringiranog djelovanja verteks-operatora $x_{\alpha_i}^+(z)$ na ireducibilne module najveće težine.

Iz (3.1) lagano izvodimo

$$x_{\alpha_i}^+(k)x_{\alpha_j}^+(l) = q^{a_{ij}}x_{\alpha_j}^+(l)x_{\alpha_i}^+(k) - x_{\alpha_j}^+(l+1)x_{\alpha_i}^+(k-1) + q^{a_{ij}}x_{\alpha_i}^+(k-1)x_{\alpha_j}^+(l+1), \quad (3.2)$$

gdje su $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Primjenom (3.2) na proizvoljan vektor v modula $L(\Lambda)$ dobivamo

$$x_{\alpha_i}^+(k)x_{\alpha_j}^+(l)v = q^{a_{ij}}x_{\alpha_j}^+(l)x_{\alpha_i}^+(k)v - x_{\alpha_j}^+(l+1)x_{\alpha_i}^+(k-1)v + q^{a_{ij}}x_{\alpha_i}^+(k-1)x_{\alpha_j}^+(l+1)v.$$

S desne strane jednakosti dobili smo dva člana s izmijenjenim poretkom korijena (prvo se javlja α_j, a zatim α_i) i treći član u kojem je poredak korijena jednak onome s lijeve strane jednakosti. Primijetimo da je stupanj od $x_{\alpha_j}^+$ u trećem članu za jedan veći od stupnja od $x_{\alpha_j}^+$ s lijeve strane pa ćemo stoga, iterativno primjenjujući (3.2) na onaj član desne strane jednakosti koji bude imao jednak poredak korijena kao član s lijeve strane (dakle, prvo α_i, a zatim α_j), nakon konačnog broja koraka dobiti desnu stranu u kojoj svaki od sumanada ima izmijenjeni poredak korijena u odnosu na lijevu stranu. Naime, s desne strane će se, u N-tom koraku, pojaviti točno jedan član s istim poretkom korijena kao i s lijeve strane, $x_{\alpha_i}^+(k-N)x_{\alpha_j}^+(l+N)v$, a on je, za dovoljno veliki $N \in \mathbb{N}$, zbog restringiranog djelovanja operatora $x_{\alpha_i}^+(z)$ na modulu $L(\Lambda)$, jednak nuli.

Time smo dokazali da je za svaki vektor $v \in L(\Lambda)$

$$U_q(\hat{\mathfrak{n}}_i^+)U_q(\hat{\mathfrak{n}}_j^+)v = U_q(\hat{\mathfrak{n}}_j^+)U_q(\hat{\mathfrak{n}}_i^+)v$$

pa slijedi tvrdnja leme. □

Jedna od relacija u definiciji 1.3 algebre $U_q(\hat{\mathfrak{g}})_0 \cong U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ glasi

$$[a_i(k), x_{\alpha_j}^+(l)] = \frac{[a_{ij}k]}{k}\gamma^{-\frac{|k|}{2}}x_{\alpha_j}^+(k+l) \quad (3.3)$$

za $i, j = 1, 2, \dots n$ i $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

Lema 3.3 *Na svakom ireducibilnom modulu najveće težine vrijedi*

$$[a_i(k), \bar{x}^+_{\alpha_j}(l)] = \frac{[a_{ij}k]}{k}\gamma^{-\frac{k}{2}}\bar{x}^+_{\alpha_j}(k+l)$$

za sve $i, j = 1, 2, \dots n$ *i* $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$.

Dokaz. Za vektor v ireducibilnog modula najveće težine i za $j = 1, 2, \dots, n$ imamo

$$\bar{x}^+_{\alpha_j}(l)v = \sum_{m\geq 0} x^+_{\alpha_j}(l-m)k^+_j(m)v,$$

gdje su $k^+_j(m)$ koeficijenti operatora $k^+_j(z)$,

$$k^+_j(z) = \sum_{m\geq 0} k^+_j(m)z^{-m}$$

definiranog u (2.11). Koristeći gornju relaciju (3.3) te definicionu relaciju za Heisenbergovu algebru (2.6), za $i = 1, 2, \dots n$ i $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$ dobivamo

$$\begin{aligned}
a_i(k)\bar{x}^+_{\alpha_j}(l)v &= a_i(k)\sum_{m\geq 0} x^+_{\alpha_j}(l-m)k^+_j(m)v \\
&= \sum_{m\geq 0} a_i(k)x^+_{\alpha_j}(l-m)k^+_j(m)v \\
&= \sum_{m\geq 0} x^+_{\alpha_j}(l-m)a_i(k)k^+_j(m)v + \sum_{m\geq 0}\frac{[a_{ij}k]}{k}\gamma^{-\frac{k}{2}}x^+_{\alpha_j}(l-m+k)k^+_j(m)v \\
&= \sum_{m\geq 0} x^+_{\alpha_j}(l-m)k^+_j(m)a_i(k)v + \frac{[a_{ij}k]}{k}\gamma^{-\frac{k}{2}}\sum_{m\geq 0} x^+_{\alpha_j}((k+l)-m)k^+_j(m)v \\
&= \bar{x}^+_{\alpha_j}(l)a_i(k)v + \frac{[a_{ij}k]}{k}\gamma^{-\frac{k}{2}}\bar{x}^+_{\alpha_j}(k+l)v,
\end{aligned}$$

čime je tvrdnja leme dokazana. $\square$

Za vektor v glavnog potprostora $W(\Lambda)$ i za indeks $i = 1, 2, \dots, n$ s $\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}^+_i)v$ ćemo označavati potprostor glavnog potprostora $W(\Lambda)$ razapet svim elementima oblika

$$\bar{x}^+_{\alpha_i}(l_1)\cdots\bar{x}^+_{\alpha_i}(l_r)v, \qquad r \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ l_1, \dots, l_r \in \mathbb{Z}.$$

Primijetimo da ovdje nismo mogli postupiti kao kod definicije podalgebri $U_q(\hat{\mathfrak{n}}^+_i)v$. Naime, koeficijenti operatora $\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)$ ne nalaze se u $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ pa stoga ne možemo definirati $\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}^+_i)$ kao podalgebru od $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Uz uvedene oznake sljedeća lema je analogon leme 3.2 za operatore $\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)$ iz (2.12).

Lema 3.4 $W(\Lambda) = \bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}^+_n)\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}^+_{n-1})\dots\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}^+_1)v_\Lambda$.

Dokaz. Iz definicije

$$\bar{x}^+_{\alpha_i}(z) = x^+_{\alpha_i}(z)k^+_i(z)$$

vidimo da će svaki vektor

$$\bar{x}^+_{\alpha_n}(l_{1,n})\ldots\bar{x}^+_{\alpha_n}(l_{k_n,n})\bar{x}^+_{\alpha_{n-1}}(l_{1,n-1})\ldots\bar{x}^+_{\alpha_1}(l_{1,1})\ldots\bar{x}^+_{\alpha_1}(l_{k_1,1})v_\Lambda$$

prostora $\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_n^+)\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_{n-1}^+)\ldots\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_1^+)v_\Lambda$ biti produkt $k_n+\ldots+k_1$ faktora od kojih je svaki oblika

$$\sum_{m\geq 0} x^+_{\alpha_i}(l-m)k_i^+(m) \quad \text{za neke } i=1,2,\ldots,n \text{ i } l\in\mathbb{Z}.$$

Nadalje, svi operatori $k_i^+(m)$ su koeficijenti od $k_i^+(z)$, tj. linearne kombinacije produkata operatora $a_i(s)$ (za $s\geq 1$) pa ih stoga možemo, koristeći gornju relaciju (3.3), pomicati jedno po jedno mjesto udesno sve dok se svi operatori $a_i(s)$ ne budu nalazili desno od svih operatora $x^+_{\alpha_j}(r)$ za sve $i,j=1,2,\ldots,n$. Za $s\geq 1$ je $a_i(s)v_\Lambda=0$ pa će stoga svi sumandi, koji nakon gornjeg postupka budu sadržavali barem jedan operator $a_i(s)$ (za neki $s\in\mathbb{N}$, $i=1,2,\ldots,n$), biti jednaki nuli i dobiveni izraz će biti linearna kombinacija elemenata oblika

$$x^+_{\alpha_n}(l'_{1,n})\ldots x^+_{\alpha_n}(l'_{k_n,n})x^+_{\alpha_{n-1}}(l'_{1,n-1})\ldots x^+_{\alpha_1}(l'_{1,1})\ldots x^+_{\alpha_1}(l'_{k_1,1})v_\Lambda, \tag{3.4}$$

tj. nalazit će se u $W(\Lambda)$. Time je dokazana inkluzija

$$\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_n^+)\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_{n-1}^+)\ldots\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_1^+)v_\Lambda\subseteq W(\Lambda). \tag{3.5}$$

Kako bismo dokazali obratnu inkluziju krećemo od relacije

$$x^+_{\alpha_i}(z)=\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)(k_i^+(z))^{-1}.$$

Lema 3.3 osigurava nam da možemo provesti isti postupak pomicanja svih operatora $a_i(s)$ desno od svih operatora $\bar{x}^+_{\alpha_j}(r)$ kao i prilikom gornjeg dokaza obratne inkluzije. Preciznije, možemo dokazati da se svaki element, koji se nalazi u $U_q(\hat{\mathfrak{n}}_n^+)U_q(\hat{\mathfrak{n}}_{n-1}^+)\ldots U_q(\hat{\mathfrak{n}}_1^+)v_\Lambda$ i oblika je kao u (3.4), nalazi također i u $\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_n^+)\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_{n-1}^+)\ldots\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_1^+)v_\Lambda$. Prema lemi 3.2 svi elementi oblika (3.4) razapinju čitav glavni potprostor $W(\Lambda)$ pa stoga vrijedi i druga inkluzija

$$W(\Lambda)\subseteq\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_n^+)\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_{n-1}^+)\ldots\bar{U}_q(\hat{\mathfrak{n}}_1^+)v_\Lambda. \tag{3.6}$$

Sada iz (3.5) i (3.6) slijedi tvrdnja leme. □

3.2 Kvazičestice tipa 1

Neka je V vektorski prostor i

$$a(z)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}a_r z^{-r-1} \qquad \text{i} \qquad b(z)=\sum_{s\in\mathbb{Z}}b_s z^{-s-1}$$

Laurentovi redovi iz $(\operatorname{End} V)[[z^{\pm 1}]]$. Tada je njihov produkt

$$a(z_1)b(z_2) = \sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_r b_s z_1^{-r-1} z_2^{-s-1}$$

dobro definiran element od $(\operatorname{End} V)[[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]]$. Produkt

$$a(z)b(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_r b_s z^{-r-s-2} = \sum_{A\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{r\in\mathbb{Z}} a_r b_{A-r}\right) z^{-A-2}$$

ne mora biti dobro definiran element prostora $(\operatorname{End} V)[[z^{\pm 1}]]$ jer suma

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}} a_r b_{A-r}, \quad A \in \mathbb{Z}$$

ne mora biti konačna, tj. za cijeli broj A familija $(a_r b_{A-r})_{r\in\mathbb{Z}}$ ne mora biti sumabilna (u smislu [33]). Općenito, neka je $a(z_1, \ldots, z_m) \in (\operatorname{End} V)[[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_m^{\pm 1}]]$ Laurentov red,

$$a(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{r_1,\ldots,r_m\in\mathbb{Z}} a_{r_1,\ldots,r_m} z_1^{-r_1-1} \cdots z_m^{-r_m-1}. \tag{3.7}$$

Pretpostavimo da je

$$a(z_1, \ldots, z_m) \in \operatorname{Hom}(V, V((z_1, \ldots, z_m))) \subset (\operatorname{End} V)[[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_m^{\pm 1}]],$$

tj. da je za svaki vektor $v \in V$

$$a(z_1, \ldots, z_m)v \in V((z_1, \ldots, z_m)).$$

Na desnoj strani jednakosti (3.7) možemo sve varijable z_r, $r = 1, 2, \ldots, m$, zamijeniti varijablom z i tako dobiti element prostora $\operatorname{Hom}(V, V((z)))$. Takvu supstituciju označavat ćemo kao $\lim_{z_p\to z}$. Dakle, za $a(z_1, \ldots, z_m) \in (\operatorname{End} V)[[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_m^{\pm 1}]]$ postoji limes $\lim_{z_p\to z} a(z_1, \ldots, z_m)$ i vrijedi

$$\lim_{z_p\to z} a(z_1, \ldots, z_m) \in \operatorname{Hom}(V, V((z))).$$

Pritom, ako nije drugačije naglašeno, podrazumijevamo da indeks p ide po skupu indeksa svih varijabli z_r koje se nalaze unutar limesa. Tada ćemo govoriti da postoji limes $\lim_{z_p\to z}$ od $a(z_1, \ldots, z_m)$. Primijetimo još da, ako su $c_1, \ldots c_p$ proizvoljni skalari iz $\mathbb{C}(q^{1/2}) \setminus \{0\}$ i ako postoji limes

$$\lim_{z_p\to z} a(z_1, \ldots, z_m),$$

onda postoji i limes

$$\lim_{z_p\to zc_p} a(z_1, \ldots, z_m).$$

U ovoj točki ćemo koristiti jedno važno svojstvo normalno uređenog produkta verteks-operatora $x_{\alpha_i}^{+}(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, koji djeluju na ireducibilnom modulu V najveće težine nivoa 1. Iz Frenkel-Jingove realizacije vidimo da se normalno uređen produkt m verteks-operatora, $: x_{\alpha_i}^+(z_1) \dots x_{\alpha_i}^+(z_m) :$, nalazi u $\mathrm{Hom}(V, V((z_1, \dots, z_m)))$ pa stoga postoji limes

$$\lim_{z_p \to z} : x_{\alpha_i}^+(z_1) \dots x_{\alpha_i}^+(z_m) : .$$

Lema 3.5 *Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c za svaki prirodan broj $m \geq 2$ postoji limes*

$$\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}} \left(\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right) \right) x_{\alpha_i}^+(z_1) \dots x_{\alpha_i}^+(z_m).$$

Prije početka dokaza ilustrirajmo tvrdnju leme za $c = 4$ i $m = 4$. Zadani modul nivoa c možemo realizirati kao podmodul tenzorskog produkta $c = 4$ modula nivoa 1,

$$V = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes V_4.$$

Djelovanje od $x_{\alpha_i}^+(z_1) \dots x_{\alpha_i}^+(z_4)$ na tom tenzorskom produktu zadano je formulom (2.3). Već smo vidjeli da će se $\Delta^{(3)}(x_{\alpha_i}^+(z_1) \dots x_{\alpha_i}^+(z_4))$ sastojati od određenog broja sumanada te smo u (2.5) zapisali jedan takav:

$$\begin{array}{lccc} x_{\alpha_i}^+(z_1) & \phi_i(z_2 q^{1/2}) & \phi_i(z_3 q^{1/2}) & \phi_i(z_4 q^{1/2}) \\ \otimes & x_{\alpha_i}^+(z_2 q) & \phi_i(z_3 q^{3/2}) & x_{\alpha_i}^+(z_4 q) \\ \otimes & & \phi_i(z_3 q^{5/2}) & \\ \otimes & & x_{\alpha_i}^+(z_3 q^3). & \end{array} \tag{3.8}$$

Htjeli bismo na svakom od gornja 4 faktora sve operatore $x_{\alpha_i}^+(z)$ dovesti desno od svih operatora $\phi_i(z)$. Naime, tada će se r-ti faktor, $r = 1, \dots, 4$, nalaziti u prostoru

$$\mathrm{Hom}(V_r, V_r((z_1, \dots, z_4)))$$

pa će postojati limes $\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}}$. Treći i četvrti faktor se već nalaze u traženom prostoru pa je stoga potrebno korigirati samo prva dva faktora.

Primijetimo kako su u

$$\prod_{r=1}^{3} \prod_{s=r+1}^{4} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right) \tag{3.9}$$

neki od faktora i

$$1 - q^2 \frac{z_2}{z_1}, \quad 1 - q^2 \frac{z_3}{z_1}, \quad 1 - q^2 \frac{z_4}{z_1}, \quad 1 - q^2 \frac{z_4}{z_3}. \tag{3.10}$$

Prema drugoj jednakosti tvrdnje (b) leme 2.15 vrijedi

$$\begin{aligned} &\left(1 - q^2 \frac{z_2}{z_1}\right) \left(1 - q^2 \frac{z_3}{z_1}\right) \left(1 - q^2 \frac{z_4}{z_1}\right) x_{\alpha_i}^+(z_1) \phi_i(z_2 q^{1/2}) \phi_i(z_3 q^{1/2}) \phi_i(z_4 q^{1/2}) \\ &\quad = q^6 \left(1 - q^{-2} \frac{z_2}{z_1}\right) \left(1 - q^{-2} \frac{z_3}{z_1}\right) \left(1 - q^{-2} \frac{z_4}{z_1}\right) \phi_i(z_2 q^{1/2}) \phi_i(z_3 q^{1/2}) \phi_i(z_4 q^{1/2}) x_{\alpha_i}^+(z_1) \\ &\qquad \in \mathrm{Hom}(V_1, V_1((z_1, \dots z_4))), \end{aligned}$$

a prema prvoj i drugoj jednakosti tvrdnje (b) iste leme

$$\begin{aligned}\left(1-q^2\frac{z_4}{z_3}\right)x^+_{\alpha_i}(z_2q)\phi_i(z_3q^{3/2})x^+_{\alpha_i}(z_4q) &= q^2\left(1-q^{-2}\frac{z_4}{z_3}\right)\phi_i(z_3q^{3/2})x^+_{\alpha_i}(z_2q)x^+_{\alpha_i}(z_4q)\\ &= (z_2q)^2\left(1-\frac{z_4}{z_2}\right)\left(1-q^{-2}\frac{z_4}{z_2}\right)q^2\left(1-q^{-2}\frac{z_4}{z_3}\right)\phi_i(z_3q^{3/2}):x^+_{\alpha_i}(z_2q)x^+_{\alpha_i}(z_4q):\\ &\in \mathrm{Hom}(V_2, V_2((z_1,\ldots z_4))).\end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da se produkt sumanda (3.8) sa faktorima iz (3.10) nalazi u postoru $\mathrm{Hom}(V, V((z_1,\ldots z_4)))$. Naravno, da bi vrijedila tvrdnja leme 3.5, treba dokazati da isto vrijedi za produkt proizvoljnog sumanda sa (3.9). Dokažimo lemu.

Dokaz. Zbog teorema potpune reducibilnosti ireducibilni modul V najveće težine nivoa c možemo uložiti u tenzorski produkt

$$V_1\otimes\ldots\otimes V_c \tag{3.11}$$

c ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1.

Promatramo produkt $x^+_{\alpha_i}(z_1)\ldots x^+_{\alpha_i}(z_m)$. On će, prilikom djelovanja na ireducibilnom modulu nivoa c (koji sada promatramo kao podmodul od (3.11)), dati neki broj sumanada od kojih svaki ima c faktora. Sve bismo te sumande mogli ispisati pomoću formule (2.3), no dovoljno je primijetiti kako će se l-ti tenzorski faktor svakog sumanda, $l=1,2,\ldots,c$, sastojati od nekih od operatora $x^+_{\alpha_i}(z_rq^{l-1})$ i $\phi_i(z_sq^{\frac{1}{2}}q^{l-1})$ za $r,s=1,2,\ldots,m$ i operatora 1.

Promotrimo sada prve dvije jednakosti u tvrdnji (b) leme 2.15. Iz prve od tih dviju jednakosti vidimo da je

$$\begin{aligned}&x^+_{\alpha_i}(z_rq^{l-1})x^+_{\alpha_i}(z_sq^{l-1})=\\ &\quad z_r^2q^{2(l-1)}\left(1-\frac{z_s}{z_r}\right)\left(1-q^{-2}\frac{z_s}{z_r}\right):x^+_{\alpha_i}(z_rq^{l-1})x^+_{\alpha_i}(z_sq^{l-1}):,\end{aligned}$$

tj. da je

$$x^+_{\alpha_i}(z_rq^{l-1})x^+_{\alpha_i}(z_sq^{l-1})\in \mathrm{Hom}(V_l, V_l((z_1,\ldots,z_m))).$$

Iz druge jednakosti vidimo da je

$$\begin{aligned}&\left(1-q^2\frac{z_s}{z_r}\right)x^+_{\alpha_i}(z_rq^{l-1})\phi_i(z_sq^{\frac{1}{2}}q^{l-1})=\\ &\quad q^2\left(1-q^{-2}\frac{z_s}{z_r}\right)\phi_i(z_sq^{\frac{1}{2}}q^{l-1})x^+_{\alpha_i}(z_rq^{l-1}),\end{aligned}$$

tj. da je

$$\left(1-q^2\frac{z_s}{z_r}\right)x^+_{\alpha_i}(z_rq^{l-1})\phi_i(z_sq^{\frac{1}{2}}q^{l-1})\in \mathrm{Hom}(V_l, V_l((z_1,\ldots,z_m))).$$

Primijetimo još da se na l-tom faktoru operator $\phi_i(z_s q^{\frac{1}{2}} q^{l-1})$ može naći desno od operatora $x^+_{\alpha_i}(z_r q^{l-1})$ samo ako je $s > r$. Nadalje, za $s < r$ je

$$\phi_i(z_s q^{\frac{1}{2}} q^{l-1}) x^+_{\alpha_i}(z_r q^{l-1}) \in \mathrm{Hom}(V_l, V_l((z_1, \ldots, z_m))).$$

Iz svega ovoga zaključujemo da ako produkt $x^+_{\alpha_i}(z_1) \ldots x^+_{\alpha_i}(z_m)$ pomnožimo sa

$$\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right),$$

l-ti tenzorski faktor svakog sumanda, gdje je $l = 1, 2, \ldots, c$, će biti element prostora $\mathrm{Hom}(V_l, V_l((z_1, \ldots, z_m)))$. Dakle, za svaki faktor svakog sumanda postoji limes $\lim_{z_p \to z q^{2(p-1)}}$ pa stoga postoji i limes čitavog izraza

$$\lim_{z_p \to z q^{2(p-1)}} \left(\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right) \right) x^+_{\alpha_i}(z_1) \ldots x^+_{\alpha_i}(z_m).$$

□

Označimo s V ireducibilni modul najveće težine nivoa c. U dokazu prethodne leme smo vidjeli da je za sve $i = 1, 2, \ldots, n$ i $m \in \mathbb{N}$

$$\left(\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right) \right) x^+_{\alpha_i}(z_1) \ldots x^+_{\alpha_i}(z_m) \in \mathrm{Hom}(V, V((z_1, \ldots, z_m))) \tag{3.12}$$

pa stoga vrijedi:

Korolar 3.6 *Neka su $c_1, \ldots c_p$ proizvoljni skalari iz $\mathbb{C}(q^{1/2}) \backslash \{0\}$. Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c za svaki prirodan broj $m \geq 2$ postoji limes*

$$\lim_{z_p \to z c_p} \left(\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right) \right) x^+_{\alpha_i}(z_1) \ldots x^+_{\alpha_i}(z_m).$$

Za prirodan broj m i za $i = 1, 2, \ldots, n$ uvedimo sljedeću oznaku za izraz iz prethodne leme:

$$x^+_{m\alpha_i}(z) := \lim_{z_p \to z q^{2(p-1)}} \left(\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right) \right) x^+_{\alpha_i}(z_1) \ldots x^+_{\alpha_i}(z_m). \tag{3.13}$$

Za $m = 1$ produkt u (3.13),

$$\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right),$$

je prazan pa imamo

$$x^+_{1\alpha_i}(z) = x^+_{\alpha_i}(z).$$

Primijetimo da je

$$\lim_{z_p \to z q^{2(p-1)}} \prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right) = \prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^{2(1+s-r)}\right) \neq 0.$$

Koeficijente reda iz (3.13) ćemo zvati kvazičesticama tipa 1:

Definicija 3.7 Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c za prirodan broj m, cijeli broj r te za $i = 1, 2, \dots, n$ definiramo kvazičesticu tipa 1, naboja m, stupnja r i boje i sa

$$x^+_{m\alpha_i}(r) := \operatorname*{Res}_z z^{m+r-1} x^+_{m\alpha_i}(z).$$

Uz oznake iz definicije možemo pisati

$$x^+_{m\alpha_i}(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} x^+_{m\alpha_i}(r) z^{-m-r}.$$

Još jedna posljedica relacije (3.12) je sljedeći korolar.

Korolar 3.8 *Na svakom ireducibilnom modulu V najveće težine operator $x^+_{m\alpha_i}(z)$, $m \in \mathbb{N}$, djeluje restringirano, tj. za svaki vektor $v \in V$ postoji cijeli broj N takav da je*

$$x^+_{m\alpha_i}(s)v = 0 \qquad \text{za sve } s > N.$$

3.3 Kvazičestice tipa 2

Htjeli bismo definirati kvazičestice tipa 2 kao koeficijente produkta Ding-Feiginovih verteks-operatora definiranih s (2.12). Kao kod kvazičestica tipa 1, i ovdje ćemo zahtijevati da kvocijent varijabli susjednih verteks-operatora tog produkta bude q^2. Tvdnja (b) sljedeće leme će nam omogućiti takvu definiciju kvazičestica tipa 2, a u tvrdnji (c) ćemo vidjeti da verteks-operatori iz tvrdnje (b) djeluju restringirano na ireducibilnim modulima najveće težine.

Lema 3.9 *Neka je V proizvoljan ireducibilan modul najveće težine.*

(a) Verteks-operatori $\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$, djeluju restringirano na V, tj. za svaki vektor $v \in V$ postoji cijeli broj N takav da je

$$\bar{x}^+_{\alpha_i}(s)v = 0 \qquad \text{za sve } s > N.$$

(b) Za svaki prirodan broj m je na V dobro definiran sljedeći produkt:

$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z) := \bar{x}^+_{\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^2)\cdots\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{2(m-1)}).$$

(c) Verteks-operatori $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$ za sve $i = 1, 2, \dots, n$ i za sve $m \in \mathbb{N}$ djeluju restringirano na V.

Dokaz. (a) Za vektor $v \in V$ i za cijeli broj r imamo

$$\bar{x}^+_{\alpha_i}(r)v = \sum_{l\geq 0} x^+_{\alpha_i}(r-l)k^+_i(l)v,$$

gdje su operatori $k_i^+(l)$, $l \in \mathbb{Z}$, koeficijenti od

$$k_j^+(z) = \sum_{l \geq 0} k_j^+(l) z^{-l}.$$

Svi operatori $k_i^+(l)$, $l \geq 0$, su linearna kombinacija produkata operatora $a_i(s)$ za $s \geq 1$, a oni se na zakrenutoj grupovnoj algebri realiziraju kao derivacije pa je stoga samo konačno mnogo elemenata $k_i^+(l)v$ iz gornje sume različito od nule. Zbog restrinigiranog djelovanja verteks-operatora $x_{\alpha_i}^+(z)$ na modulu V, može se odabrati dovoljno veliki cijeli broj N za koji bi operatori $x_{\alpha_i}^+(s-l)$ za sve $s > N$ poništavali sve vektore $k_i^+(l)v$ u gornjoj jednakosti. Naime, vektora $k_i^+(l)v$ koji su različiti od nule ima samo konačno mnogo. Za takav N bi, dakle, vrijedilo

$$\bar{x}_{\alpha_i}^+(s)v = 0 \qquad \text{za sve } s > N$$

pa slijedi da $\bar{x}_{\alpha_i}^+(z)$ djeluje restringirano na V.

(b) Dobra definiranost produkta slijedi iz tvrdnje (a) i činjenice da verteks-operatori $\bar{x}_{\alpha_i}^+(z)$ komutiraju (propozicija 2.14). Preciznije, ta dva svojstva osiguravaju nam da se produkt

$$\bar{x}_{\alpha_i}^+(z_1)\bar{x}_{\alpha_i}^+(z_2)\cdots\bar{x}_{\alpha_i}^+(z_m)$$

nalazi u prostoru $\mathrm{Hom}(V, V((z_1, \ldots, z_m)))$ pa stoga na njega, kao što je objašnjeno na početku prethodne točke, možemo djelovati limesom $\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}}$ i tako dobiti traženu tvrdnju.

(c) Kako verteks-operatori $\bar{x}_{\alpha_i}^+(z)$ međusobno komutiraju, dokazana restringiranost očito vrijedi i za sve operatore $\bar{x}_{m\alpha_i}^+(z)$, $m \geq 2$. □

Koeficijente operatora $\bar{x}_{m\alpha_i}^+(z)$ definiranog u tvrdnji (b) prethodne leme zvat ćemo kvazičesticama tipa 2:

Definicija 3.10 Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c za prirodan broj m, cijeli broj r te za $i = 1, 2, \ldots, n$ definiramo kvazičesticu tipa 2, naboja m, stupnja r i boje i sa

$$\bar{x}_{m\alpha_i}^+(r) := \operatorname*{Res}_z z^{m+r-1}\bar{x}_{m\alpha_i}^+(z).$$

Uz oznake iz definicije možemo pisati

$$\bar{x}_{m\alpha_i}^+(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \bar{x}_{m\alpha_i}^+(r) z^{-m-r}.$$

Valja naglasiti kako je definicija 3.10 u velikoj mjeri analogna onoj iz članka [18] - kvazičestica naboja m je definirana kao koeficijent uz odgovarajuću potenciju produkta m verteks-operatora.

Sljedeća tvrdnja je jednostavna posljedica teorema 2.14.

Korolar 3.11 *Na svakom ireducibilnom modulu najveće težine za sve prirodne brojeve m i k i za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$, $a_{ij} = 0$, vrijedi*

$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z_2) = \bar{x}^+_{k\alpha_i}(z_2)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1);$$
$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{k\alpha_j}(z_2) = \bar{x}^+_{k\alpha_j}(z_2)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1).$$

Sada ćemo, slijedeći članak [18], definirati dva uređaja na skupu monoma građenih od kvazičestica tipa 2, koje ćemo koristiti prilikom traženja sistema izvodnica glavnog potprostora. Spomenuti bi se uređaji mogli na isti način definirati i za kvazičestice tipa 1 međutim za te kvazičestice nam oni neće biti potrebni. U ostatku ove točke promatrat ćemo samo kvazičestice tipa 2 pa ćemo ih stoga, zbog jednostavosti, kraće zvati kvazičesticama.

Prvo definiramo dva uređaja, "$<$" i "$\prec$", na r-torkama cijelih brojeva. Za zadane $r_n, \dots, r_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sum_{s=1}^{n} r_s = r$, promatramo r-torku cijelih brojeva $(m_r, \dots, m_1)$ takvu da vrijedi

$$m_r \leq \dots \leq m_{\sum_{s=1}^{n-1} r_s+1}, \quad m_{\sum_{s=1}^{n-1} r_s} \leq \quad \dots \quad \leq m_{r_1+1}, \quad m_{r_1} \leq \dots \leq m_1.$$

Gornji niz nejednakosti kaže nam da prvih r_1 brojeva s desna u r-torci $(m_r, \dots, m_1)$ padaju s desna na lijevo, zatim da idućih r_2 brojeva s desna u toj r-torci padaju s desna na lijevo, ..., i na kraju, da posljednjih r_n brojeva u r-torci padaju s desna na lijevo. Za dvije takve r-torke cijelih brojeva $(m_r, \dots, m_1)$ i $(m'_r, \dots, m'_1)$, pišemo

$$(m_r, \dots, m_1) < (m'_r, \dots, m'_1) \tag{3.14}$$

ako postoji $1 \leq l \leq r$ za koji je

$$m_1 = m'_1, \quad m_2 = m'_2, \quad \dots . \quad m_{l-1} = m'_{l-1} \quad \text{i} \quad m_l < m'_l.$$

Pišemo

$$(m_r, \dots, m_1) \prec (m'_r, \dots, m'_1)$$

ako postoji $1 \leq l \leq r$ za takav da je

$$m_l + m_{l-1} + \dots + m_2 + m_1 < m'_l + m'_{l-1} + \dots + m'_2 + m'_1 \quad \text{i}$$
$$m_k + m_{k-1} + \dots + m_2 + m_1 \leq m'_k + m'_{k-1} + \dots + m'_2 + m'_1 \quad \text{za sve } 1 \leq k \leq r.$$

Lagano se vidi da je uređaj "$\prec$" jači, tj. da iz $a \prec a'$ slijedi $a < a'$ te da obrat ne mora vrijediti. Prvi uređaj "$<$" je linearan, a drugi "$\prec$" parcijalan.

Sada ćemo uvesti nekoliko pretpostavki na poredak kvazičestica tipa 2 u monomu, koje će nam vrijediti u ostatku ovog rada.

(I) Zahvaljujući lemi 3.4, odsada pa nadalje pretpostavljat ćemo da su sve kvazičestice unutar monoma poredane silazno po bojama. Dakle, unutar monoma, s desna na lijevo, prvo se pojavljuju kvazičestice boje 1, zatim boje 2, ... i tek na kraju one boje n.

(II) Zbog komutativnosti kvazičestica iste boje (korolar 3.11), odsada pa nadalje pretpostavljat ćemo da su kvazičestice iste boje poredane, s desna na lijevo, silazno po nabojima.

(III) Također zbog spomenute komutativnosti, odsada pa nadalje pretpostavljat ćemo da su kvazičestice iste boje i istog naboja poredane, s desna na lijevo, silazno po svojim stupnjevima.

Ubuduće ćemo kvazičestice unutar monoma promatrati s desna na lijevo pa ćemo pod prvom kvazičesticom podrazumijevati prvu kvazičesticu s desna, pod zadnjom kvazičesticom zadnju kvazičesticu s desna (tj. prvu s lijeva) itd. Takva terminologija će nam biti praktična kasnije jer će, prilikom djelovanja monoma kvazičestica na vektor, prvo djelovati kvazičestica koja je prva (s desna).

Skup svih monoma, koji zadovoljavaju pretpostavke (I), (II) i (III), shvaćenih kao linearni operatori na nekom ireducibilnom modulu $L(\Lambda)$ najveće težine $\Lambda \in \hat{P}^+$ označimo s $\bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}$. Tada je jedna trivijalna posljedica leme 3.4 sljedeća tvdnja:

Lema 3.12 *Za svaku dominantnu integralnu težinu* Λ *skup* $\left\{bv_\Lambda \mid b \in \bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}\right\}$ *razapinje glavni potprostor* $W(\Lambda)$.

Jedan monom koji zadovoljava gornja tri zahtjeva, (I), (II) i (III), o poretku boja, naboja i stupnjeva bio bi:

$$\bar{x}^+_{\alpha_2}(-10)\bar{x}^+_{3\alpha_2}(-5)\bar{x}^+_{2\alpha_1}(-10)\bar{x}^+_{2\alpha_1}(5)\bar{x}^+_{4\alpha_1}(-4)\bar{x}^+_{5\alpha_1}(-3). \tag{3.15}$$

Vidimo da su prve četiri kvazičestice boje 1 i naboja 5, 4, 2 i 2, druge dvije kvazičestice boje 2 i naboja 3 i 1. Ukupan naboj za boju 1 jednak je

$$m_1 := 5 + 4 + 2 + 2 = 13,$$

a za boju 2

$$m_2 := 3 + 1 = 4$$

pa ćemo reći da je monom (3.15) tipa ukupnog naboja

$$(0, 0, \ldots, 0, 4, 13).$$

Pritom se lijevo od broja 4 nalazi $n - 2$ nula jer promatramo kvantnu afinu algebru $U_q(A_n^{(1)})$.

Općenito, za monom koji u boji 1 ima ukupan naboj m_1, u boji 2 ukupan naboj m_2 itd. reći ćemo da ima tip ukupnog naboja

$$(m_n, m_{n-1}, \ldots, m_2, m_1).$$

Ubuduće ćemo pod nizom stupnjeva monoma podrazumijevati konačan niz u kojem su popisani redom stupnjevi svih kvazičestica tog monoma. Sumu svih stupnjeva faktora monoma zvat ćemo stupnjem monoma. Niz stupnjeva monoma (3.15) je

$$(-10, -5, -10, 5, -4, -3),$$

stupanj monoma (3.15) jednak je

$$-10 + (-5) + (-10) + 5 + (-4) + (-3) = -27.$$

Prvo definiramo uređaje "$<$" i "$\prec$" za monome građene od kvazičestica naboja 1. Skup svih takvih monoma tipa ukupnog naboja $(m_n, m_{n-1}, \ldots, m_1)$ možemo linearno urediti, uređajem koji ćemo označavati s "$<$", tako da uređaj iz (3.14) primijenimo na skup konačnih nizova stupnjeva tih monoma. Nadalje, za iste takve monome b i b' definiramo $b \prec b'$, ako je $b < b'$ i istovremeno

$$(l_n, \ldots, l_1) \prec (l'_n, \ldots, l'_1),$$

gdje su l_i (l'_i) za $i = 1, 2, \ldots, n$ sume stupnjeva svih kvazičestica boje i u monomu b (b').

Fiksirajmo boju $i = 1, 2, \ldots, n$. Reći ćemo da je jednobojni monom (tj. monom koji se sastoji od kvazičestica iste boje) tipa naboja

$$(m_{r^{(1)}}, \ldots, m_1)$$

ako je oblika

$$\bar{x}^+_{m_{r^{(1)}}\alpha_i}(s_{r^{(1)}}) \cdots \bar{x}^+_{m_1\alpha_i}(s_1)$$

za neke stupnjeve $s_{r^{(1)}}, \ldots, s_1 \in \mathbb{Z}$. Nadalje, reći ćemo da je on dualnog tipa naboja

$$(r^{(1)}, \ldots, r^{(k)})$$

ako je građen od $r^{(1)} - r^{(2)}$ kvazičestica naboja 1, $r^{(2)} - r^{(3)}$ kvazičestica naboja 2, ..., $r^{(k-1)} - r^{(k)}$ kvazičestica naboja $k - 1$, $r^{(k)} > 0$ kvazičestica naboja k i ne sadrži niti jednu kvazičesticu naboja većeg od k. Primijetimo kako je $r_i^{(s)}$ za $s = 1, 2, \ldots, k$ upravo broj kvazičestica boje i naboja većeg ili jednakog s. Jasno, istu terminologiju možemo primijeniti i na verteks-operatore pa ćemo tako govoriti da je

$$\bar{x}^+_{m_{r^{(1)}}\alpha_i}(z_{r^{(1)}}) \cdots \bar{x}^+_{m_1\alpha_i}(z_1)$$

tipa naboja $(m_{r^{(1)}}, \dots, m_1)$ i dualnog tipa naboja $(r^{(1)}, \dots, r^{(k)})$, gdje je $k = m_1$.

Sasvim analogno gornje pojmove možemo proširiti i na monome građene od kvazičestica različitih boja. Podsjetimo se, s m_i označavamo ukupan naboj kvazičestica boje i. Za monom

$$b = b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1, \tag{3.16}$$

gdje je $i = 1, 2, \dots, n$ i b_i jednobojni monom u boji i, ćemo reći da je tipa naboja

$$(m_{r_n^{(1)},n}, \dots, m_{1,n}; \dots ; m_{r_1^{(1)},1}, \dots, m_{1,1}), \tag{3.17}$$

gdje je

$$0 < m_{r^{(1)},i} \leq \ldots \leq m_{2,i} \leq m_{1,i} = k_i, \quad \sum_{s=1}^{r_i^{(1)}} m_{s,i} = m_i \quad \text{za sve } i = 1, 2, \dots, n,$$

ako je b_i za svaki $i = 1, 2, \dots, n$ tipa naboja $(m_{r_i^{(1)},i}, \dots, m_{1,i})$. Za monom (3.16) ćemo reći da je dualnog tipa naboja

$$(r_n^{(1)}, \dots, r_n^{(k_n)}; \dots ; r_1^{(1)}, \dots, r_1^{(k_1)}) \tag{3.18}$$

gdje je

$$r_i^{(1)} \geq r_i^{(2)} \geq \ldots \geq r_i^{(k_i)} \geq 0, \quad \sum_{s=1}^{k_i} r_i^{(s)} = m_i \quad \text{za sve } i = 1, 2, \dots, n,$$

ako je b_i za svaki $i = 1, 2, \dots, n$ dualnog tipa naboja $(r_i^{(1)}, \dots, r_i^{(k_i)})$. Kao i kod jednobojnih monoma i ovdje se termini tipa naboja te dualnog tipa naboja mogu prirodno primijeniti i na verteks-operatore.

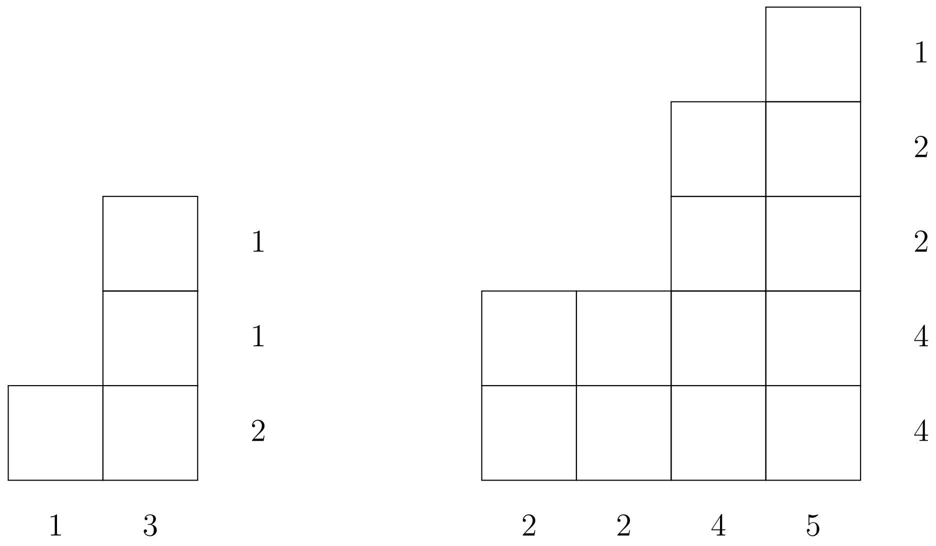
Monom (3.15) je tipa naboja

$$(1, 3; 2, 2, 4, 5)$$

i dualnog tipa naboja

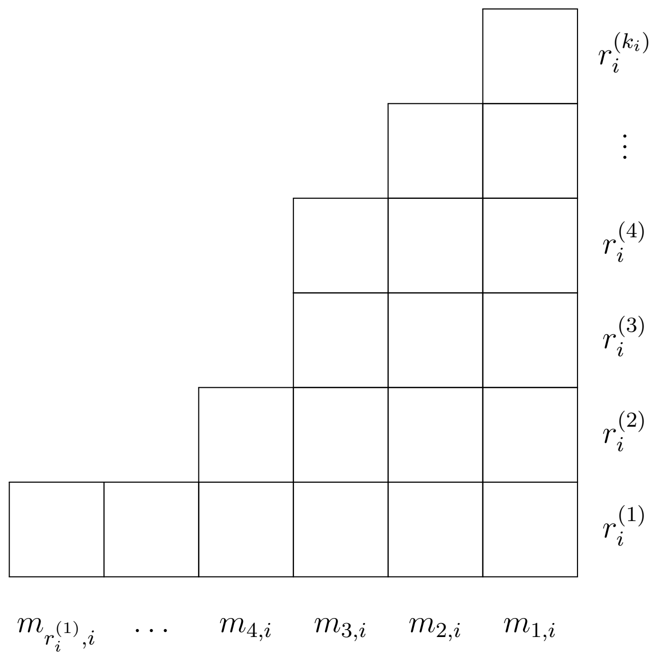
$$(2, 1, 1; 4, 4, 2, 2, 1).$$

Monome kvazičestica možemo prikazivati Youngovim dijagramima. U njima svakoj kvazičestici odgovara po jedan stupac koji se sastoji od upravo onoliko kvadratića koliki je naboj te kvazičestice. Između blokova dijagrama koji odgovaraju kvazičesticama različitih boja stavljat ćemo razmake. Na slici 3.1 je prikazan Youngov dijagram za monom iz (3.15). U njemu prvi blok kvadratića odgovara kvazičesticama boje 1, a drugi blok kvadratića kvazičesticama boje 2. Brojevi ispod svakog stupca dijagrama jednaki su broju kvadratića u tom stupcu i njihov niz je upravo tip naboja monoma (3.15). Brojevi $r_i^{(j)}$ pokraj dijagrama jednaki su broju kvadratića boje i u j-tom retku i njihov niz je upravo dualni tip naboja monoma (3.15).



Slika 3.1: Youngov dijagram za monom (3.15)

Općenito, Youngov dijagram za proizvoljan monom b kao u (3.16), koji je tipa naboja (3.17) i dualnog tipa naboja (3.18), će imati za svaku boju i po jedan blok koji će izgledati kao na slici 3.2. Na slici brojevi $m_{r,i}$ označavaju broj kvadratića u r-tom stupcu, a brojevi $r_i^{(s)}$ broj kvadratića u s-tom retku. Primijetimo kako će unutar svakog bloka broj kvadratića po stupcima uvijek padati (s desna na lijevo) jer promatramo samo monome kod kojih naboji kvazičestica iste boje padaju (s desna na lijevo).



Slika 3.2: Blok Youngovog dijagrama boje i monoma tipa boje i naboja (3.17)

Proširimo linearan uređaj "$<$" i parcijalan uređaj "$\prec$" na skup svih monoma fiksnog tipa ukupnog naboja $(m_n, \ldots, m_1)$. Linearan uređaj "$<$" definiramo na sljedeći način:

- prvo primijenimo definiciju (3.14) na tipove naboja (monoma b i b' koje želimo usporediti);
- ako su njihovi tipovi naboja jednaki, primjenjujemo definiciju (3.14) na konačne nizove njihovih stupnjeva.

Parcijalan uređaj "$\prec$" definiramo na sljedeći način: za dva monoma b i b' (istog tipa ukupnog naboja $(m_n, \ldots, m_1)$) pišemo $b \prec b'$ ako je

$$b < b' \quad \text{i} \quad (l_n, \ldots, l_1) \prec (l'_n, \ldots, l'_1),$$

gdje je l_i (l'_i) za $i = 1, 2, \ldots, n$ suma stupnjeva svih kvazičestica boje i u monomu b (b').

Poglavlje 4

Skup $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$

Kao i u prethodnom poglavlju, i ovdje se svi iskazani rezultati odnose na kvantnu afinu algebru $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$. Cilj nam je konstruirati sistem izvodnica

$$\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda \subset \bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$$

glavnog potprostora $W(\Lambda)$ pridruženog dominantnoj integralnoj težini $\Lambda \in \hat{P}^+$ oblika

$$\Lambda = c_0\Lambda_0 + c_j\Lambda_j \neq 0 \quad \text{za neki } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Sami dokaz da skup $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$ razapinje glavni potprostor $W(\Lambda)$ bit će proveden slično kao i za afine Liejeve algebre tipa $A_n^{(1)}$ u članku [18] G. Georgieva. U prve tri točke opskrbit ćemo se relacijama između verteks-operatora istih i susjednih boja. Iz njih ćemo, promatrajući koeficijente uz odgovarajuće potencije varijabli, dobiti i relacije između kvazičestica. Kako će se skup $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$ sastojati od monoma kvazičestica tipa 2, htjet ćemo dobiti relacije upravo između tih kvazičestica. Također ćemo vidjeti kako će ponekad slične relacije vrijediti i za kvazičestice tipa 1

Prva skupina relacija je kvantna integrabilnost, koju su u člancima [8] i [6] otkrili J. Ding, T. Miwa i B. Feigin, i zahvaljujući njoj bit će nam dovoljno promatrati samo monome kvazičestica naboja manjeg ili jednakog nivou modula.

Druga skupina relacija će dati vezu između verteks-operatora susjednih boja. Preciznije, za njihov produkt, pomnožen odgovarajućim faktorom, znat ćemo odrediti najniže potencije varijabli koje se javljaju prilikom njegovog djelovanja na maksimalni vektor v_Λ.

Treća skupina relacija odnosit će se na produkte verteks-operatora iste boje. Vidjet ćemo da se radi o relacijama koje su na neki način jednostavnije od svojih klasičnih analogona iz teorije afinih Liejevih algebri.

U zadnjoj točki ćemo, pomoću svih tih relacija, elemente skupa $\bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$, koji se ne nalaze u skupu $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$, zapisivati kao linearnu kombinaciju onih elemenata koji se u njemu nalaze i tako dokazati da skup $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$ razapinje glavni potprostor $W(\Lambda)$.

4.1 Kvantna integrabilnost

U članku [8] J. Ding i T. Miwa su dokazali da je na svakom ireducibilnom $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-modulu najveće težine nivoa c

$$x^+_{\alpha_i}(z_1)x^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{c+1}) = 0, \tag{4.1}$$

kada je

$$z_1/z_2 = z_2/z_3 = \ldots = z_c/z_{c+1} = q^{-2}. \tag{4.2}$$

U članku [6] J. Ding i B. Feigin su dokazali da je na svakom ireducibilnom $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-modulu najveće težine nivoa c

$$\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots \bar{x}^+_{\alpha_i}(z_{c+1}) = 0, \tag{4.3}$$

također uz uvjet (4.2). Oba svojstva, (4.1) i (4.3), zovemo kvantnom integrabilnošću ili, kraće, q-integrabilnošću. Kako se ona dokazuju ulaganjem modula nivoa c u tenzorski produkt c modula nivoa 1 i proučavanjem produkata verteks-operatora na tenzorskim faktorima, tj. tehnikom koju ćemo koristiti u idućoj točki, ovdje navodimo njihov dokaz. Kvantnu integrabilnost ćemo iskazati u terminima kvazičestica tipa 1 i 2, tj. pripadnih verteks-operatora, dok će dokaz biti sličan onome u članku [8].

Propozicija 4.1 *Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c je*

$$x^+_{(c+1)\alpha_i}(z) = 0 \qquad i \qquad \bar{x}^+_{(c+1)\alpha_i}(z) = 0$$

za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dokaz. Za proizvoljan vektor v ireducibilnog modula V najveće težine nivoa c krenimo od izraza

$$\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots \bar{x}^+_{\alpha_i}(z_{c+1})v = x^+_{\alpha_i}(z_1)k^+_i(z_1)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{c+1})k^+_i(z_{c+1})v$$

i prebacimo u njemu sve operatore $k^+_i(z_r)$, $r = 1, 2, \ldots, c+1$, na desnu stranu. Prva jednakost tvrdnje (a) leme 2.15 daje nam

$$\begin{aligned}
&\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots \bar{x}^+_{\alpha_i}(z_{c+1})v \\
&\quad = \left(\prod_{r=1}^{c}\prod_{s=r+1}^{c+1}\left(\frac{1-q^2\frac{z_s}{z_r}}{1-\frac{z_s}{z_r}}\right)\right) x^+_{\alpha_i}(z_1)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{c+1})k^+_i(z_1)\cdots k^+_i(z_{c+1})v.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Sada ćemo modul V uložiti u tenzorski produkt c ireducibilnih modula nivoa 1 i zatim promatrati kako faktor $x^+_{\alpha_i}(z_1)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{c+1})$ djeluje na tom tenzorskom produktu. Njegovo djelovanje je određeno relacijom (2.3) i pomoću nje možemo zapisati formulu za to djelovanje. Formula se sastoji od određenog broja sumanada od kojih je svaki tenzorski produkt od c faktora, koji su verteks-operatori u varijablama $z_1, \ldots z_{c+1}$ i s koeficijentima koji su endomorfizmi odgovarajućeg modula nivoa 1. Dokazat ćemo kako u svakom sumandu postoji barem jedan tenzorski faktor na kojem se verteks-operatori nalaze u poretku koji daje nulu na limesu $\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}}$, poništavajući time i čitav sumand. Podsjećamo da prethodna oznaka, $\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}}$, znači uvođenje supstitucije $z_p = zq^{2(p-1)}$ za svaku varijablu z_p koja se nalazi unutar limesa.

Fiksirajmo jedan proizvoljan sumand. Tada postoji jedinstveni indeks $l_{c+1} = 1, 2, \ldots, c$ takav da se na l_{c+1}-vom faktoru tog sumanda nalazi verteks-operator $x^+_{\alpha_i}(z_{c+1}q^{l_{c+1}-1})$. Nadalje, postoji jedinstveni $l_c = 1, 2, \ldots, c$ takav da se na l_c-tom faktoru tog sumanda nalazi verteks-operator $x^+_{\alpha_i}(z_c q^{l_c-1})$. Sada ćemo na svakom faktoru sumanda verteks-operatore dovesti u sljedeći poredak:

S lijeva na desno prvo se pojavljuju operatori ϕ_i, a zatim, desno od njih, normalno uređen produkt operatora $x^+_{\alpha_i}$. $(\sharp)$

Produkt verteks-operatora u poretku $(\sharp)$ primijenjen na proizvoljan vektor v sadržavat će samo konačno mnogo negativnih potencija varijabli $z_1, \ldots, z_{c+1}$. Takav poredak na svakom faktoru možemo postići pomoću prve dvije relacije tvrdnje (b) leme 2.15. Provedimo diskusiju u ovisnosti o l_{c+1} i l_c.

Ako je $l_{c+1} = l_c$, onda se, prilikom svođenja l_{c+1}-vog faktora našeg sumanda na oblik $(\sharp)$, prema prvoj jednakosti tvrdnje (b) leme 2.15, javlja faktor

$$z_c^2 q^{2(l_{c+1}-1)} \left(1 - \frac{z_{c+1}}{z_c}\right)\left(1 - q^{-2}\frac{z_{c+1}}{z_c}\right). \tag{4.5}$$

Ako je $l_{c+1} > l_c$, onda se na l_c-tom faktoru sumanda, prema formuli (2.3), nalazi produkt verteks-operatora

$$x^+_{\alpha_i}(z_c q^{l_c-1})\phi_i(z_{c+1}q^{l_c-1+1/2}).$$

Naravno, lijevo od njih, na istom faktoru, može se nalaziti još neki verteks-operator u nekoj od varijabli $z_1, z_2, \ldots, z_{c-1}$, ali to nas u ovom trenutku ne zanima. Prilikom svođenja l_c-tog faktora sumanda na oblik $(\sharp)$, prema drugoj jednakosti tvrdnje (b) leme 2.15, pojavit će se faktor

$$\frac{1 - q^{-2}\frac{z_{c+1}}{z_c}}{1 - q^{2}\frac{z_{c+1}}{z_c}}. \tag{4.6}$$

Primijetimo da se izraz (4.5), kao i brojnik od (4.6), poništava na limesu $\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}}$.

Ako je $l_{c+1} < l_c$, možemo nastaviti induktivno. Pronađimo jedinstveni broj l_{c-1} takav da se na l_{c-1}-vom faktoru tenzorskog produkta našeg sumanda nalazi verteks-operator $x^+_{\alpha_i}(z_{c-1}q^{l_{c-1}-1})$. Ako je $l_c \geq l_{c-1}$, tada kao i prije, prilikom svođenja odgovarajućeg faktora tenzorskog produkta na oblik $(\sharp)$, dobivamo faktor koji se poništava na limesu $\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}}$ ili faktor čiji se brojnik ponštava na istom tom limesu. Ako je $l_c < l_{c-1}$

pronađimo broj l_{c-2} takav da se na l_{c-2}-om faktoru tenzorskog produkta nalazi verteks-operator $x^+_{\alpha_i}(z_{c-2}q^{l_{c-2}-1})$ itd.

Prilikom provođenja opisanog postupka pronaći ćemo indekse l_{k+1} i l_k za neki broj $k = 1, 2, \ldots, c$ za koje je $l_{k+1} \geq l_k$ jer bismo u protivnom, nakon c provedenih koraka, dobili strogo padajući niz

$$l_{c+1} < l_c < \ldots < l_2 < l_1$$

koji se sastoji od prirodnih brojeva $1, 2, \ldots, c$.

Ovime smo dokazali kako se prilikom svođenja svakog od sumanada, u formuli koja opisuje djelovanje verteks-operatora $x^+_{\alpha_i}(z_1)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{c+1})$ na tenzorskom produktu c modula nivoa 1, na oblik ($\sharp$), na barem jednom faktoru svakog sumanda javlja član koji se ili poništava na limesu $\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}$, ili se njegov brojnik poništava na istom tom limesu. Kako bismo vidjeli da takav član na limesu $\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}$ zaista poništava čitav sumand, provjerimo da se prilikom svođenja sumanda na oblik ($\sharp$) ne javljaju neki drugi članovi koji bi se s tim članom skratili. Međutim, svi članovi koji se javljaju moraju biti faktori iz prve dvije relacije tvrdnje (b) leme 2.15, tj. moraju biti oblika

$$z_r^2\left(1-\frac{z_s}{z_r}\right)\left(1-q^{-2}\frac{z_s}{z_r}\right) \qquad \text{ili} \qquad \frac{1-q^{-2}\frac{z_s}{z_r}}{1-q^2\frac{z_s}{z_r}} \tag{4.7}$$

za neke $r, s = 1, 2, \ldots, c+1$, $r < s$, pa stoga ne može doći do kraćenja. Sada iz dokazanog slijede tvrdnje propozicije:

Limes

$$\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}\left(\prod_{r=1}^{c}\prod_{s=r+1}^{c+1}\left(1-q^2\frac{z_s}{z_r}\right)\right)x^+_{\alpha_i}(z_1)\ldots x^+_{\alpha_i}(z_{c+1})$$

prema lemi 3.5 postoji i jednak je $x^+_{(c+1)\alpha_i}(z)$. Nadalje, prema dokazanom, ulaganjem modula V u tenzorski produkt c modula nivoa 1, izraz unutar limesa možemo, pomoću formule (2.3), zapisati kao sumu članova koji svi se poništavaju na limesu $\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}$. Zaključujemo da je

$$x^+_{(c+1)\alpha_i}(z) = 0.$$

Prema tvrdnji (b) leme 3.9 postoji limes

$$\begin{aligned}&\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_{c+1})\\ &\quad=\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}\left(\prod_{r=1}^{c}\prod_{s=r+1}^{c+1}\left(\frac{1-q^2\frac{z_s}{z_r}}{1-\frac{z_s}{z_r}}\right)\right)x^+_{\alpha_i}(z_1)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{c+1})k^+_i(z_1)\cdots k^+_i(z_{c+1}).\end{aligned}$$

i on je jednak $\bar{x}^+_{(c+1)\alpha_i}(z)$. Ako izraz u (4.4) pomnožimo s

$$p(z_1,\ldots,z_{c+1}) := \prod_{r=1}^{c}\prod_{s=r+1}^{c+1}\left(1-\frac{z_s}{z_r}\right),$$

dobit ćemo

$$
\begin{aligned}
&p(z_1,\ldots,z_{c+1})\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_{c+1})v\\
&\quad=\prod_{r=1}^{c}\prod_{s=r+1}^{c+1}\left(1-\frac{z_s}{z_r}\right)\prod_{r=1}^{c}\prod_{s=r+1}^{c+1}\left(\frac{1-q^2\frac{z_s}{z_r}}{1-\frac{z_s}{z_r}}\right)x^+_{\alpha_i}(z_1)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{c+1})k^+_i(z_1)\cdots k^+_i(z_{c+1})v\\
&\quad=\prod_{r=1}^{c}\prod_{s=r+1}^{c+1}\left(1-q^2\frac{z_s}{z_r}\right)x^+_{\alpha_i}(z_1)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{c+1})k^+_i(z_1)\cdots k^+_i(z_{c+1})v. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Prema dokazanom je $\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}$ od (4.8),

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}} p(z_1,\ldots,z_{c+1})\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_{c+1})v\\
&\qquad=\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}\left(\prod_{r=1}^{c}\prod_{s=r+1}^{c+1}\left(1-q^2\frac{z_s}{z_r}\right)\right)x^+_{\alpha_i}(z_1)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{c+1})k^+_i(z_1)\cdots k^+_i(z_{c+1})v,
\end{aligned}
$$

jednak nuli. Kako je

$$
\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}} p(z_1,\ldots,z_{c+1})=\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}\prod_{r=1}^{c}\prod_{s=r+1}^{c+1}\left(1-\frac{z_s}{z_r}\right)=\prod_{r=1}^{c}\prod_{s=r+1}^{c+1}\left(1-q^{2(s-r)}\right)\neq 0,
$$

zaključujemo da je

$$
\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_{c+1})v=0.
$$

Time smo dokazali

$$
\bar{x}^+_{(c+1)\alpha_i}(z)=0.
$$

□

Obje tvrdnje sljedećeg korolara mogu se dokazati na isti način kao i tvrdnje propozicije 4.1.

Korolar 4.2 *Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c je*

$$
x^+_{(c+k)\alpha_i}(z)=0 \qquad i \qquad \bar{x}^+_{(c+k)\alpha_i}(z)=0
$$

za svaki $i=1,2,\ldots,n$, $k\in\mathbb{N}$.

Točku završavamo jednim analogonom propozicije 4.1.

Propozicija 4.3 *Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c za svaki $i=1,2,\ldots,n$ i za svaki prirodan broj $m>c$ vrijedi*

$$
\lim_{z_p\to z}\left(\prod_{r=1}^{m-1}\prod_{s=r+1}^{m}\left(1-q^2\frac{z_s}{z_r}\right)\right)x^+_{\alpha_i}(z_1)\ldots x^+_{\alpha_i}(z_m)=0. \qquad (4.9)
$$

Dokaz. Označimo s V modul iz iskaza propozicije i neka je on uložen u tenzorski produkt c ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1. Iz korolara 3.6 vidimo da limes u (4.9) postoji.

Jednakost (4.9) dokazuje se slično kao i propozicija 4.1. Fiksirajmo jedan, proizvoljan sumand od $\Delta^{(c-1)}(x^+_{\alpha_i}(z_1)\dots x^+_{\alpha_i}(z_m))$. Dovedimo verteks-operatore svakog faktora tog sumanda u poredak ($\sharp$). Prema Dirichletovom principu na l-tom faktoru za neki $l = 1,2,\dots,c$ pojavljuju se barem dva operatora $x^+_{\alpha_i}(z_r q^{l-1})$ i $x^+_{\alpha_i}(z_s q^{l-1})$ za neke brojeve $r,s = 1,2,\dots,m$, $s > r$. Prilikom svođenja l-tog faktora na oblik ($\sharp$) pojavit će se, prema prvoj jednakosti tvrdnje (b) leme 2.15, faktor

$$z_r^2 q^{2(l-1)}\left(1-\frac{z_s}{z_r}\right)\left(1-q^{-2}\frac{z_s}{z_r}\right). \tag{4.10}$$

Sada, kao u propoziciji 4.1, zaključujemo da će faktor $(1 - z_s/z_r)$ iz (4.10) na limesu $\lim_{z_p\to z}$, poništiti čitav sumand. □

4.2 Kvantna kvazi-kompatibilnost

Htjeli bismo na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa c proučiti produkt operatora $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1)$ i $\bar{x}^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$, $i = 2,3,\dots,n$, susjednih boja i proizvoljnih naboja $m,k \in \mathbb{N}$. Tako ćemo vidjeti koje su najniže potencije varijabli z_1 i z_2 koje se javljaju prilikom djelovanja produkta $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$ na maksimalni vektor tog modula. Čitavo vrijeme ćemo koristiti realizaciju ireducibilnog modula najveće težine nivoa c kao podmodula tenzorskog produkta c ireducibilnih modula nivoa 1.

Sljedeća lema je proširenje leme 2.7. iz članka [5] J. Dinga i B. Feigina na verteks-operatore $x^+_{m\alpha_i}(z)$ i $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$, $i = 1,2,\dots,n$, $m \in \mathbb{N}$, koje smo uveli u prethodnom poglavlju. Za operator $x^+_{m\alpha_i}(z)$ ćemo tvrdnju leme dokazati istom tehnikom kao u [5], Frenkel-Jingovom realizacijom modula nivoa 1 i Drinfeldovom strukturom Hopfove algebre, dok će nam za operator $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$ biti potrebna dodatna diskusija.

Lema 4.4 *Promatramo djelovanje od $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$ i $x^+_{m\alpha_i}(z)$ na vektor v ireducibilnog modula najveće težine nivoa $c \geq m$ uloženog u tenzorski produkt c ireducibilnih modula najveće težine nivoa* 1. *Ono je zadano formulom (2.3).*

(a) Limes $\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}$ svakog sumanda od $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$ ili $x^+_{m\alpha_i}(z)$, na čijoj se l-toj komponenti, $l = 1,2,\dots,c$, nalaze barem dva operatora $x^+_{\alpha_i}(z_r q^{l-1})$ za različite $r = 1,\dots,m$, jednak je nuli.

(b) Ako se s-ti član od

$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z) = \lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}} \bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\dots\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_s)\dots\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_m),$$

$x^+_{\alpha_i}(z_s)$, ili s-ti član od

$$x^+_{m\alpha_i}(z) = \lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}} \left(\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right)\right) x^+_{\alpha_i}(z_1)\dots x^+_{\alpha_i}(z_s)\dots x^+_{\alpha_i}(z_m),$$

$x^+_{\alpha_i}(z_s)$, nalazi na l-tom faktoru nekog sumanda i ako se $(s+1)$-vi član, $x^+_{\alpha_i}(z_{s+1})$, nalazi na k-tom faktoru za neki $k \geq l$, onda je limes $\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}}$ tog sumanda jednak nuli.

Dokaz. (a) Prvo tvrdnju dokazujemo za operator $x^+_{m\alpha_i}(z)$. Modul V možemo realizirati kao podmodul tenzorskog produkta c ireducibilnih modula nivoa 1,

$$V \subset V_1 \otimes \dots \otimes V_c.$$

Pritom je djelovanje od $x^+_{\alpha_i}(z_1)x^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_m)$ na $V_1 \otimes \dots \otimes V_c$ određeno formulom (2.3). Operator $\Delta^{(c-1)}(x^+_{\alpha_i}(z_1)x^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_m))$ će biti suma nekog broja članova i pritom će l-ti faktor svakog člana, $l = 1, 2, \dots, c$, biti ili operator 1 ili produkt nekih od verteks-operatora $x^+_{\alpha_i}(z_r q^{l-1})$ i $\phi_i(z_s q^{l+1/2})$ za $r, s = 1, 2, \dots, m$. Primjer jednog takvog sumanda za $m = c = 4$ zapisali smo u (2.5). Koristeći prve dvije formule tvrdnje (b) leme 2.15 htjeli bismo verteks-operatore na svakom faktoru svakog sumanda od $\Delta^{(c-1)}(x^+_{\alpha_i}(z_1)x^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_m))$ poredati kao u ($\sharp$): na desnu stranu l-tog faktora, gdje je $l = 1, 2, \dots, c$, stavimo normalno uređen produkt svih operatora $x^+_{\alpha_i}(z_r q^{l-1})$, $r = 1, 2, \dots, m$, koji se nalaze na l-tom faktoru; lijevo od njega stavimo produkt svih operatora $\phi_i(z_s q^{l-1/2})$, $s = 1, 2, \dots, m$, koji se nalaze na l-tom faktoru. Dakle, l-ti faktor će tada imati oblik

$$\phi_i(z_{\sigma_1} q^{l-1/2}) \cdots \phi_i(z_{\sigma_a} q^{l-1/2}) : x^+_{\alpha_i}(z_{\sigma_{a+1}} q^{l-1}) \cdots x^+_{\alpha_i}(z_{\sigma_b} q^{l-1}) :, \tag{4.11}$$

gdje su $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a + b \leq m$, $\sigma_r = 1, 2, \dots, m$ za $r = 1, 2, \dots, b$ takvi da je

$$\sigma_1 < \ldots < \sigma_a \quad \text{i} \quad \sigma_{a+1} < \ldots < \sigma_b.$$

Time ćemo postići da je l-ti faktor svakog sumanda element od $\mathrm{Hom}(V_l, V_l((z_1, \dots, z_m)))$. Naravno, takvim permutiranjem verteks-operatora pojavit će se ispred svakog sumanda neka racionalna funkcija $f = g/h$, gdje su g i h polinomi s koeficijentima iz polja $\mathbb{C}(q^{1/2})$ u varijablama z_r i z_s/z_r za $1 \leq r < s \leq m$. Funkciju $f = g/h$ možemo odrediti pomoću prve dvije formule tvrdnje (b) leme 2.15. Faktori dobiveni primjenom prve formule oblika su

$$q^{2(l-1)} z_r^2 \left(1 - \frac{z_s}{z_r}\right)\left(1 - q^{-2}\frac{z_s}{z_r}\right) \qquad \text{za } 1 \leq r < s \leq m,\ l = 1, 2, \dots, m, \tag{4.12}$$

a faktori iz druge formule

$$q^2 \frac{1 - q^{-2}\frac{z_s}{z_r}}{1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}} \qquad \text{za } 1 \leq r < s \leq m. \tag{4.13}$$

Promotrimo proizvoljan sumand od $\Delta^{(c-1)}(x^+_{\alpha_i}(z_1)x^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_m))$ koji na nekom svom l-tom faktoru sadrži $x^+_{\alpha_i}(z_r q^{l-1})$ i $x^+_{\alpha_i}(z_s q^{l-1})$, $r < s$. Označimo sa $f = g/h$ racionalnu funkciju koja se javlja nakon što svaki njegov faktor svedemo na oblik iz (4.11). Prema dokazu leme 3.5 nazivnik h uvijek će se skratiti sa nekim faktorima od

$$\prod_{t=1}^{m-1}\prod_{u=t+1}^{m}\left(1 - q^2\frac{z_u}{z_t}\right)$$

pa će ispred sumanda ostati samo produkt polinoma s koeficijentima iz $\mathbb{C}(q^{1/2})$ u varijablama z_t i z_u/z_t za $1 \leq t < u \leq m$.

Ako su r i s susjedni, tj. ako je $r + 1 = s$, limes $z_p \to zq^{2(p-1)}$ promatranog sumanda bit će nula zbog kvantne integrabilnosti (propozicija 4.1).

Ako r i s nisu susjedni, dovoljno je vidjeti da postoji cijeli broj u, $0 \leq u \leq s - r - 1$, za koji će se na nekom k-tom faktoru, $k \leq l$, prije nego što ga svedemo na oblik iz (4.11), pojaviti

$$\ldots x^+_{\alpha_i}(z_{r+u}q^{k-1})\phi_i(z_{r+u+1}q^{k-1+\frac{1}{2}})\ldots. \tag{4.14}$$

Naime, iz druge formule tvrdnje (b) leme 2.15 vidimo da će nam taj član dati u brojniku od f, tj. u g, prilikom svođenja (4.14) na oblik iz (4.11), faktor

$$1 - q^{-2}\frac{z_{r+u+1}}{z_{r+u}},$$

koji će onda na limesu $z_p \to zq^{2(p-1)}$ poništiti čitav sumand. Dokažimo da takav u postoji.

Pretpostavimo suprotno, tj. da takav u ne postoji. Tada se operator $x^+_{\alpha_i}(z_{r+1}q^{l_1-1})$ nalazi na nekom faktoru $l_1 < l$ (jer bi inače u postojao i bio jednak nuli). Nadalje, operator $x^+_{\alpha_i}(z_{r+2}q^{l_2-1})$ nalazi se se na nekom faktoru $l_2 < l_1 < l$ (jer bi inače u postojao i bio jednak 1), operator $x^+_{\alpha_i}(z_{r+3}q^{l_3-1})$ nalazi se na nekom faktoru $l_3 < l_2 < l_1 < l$ (jer bi inače u postojao i bio jednak 2) itd. Napokon, operator $x^+_{\alpha_i}(z_s q^{l_{s-r-1}-1})$ nalazi se na nekom faktoru $l_{s-r-1} < l_{s-r-2} < \ldots < l$. Dakle, u promatranom sumandu se $x^+_{\alpha_i}(z_s q^{l_{s-r-1}-1})$ nalazi na l_{s-r-1}-vom, a $x^+_{\alpha_i}(z_s q^{l-1})$ na l-tom faktoru, pri čemu je $l_{s-r-1} < l$. Kontradikcija!

Ovime smo dokazali da postoji nenegativan cijeli broj u sa traženim svojstvima pa slijedi tvrdnja (a) za operator $x^+_{m\alpha_i}(z)$.

Dokažimo tvrdnju za operator $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$. Započinjemo kao u dokazu propozicije 4.1. Za proizvoljan vektor v ireducibilnog modula V najveće težine nivoa c krenimo od izraza

$$\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_m)v = x^+_{\alpha_i}(z_1)k^+_i(z_1)x^+_{\alpha_i}(z_2)k^+_i(z_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_m)k^+_i(z_m)v$$

i prebacimo u njemu sve operatore $k^+_i(z_r)$, $r = 1, 2, \ldots, m$, na desnu stranu. Prva jednakost tvrdnje (a) leme 2.15 daje nam

$$\begin{aligned}&\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_m)v\\ &= \prod_{r=1}^{m-1}\prod_{s=r+1}^{m}\left(\frac{1 - q^2\frac{z_s}{z_r}}{1 - \frac{z_s}{z_r}}\right)x^+_{\alpha_i}(z_1)x^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_m)k^+_i(z_1)k^+_i(z_2)\cdots k^+_i(z_m)v.\end{aligned}$$

Odaberimo proizvoljan sumand $S(z_1,\dots,z_m)$ od $\Delta^{(c-1)}(x^+_{\alpha_i}(z_1)x^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_m))$ koji na nekom svom l-tom faktoru sadrži $x^+_{\alpha_i}(z_r q^{l-1})$ i $x^+_{\alpha_i}(z_s q^{l-1})$, $r<s$. Označimo sa $f=g/h$ racionalnu funkciju koja se javlja nakon što svaki njegov faktor svedemo na oblik iz (4.11). Prema dokazu leme 3.5 nazivnik h uvijek će se skratiti sa brojnikom od

$$\prod_{r=1}^{m-1}\prod_{s=r+1}^{m}\left(\frac{1-q^2\frac{z_s}{z_r}}{1-\frac{z_s}{z_r}}\right)$$

Analogno kao u dokazu tvrdnje (a) za operator $x^+_{m\alpha_i}(z)$ možemo pronaći cijeli broj u, $0\le u\le s-r-1$, za koji će se ispred sumanda pojaviti faktor

$$1-q^{-2}\frac{z_{r+u+1}}{z_{r+u}}.$$

Dakle, ispred promatranog sumanda (čiji su faktori oblika (4.11)) će se naći sljedeći faktori:

- $\left(1-q^{-2}\dfrac{z_{r+u+1}}{z_{r+u}}\right)$ za neki $u\in\mathbb{Z}$, $0\le u\le s-r-1$;
- $\left(1-\dfrac{z_{s'}}{z_{r'}}\right)$ za neke $r', s'\in\mathbb{Z}$, $1\le r'<s'\le m$;
- $\left(1-q^{-2}\dfrac{z_{s'}}{z_{r'}}\right)$ za neke $r', s'\in\mathbb{Z}$, $1\le r'<s'\le m$;
- $\left(1-q^{2}\dfrac{z_{s'}}{z_{r'}}\right)$ za neke $r', s'\in\mathbb{Z}$, $1\le r'<s'\le m$;
- $\displaystyle\prod_{r'=1}^{m-1}\prod_{s'=r'+1}^{m}\frac{1}{1-z_{s'}/z_{r'}}$.

Dakle, ako sumand $S(z_1,\dots,z_m)$ pomnožimo sa

$$\prod_{r'=1}^{m-1}\prod_{s'=r'+1}^{m}\left(1-\frac{z_{s'}}{z_{r'}}\right),$$

dobit ćemo izraz za čiji limes $z_p\to zq^{2(p-1)}$ možemo, analogno kao u dokazu tvrdnje (a) za operator $x^+_{m\alpha_i}(z)$, zaključiti da je on jednak nuli. Nadalje, kako je

$$\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}\prod_{r'=1}^{m-1}\prod_{s'=r'+1}^{m}\left(1-\frac{z_{s'}}{z_{r'}}\right)=\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}\prod_{r'=1}^{m-1}\prod_{s'=r'+1}^{m}\left(1-q^{2(s'-r')}\right)\neq 0,$$

zaključujemo da je limes $z_p\to zq^{2(p-1)}$ sumanda $S(z_1,\dots,z_m)$ jednak nuli na V.

(b) Druga tvrdnja je posljedica dokaza prve. Ako se s-ti član od $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$ ili $x^+_{m\alpha_i}(z)$ nalazi na l-tom faktoru nekog sumanda, a $(s+1)$-vi član, $x^+_{\alpha_i}(z_{s+1})$, na k-tom faktoru istog sumanda za neki $k\ge l$, onda se ili obojica nalaze na istom faktoru što prema tvrdnji (a), na limesu $\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}}$ poništava čitav sumand ili je $k > l$. Ako je $k > l$, onda na l-tom faktoru imamo

$$\ldots x^+_{\alpha_i}(z_s q^{l-1}) \phi_i(z_{s+1} q^{l-1+\frac{1}{2}}) \ldots$$

što, kao u dokazu tvrdnje (a), na limesu $\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}}$ opet poništava čitav sumand. $\square$

Neka je $m = c = 4$. Primijetimo kako je limes $\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}}$ sumanda (3.8),

$$\begin{array}{lllll}
 & x^+_{\alpha_i}(z_1) & \phi_i(z_2 q^{1/2}) & \phi_i(z_3 q^{1/2}) & \phi_i(z_4 q^{1/2}) \\
\otimes & & x^+_{\alpha_i}(z_2 q) & \phi_i(z_3 q^{3/2}) & x^+_{\alpha_i}(z_4 q) \\
\otimes & & & \phi_i(z_3 q^{5/2}) & \\
\otimes & & & x^+_{\alpha_i}(z_3 q^3), &
\end{array}$$

pomnoženog se

$$\prod_{r=1}^{3} \prod_{s=r+1}^{4} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right)$$

jednak nuli. To možemo zaključiti iz tvrdnje (a) prethodne leme jer na drugom faktoru imamo dva operatora, $x^+_{\alpha_i}(z_2 q)$ i $x^+_{\alpha_i}(z_4 q)$, ali i iz tvrdnje (b) jer se, npr. $x^+_{\alpha_i}(z_1)$ nalazi na prvom, a $x^+_{\alpha_i}(z_2 q)$ na drugom faktoru.

U slučaju $m = c = 4$ je

$$\begin{aligned}
& \phi_i(z_1 q^{1/2}) \ \phi_i(z_2 q^{1/2}) \ \phi_i(z_3 q^{1/2}) \ x^+_{\alpha_i}(z_4) \\
\otimes\ & \phi_i(z_1 q^{3/2}) \ \phi_i(z_2 q^{3/2}) \ x^+_{\alpha_i}(z_3 q) \\
\otimes\ & \phi_i(z_1 q^{5/2}) \ x^+_{\alpha_i}(z_2 q^2) \\
\otimes\ & x^+_{\alpha_i}(z_1 q^3).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

jedini sumand za čiji limes ne možemo, iz tvrdnji prethodne leme, zaključiti da je jednak nuli.

U ostatku ove točke promatrat ćemo isključivo sumande od

$$\Delta^{c-1}(x^+_{\alpha_i}(z_1) \cdots x^+_{\alpha_i}(z_m))$$

koji ne zadovoljavaju pretpostavke tvrdnji (a) i (b) leme 4.4, tj. takve da vrijedi sljedeće:

> Verteks-operatori $x^+_{\alpha_i}(z_r)$ su poredani po tenzorskim faktorima sumanda silazno s obzirom na indekse r svojih varijabli. Preciznije, za svaki $r = 1, 2, \ldots, m-1$ vrijedi: ako se $x^+_{\alpha_i}(z_{r+1})$ nalazi na l-tom, onda se $x^+_{\alpha_i}(z_r)$ nalazi na k-tom faktoru za neki $k > l$. $\quad (\Delta)$

Lema 4.5 *Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa 1 za $i = 2, 3, \ldots, n$ i za prirodne brojeve r i s vrijedi*

$$\begin{aligned}
&x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{2(r-1)})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{1}{2}})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{5}{2}})\ldots\phi_{i-1}(z_2 q^{2(s-2)+\frac{1}{2}})x^+_{\alpha_{i-1}}(z_2 q^{2(s-1)})\\
&= q^{1-s}\frac{1}{z_1}\frac{1}{1-q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}}\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{1}{2}})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{5}{2}})\ldots\phi_{i-1}(z_2 q^{2(s-2)+\frac{1}{2}})\\
&\quad\cdot : x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{2(r-1)})x^+_{\alpha_{i-1}}(z_2 q^{2(s-1)}) : .
\end{aligned}$$

Specijalno, za $s = 1$ u gornjoj jednakosti nema niti jednog operatora $\phi_{i-1}(z)$.

Dokaz. Iz pete formulu tvrdnje (b) leme 2.15 dobivamo da se kod komutiranja operatora $x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{2(r-1)})$ sa redom svim operatorima $\phi_{i-1}(z_2 q^l)$, $l = 1/2, 5/2, \ldots, 2(s-1)+1/2$, pojavljuje faktor

$$q^{1-s}\prod_{t=2}^{s}\frac{1-q^{2(t-r)-1}\frac{z_2}{z_1}}{1-q^{2(t-r)-3}\frac{z_2}{z_1}} = q^{1-s}\frac{1-q^{2(s-r)-1}\frac{z_2}{z_1}}{1-q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}}, \tag{4.16}$$

tj. preciznije, da je

$$\begin{aligned}
&x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{2(r-1)})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{1}{2}})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{5}{2}})\ldots\phi_{i-1}(z_2 q^{2(s-2)+\frac{1}{2}})\\
&= q^{1-s}\frac{1-q^{2(s-r)-1}\frac{z_2}{z_1}}{1-q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}}\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{1}{2}})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{5}{2}})\ldots\phi_{i-1}(z_2 q^{2(s-2)+\frac{1}{2}})x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{2(r-1)}).
\end{aligned}\tag{4.17}$$

Sada, pomoću četvrte formule tvrdnje (b) leme 2.15 i (4.17) dobivamo traženu jednakost:

$$\begin{aligned}
&x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{2(r-1)})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{1}{2}})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{5}{2}})\ldots\phi_{i-1}(z_2 q^{2(s-2)+\frac{1}{2}})x^+_{\alpha_{i-1}}(z_2 q^{2(s-1)})\\
&= q^{1-s}\frac{1-q^{2(s-r)-1}\frac{z_2}{z_1}}{1-q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}}\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{1}{2}})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{5}{2}})\ldots\phi_{i-1}(z_2 q^{2(s-2)+\frac{1}{2}})\\
&\quad\cdot x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{2(r-1)})x^+_{\alpha_{i-1}}(z_2 q^{2(s-1)})\\
&= q^{1-s}\frac{1-q^{2(s-r)-1}\frac{z_2}{z_1}}{1-q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}}\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{1}{2}})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{5}{2}})\ldots\phi_{i-1}(z_2 q^{2(s-2)+\frac{1}{2}})\\
&\quad\cdot\frac{1}{z_1}\frac{1}{1-q^{2(s-r)-1}\frac{z_2}{z_1}} : x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{2(r-1)})x^+_{\alpha_{i-1}}(z_2 q^{2(s-1)}) :\\
&= q^{1-s}\frac{1}{z_1}\frac{1}{1-q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}}\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{1}{2}})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{5}{2}})\ldots\phi_{i-1}(z_2 q^{2(s-2)+\frac{1}{2}})\\
&\quad\cdot : x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{2(r-1)})x^+_{\alpha_{i-1}}(z_2 q^{2(s-1)}) : .
\end{aligned}$$

□

Sljedeća lema je posljedica dokaza prethodne leme.

Lema 4.6 *Na ireducibilnom modulu najveće težine nivoa 1 za $i = 2, 3, \ldots, n$, i za prirodne brojeve r i s vrijedi*

$$\begin{aligned}
&x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{2(r-1)})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{1}{2}})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{5}{2}})\ldots\phi_{i-1}(z_2 q^{2(s-1)+\frac{1}{2}})\\
&= \frac{1-q^{2(s-r)+1}\frac{z_2}{z_1}}{1-q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}}\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{1}{2}})\phi_{i-1}(z_2 q^{\frac{5}{2}})\ldots\phi_{i-1}(z_2 q^{2(s-2)+\frac{1}{2}})x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{2(r-1)}).
\end{aligned}$$

Već smo naglasili kako promatramo samo sumande od

$$\Delta^{c-1}(x^+_{\alpha_j}(z_1)\cdots x^+_{\alpha_j}(z_m)), \quad j=1,2,\dots n,$$

koji zadovoljavaju uvjet (Δ). l-ti faktor takvog sumanda može biti ili operator 1 ili oblika

$$\phi_j(z_1q^{l-1/2})\cdots\phi_j(z_mq^{l-1/2}) \quad \text{ili} \quad \phi_j(z_1q^{l-1/2})\cdots\phi_j(z_{m-1}q^{l-1/2})x^+_{\alpha_j}(z_mq^{l-1}).$$

Prema tome, leme 4.5 i 4.6 daju nam racionalne funkcije kojima treba pomnožiti tenzorski faktor produkta dva sumanda susjednih boja, i i $i-1$, u različitim varijablama da bismo na njemu dobili sljedeći poredak verteks-operatora:

> S lijeva na desno prvo se pojavljuju operatori ϕ_i, zatim operatori ϕ_{i-1} i zatim, na kraju, ili operator $x^+_{\alpha_i}$ ili operator $x^+_{\alpha_{i-1}}$ ili normalno uređen produkt operatora $x^+_{\alpha_i}$ i $x^+_{\alpha_{i-1}}$. (*)

Lema 4.7 *Promatramo djelovanje produkta $x^+_{m\alpha_i}(z_1)x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$, $m,k\in\mathbb{N}$, $i=2,3,\dots,n$, na vektor v ireducibilnog modula najveće težine nivoa $c\geq m,k$ uloženog u tenzorski produkt c ireducibilnih modula najveće težine nivoa* 1. *Ono je zadano formulom (2.3).*

Postoji polinom $B(z)\in\mathbb{C}(q^{1/2})[z]$, $B(0)=1$, takav da je

$$z_1^{\min\{m,k\}}B(z_2/z_1)x^+_{m\alpha_i}(z_1)x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2) \tag{4.18}$$

$\mathbb{C}(q^{1/2})[z_1,z_2/z_1]$-linearna kombinacija sumanada čiji tenzorski faktori sadrže verteks-operatore u poretku (*).

Polinom $B(z)$ dan je sa

$$B(z)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{r=1}^{m}\left(1-q^{1-2r}z\right), & \text{ako je } m\leq k;\\ \displaystyle\prod_{r=m-k+1}^{m}\left(1-q^{1-2r}z\right), & \text{ako je } m>k.\end{cases} \tag{4.19}$$

Prije dokaza ćemo tvrdnju leme ilustrirati na jednom primjeru. Neka je $m=4$, $k=2$ i $c=4$. U (4.15) smo već zapisali jedan sumand od $\Delta^{(3)}(x^+_{\alpha_i}(z_1)\dots x^+_{\alpha_i}(z_4))$ pa ćemo ovdje opet iskoristiti njega. Jedan sumand od $\Delta^{(3)}(x^+_{\alpha_{i-1}}(w_1)x^+_{\alpha_{i-1}}(w_2))$ glasi

$$\begin{aligned}&\phi_{i-1}(w_1q^{1/2})\ x^+_{\alpha_{i-1}}(w_2)\\ \otimes\ & x^+_{\alpha_{i-1}}(w_1q)\\ \otimes\ & 1\\ \otimes\ & 1.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Produkt sumanada (4.15) i (4.20) glasi

$$\begin{aligned}
&\phi_i(z_1q^{1/2})\ \phi_i(z_2q^{1/2})\ \phi_i(z_3q^{1/2})\ x^+_{\alpha_i}(z_4)\ \phi_{i-1}(w_1q^{1/2})\ x^+_{\alpha_{i-1}}(w_2)\\
\otimes\ &\phi_i(z_1q^{3/2})\ \phi_i(z_2q^{3/2})\ x^+_{\alpha_i}(z_3q) \qquad\qquad\quad x^+_{\alpha_{i-1}}(w_1q)\\
\otimes\ &\phi_i(z_1q^{5/2})\ x^+_{\alpha_i}(z_2q^2)\\
\otimes\ &x^+_{\alpha_i}(z_1q^3).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Promotrimo četvrtu i petu jednakost u tvrdnji (b) leme 2.15. Ako bismo prvi faktor sumanda (4.21) pomnožili sa

$$q\frac{1-q^{-1}\frac{w_1}{z_4}}{1-q\frac{w_1}{z_4}}\cdot z_4\left(1-q^{-1}\frac{w_2}{z_4}\right), \tag{4.22}$$

a drugi faktor sa

$$z_3q\left(1-q^{-1}\frac{w_1}{z_3}\right) \tag{4.23}$$

dobili bismo

$$\begin{aligned}
&\phi_i(z_1q^{1/2})\ \phi_i(z_2q^{1/2})\ \phi_i(z_3q^{1/2})\ \phi_{i-1}(w_1q^{1/2})\ \ : x^+_{\alpha_i}(z_4)\ x^+_{\alpha_{i-1}}(w_2) :\\
\otimes\ &\phi_i(z_1q^{3/2})\ \phi_i(z_2q^{3/2})\ \ : x^+_{\alpha_i}(z_3q)\ x^+_{\alpha_{i-1}}(w_1q) :\\
\otimes\ &\phi_i(z_1q^{5/2})\ x^+_{\alpha_i}(z_2q^2)\\
\otimes\ &x^+_{\alpha_i}(z_1q^3).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

To je upravo poredak verteks-operatora po faktorima tenzorskog produkta opisan u (*). Preostaje nam još samo primijetiti kako produkt od (4.22) i (4.23) na limesima $\lim_{z_p\to zq^{2(p-1)}}$, $\lim_{w_p\to wq^{2(p-1)}}$ daje

$$z^2q^{12}\left(1-q^{-5}\frac{w}{z}\right)\left(1-q^{-7}\frac{w}{z}\right).$$

Prema definiciji (4.19) je za $m=c=4$ i $k=2$

$$B(z)=\left(1-q^{-5}\frac{w}{z}\right)\left(1-q^{-7}\frac{w}{z}\right)$$

pa smo time dokazali kako množenjem (4.21) sa $z^2B(w/z)$ dobivamo upravo (4.24). Dokažimo sada lemu 4.7.

Dokaz. Neka su m i k prirodni brojevi. Označimo varijable unutar limesa kao u sljedećim formulama:

$$x^+_{m\alpha_i}(z_1)=\lim_{z'_p\to z_1q^{2(p-1)}}\left(\prod_{r=1}^{m-1}\prod_{s=r+1}^{m}\left(1-q^2\frac{z'_s}{z'_r}\right)\right)x^+_{\alpha_i}(z'_1)x^+_{\alpha_i}(z'_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z'_m),$$

$$x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)=\lim_{z''_p\to z_2q^{2(p-1)}}\left(\prod_{r=1}^{k-1}\prod_{s=r+1}^{k}\left(1-q^2\frac{z''_s}{z''_r}\right)\right)x^+_{\alpha_{i-1}}(z''_1)x^+_{\alpha_{i-1}}(z''_2)\cdots x^+_{\alpha_{i-1}}(z''_k).$$

Prvo dokazujemo lemu u slučaju $m \leq k$. Fiskirajmo jedan sumand S_i od

$$\Delta^{(c-1)}(x^+_{\alpha_i}(z_1^{'})x^+_{\alpha_i}(z_2^{'})\cdots x^+_{\alpha_i}(z_m^{'})) \tag{4.25}$$

i jedan sumand S_{i-1} od

$$\Delta^{(c-1)}(x^+_{\alpha_{i-1}}(z_1^{''})x^+_{\alpha_{i-1}}(z_2^{''})\cdots x^+_{\alpha_{i-1}}(z_k^{''})). \tag{4.26}$$

Pretpostavimo da se operatori $x^+_{\alpha_i}(z_r^{'})$, $r = 1, 2, \ldots, m$, nalaze u sumandu S_i na faktorima $l_1, l_2, \ldots l_m$, $l_1 > l_2 > \ldots > l_m$. Tada na preostalih $c - m$ faktora produkta $S_i S_{i-1}$ već imamo poredak verteks-operatora kao u (*). Ako za svaki $r = 1, 2, \ldots, m$ produkt $x^+_{m\alpha_i}(z_1)x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$ pomnožimo s

$$z_1\left(1 - q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}\right), \tag{4.27}$$

vidimo iz lema 4.5 i 4.6 da ćemo na faktorima l_r, $r = 1, 2, \ldots, m$, od $S_i S_{i-1}$ također dobiti poredak verteks-operatora, unutar limesa, kao u (*). Naime, kvocijenti argumenata operatora $x^+_{\alpha_i}$ i $x^+_{\alpha_{i-1}}$ te operatora $x^+_{\alpha_i}$ i ϕ_{i-1}, koji djeluju na istom faktoru, ne ovise o tom faktoru. Primjerice, za svaki $l = 1, 2, \ldots, c$ na l-tom faktoru imamo

$$\begin{aligned} x^+_{\alpha_i}(z_r^{'}q^{2(l-1)})x^+_{\alpha_{i-1}}(z_s^{'}q^{2(l-1)}) &= \frac{1}{z_r^{'}q^{2(l-1)}}\frac{1}{1 - q^{-1}\frac{z_s^{'}q^{2(l-1)}}{z_r^{'}q^{2(l-1)}}} : x^+_{\alpha_i}(z_r^{'}q^{2(l-1)})x^+_{\alpha_{i-1}}(z_s^{'}q^{2(l-1)}) : \\ &= \frac{1}{z_r^{'}q^{2(l-1)}}\frac{1}{1 - q^{-1}\frac{z_s^{'}}{z_r^{'}}} : x^+_{\alpha_i}(z_r^{'}q^{2(l-1)})x^+_{\alpha_{i-1}}(z_s^{'}q^{2(l-1)}) : . \end{aligned}$$

Prema tome, množenjem $S_i S_{i-1}$ s (4.27) zaista dobivamo poredak (*) na svakom faktoru.

Dakle, za polinom $B(z)$ iz jednakosti (4.18) možemo uzeti

$$B(z) = \prod_{r=1}^{m}\left(1 - q^{1-2r}z\right).$$

Tada je očito $B(0) = 1$ i

$$z_1^m B(z_2/z_1)x^+_{m\alpha_i}(z_1)x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$$

je $\mathbb{C}(q^{1/2})[z_1, z_2/z_1]$-linearna kombinacija sumanada čiji tenzorski faktori sadrže verteks-operatore u poretku (*).

Dokažimo lemu u slučaju $m > k$. Fiskirajmo jedan sumand S_i od (4.25) i jedan sumand S_{i-1} od (4.26). Na isti način kao u slučaju $m \leq k$ moglo bi se dokazati, koristeći leme 4.5 i 4.6, da ćemo množenjem produkta $x^+_{m\alpha_i}(z_1)x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$ sa

$$z_1^k \prod_{r=1}^{m}\left(1 - q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}\right) \tag{4.28}$$

na svakom faktoru svakog sumanda dobiti poredak verteks-operatora kao u (*). Naravno, pritom nećemo imati samo sumu takvih izmijenjenih sumanada već njihovu $\mathbb{C}(q^{1/2})[z_2/z_1]$-linearnu kombinaciju. Potencija k varijable z_1 u (4.28) javlja se jer u S_{i-1} imamo k verteks-operatora $x^+_{\alpha_{i-1}}$, a svaki faktor $(1-q^{1-2r}z_2/z_1)$, $r=1,2,\ldots,m$, u (4.28) odgovara jednom od m verteks-operatora $x^+_{\alpha_i}$, koji se nalazi na nekom faktoru od S_i.

Htjeli bismo dokazati kako je, da bi se na svakom faktoru svakog sumanda dobio poredak (*), dovoljno $x^+_{m\alpha_i}(z_1)x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$ pomnožiti sa

$$z_1^k \prod_{r=m-k+1}^{m} \left(1-q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}\right), \tag{4.29}$$

tj. da nam dodatni faktori $(1-q^{1-2r}z_2/z_1)$, $r=1,2,\ldots,m-k$, koji se pojavljuju u (4.28), nisu potrebni. Uvedimo oznaku

$$B(z) := \prod_{r=m-k+1}^{m} \left(1-q^{1-2r}z\right).$$

Pretpostavimo da ne vrijedi tvrdnja leme, tj. da u

$$z_1^k B(z_2/z_1)x^+_{m\alpha_i}(z_1)x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2) \tag{4.30}$$

nemamo $\mathbb{C}(q^{1/2})[z_1, z_2/z_1]$-linearnu kombinaciju sumanada iako njihovi tenzorski faktori sadrže verteks-operatore u poretku (*). To znači da se neki od nazivnika $(1-q^{1-2r}z_2/z_1)$, $r=1,2,\ldots,m-k$, koji se javljaju na desnim stranama formula iz lema 4.5 i 4.6, nije skratio. Dakle, ispred barem jednog od sumanada izraza (4.30) nalazi se barem jedan faktor

$$\frac{1}{1-q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}} \quad \text{za neki } r=1,2,\ldots,m-k. \tag{4.31}$$

Dokažimo da je to nemoguće.

Faktor (4.31) se mogao pojaviti ispred S_iS_{i-1} ako i samo ako se na nekom l-tom faktoru, $l=1,2,\ldots,c$, od S_i pojavljuje $x^+_{\alpha_i}(z'_r q^{l-1})$ i pritom je l-ti faktor od S_{i-1} različit od 1.

Neka se na l_1-vom faktoru od S_i pojavljuje $x^+_{\alpha_i}(z'_{r+k}q^{l_1-1})$. Ako se na l_1-vom faktoru od S_{i-1} pojavljuje $\phi_{i-1}(z''_k q^{l_1-1/2})$, onda, kao u dokazu leme 4.6, na l_1-vom faktoru od S_iS_{i-1} možemo provesti račun:

$$\begin{aligned} &x^+_{\alpha_i}(z'_{r+k}q^{l_1-1})\phi_{i-1}(z''_1 q^{l_1-1/2})\ldots\phi_{i-1}(z''_k q^{l_1-1/2}) \\ &\quad= q^{-k}\prod_{s=1}^{k}\frac{1-q\frac{z''_s}{z'_{r+k}}}{1-q^{-1}\frac{z''_s}{z'_{r+k}}}\phi_{i-1}(z''_1 q^{l_1-1/2})\ldots\phi_{i-1}(z''_k q^{l_1-1/2})x^+_{\alpha_i}(z'_{r+k}q^{l_1-1}). \end{aligned}$$

Na limesima $\lim_{z'_p \to z_1 q^{2(p-1)}}$ i $\lim_{z''_p \to z_2 q^{2(p-1)}}$ član

$$\prod_{s=1}^{k} \frac{1 - q\frac{z''_s}{z'_{r+k}}}{1 - q^{-1}\frac{z''_s}{z'_{r+k}}}$$

prelazi u

$$\prod_{s=1}^{k} \frac{1 - q\frac{z_2 q^{2(s-1)}}{z_1 q^{2(r+k-1)}}}{1 - q^{-1}\frac{z_2 q^{2(s-1)}}{z_1 q^{2(r+k-1)}}} = \prod_{s=1}^{k} \frac{1 - q^{2(s-(r+k))+1}\frac{z_2}{z_1}}{1 - q^{2(s-(r+k))-1}\frac{z_2}{z_1}} = \frac{1 - q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}}{1 - q^{1-2(r+k)}\frac{z_2}{z_1}}. \tag{4.32}$$

To znači da se član (4.31), koji smo dobili ispred $S_i S_{i-1}$, skratio sa brojnikom od (4.32). Kontradikcija! Zaključujemo da se na l_1-vom faktoru od S_{i-1} ne pojavljuje $\phi_{i-1}(z''_k q^{l_1-1/2})$. Međutim, tada se $x^+_{\alpha_{i-1}}(z''_k q^{s-1})$ pojavljuje na s-tom faktoru od S_{i-1} za neki $s \leq l_1$. Nadalje, kako smo nakon dokaza leme 4.4 već obrazložili da nam je dovoljno promatrati samo sumande koji zadovoljavaju uvjet (Δ), možemo pretpostaviti $l_1 < l$.

Neka se na l_2-om faktoru od S_i pojavljuje $x^+_{\alpha_i}(z'_{r+k-1} q^{l_2-1})$. Ako se na l_2-om faktoru od S_{i-1} pojavljuje $\phi_{i-1}(z''_{k-1} q^{l_2-1/2})$, onda kao u dokazu leme 4.6, na l_2-om faktoru od $S_i S_{i-1}$ možemo provesti račun:

$$\begin{aligned} &x^+_{\alpha_i}(z'_{r+k-1} q^{l_2-1})\phi_{i-1}(z''_1 q^{l_2-1/2}) \dots \phi_{i-1}(z''_{k-1} q^{l_2-1/2}) \\ &= q^{-k+1} \prod_{s=1}^{k-1} \frac{1 - q\frac{z''_s}{z'_{r+k-1}}}{1 - q^{-1}\frac{z''_s}{z'_{r+k-1}}} \phi_{i-1}(z''_1 q^{l_2-1/2}) \dots \phi_{i-1}(z''_{k-1} q^{l_2-1/2}) x^+_{\alpha_i}(z'_{r+k-1} q^{l_2-1}). \end{aligned}$$

Na limesima $\lim_{z'_p \to z_1 q^{2(p-1)}}$ i $\lim_{z''_p \to z_2 q^{2(p-1)}}$ član

$$\prod_{s=1}^{k-1} \frac{1 - q\frac{z''_s}{z'_{r+k-1}}}{1 - q^{-1}\frac{z''_s}{z'_{r+k-1}}}$$

prelazi u

$$\prod_{s=1}^{k-1} \frac{1 - q\frac{z_2 q^{2(s-1)}}{z_1 q^{2(r+k-2)}}}{1 - q^{-1}\frac{z_2 q^{2(s-1)}}{z_1 q^{2(r+k-2)}}} = \prod_{s=1}^{k-1} \frac{1 - q^{2(s-(r+k-1))+1}\frac{z_2}{z_1}}{1 - q^{2(s-(r+k-1))-1}\frac{z_2}{z_1}} = \frac{1 - q^{1-2r}\frac{z_2}{z_1}}{1 - q^{1-2(r+k-1)}\frac{z_2}{z_1}}. \tag{4.33}$$

To znači da se član (4.31), koji smo dobili ispred $S_i S_{i-1}$, skratio sa brojnikom od (4.33). Kontradikcija! Zaključujemo da se na l_2-vom faktoru od S_{i-1} ne pojavljuje operator $\phi_{i-1}(z''_{k-1} q^{l_2-1/2})$. Međutim, tada se $x^+_{\alpha_{i-1}}(z''_{k-1} q^{s-1})$ pojavljuje na s-tom faktoru od S_{i-1} za neki $s \leq l_2$. Nadalje, kako smo nakon dokaza leme 4.4 već obrazložili da nam je dovoljno promatrati samo sumande koji zadovoljavaju uvjet (Δ), možemo pretpostaviti $l_1 < l_2 < l$.

Sada, sasvim analogno zaključujemo da postoji l_3, $l_2 < l_3 < l$, takav da se operator $x^+_{\alpha_{i-1}}(z''_{k-2} q^{s-1})$ pojavljuje na s-tom faktoru od S_{i-1} za neki $s \leq l_3$, itd. U posljednjem,

k-tom koraku dobivamo da postoji l_k, $l_{k-1} < l_k < l$, takav da se $x^+_{\alpha_{i-1}}(z_1'' q^{s-1})$ pojavljuje na s-tom faktoru od S_{i-1} za neki $s \leq l_k$. Iz toga slijedi da se na l-tom faktoru od S_{i-1}, jer je $l > l_k$, nalazi samo operator 1 pa se faktor (4.31) nije mogao pojaviti ispred sumanda $S_i S_{i-1}$. Kontradikcija! Time je tvrdnja leme dokazana i za slučaj $m > k$. $\square$

Jedna posljedica dokaza leme 4.7 je i sljedeća tvrdnja:

Teorem 4.8 *Za svaku dominantnu integralnu težinu Λ, za svaki $i = 2, 3, \ldots, n$ i za sve naboje $m, k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\prod_{r=1}^{\min\{m,k\}} \left(z_1 - q^{1-2(r+m-\min\{m,k\})} z_2\right) x^+_{m\alpha_i}(z_1) x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2) \in \mathrm{Hom}(L(\Lambda), L(\Lambda)((z_1, z_2))).$$

U posljednjem poglavlju ćemo svojstvo uređenog para operatora $(x^+_{m\alpha_i}(z), x^+_{k\alpha_{i-1}}(z))$, koje nam iskazuje prethodni teorem, zvati kvazi-kompatibilnošću.

Sljedeća lema kaže nam kako je polinom B iz leme 4.7 minimalan.

Lema 4.9 *Neka su m, k i c prirodni brojevi, $m, k \leq c$, i neka je $B(z) \in \mathbb{C}(q^{1/2})[z]$ polinom iz (4.19) (za koji vrijedi tvrdnja leme 4.7). Neka je l prirodan broj i neka je $C(z) \in \mathbb{C}(q^{1/2})[z]$, $C(0) = 1$, takav da vrijedi*

(1) $l \leq \min\{m, k\}$;

(2) C dijeli B;

(3) $z_1^l C(z_2/z_1) x^+_{m\alpha_i}(z_1) x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$ je $\mathbb{C}(q^{1/2})[z_1, z_2/z_1]$-linearna kombinacija sumanada čiji tenzorski faktori sadrže verteks-operatore u poretku (*).

Tada je $l = \min\{m, k\}$ i $C = B$.

Dokaz. Odaberimo sumand S_i od $x^+_{m\alpha_i}(z_1)$ kod kojeg se operatori $x^+_{\alpha_i}$ nalaze na prvih m faktora tenzorskog produkta i sumand S_{i-1} od $x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$ kod kojeg se operatori $x^+_{\alpha_{i-1}}$ nalaze na prvih k faktora. Lagano se vidi da će verteks-operatori na svakom faktoru sumanda $S_i S_{i-1}$ biti u poretku (*) tek nakon što se on pomnoži sa $z_1^{\min\{m,k\}} B(z_2/z_1)$ $\square$

Leme 4.5 i 4.6, zajedno sa prvim dvjema formulama tvrdnje (a) leme 2.15, daju nam Taylorove redove i racionalne funkcije kojima treba pomnožiti tenzorski faktor produkta dva sumanda susjednih boja, i i $i-1$, u različitim varijablama da bismo na njemu dobili sljedeći poredak verteks-operatora:

> S lijeva na desno prvo se pojavljuju operatori ϕ_i, zatim operatori ϕ_{i-1}. Zatim se pojavljuje ili operator $x^+_{\alpha_i}$ ili operator $x^+_{\alpha_{i-1}}$ ili normalno uređen produkt operatora $x^+_{\alpha_i}$ i $x^+_{\alpha_{i-1}}$. Na kraju se pojavljuju operatori k^+_i, a zatim i operatori k^+_{i-1}. (**)

Lema 4.10 *Promatramo djelovanje produkta* $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$, $m,k \in \mathbb{N}$, *na vektor* v *ireducibilnog modula najveće težine nivoa* $c \geq m,k$ *uloženog u tenzorski produkt* c *ireducibilnih modula najveće težine nivoa* 1. *Ono je zadano formulom (2.3).*

Postoje Taylorov red $A(z) \in \mathbb{C}(q^{1/2})[[z]]$, $A(0) = 1$, *i polinom* $B(z) \in \mathbb{C}(q^{1/2})[z]$, $B(0) = 1$, *takvi da je*

$$z_1^{\min\{m,k\}} A(z_2/z_1)B(z_2/z_1)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$$

$\mathbb{C}(q^{1/2})[z_1, z_2/z_1]$*-linearna kombinacija sumanada čiji tenzorski faktori sadrže verteks-operatore u poretku (**). Polinom* $B(z)$ *dan je formulom (4.19) iz leme 4.7:*

$$B(z) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{r=1}^{m} \left(1 - q^{1-2r}z\right), & \text{ako je } m \leq k; \\ \displaystyle\prod_{r=m-k+1}^{m} \left(1 - q^{1-2r}z\right), & \text{ako je } m > k. \end{cases}$$

Dokaz. Višestrukom primjenom prve formule iz tvrdnje (a) leme 2.15 možemo dobiti

$$\begin{aligned} \bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1) &= \bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1q^2)\cdots\bar{x}^+_{\alpha_i}(z_1q^{2(m-1)}) \\ &= \lim_{z'_p \to z_1q^{2(p-1)}} \bar{x}^+_{\alpha_i}(z'_1)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z'_2)\cdots\bar{x}^+_{\alpha_i}(z'_m) \\ &= \lim_{z'_p \to z_1q^{2(p-1)}} x^+_{\alpha_i}(z'_1)k^+_i(z'_1)x^+_{\alpha_i}(z'_2)k^+_i(z'_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z''_m)k^+_i(z'_m) \\ &= \lim_{z'_p \to z_1q^{2(p-1)}} \prod_{r=1}^{m-1}\prod_{s=r+1}^{m} \left(\frac{1-q^2\frac{z'_s}{z'_r}}{1-\frac{z'_s}{z'_r}}\right) x^+_{\alpha_i}(z'_1)\cdots x^+_{\alpha_i}(z'_m)k^+_i(z'_1)\cdots k^+_i(z'_m) \end{aligned} \tag{4.34}$$

i, sasvim analogno,

$$\bar{x}^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2) = \lim_{z''_p \to z_2q^{2(p-1)}} \prod_{r=1}^{k-1}\prod_{s=r+1}^{k} \left(\frac{1-q^2\frac{z''_s}{z''_r}}{1-\frac{z''_s}{z''_r}}\right) x^+_{\alpha_{i-1}}(z''_1)\cdots x^+_{\alpha_{i-1}}(z''_k)k^+_{i-1}(z''_1)\cdots k^+_{i-1}(z''_k). \tag{4.35}$$

U produktu desnih strana jednakosti (4.34) i (4.35) možemo, primjenom druge formule tvrdnje (a) leme 2.15, sve operatore k^+_i pomaknuti desno od svih operatora $x^+_{\alpha_{i-1}}$ (ali tako da i dalje ostanu lijevo od svih operatora k^+_{i-1}). Takvim permutiranjem operatora ćemo dobiti produkt Taylorovih redova u varijablama z'_r/z''_s, $r = 1,2,\ldots,m$, $s = 1,2,\ldots,k$, s konstantnim članom 1, koji će nam na limesima $\lim_{z'_p \to z_1q^{2(p-1)}}$ i $\lim_{z''_p \to z_2q^{2(p-1)}}$ dati upravo Taylorov red u varijabli z_2/z_1 s konstantnim članom 1. Zamijenimo u tom redu kvocijent z_2/z_1 sa z i dobiveni red označimo s D. On je invertibilan element prstena $\mathbb{C}(q^{1/2})[[z]]$ pa stoga možemo definirati

$$A(z) := D(z)^{-1} \in \mathbb{C}(q^{1/2})[[z]].$$

Ovime smo konstruirali red $A(z)$ iz iskaza leme i sada ostatak dokaza možemo provesti na isti način kao i dokaz leme 4.7. $\square$

Odsada ćemo promatrati samo glavne potprostore $W(\Lambda)$ pridružene integralnim dominantnim težinama Λ oblika

$$\Lambda = c_0\Lambda_0 + c_j\Lambda_j, \qquad \text{gdje su } c_0, c_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ c_0 + c_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.36}$$

Nivo c težine Λ jednak je $c = c_0 + c_j$. Za $j = 1, 2, \ldots, n$ definirajmo sljedeću oznaku:

$$j_s := \begin{cases} 0, & \text{ako je } s = 1, 2, \ldots, c_0; \\ j, & \text{ako je } s = c_0 + 1, \ldots, c_0 + c_j. \end{cases} \tag{4.37}$$

Lema 4.11 *Za dominantnu integralnu težinu Λ oblika kao u (4.36), za maksimalni vektor v_Λ ireducibilnog modula najveće težine Λ, za svaki $i = 2, 3 \ldots, n$ i za sve naboje $m, k \in \mathbb{N}$ postoji Taylorov red $A(z) \in \mathbb{C}(q^{1/2})[[z]]$ takav da vrijedi*

$$\begin{aligned} &A\left(\frac{z_2}{z_1}\right) z_1^{m_0} \prod_{r=1}^{m_0} \left(1 - q^{1-2(r+m-m_0)} \frac{z_2}{z_1}\right) \bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1) \bar{x}^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2) v_\Lambda \\ &\in z_1^{\sum_{s=1}^{m} \delta_{i j_s}} z_2^{\sum_{s=1}^{k} \delta_{i-1\, j_s}} W(\Lambda)[[z_1, z_2]], \end{aligned} \tag{4.38}$$

gdje je $m_0 := \min\{m, k\}$.

Dokaz. Primijetimo da je

$$z_1^{m_0} \prod_{r=1}^{m_0} \left(1 - q^{1-2(r+m-m_0)} \frac{z_2}{z_1}\right) = z_1^{\min\{m,k\}} B\left(\frac{z_2}{z_1}\right),$$

gdje je $B(z)$ polinom definiran u (4.19). Za Taylorov red $A(z)$ iz iskaza leme možemo uzeti upravo red iz leme 4.10, koji je u njoj označen također s $A(z)$.

Kao i prije, zadani modul nivoa c realiziramo kao podmodul tenzorskog produkta ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1. Prema lemi 4.10 na svakom faktoru svakog sumanda od

$$A\left(\frac{z_2}{z_1}\right) z_1^{m_0} \prod_{r=1}^{m_0} \left(1 - q^{1-2(r+m-m_0)} \frac{z_2}{z_1}\right) \bar{x}^+_{m\alpha_i}(z_1) \bar{x}^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$$

imamo poredak verteks-operatora kao u (**). Dakle, u formuli (4.38) na maksimalan vektor v_Λ prvo djeluju operatori k^+_{i-1}, a zatim operatori k^+_i. Svi oni fiksiraju maksimalan vektor jer za svaki $l = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi

$$k^+_l(z) v_\Lambda = v_\Lambda.$$

Nakon njih na vektor v_Λ djeluje normalno uređen produkt operatora $x^+_{\alpha_i}$ i $x^+_{\alpha_{i-1}}$. Jasno, pritom maksimalan vektor v_Λ identificiramo s odgovarajućim elementom tenzorskog produkta modula nivoa 1. Preciznije, ako je težina Λ oblika kao u (4.36), onda se modul $L(\Lambda)$ ulaže u $L(\Lambda_0)^{\otimes c_0} \otimes L(\Lambda_j)^{\otimes c_j}$ pa imamo identifikaciju

$$v_\Lambda = \underbrace{v_{\Lambda_0} \otimes \ldots \otimes v_{\Lambda_0}}_{c_0} \otimes \underbrace{v_{\Lambda_j} \otimes \ldots \otimes v_{\Lambda_j}}_{c_j}.$$

Prema Frenkel-Jingovoj relizaciji ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1 je

$$x^+_{\alpha_l}(z) = E^+_-(-a_l, z) E^+_+(-a_l, z) \otimes e^{\alpha_l} z^{\alpha_l} \quad \text{za sve } l = 1, 2, \ldots, n.$$

U normalno uređenom produktu operatora $x^+_{\alpha_i}$ i $x^+_{\alpha_{i-1}}$ se svi operatori $E^+_+(-a_i, z_1)$ i $E^+_+(-a_{i-1}, z_2)$ nalaze desno od svih operatora $E^+_-(-a_i, z_1)$ i $E^+_-(-a_{i-1}, z_2)$. Nadalje, za sve $l = 1, 2, \ldots, n$, $s = 0, 1, \ldots, n$ vrijedi

$$\left(E^+_+(-a_l, z) \otimes e^{\alpha_l} z^{\alpha_l}\right) v_{\Lambda_s} = \begin{cases} 1 \otimes e^{\alpha_l} v_{\Lambda_s} z, & \text{ako je } l = s; \\ 1 \otimes e^{\alpha_l} v_{\Lambda_s}, & \text{ako je } l \neq s. \end{cases}$$

Nadalje, svi operatori $E^+_-(-a_l, z)$ i $\phi_l(z)$, $l = 1, 2, \ldots, n$, sadrže samo nenegativne potencije od z.

Iz svega ovoga slijedi da je najniža moguća potencija od z_1 u (4.38) upravo $\sum_{s=1}^m \delta_{ij_s}$. Štoviše, ako promotrimo sumand S od $x^+_{m\alpha_i}(z_1) x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2)$, koji zadovoljava uvjet (Δ), i u kojem operatori $x^+_{\alpha_i}(z_1)$ popunjavaju prvih m faktora, a operatori $x^+_{\alpha_{i-1}}(z_2)$ prvih k faktora, vidimo da se on, u $\mathbb{C}(q^{1/2})[z_1, z_2/z_1]$-linearnoj kombinaciji sumanada iz leme 4.10, pojavljuje pomnožen nekim skalarom iz $\mathbb{C}(q^{1/2})$ različitim od nule. Dakle, taj skalar neće promijeniti njegovu najnižu potenciju u varijabli z_1, koja iznosi $\sum_{s=1}^m \delta_{ij_s}$.

Kako operatori $E^+_+(-a_i, z_1)$ i $E^+_+(-a_{i-1}, z_2)$ komutiraju, sasvim analogno možemo vidjeti da je najniža potencija od z_2 koja se javlja u (4.38) upravo $\sum_{s=1}^k \delta_{i-1\, j_s}$. □

Sljedeći korolar je posljedica dokaza prethodne leme.

Korolar 4.12 *Za dominantnu integralnu težinu Λ oblika kao u (4.36), za maksimalni vektor v_Λ ireducibilnog modula najveće težine Λ, za svaki $i = 2, 3 \ldots, n$ i za sve naboje $m, k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$z_1^{m_0} \prod_{r=1}^{m_0} \left(1 - q^{1-2(r+m-m_0)} \frac{z_2}{z_1}\right) x^+_{m\alpha_i}(z_1) x^+_{k\alpha_{i-1}}(z_2) v_\Lambda$$
$$\in z_1^{\sum_{s=1}^m \delta_{ij_s}} z_2^{\sum_{s=1}^k \delta_{i-1\, j_s}} W(\Lambda)[[z_1, z_2]],$$

gdje je $m_0 := \min\{m, k\}$.

Sljedeća lema je direktna posljedica leme 4.11 i činjenice da operatori $\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)$ iste boje $i = 1, 2, \dots, n$ komutiraju. Radi se o analogonu leme 5.1 iz članka [18], u kojem je ona dokazana za afine Liejeve algebre tipa $A_n^{(1)}$.

Lema 4.13 *Za težinu* Λ *oblika kao u (4.36) i za verteks-operator*

$$\bar{x}^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(z_{r_n^{(1)},n}) \cdots \bar{x}^+_{m_{1,1}\alpha_1}(z_{1,1})$$

tipa naboja

$$(m_{r_n^{(1)},n}, \dots, m_{1,n}; \dots; m_{r_1^{(1)},1}, \dots, m_{1,1})$$

i dualnog tipa naboja

$$(r_n^{(1)}, \dots, r_n^{(k)}; \dots; r_1^{(1)}, \dots, r_1^{(k)})$$

postoje Taylorovi redovi

$$A_{(r,s),i}(z) \in \mathbb{C}(q^{1/2})[[z]] \quad za \quad i = 2, 3, .., n, \quad r = 1, 2, \dots, r_i^{(1)}, \quad s = 1, \dots, r_{i-1}^{(1)}$$

takvi da vrijedi

$$A_{(r,s),i}(0) = 1$$

i takvi da je

$$\begin{aligned} &A(z_{r_n^{(1)}}, \dots, z_1) \left(\prod_{i=2}^{n} \prod_{r=1}^{r_i^{(1)}} \prod_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} \prod_{t=1}^{m_{(r,s),i}} \left(1 - q^{2(t+m_{r,i}-m_{(r,s),i})} \frac{z_{s,i-1}}{z_{r,i}} \right) \right) \\ &\cdot \bar{x}^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(z_{r_n^{(1)},n}) \cdots \bar{x}^+_{m_{1,1}\alpha_1}(z_{1,1}) v_\Lambda \qquad (4.39) \\ &\in \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{r=1}^{r_i^{(1)}} z_{r,i}^{\sum_{s=1}^{m_{r,i}} \delta_{i j_s} - \sum_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} m_{(r,s),i}} \right) W(\Lambda)[[z_{r_n^{(1)}}, \dots, z_1]]. \end{aligned}$$

Pritom je v_Λ *maksimalan vektor modula* $L(\Lambda)$,

$$m_{(r,s),i} := \min \{ m_{r,i}, m_{s,i-1} \}$$

za sve $i = 2, 3, \dots, n$, $r = 1, 2, \dots, r_i^{(1)}$, $s = 1, 2, \dots, r_{i-1}^{(1)}$. *Nadalje, definiramo* $r_0^{(1)} := 0$ *i*

$$\sum_{s=1}^{0} m_{(r,s),i} := 0.$$

Taylorov red A *dan je s*

$$A(z_{r_n^{(1)}}, \dots, z_1) := \prod_{i=2}^{n} \prod_{r=1}^{r_i^{(1)}} \prod_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} A_{(r,s),i} \left(z_{s,i-1}/z_{r,i} \right).$$

Iako smo u ovoj točki dobili slične rezultate za kvazičestice tipa 1 (korolar 4.12) i za kvazičestice tipa 2 (lema 4.11), valja naglasiti kako su nam najvažniji upravo oni koji govore o kvazičesticama tipa 2, posebice lema 4.13. Upravo njih ćemo koristiti u idućem poglavlju, prilikom konstrukcije sistema izvodnica glavnog potprostora.

Na kraju ove točke, kao još jednu primjenu leme 4.4 dokazat ćemo generalizaciju propozicije 4.3.

Teorem 4.14 *Neka je V ireducibilan modul najveće težine nivoa c, m prirodan broj veći od c i $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ uređena m-torka cijelih brojeva takvih da je*

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m \leq m-1 \quad i \quad a_{t+1} \leq a_t + 1 \text{ za sve } t = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Tada za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ na modulu V vrijedi

$$\lim_{z_p \to z q^{2a_p}} \left(\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right)\right) x^+_{\alpha_i}(z_1) \ldots x^+_{\alpha_i}(z_m) = 0. \tag{4.40}$$

Dokaz. Neka je V uložen u tenzorski produkt c ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1. Iz dokaza leme 3.5 vidimo da limes u (4.40) postoji.

Jednakost (4.40) dokazuje se slično kao i propozicija 4.1. Fiksirajmo jedan, proizvoljan sumand $S(z_1, \ldots, z_m)$ od $\Delta^{(c-1)}(x^+_{\alpha_i}(z_1) \ldots x^+_{\alpha_i}(z_m))$ i pretpostavimo

$$\lim_{z_p \to z q^{2a_p}} S(z_1, \ldots, z_m) \neq 0. \tag{4.41}$$

Neka je t najmanji prirodan broj za koji vrijedi $a_t = a_{t+1}$. Tada, primjenom tvrdnji (a) i (b) leme 4.4 na

$$\lim_{z_p \to z a_p} \left(\prod_{r=1}^{t-1} \prod_{s=r+1}^{t} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right)\right) x^+_{\alpha_i}(z_1) \ldots x^+_{\alpha_i}(z_t),$$

zaključujemo da postoje brojevi $l_1, l_2, \ldots, l_t \in \{1, 2, \ldots, c\}$ takvi da vrijedi

(1) $x^+_{\alpha_i}(z_j)$ nalazi se na l_j-tom faktoru sumanda $S(z_1, \ldots, z_m)$ za sve $j = 1, 2, \ldots, t$;

(2) $l_1 > l_2 > \ldots > l_t$.

Neka se operator $x^+_{\alpha_i}(z_{t+1})$ nalazi na l_{t+1}-vom faktoru od $S(z_1, \ldots, z_m)$. Provodimo diskusiju u ovisnosti o l_{t+1}.

Ako je $l_{t+1} > l_{t-1}$, onda se na l_{t-1}-vom faktoru nalaze operatori $x^+_{\alpha_i}(z_{t-1} q^{l_{t-1}-1})$ i $\phi_i(z_{t+1} q^{l_{t-1}-1/2})$. Pretpostavimo da su faktori sumanda zapisani u obliku ($\sharp$). Tada će nam l_{t-1}-vi faktor dati, prema drugoj formuli tvrdnje (b) leme 2.15,

$$q^2 \frac{1 - q^{-2} \frac{z_{t+1}}{z_{t-1}}}{1 - q^2 \frac{z_{t+1}}{z_{t-1}}}. \tag{4.42}$$

Ako je $l_{t+1} = l_{t-1}$, tj. ako se operator $x^+_{\alpha_i}(z_{t+1}q^{l_{t+1}-1})$ nalazi na istom faktoru kao i $x^+_{\alpha_i}(z_{t-1}q^{l_{t-1}-1})$, onda nam pretpostavka da su faktori sumanda zapisani u obliku ($\sharp$) i prva formula tvrdnje (b) leme 2.15 daju faktor

$$z_{t-1}^2 q^{2(l_{t-1}-1)}\left(1-\frac{z_{t+1}}{z_{t-1}}\right)\left(1-q^{-2}\frac{z_{t+1}}{z_{t-1}}\right). \tag{4.43}$$

Ako je $l_{t+1} = l_t$, tj. ako se operator $x^+_{\alpha_i}(z_{t+1}q^{l_{t+1}-1})$ nalazi na istom faktoru kao i $x^+_{\alpha_i}(z_t q^{l_t-1})$, onda nam pretpostavka da su faktori sumanda zapisani u obliku ($\sharp$) i prva formula tvrdnje (b) leme 2.15 daju faktor

$$z_t^2 q^{2(l_t-1)}\left(1-\frac{z_{t+1}}{z_t}\right)\left(1-q^{-2}\frac{z_{t+1}}{z_t}\right). \tag{4.44}$$

Sada, na isti način kao u dokazu propozicije 4.1, možemo zaključiti kako svaki od faktora (4.42), (4.43) i (4.44) na limesu $\lim_{z_p\to zq^{2a_p}}$ poništava čitav sumand $S(z_1,\ldots,z_m)$. Naime,

$$\lim_{z_p\to zq^{2a_p}}\left(1-q^{-2}\frac{z_{t+1}}{z_{t-1}}\right)=\lim_{z_p\to zq^{2a_p}}\left(1-\frac{z_{t+1}}{z_t}\right)=0.$$

Ovime smo dokazali da je

$$l_{t+1} < l_{t-1} \qquad \text{i} \qquad l_{t+1} \neq l_t,$$

tj. da ne postoje dva operatora $x^+_{\alpha_i}(z_u q^{l_u-1})$, $u = 1,2,\ldots,t+1$, koja se nalaze na istom faktoru sumanda $S(z_1,\ldots,z_m)$.

Neka je k najveći prirodan broj za koji vrijedi $a_{t+1} = a_{t+k}$. Tada, analogno kao gore, možemo zaključiti da ne postoje dva operatora $x^+_{\alpha_i}(z_u q^{l_u-1})$, $u = 1,2,\ldots,t+k$, koja se nalaze na istom faktoru od $S(z_1,\ldots,z_m)$.

Kako je

$$a_{t+k+1} = a_{t+k}+1 = \ldots = a_{t+1}+1 = a_t+1$$

zbog tvrdnji (a) i (b) leme 4.4 mora vrijediti

$$l_{t+k+1} < \min\{l_1,l_2,\ldots,l_{t+k}\}.$$

Naime, u protivnom bi bilo $\lim_{z_p\to zq^{2a_p}} S(z_1,\ldots,z_m) = 0$. Ovime smo dokazali da ne postoje dva operatora $x^+_{\alpha_i}(z_u q^{l_u-1})$, $u = 1,2,\ldots,t+k+1$, koja se nalaze na istom faktoru od $S(z_1,\ldots,z_m)$.

Postupkom koji smo opisali možemo nastaviti dokaz teorema sve dok ne dođemo do zaključka da ne postoje dva operatora $x^+_{\alpha_i}(z_u q^{l_u-1})$, $u = 1,2,\ldots,m$, koja se nalaze na istom faktoru od $S(z_1,\ldots,z_m)$. Dakle, na c faktora je smješteno $m > c$ operatora tako da se nikoja dva ne nalaze na istom faktoru. To je kontradicija pa zaključujemo da je naša početna pretpostavka (4.41) pogrešna, tj. da je $\lim_{z_p\to zq^{2a_p}} S(z_1,\ldots,z_m) = 0$. $\square$

4.3 Relacije između kvazičestica iste boje

Fiksirajmo boju $i = 1, 2, \ldots, n$. U ovoj točki ćemo ispitivati relacije između kvazičestica tipa 2 iste boje i.

Lema 4.15 *Za prirodne brojeve m i k, $m \leq k$, na ireducibilnom modulu najveće težine postoji $2m$ relacija između operatora $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$ i $\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z)$:*

$$
\begin{aligned}
\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{-2m})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) &= \bar{x}^+_{(m+k)\alpha_i}(zq^{-2m}), && (1)\\
\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{-2(m-1)})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) &= \bar{x}^+_{\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{(m+k-1)\alpha_i}(zq^{-2(m-1)}), && (2)\\
&\vdots && \vdots\\
\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{-2(m-(m-1))})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) &= \bar{x}^+_{(m-1)\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{(k+1)\alpha_i}(zq^{-2(m-(m-1))}), && (\mathrm{m})\\
\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{2k})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) &= \bar{x}^+_{(m+k)\alpha_i}(z), && (\mathrm{m+1})\\
\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{2(k-1)})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) &= \bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{2(k-1)})\bar{x}^+_{(m+k-1)\alpha_i}(z), && (\mathrm{m+2})\\
&\vdots && \vdots\\
\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{2(k-(m-1))})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z) &= \bar{x}^+_{(m-1)\alpha_i}(zq^{2(k-(m-1))})\bar{x}^+_{(k+1)\alpha_i}(z). && (\mathrm{2m})
\end{aligned}
$$

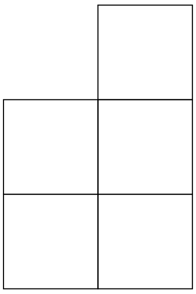
Prije dokaza ilustrirat ćemo tvrdnju leme kada je $m = 2$ i $k = 3$. Tada nam lema daje $2m = 4$ relacije koje glase

$$
\begin{aligned}
\bar{x}^+_{2\alpha_i}(zq^{-4})\bar{x}^+_{3\alpha_i}(z) &= \bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{-4})\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{-2})\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{2})\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{4}) = \bar{x}^+_{5\alpha_i}(zq^{-4});\\
\bar{x}^+_{2\alpha_i}(zq^{-2})\bar{x}^+_{3\alpha_i}(z) &= \bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{-2})\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{2})\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{4}) = \bar{x}^+_{\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{4\alpha_i}(zq^{-2});\\
\bar{x}^+_{2\alpha_i}(zq^{6})\bar{x}^+_{3\alpha_i}(z) &= \bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{6})\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{8})\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{2})\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{4}) = \bar{x}^+_{5\alpha_i}(z);\\
\bar{x}^+_{2\alpha_i}(zq^{4})\bar{x}^+_{3\alpha_i}(z) &= \bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{4})\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{6})\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{2})\bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{4}) = \bar{x}^+_{\alpha_i}(zq^{4})\bar{x}^+_{4\alpha_i}(z).
\end{aligned}
$$

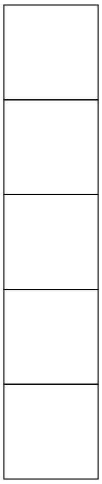
S lijeve strane svake od jednakosti, uz svaku potenciju varijable z, nalazi se suma monoma čiji Youngov dijagram izgleda kao na slici 4.1, a s desne suma monoma čiji Youngov dijagram izgleda kao na slikama 4.2 i 4.3. Primijetimo da su monomi sa slika 4.2 i 4.3 veći s obzirom na linearan uređaj "$<$" od monoma sa slike 4.1. Dokažimo lemu.

Dokaz. Svaka od navedenih $2m$ relacija slijedi direktno iz definicije i svojstava od $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$. Zbog toga što verteks-operatori iz gornjih relacija međusobno komutiraju te djeluju restrinigirano na ireducibilnom modulu najveće težine, i lijeve i desne strane svih jednakosti su dobro definirane. Za dokaz svake od jednakosti dovoljno je njenu lijevu i desnu stranu zapisati u terminima operatora $\bar{x}^+_{\alpha_i}(z)$ i još jednom iskoristiti komutativnost. □

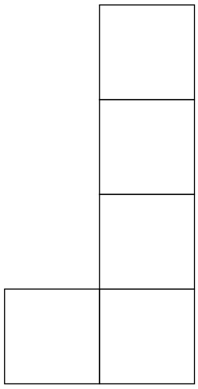
U prethodnoj lemi smo izveli $2m$ relacija između operatora $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(z)$ i $\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z)$ pomoću kojih možemo doći do relacija između njihovih koeficijenata, tj. kvazičestica tipa 2. Međutim, tek ćemo u sljedećoj lemi vidjeti da je skup relacija iz leme 4.15 minimalan, tj. da je svih $2m$ relacija međusobno nezavisno.



Slika 4.1: Monom tipa naboja (2,3)



Slika 4.2: Monom tipa naboja 5



Slika 4.3: Monom tipa naboja (1,4)

Lema 4.16 *Za svaki vektor v ireducibilnog modula najveće težine i za sve cijele brojeve r i N, te prirodne brojeve m i k, $m \leq k$, moguće je iz skupa*

$$S_{N,v}^{m,k} := \left\{ \bar{x}_{m\alpha_i}^{+}(l) \bar{x}_{k\alpha_i}^{+}(N-l)v : l \in \mathbb{Z} \right\} \tag{4.45}$$

izraziti $2m$ uzastopnih članova

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_{m\alpha_i}^{+}(r)\bar{x}_{k\alpha_i}^{+}(N-r)v;\\
&\bar{x}_{m\alpha_i}^{+}(r+1)\bar{x}_{k\alpha_i}^{+}(N-(r+1))v;\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\bar{x}_{m\alpha_i}^{+}(r+2m-1)\bar{x}_{k\alpha_i}^{+}(N-(r+2m-1))v
\end{aligned}$$

pomoću preostalih elemenata skupa $S_{N,v}^{m,k}$ te elemenata skupova $S_{N,v}^{m',k'}$, gdje su

$$m', k' \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq m' < m, \quad m' + k' = m + k.$$

Pritom uzimamo da je $\bar{x}_{0\alpha_i}^{+}(z) := 1$.

Dokaz. Fiksirajmo cijele brojeve N i r te vektor v modula iz tvrdnje leme. Zbog restringiranog djelovanja kvazičestica na ireducibilnom modulu najveće težine (lema 3.9), skup $S_{N,v}^{s,r}$ je konačan za svaki izbor prirodnih brojeva s i r.

Izjednačimo koeficijente uz z^{-N} u svih $2m$ jednakosti prethodne leme 4.15 primijenjenih na vektor v. Ostavimo na lijevim stranama tih jednakosti onih $2m$ uzastopnih članova koje želimo izraziti, a preostale elemente skupa $S_{N,v}^{m,k}$ prebacimo na desnu stranu. Dobivene jednakosti možemo shvatiti kao sustav od $2m$ linearnih jednadžbi čije su nepoznanice upravo onih $2m$ članova koje smo ostavili na lijevoj strani. Iz sljedećeg računa, provedenog za proizvoljan vektor v i cijeli broj p,

$$
\begin{aligned}
\bar{x}^+_{m\alpha_i}(zq^{2p})\bar{x}^+_{k\alpha_i}(z)v &= \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}} \bar{x}^+_{m\alpha_i}(r)q^{2p(-r-m)}z^{-r-m}\right)\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}} \bar{x}^+_{k\alpha_i}(s)z^{-s-k}\right)v \\
&= \sum_{r,s\in\mathbb{Z}} \bar{x}^+_{m\alpha_i}(r)\bar{x}^+_{k\alpha_i}(s)vq^{2p(-r-m)}z^{-r-s-m-k} \\
&= \sum_{N\in\mathbb{Z}}\sum_{r\in\mathbb{Z}} \bar{x}^+_{m\alpha_i}(r)\bar{x}^+_{k\alpha_i}(N-m-k-r)vq^{2p(-r-m)}z^{-N} \\
&= q^{-2pm}\sum_{N\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{r\in\mathbb{Z}} q^{-2pr}\bar{x}^+_{m\alpha_i}(r)\bar{x}^+_{k\alpha_i}(N-m-k-r)v\right)z^{-N},
\end{aligned}
$$

vidimo da će koeficijente uz nepoznanice našeg sustava određivati član q^{-2pr} iz gornje jednakosti. Neka nam prva relacije iz leme 4.15 daje prvu, druga relacija drugu, ..., $2m$-ta relacija $2m$-tu jednadžbu sustava i neka su nepoznanice numerirane onim redom kojim su navedene u iskazu leme 4.16. Pretpostavimo još da smo svaku od jednadžbi podijelili odgovarajućom potencijom od q tako da nam koeficijent uz prvu nepoznanicu, $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(r)\bar{x}^+_{k\alpha_i}(N-r)v$, bude jednak 1. Tada matrica sustava glasi

$$
\begin{pmatrix}
1 & q^{2m} & q^{2\cdot 2m} & \dots & q^{(2m-2)\cdot 2m} & q^{(2m-1)\cdot 2m} \\
1 & q^{2(m-1)} & q^{2\cdot 2(m-1)} & \dots & q^{(2m-2)\cdot 2(m-1)} & q^{(2m-1)\cdot 2(m-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & q^{2} & q^{2\cdot 2} & \dots & q^{(2m-2)\cdot 2} & q^{(2m-1)\cdot 2} \\
1 & q^{-2k} & q^{-2\cdot 2k} & \dots & q^{-(2m-2)\cdot 2k} & q^{-(2m-1)\cdot 2k} \\
1 & q^{-2(k-1)} & q^{-2\cdot 2(k-1)} & \dots & q^{-(2m-2)\cdot 2(k-1)} & q^{-(2m-1)\cdot 2(k-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & q^{-2(k-m+1)} & q^{-2\cdot 2(k-m+1)} & \dots & q^{-(2m-2)\cdot 2(k-m+1)} & q^{-(2m-1)\cdot 2(k-m+1)}
\end{pmatrix}.
$$

Kako je q transcendentan nad $\mathbb{C}$, gornja (Vandermondeova) matrica reda $2m$ je regularna, čime je tvrdnja propozicije dokazana. $\square$

Lema 4.17 *Za svaki vektor v ireducibilnog modula najveće težine i za svaki cijeli broj N i prirodan broj m moguće je svaki vektor $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(l)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(N-l)v$, takav da je*

$$
l \le N-l, \quad l > N-l-2m, \quad l \in \mathbb{Z}, \tag{4.46}
$$

zapisati kao linearnu kombinaciju vektora $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(s)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(N-s)v$ takvih da je

$$
s \le N-s-2m, \quad s \in \mathbb{Z} \tag{4.47}
$$

te vektora iz skupova $S^{m',k'}_{N,v}$, definiranih s (4.45), gdje su

$$
m', k' \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le m' < m, \quad m'+k' = 2m.
$$

Dokaz. U dokazu leme razlikujemo dva slučaja.

Ako je cijeli broj N paran, dovoljno je primijetiti da svaki vektor

$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(l)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(N-l)v, \tag{4.48}$$

takav da vrijede nejednakosti (4.46), mora biti jednak nekom od $2m-1$ uzastopnih vektora $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(s)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(N-s)v$ za

$$s = \tfrac{N}{2}-m+1, \tfrac{N}{2}-m+2, \ldots, \tfrac{N}{2}, \tfrac{N}{2}+1, \ldots, \tfrac{N}{2}+m-2, \tfrac{N}{2}+m-1. \tag{4.49}$$

Prema lemi 4.16 primijenjenoj na tih $2m-1$ uzastopnih vektora, svaki od njih, pa onda specijalno i zadani vektor (4.48), može se, zbog komutativnosti kvazičestica tipa 2 iste boje, zapisati na željeni način. Naime, svi vektori

$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(s)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(N-s)v = \bar{x}^+_{m\alpha_i}(N-s)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(s)v,$$

zapisani u padajućem poretku stupnjeva, za koje stupanj s nije kao u (4.49), zadovoljavaju nejednakost (4.47).

Ako je cijeli broj N neparan, dovoljno je primijetiti da svaki vektor oblika kao u (4.48), takav da vrijede nejednakosti (4.46), mora biti jednak nekom od $2m$ uzastopnih vektora $\bar{x}^+_{m\alpha_i}(s)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(N-s)v$ za

$$s = \tfrac{N-1}{2}-m+1, \tfrac{N-1}{2}-m+2, \ldots, \tfrac{N-1}{2}, \tfrac{N-1}{2}+1, \ldots, \tfrac{N-1}{2}+m-1, \tfrac{N-1}{2}+m. \tag{4.50}$$

Prema lemi 4.16 primijenjenoj na tih $2m$ uzastopnih vektora, svaki od njih, pa onda specijalno i zadani vektor (4.48), može se, zbog komutativnosti kvazičestica tipa 2 iste boje, zapisati na željeni način. Zaista, kao i kada je N bio paran, vidimo da svi vektori

$$\bar{x}^+_{m\alpha_i}(s)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(N-s)v = \bar{x}^+_{m\alpha_i}(N-s)\bar{x}^+_{m\alpha_i}(s)v,$$

zapisani u padajućem poretku stupnjeva, za koje stupanj s nije kao u (4.50), zadovoljavaju nejednakost (4.47). $\square$

4.4 Sistem izvodnica glavnog potprostora $W(\Lambda)$

Za integralnu dominantnu težinu Λ nivoa c i oblika kao u (4.36) definiramo skup monoma $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} \subset \bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}$ s

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} := & \bigcup_{\substack{0\leq m_{r_n^{(1)},n}\leq\ldots\leq m_{1,n}\leq c\\ \ldots \\ 0\leq m_{r_1^{(1)},1}\leq\ldots\leq m_{1,1}\leq c}} \\ & \Big\{ \bar{x}^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(l_{r_n^{(1)},n})\cdots \bar{x}^+_{m_{1,n}\alpha_n}(l_{1,n})\cdots \bar{x}^+_{m_{r_1^{(1)},1}\alpha_1}(l_{r_1^{(1)},1})\cdots \bar{x}^+_{m_{1,1}\alpha_1}(l_{1,1}) \ \Big| \\ & \Big| \ l_{r,i} \leq \sum_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} \min\{m_{r,i}, m_{s,i-1}\} - \sum_{s=1}^{m_{r,i}} \delta_{ij_s} - \sum_{m_{t,i}>m_{r,i}} 2m_{r,i} - m_{r,i}, \\ & \quad l_{r+1,i} \leq l_{r,i} - 2m_{r,i} \text{ ako je } m_{r+1,i} = m_{r,i} \\ & \quad \text{za sve } l_{r,i} \in \mathbb{Z},\ i = 1,2,\ldots,n,\ r = 1,2,\ldots,r_i^{(1)} \Big\}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Skup $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$ se sastoji od monoma građenih od kvazičestica naboja manjeg ili jednakog c. Taj zahtjev je posljedica propozicije 4.1, odnosno njenog korolara 4.2. Kao i u članku [18], skup $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$ možemo zapisati i u terminima dualnog tipa naboja

$$(r_n^{(1)}, \ldots, r_n^{(k)}; \ldots; r_1^{(1)}, \ldots, r_1^{(k)}).$$

Prvo primijetimo da je

$$\sum_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} \min\{m_{r,i}, m_{s,i-1}\} = \sum_{s=1}^{m_{r,i}} r_{i-1}^{(s)}, \tag{4.52}$$

a zatim i da je

$$-\sum_{m_{t,i}>m_{r,i}} 2m_{r,i} = -2m_{r,i} r_i^{(m_{r,i}+1)}. \tag{4.53}$$

Primjenom jednakosti (4.52) i (4.53) na skup (4.51) dobivamo

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} = & \bigcup_{\substack{r_n^{(1)}\geq\ldots\geq r_n^{(c)}\geq 0\\ \ldots \\ r_1^{(1)}\geq\ldots\geq r_1^{(c)}\geq 0}} \\ & \Big\{ \bar{x}^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(l_{r_n^{(1)},n})\cdots \bar{x}^+_{m_{1,n}\alpha_n}(l_{1,n})\cdots \bar{x}^+_{m_{r_1^{(1)},1}\alpha_1}(l_{r_1^{(1)},1})\cdots \bar{x}^+_{m_{1,1}\alpha_1}(l_{1,1}) \ \Big| \\ & \Big| \ l_{r,i} \leq \sum_{s=1}^{m_{r,i}} r_{i-1}^{(s)} - \sum_{s=1}^{m_{r,i}} \delta_{ij_s} - 2m_{r,i} r_i^{(m_{r,i}+1)} - m_{r,i}, \\ & \quad l_{r+1,i} \leq l_{r,i} - 2m_{r,i} \text{ ako je } m_{r+1,i} = m_{r,i} \\ & \quad \text{za sve } l_{r,i} \in \mathbb{Z},\ i = 1,2,\ldots,n,\ r = 1,2,\ldots,r_i^{(1)} \Big\}. \end{aligned}$$

Podsjetimo se da i dalje promatramo samo monome kvazičestica tipa 2 koji zadovoljavaju pretpostavke (I), (II) i (III) uvedene u točki 3.3. Cilj nam je dokazati kako skup $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$ razapinje čitav glavni potprostor $W(\Lambda)$. U dokazu ćemo koristiti sljedeća svojstva parcijalnog uređaja "$\prec$":

Lema 4.18 *Za svaki monom $b \in \bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}$ postoji*

(a) konačno mnogo monoma $b' \in \bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}$, istog tipa naboja te istog stupnja kao i b, za koje vrijedi

$$b \prec b' \qquad i \qquad b' v_\Lambda \neq 0;$$

(b) konačno mnogo tipova naboja koji imaju isti tip ukupnog naboja kao i b i koji su veći, s obzirom na uređaje "$<$" i "$\prec$", od tipa naboja od b.

Dokaz. (a) Neka je $b = b_n \cdots b_1$ monom, zapisan kao produkt jednobojnih monoma b_i boje $i = 1, 2, \ldots, n$, sa nizom suma stupnjeva po bojama $(l_n, \ldots, l_1)$. Dakle, l_i je stupanj od b_i za sve $i = 1, 2, \ldots, n$. Neka je $b' = b'_n \cdots b'_1$ monom, zapisan kao produkt jednobojnih monoma b'_i boje $i = 1, 2, \ldots, n$, istog tipa naboja kao i monom b te neka je $b \prec b'$. Neka je $(l'_n, \ldots, l'_1)$ suma stupnjeva po bojama monoma b'.

Očito je $l_1 \leq l'_1$. Broj $l'_1 \in \mathbb{Z}$ je, zbog restringiranog djelovanja kvazičestica (lema 3.9), i odozgo ograničen pa stoga može poprimiti samo konačno mnogo vrijednosti. Za svaku od konačno mnogo mogućih vrijednosti od l'_1 postoji, zbog leme 3.9 i zbog komutativnosti kvazičestica iste boje, samo konačno mnogo monoma b'_1 tipa naboja kao i b_1 stupnja l'_1, takvih da je $b'_1 v_\Lambda \neq 0$.

Sasvim analogno se dokazuje da za svaki od (konačno mnogo) monoma b'_1 postoji konačno mnogo monoma b'_2 istog tipa naboja kao b_2 i takvih da je $b_2 b_1 \prec b'_2 b'_1$ i zatim općenito da za svaki od monoma $b'_i \cdots b'_1$, istog tipa naboja kao $b_i \cdots b_1$ i takvih da je $b_i \cdots b_1 \prec b'_i \cdots b'_1$ postoji konačno mnogo monoma b'_{i+1} istog tipa naboja kao b_{i+1} i takvih da je $b_{i+1} \cdots b_1 \prec b'_{i+1} \cdots b'_1$. Sada vidimo da dokaz leme slijedi matematičkom indukcijom.

(b) Tvrdnja slijedi iz činjenice da se svaki prirodan broj može na konačno mnogo načina zapisati kao suma prirodnih brojeva. □

Primijetimo da tvrdnja (b) prethodne leme vrijedi i uz slabiju pretpostavku. Ako pretpostavimo da suma svih naboja (umjesto ukupnog tipa naboja) mora biti fiksna, dobivamo isti zaključak. Tvrdnja je ipak zapisana u slabijem obliku jer time upravo oponaša situaciju iz dokaza sljedećeg teorema u kojem ćemo ju koristiti.

Teorem 4.19 *Za svaku dominantnu integralnu težinu Λ oblika kao u (4.36) skup*

$$\left\{ b v_\Lambda \mid b \in \bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} \right\}$$

razapinje glavni potprostor $W(\Lambda)$.

Dokaz. Želimo dokazati da se svaki vektor $v \in W(\Lambda)$ može zapisati kao linearna kombinacija vektora bv_Λ za $b \in \bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$. Glavni potprostor $W(\Lambda)$ se može zapisati kao direktna suma svojih težinskih potprostora:

$$W(\Lambda) = \bigoplus_{\mu \in \hat{P}} W(\Lambda)_\mu,$$

gdje je

$$W(\Lambda)_\mu = \left\{ v \in W(\Lambda) \mid q^h v = q^{\mu(h)} v \text{ za sve } h \in \hat{P}^\vee \right\}.$$

Zbog te dekompozicije dovoljno je dokazati da se svaki homogeni vektor $v \in W(\Lambda)$, tj. vektor koji se nalazi u nekom težinskom potprostoru $W(\Lambda)_\mu$, može zapisati kao linearna kombinacija vektora bv_Λ za $b \in \bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$.

Dokaz provodimo indukcijom po uređaju "$\prec$", slično kao u članku [18]. Preciznije, opisat ćemo postupak kojim možemo svaki vektor bv_Λ, $b \in \bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}$, čije kvazičestice ne zadovoljavaju neku od dvije definicione jednakosti skupa $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$, korak po korak popravljati, dobivajući pritom linearne kombinacije popravljenih vektora $b' v_\Lambda$ te linearne kombinacije vektora $b'' v_\Lambda$, $b \prec b''$. Pritom će nam lema 4.18 osiguravati kako će opisani postupak stati u konačno mnogo koraka te ćemo tada, na kraju, dobiti vektor bv_Λ zapisan kao linearnu kombinaciju vektora $b' v_\Lambda$, gdje su $b' \in \bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$.

(I) Neka je b monom iz $\bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}$ koji sadrži neku kvazičesticu boje i, naboja $m_{r,i}$ i stupnja $l_{r,i}$ koja ne zadovoljava uvjet

$$l_{r,i} \leq \sum_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} \min\{m_{r,i}, m_{s,i-1}\} - \sum_{s=1}^{m_{r,i}} \delta_{ij_s} - m_{r,i}. \tag{4.54}$$

Pretpostavimo da je b tipa naboja

$$(m_{r_n^{(1)},n}, \ldots, m_{1,n}; \ldots; m_{r_1^{(1)},1}, \ldots, m_{1,1}) \tag{4.55}$$

i da je niz njegovih stupnjeva, tj. stupnjeva kvazičestica od kojih je sastavljen

$$(l_{r_n^{(1)},n}, \ldots, l_{1,n}; \ldots; l_{r_1^{(1)},1}, \ldots, l_{1,1}). \tag{4.56}$$

Promotrimo izraz (4.39) u lemi 4.13. Zanima nas koeficijent koji se nalazi uz varijable

$$z_{r_n^{(1)},n}^{-l_{r_n^{(1)},n} - m_{r_n^{(1)},n}} \cdots z_{1,n}^{-l_{1,n} - m_{1,n}} \cdots z_{r_1^{(1)},1}^{-l_{r_1^{(1)},1} - m_{r_1^{(1)},1}} \cdots z_{1,1}^{-l_{1,1} - m_{1,1}}. \tag{4.57}$$

On će biti jednak linearnoj kombinaciji monoma, koji svi redom djeluju na vektor v_Λ. Jedan od njih jednak je upravo b dok su drugi, različiti od njega, veći od b s obzirom na parcijalni uređaj "$\prec$". Naime, vektor bv_Λ dobiva se iz (4.39) kada

$$\bar{x}^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(z_{r_n^{(1)},n}) \cdots \bar{x}^+_{m_{1,1}\alpha_1}(z_{1,1}) v_\Lambda \tag{4.58}$$

pomnožimo slobodnim članom od

$$A(z_{r_n^{(1)}},\ldots,z_1)\prod_{i=2}^{n}\prod_{r=1}^{r_i^{(1)}}\prod_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}}\prod_{t=1}^{m_{(r,s),i}}\left(1-q^{2(t+m_{r,i}-m_{(r,s),i})}\frac{z_{s,i-1}}{z_{r,i}}\right) \tag{4.59}$$

i zatim pogledamo koeficijent uz varijable (4.57). Preostali monomi b' primijenjeni na maksimalan vektor v_Λ dobivaju se množenjem preostalih članova od (4.59) sa (4.58) i promatranjem koeficijenta uz (4.57). Kako se u (4.59) javljaju samo kvocijenti varijabli z/w takvih da je u (4.58) verteks-operator u varijabli z bliže vektoru v_Λ, nego verteks-operator u varijabli w, vrijedit će $b \prec b'$. S obzirom da monom b ne zadovoljava uvjet (4.54), iz leme 4.13 slijedi da je čitava ta linearna kombinacija, koja je suma vektora bv_Λ i linearna kombinacija konačno mnogo vektora $b'v_\Lambda$, $b \prec b'$, jednaka nuli. Dakle, bv_Λ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora $b'v_\Lambda$, $b' \in \bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}$, istog tipa naboja i istog stupnja (ali različitog niza suma stupnjeva po bojama) kao b i takvih da je $b \prec b'$. Iz dokazanog slijedi da je dovoljno dokazati kako je svaki vektor bv_Λ za $b \in \bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}$, čije kvazičestice zadovoljavaju (4.54), linearna kombinacija vektora $b'v_\Lambda$ za $b' \in \bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$.

(II) Sada ćemo iskoristiti lemu 4.16 kako bismo pojačali uvjet (4.54). Neka je b monom iz $\bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}$ sa tipom naboja (4.55) i nizom stupnjeva (4.56) čije kvazičestice zadovoljavaju (4.54). Pretpostavimo da monom b sadrži kvazičesticu $\bar{x}^+_{m_{r,i}\alpha_i}(l_{r,i})$ koja ne zadovoljava uvjet

$$l_{r,i} \leq \sum_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} \min\{m_{r,i}, m_{s,i-1}\} - \sum_{s=1}^{m_{r,i}} \delta_{ij_s} - \sum_{m_{t,i}>m_{r,i}} 2m_{r,i} - m_{r,i}. \tag{4.60}$$

Lemu 4.16 primjenjujemo redom na sve parove koji se sastoje od kvazičestice $\bar{x}^+_{m_{r,i}\alpha_i}(l_{r,i})$ i neke kvazičestice boje i i naboja većeg od $m_{r,i}$. Tako dobivamo vektor bv_Λ zapisan kao linearnu kombinaciju

(a) vektora $b'v_\Lambda$ takvih da monomi b' zadovoljavaju (4.60) te su istog tipa naboja i istog niza sume stupnjeva po bojama kao i b;

(b) vektora $b''v_\Lambda$ takvih da monomi b'' zadovoljavaju $b \prec b''$, imaju iste nizove suma stupnjeva po bojama kao i b i isti tip ukupnog naboja kao i b, ali nisu istog tipa naboja kao b;

(c) vektora $b'''v_\Lambda$ takvih da monomi b''' ne zadovoljavaju (4.60) te su istog tipa naboja te istog niza sume stupnjeva po bojama kao i b.

Preostaje nam objasniti kako postupiti s vektorima $b'''v_\Lambda$. Ako smo, prilikom korištenja leme 4.16, odlučili izraziti $\bar{x}^+_{m_{r,i}\alpha_i}(l_{r,i})$ upravo tako da najveći stupanj koji se javlja u monomu bv_Λ na mjestu te kvazičestice bude

$$\sum_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} \min\{m_{r,i}, m_{s,i-1}\} - \sum_{s=1}^{m_{r,i}} \delta_{ij_s} - m_{r,i},$$

tj. desna strana nejednakosti (4.54), onda najmanji stupanj koji se javlja u monomu $b^{'''}v_\Lambda$ na mjestu te kvazičestice neće zadovoljavati nejednakost (4.54). Jasno, neće ju zadovoljavati niti preostali sumandi od $b^{'''}v_\Lambda$. To znači da na sve monome koji nam se javljaju u $b^{'''}v_\Lambda$ možemo primijeniti postupak kao u (I). Time ćemo $b^{'''}v_\Lambda$ zapisati kao linearnu kombinaciju novih vektora $b^{''''}v_\Lambda$ takvih da su monomi $b^{''''}$ većeg tipa naboja od b, istog stupnja kao i b, ali različitog niza suma stupnjeva po bojama od onog kojeg ima b. Dakle, početni vektor bv_Λ zapisali smo kao linearnu kombinaciju monoma koji zadovoljavaju uvjet (4.60) i monoma koji su, s obzirom na uređaj "$\prec$", veći od b.

(III) Prepostavimo da je $bv_\Lambda \in W(\Lambda)$ takav da je monom $b \in \bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}$ oblika

$$b = \cdots \bar{x}^+_{m_{r+1,i}\alpha_i}(l_{r+1,i})\bar{x}^+_{m_{r,i}\alpha_i}(l_{r,i})\cdots$$

te da stupnjevi $l_{r+1,i}$ i $l_{r,i}$ ne zadovoljavaju nejednakost

$$l_{r+1,i} \leq l_{r,i} - 2m_{r,i} \tag{4.61}$$

iako je $m_{r+1,i} = m_{r,i}$. Tada pomoću leme 4.17, vektor bv_Λ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju

(a) vektora $b^{'}v_\Lambda$ takvih da monomi $b^{'}$ zadovoljavaju (4.61) te su istog tipa naboja i istog niza sume stupnjeva po bojama kao i b;

(b) vektora $b^{''}v_\Lambda$ takvih da monomi $b^{''}$ zadovoljavaju $b \prec b^{''}$, imaju iste nizove suma stupnjeva po bojama kao i b, ali nisu istog tipa naboja kao b.

Dakle, dokazali smo da se vektor bv_Λ, čiji monom b ne zadovoljava uvjet (4.61), može zapisati kao linearna kombinacija vektora $b^{'}v_\Lambda$, čiji monomi $b^{'}$ zadovoljavaju (4.61), te vektora $b^{''}v_\Lambda$, čiji su monomi $b^{''}$ u uređaju "$\prec$" veći od b.

Lema 4.18 osigurava kako će se svaki od tri koraka, (I)–(III), provesti konačno mnogo puta. Naime, u svakom od koraka pojavljuju se monomi $b^{'}$, $b \prec b^{'}$, koji zadovoljavaju pretpostavke jedne od tvrdnji te leme pa prilikom provođenja koraka (I)–(III) možemo, prema tvrdnji (b) leme, samo konačno mnogo puta prijeći sa monoma jednog tipa naboja na linearnu kombinaciju monoma većeg tipa naboja (s obzirom na parcijalni uređaj "$\prec$") i također, prema tvrdnji (a) leme 4.18, možemo samo konačno mnogo puta sa monoma jednog tipa naboja prijeći na veći (s obzirom na uređaj "$\prec$") monom istog tipa naboja.

Ovime je dokaz teorema završen jer sada višestrukom primjenom koraka (I)–(III), kao što je objašnjeno na početku dokaza, možemo svaki vektor bv_Λ za $b \in \bar{\mathfrak{S}}_{W(\Lambda)}$ zapisati kao linearnu kombinaciju vektora $b^{'}v_\Lambda$ za neke $b^{'} \in \bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$. $\square$

Poglavlje 5

Linearna nezavisnost skupa $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$

Cilj ovog poglavlja je za svaku integralnu dominantnu težinu Λ oblika (4.36) pronaći bazu glavnog potprostora $W(\Lambda)$ kvantne afine algebre $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$, koja se sastoji od monoma kvazičestica primijenjenih na maksimalni vektor v_Λ. Prvo ćemo konstruirati skup $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ monoma kvazičestica tipa 1. Zatim ćemo definirati projekcije glavnog potprostora $W(\Lambda)$. One će nam, uz određeni operator ispreplitanja $\mathcal{Y}$, kojega ćemo također uvesti u ovom poglavlju, biti ključne u dokazu linearne nezavisnosti skupa $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$. Nakon što dokažemo njegovu linearnu nezavisnost, pomoću veze između skupova $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ i $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$ dobit ćemo dvije monomijalne baze glavnog potprostora $W(\Lambda)$. Dokaz linearne nezavisnosti skupa $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$ bit će proveden kao u članku [18].

5.1 Skup $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$

Kao i u prethodnom poglavlju, s Λ ćemo i dalje označavati dominantnu integralnu težinu oblika kao u (4.36) i nivoa c.

Prvo definiramo skup $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ monoma građenih od kvazičestica tipa 1:

$$\mathfrak{B}_{W(\Lambda)} := \bigcup_{\substack{0 \le m_{r_n^{(1)},n} \le \ldots \le m_{1,n} \le c \\ \cdots \\ 0 \le m_{r_1^{(1)},1} \le \ldots \le m_{1,1} \le c}} \left\{ x^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(l_{r_n^{(1)},n}) \cdots x^+_{m_{1,n}\alpha_n}(l_{1,n}) \cdots x^+_{m_{r_1^{(1)},1}\alpha_1}(l_{r_1^{(1)},1}) \cdots x^+_{m_{1,1}\alpha_1}(l_{1,1}) \;\middle|\; \begin{aligned} & l_{r,i} \le \sum_{s=1}^{r_{i-1}^{(1)}} \min\{m_{r,i}, m_{s,i-1}\} - \sum_{s=1}^{m_{r,i}} \delta_{ij_s} - \sum_{m_{t,i} > m_{r,i}} 2m_{r,i} - m_{r,i}, \\ & l_{r+1,i} \le l_{r,i} - 2m_{r,i} \text{ ako je } m_{r+1,i} = m_{r,i} \\ & \text{za sve } l_{r,i} \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ r = 1, 2, \ldots, r_i^{(1)} \end{aligned} \right\}.$$

Skup $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ možemo pomoću jednakosti (4.52) i (4.53) zapisati u terminima dualnog tipa naboja:

$$\mathfrak{B}_{W(\Lambda)} = \bigcup_{\substack{r_n^{(1)} \geq \ldots \geq r_n^{(c)} \geq 0 \\ \cdots \\ r_1^{(1)} \geq \ldots \geq r_1^{(c)} \geq 0}}$$

$$\Big\{ x^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(l_{r_n^{(1)},n}) \cdots x^+_{m_{1,n}\alpha_n}(l_{1,n}) \cdots x^+_{m_{r_1^{(1)},1}\alpha_1}(l_{r_1^{(1)},1}) \cdots x^+_{m_{1,1}\alpha_1}(l_{1,1}) \ \Big|$$

$$\Big| \ l_{r,i} \leq \sum_{s=1}^{m_{r,i}} r_{i-1}^{(s)} - \sum_{s=1}^{m_{r,i}} \delta_{ij_s} - 2m_{r,i} r_i^{(m_{r,i}+1)} - m_{r,i},$$

$$l_{r+1,i} \leq l_{r,i} - 2m_{r,i} \text{ ako je } m_{r+1,i} = m_{r,i}$$

$$\text{za sve } l_{r,i} \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ r = 1, 2, \ldots, r_i^{(1)} \Big\}.$$

Pojmove stupnja, tipa ukupnog naboja, tipa naboja te dualnog tipa naboja, koje smo definirali za monome građene od kvazičestica tipa 2, analogno možemo definirati i za monome građene od kvazičestica tipa 1. Kako kvazičestice tipa 1 iste boje ne komutiraju, pretpostavke (I)–(III) na monome kvazičestica tipa 2 se ne mogu bez smanjenja općenitosti uvesti i za monome građene od kvazičestica tipa 1. Međutim, skup $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ je definiran upravo tako da su te pretpostavke već ugrađene u njega. Tipovi naboja te nizovi stupnjeva monoma iz skupa $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ jednaki su tipovima naboja te nizovima stupnjeva monoma iz skupa $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$. S obzirom da ćemo se u čitavom poglavlju baviti kvazičesticama tipa 1, nazivat ćemo ih kraće kvazičesticama.

5.2 Projekcije glavnog potprostora

Glavni rezultat ovog poglavlja je linearna nezavisnost skupa $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$. U dokazu te činjenice trebat će nam, između ostalog, i već korištena konstrukcija ireducibilnog modula $L(\Lambda)$, nivoa c i najveće težine Λ, kao podmodula tenzorskog produkta c ireducibilnih modula najveće težine nivoa 1. Jasno, time onda ulažemo i glavni potprostor $W(\Lambda) \subset L(\Lambda)$ u tenzorski produkt glavnih potprostora nivoa 1:

$$W(\Lambda) \hookrightarrow W(\Lambda_{j_1}) \otimes \ldots \otimes W(\Lambda_{j_c}),$$
$$v_\Lambda \mapsto v_{\Lambda_{j_1}} \otimes \ldots \otimes v_{\Lambda_{j_c}},$$

gdje su indeksi j_s, $s = 1, \ldots, c$, iz gornje formule definirani s (4.37). Desnu stranu možemo rastaviti na direktnu sumu

$$W(\Lambda_{j_1}) \otimes \ldots \otimes W(\Lambda_{j_c}) = \bigoplus_{\substack{r_n^{(1)}, \ldots, r_1^{(1)} \geq 0 \\ \cdots \\ r_n^{(c)}, \ldots, r_1^{(c)} \geq 0}} W(\Lambda_{j_1})_{(r_n^{(1)}, \ldots, r_1^{(1)})} \otimes \cdots \otimes W(\Lambda_{j_c})_{(r_n^{(c)}, \ldots, r_1^{(c)})},$$

gdje je

$$W(\Lambda_{j_s})_{(r_n^{(s)},\dots,r_1^{(s)})} := W(\Lambda_{j_s})_{\Lambda_{j_s}+\sum_{i=1}^n r_i^{(s)}\alpha_i}, \quad s = 1,2,\dots,c,$$

težinski potprostor definiran s

$$W(\Lambda_{j_s})_{\Lambda_{j_s}+\sum_{i=1}^n r_i^{(s)}\alpha_i} := \left\{ v \in W(\Lambda) \,|\, K_i v = q^{(\Lambda_{j_s}+\sum_{i=1}^n r_i^{(s)}\alpha_i)(\alpha_i^\vee)} v, \text{ za sve } i = 1,2,\dots,n \right\}.$$

Takva dekompozicija za svaki dualni tip naboja

$$(r_n^{(1)},\dots,r_n^{(c)};\dots;r_1^{(1)},\dots,r_1^{(c)})$$

daje projekciju

$$\pi_{(r_n^{(1)},\dots,r_1^{(c)})} \colon W(\Lambda_{j_1}) \otimes \ldots \otimes W(\Lambda_{j_c}) \to W(\Lambda_{j_1})_{(r_n^{(1)},\dots,r_1^{(1)})} \otimes \cdots \otimes W(\Lambda_{j_c})_{(r_n^{(c)},\dots,r_1^{(c)})}. \quad (5.1)$$

Projekcija se na očit način može proširiti na prostor svih Laurentovih redova s koeficijentima iz $W(\Lambda_{j_1}) \otimes \ldots \otimes W(\Lambda_{j_c})$. Koristeći formulu (3.13) i tvrdnju (b) leme 4.4 možemo zapisati kako projekcija $\pi_{(r_n^{(1)},\dots,r_1^{(c)})}$ djeluje na

$$x^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(z_{r_n^{(1)},n}) \cdots x^+_{m_{1,1}\alpha_1}(z_{1,1}) v_\Lambda = x^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(z_{r_n^{(1)},n}) \cdots x^+_{m_{1,1}\alpha_1}(z_{1,1}) v_{\Lambda_{j_1}} \otimes \ldots \otimes v_{\Lambda_{j_c}}.$$

Pritom je verteks-operator

$$x^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(z_{r_n^{(1)},n}) \cdots x^+_{m_{1,1}\alpha_1}(z_{1,1}) \quad (5.2)$$

dualnog tipa naboja

$$(r_n^{(1)},\dots,r_n^{(c)};\dots;r_1^{(1)},\dots,r_1^{(c)}),$$

koji je zapisan u indeksu projekcije $\pi_{(r_n^{(1)},\dots,r_1^{(c)})}$. Odaberimo jedan operator koji se javlja u (5.2), npr.

$$x^+_{m_{l,i}\alpha_i}(z_{l,i}), \quad \text{gdje je } i = 1,2,\dots,n, \ l = 1,2,\dots,r_i^{(1)}. \quad (5.3)$$

Zbog jednostavnije notacije izostavimo indekse u (5.3), tj. stavimo

$$m := m_{l,i} \qquad \text{i} \qquad z := z_{l,i}$$

i zapišimo kraće taj operator kao $x^+_{m\alpha_i}(z)$. Podsjetimo se, on je definiran sa

$$x^+_{m\alpha_i}(z) = \lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}} \left(\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right)\right) x^+_{\alpha_i}(z_1) \ldots x^+_{\alpha_i}(z_m).$$

U formuli

$$\pi_{(r_n^{(1)},\dots,r_1^{(c)})} \left(x^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(z_{r_n^{(1)},n}) \cdots x^+_{m_{1,1}\alpha_1}(z_{1,1}) v_{\Lambda_{j_1}} \otimes \ldots \otimes v_{\Lambda_{j_c}} \right)$$

njemu će odgovarati član

$$\lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}} \Bigg(\Bigg(\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right) \Bigg)$$
$$\cdot\, \phi_i(z_1 q^{\frac{1}{2}}) \phi_i(z_2 q^{\frac{1}{2}}) \cdots \phi_i(z_{m-1} q^{\frac{1}{2}}) x^+_{\alpha_i}(z_m)$$
$$\otimes\, \phi_i(z_1 q^{\frac{3}{2}}) \phi_i(z_2 q^{\frac{3}{2}}) \cdots \phi_i(z_{m-2} q^{\frac{3}{2}}) x^+_{\alpha_i}(z_{m-1} q)$$
$$\vdots$$
$$\otimes\, \phi_i(z_1 q^{m-\frac{3}{2}}) x^+_{\alpha_i}(z_2 q^{m-2})$$
$$\otimes\, x^+_{\alpha_i}(z_1 q^{m-1})$$
$$\otimes\, \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{c-m \text{ puta}} \Bigg).$$

U gornjoj formuli su operatori $x^+_{\alpha_i}$ zauzeli prvih m tenzorskih faktora rasporedivši se po jedan na svakome od njih i to silazno s obzirom na indekse svojih varijabli. Nadalje, na m-tom faktoru se ne pojavljuju operatori ϕ_i. Te će nam dvije jednostavne opservacije biti jako bitne kasnije, kada ćemo pomoću projekcija iz ove točke dokazivati linearnu nezavisnost skupa $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$.

Projekcije iz (5.1) definirane su slično kao u članku [18]. Jedina razlika je u tome što se djelovanjem projekcija iz spomenutog članka na verteks-operator naboja $m \le c$ popunjavaju zadnjih, a ne prvih m faktora.

5.3 Operator ispreplitanja $\mathcal{Y}$

Za vektorski prostor V uvedimo oznaku

$$V\{z\} := \left\{ \sum_{h \in \mathbb{C}} v_h z^h \ : \ v_r \in V \text{ za sve } r \in \mathbb{F} \right\}.$$

Frenkel-Jingova realizacija (teorem 2.8) jednodimenzionalnih ireducibilnih modula $L(\Lambda_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, nam daje formule za djelovanje operatora $x^+_{\alpha_j}(z)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, na prostoru $L(\Lambda_i) = K(1) \otimes \mathbb{C}\{Q\} e^{\lambda_i}$:

$$\begin{aligned} x^+_{\alpha_j}(z) &= \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{-r/2}}{[r]} a_j(-r) z^r \right) \exp\left(- \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{-r/2}}{[r]} a_j(r) z^{-r} \right) \otimes e^{\alpha_j} z^{\alpha_j} \\ &= E^+_-(-a_j, z) E^+_+(-a_j, z) \otimes e^{\alpha_j} z^{\alpha_j}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

U ovoj točki ćemo konstruirati verteks-operatore $\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, na prostoru

$$V := K(1) \otimes \mathbb{C}\{P\}, \tag{5.5}$$

koji komutiraju sa svim operatorima $x^+_{\alpha_j}(z)$ u (5.4). U čitavoj točki ćemo, radi jednostavnije notacije, kao u (5.5), prostor $K(1) \otimes \mathbb{C}\{P\}$ kraće označavati s V.

U članku [32] su definirani elementi $a_1^*(l) \in U_q(\hat{\mathfrak{h}})$ i $a_n^*(l) \in U_q(\hat{\mathfrak{h}})$ za sve $l \in \mathbb{Z}$. Analogno možemo definirati elemente $a_i^*(l) \in U_q(\hat{\mathfrak{h}})$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$ i $l \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} a_i^*(l) := & \frac{[l][(n-i+1)l]}{[(n+1)l][l]} a_1(l) + \frac{[2l][(n-i+1)l]}{[(n+1)l][l]} a_2(l) + \ldots \\ & \ldots + \frac{[(i-1)l][(n-i+1)l]}{[(n+1)l][l]} a_{i-1}(l) + \frac{[il][(n-i+1)l]}{[(n+1)l][l]} a_i(l) \\ & + \frac{[il][(n-i)l]}{[(n+1)l][l]} a_{i+1}(l) + \ldots + \frac{[il][l]}{[(n+1)l][l]} a_n(l). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Za $i = 1$ i $i = n$ gornja definicija se podudara s onom u [32]. Vrijede sljedeće relacije:

Lema 5.1 *Za sve* $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *i za sve* $l, k \in \mathbb{Z}$ *vrijedi*

$$[a_i^*(l), a_j(k)] = \delta_{ij} \delta_{l+k\,0} \frac{[l]^2}{l}. \tag{5.7}$$

Dokaz. Ovdje navodimo samo dokaz jednakosti (5.7) kada je $1 < i = j < n$. Preostali slučajevi dokazuju se analogno.

Neka je $i = 2, 3, \ldots, n-1$ i neka su k i l cijeli brojevi. Ako je $k + l \neq 0$, onda nam definicione relacije (2.6) za kvantnu Heisenbergovu algebru $U_q(\hat{\mathfrak{h}})$ nivoa 1 daju

$$[a_r(l), a_i(k)] = \delta_{l+k\,0} \frac{[a_{ri} l]}{l} \frac{q^l - q^{-l}}{q - q^{-1}} = 0 \qquad \text{za sve } r = 1, 2, \ldots, n.$$

Dakle, svaki od n sumanada iz formule (5.6) komutira sa $a_i(k)$ pa stoga i $a_i^*(l)$ i $a_i(k)$ komutiraju:

$$[a_i^*(l), a_i(k)] = 0 \quad \text{za } k + l \neq 0. \tag{5.8}$$

Pretpostavimo da je $k + l = 0$. Za $r = 1, 2, \ldots, n$, $r \neq i-1, i, i+1$, je $a_{ri} = 0$ pa imamo

$$[a_{ri} l] = [0] = \frac{q^0 - q^{-0}}{q - q^{-1}} = 0.$$

Dakle, iz relacija (2.6) slijedi

$$[a_r(l), a_i(-l)] = \delta_{l-l\,0} \frac{[a_{ri} l]}{l} \frac{q^l - q^{-l}}{q - q^{-1}} = \frac{[0]}{l} \frac{q^l - q^{-l}}{q - q^{-1}} = 0 \tag{5.9}$$

za $r = 1, 2, \ldots, n$, $r \neq i-1, i, i+1$. Sada pomoću gornje jednakosti (5.9), definicione jednakosti (5.6), i relacija (2.6) dobivamo

$$
\begin{aligned}
[a_i^*(l), a_i(-l)] =& \frac{1}{[(n+1)l][l]} \Big[[(i-1)l][(n-i+1)l] a_{i-1}(l) \\
& + [il][(n-i+1)l] a_i(l) + [il][(n-i)l] a_{i+1}(l), a_i(-l) \Big] \\
=& \frac{1}{[(n+1)l][l]} \bigg([(i-1)l][(n-i+1)l] \frac{[-l][l]}{l} \\
& + [il][(n-i+1)l] \frac{[2l][l]}{l} + [il][(n-i)l] \frac{[-l][l]}{l} \bigg) \\
=& \frac{1}{[(n+1)l]l} \bigg(- [(i-1)l][(n-i+1)l][l] \\
& + [il][(n-i+1)l][2l] - [il][(n-i)l][l] \bigg). \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

Primijetimo da je

$$
\begin{aligned}
&- [(i-1)l][(n-i+1)l][l] + [il][(n-i+1)l][2l] = [(n-i+1)l]\big(- [(i-1)l][l] + [il][2l] \big) \\
&\quad = \frac{[(n-i+1)l]}{(q-q^{-1})^2} \big(q^{2l+il} + q^{-2l-il} - q^{il} - q^{-il} \big) = [(n-i+1)l][l][(i+1)l]
\end{aligned}
$$

pa (5.10) možemo zapisati kao

$$
\begin{aligned}
[a_i^*(l), a_i(-l)] &= \frac{1}{[(n+1)l]l} \Big([(n-i+1)l][l][(i+1)l] - [il][(n-i)l][l] \Big) \\
&= \frac{[l]}{[(n+1)l]l} \Big([(n-i+1)l][(i+1)l] - [il][(n-i)l] \Big) \\
&= \frac{[l]}{[(n+1)l]l} \frac{1}{(q-q^{-1})^2} \Big(q^{(n+2)l} + q^{-(n+2)l} - q^{nl} - q^{-nl} \Big) \\
&= \frac{[l]}{[(n+1)l]l} [(n+1)l][l] \\
&= \frac{[l]^2}{l}. \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

Iz dokazanih formula (5.8) i (5.11) slijedi tvrdnja leme za $1 < i = j < n$:

$$
[a_i^*(l), a_i(k)] = \delta_{ii} \delta_{l+k\,0} \frac{[l]^2}{l}.
$$

□

Lema 5.2 *U algebri* $\mathbb{C}\{P\}$ *za sve* $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *vrijedi*

$$
e^{\lambda_i} e^{\alpha_j} = \varepsilon_{ij} e^{\alpha_j} e^{\lambda_i},
$$

gdje je

$$
\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i < n \text{ i } j \neq i, n; \\ (-1)^i & \text{ako je } i < n \text{ i } j = n; \\ -1 & \text{ako je } j = i. \end{cases} \qquad (5.12)
$$

Dokaz. Za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ element $e^{\lambda_i} \in \mathbb{C}\{P\}$ je definiran sa

$$e^{\lambda_i} = e^{-\alpha_{i+1}} e^{-2\alpha_{i+2}} \cdots e^{-(n-i)\alpha_n} e^{(n+1)\lambda_n}.$$

Neka su $c_{ij}^{(1)}, c_{ij}^{(2)} \in \{\pm 1\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, takvi da vrijedi

$$e^{-\alpha_{i+1}} e^{-2\alpha_{i+2}} \cdots e^{-(n-i)\alpha_n} e^{\alpha_j} = c_{ij}^{(1)} e^{\alpha_j} e^{-\alpha_{i+1}} e^{-2\alpha_{i+2}} \cdots e^{-(n-i)\alpha_n}$$

i

$$e^{(n+1)\lambda_n} e^{\alpha_j} = c_{ij}^{(2)} e^{\alpha_j} e^{(n+1)\lambda_n}.$$

Tada je

$$\varepsilon_{ij} = c_{ij}^{(1)} c_{ij}^{(2)}.$$

Prilikom određivanja $c_{ij}^{(1)}$ koristimo samo prvu tvrdnju propozicije 2.7,

$$e^{\alpha_i} e^{\alpha_j} = (-1)^{(\alpha_i, \alpha_j)} e^{\alpha_j} e^{\alpha_i}, \qquad \text{za sve } i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.13}$$

Pretpostavimo da je $j = i + 2 < n$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha_{i+1}} e^{-2\alpha_{i+2}} \cdots e^{-(n-i)\alpha_n} e^{\alpha_j} &= e^{-\alpha_{i+1}} e^{-2\alpha_{i+2}} \cdots e^{-(n-i)\alpha_n} e^{\alpha_{i+2}} \\
&= e^{-\alpha_{i+1}} e^{-2\alpha_{i+2}} e^{-3\alpha_{i+3}} e^{\alpha_{i+2}} e^{-4\alpha_{i+4}} \cdots e^{-(n-i)\alpha_n} \\
&= (-1)^{-3\cdot(-1)} e^{-\alpha_{i+1}} e^{-2\alpha_{i+2}} e^{\alpha_{i+2}} e^{-3\alpha_{i+3}} e^{-4\alpha_{i+4}} \cdots e^{-(n-i)\alpha_n} \\
&= (-1)^{-3\cdot(-1)-2\cdot 2} e^{-\alpha_{i+1}} e^{\alpha_{i+2}} e^{-2\alpha_{i+2}} e^{-3\alpha_{i+3}} e^{-4\alpha_{i+4}} \cdots e^{-(n-i)\alpha_n} \\
&= (-1)^{-3\cdot(-1)-2\cdot 2-1\cdot(-1)} e^{\alpha_{i+2}} e^{-\alpha_{i+1}} e^{-2\alpha_{i+2}} e^{-3\alpha_{i+3}} e^{-4\alpha_{i+4}} \cdots e^{-(n-i)\alpha_n} \\
&= e^{\alpha_j} e^{-\alpha_{i+1}} e^{-2\alpha_{i+2}} \cdots e^{-(n-i)\alpha_n}.
\end{aligned}$$

Time smo dokazali da je $c_{ij}^{(1)} = 1$ za $j = i + 2 < n$. Sasvim analogno se, pomoću relacije (5.13), mogu izračunati vrijednosti svih $c_{ij}^{(1)}$ za $i, j = 1, 2, \ldots, n$:

$$c_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i < n \text{ i } j \neq i, n; \\ -1 & \text{ako je } i < n \text{ i } j = i; \\ (-1)^{n-i+1} & \text{ako je } i < n \text{ i } j = n; \\ 1 & \text{ako je } i = n. \end{cases} \tag{5.14}$$

Prilikom određivanja $c_{ij}^{(2)}$ koristimo drugu tvrdnju propozicije 2.7,

$$e^{\alpha_1} e^{\lambda_n} = (-1)^n e^{\lambda_n} e^{\alpha_1} \tag{5.15}$$

i definicionu relaciju

$$e^{\alpha_j} e^{\lambda_n} = (-1)^{\delta_{jn}} e^{\lambda_n} e^{\alpha_j} \qquad \text{za sve } j = 2, 3, \ldots, n. \tag{5.16}$$

Pretpostavimo da je $j = 1$. Tada imamo

$$e^{(n+1)\lambda_n} e^{\alpha_j} = e^{(n+1)\lambda_n} e^{\alpha_1} = (-1)^{n(n+1)} e^{\alpha_1} e^{(n+1)\lambda_n} = e^{\alpha_j} e^{(n+1)\lambda_n}.$$

Time smo dokazali da je $c_{ij}^{(2)} = 1$ za $j = 1$. Sasvim analogno se, pomoću relacija (5.15) i (5.16), mogu izračunati vrijednosti svih $c_{ij}^{(2)}$ za $i, j = 1, 2, \ldots, n$:

$$c_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } j < n; \\ (-1)^{n+1} & \text{ako je } j = n. \end{cases} \tag{5.17}$$

Sada iz formula (5.14) i (5.17) te jednakosti $\varepsilon_{ij} = c_{ij}^{(1)} c_{ij}^{(2)}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, slijedi tvrdnja leme. $\square$

Za $i = 1, 2, \ldots, n$ definiramo

$$E_-(a_i^*, z) := \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{r/2}}{[r]} a_i^*(-r) z^r\right);$$
$$E_+(a_i^*, z) := \exp\left(-\sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{r/2}}{[r]} a_i^*(r) z^{-r}\right).$$

Oba definirana reda se nalaze u prostoru $U_q(\hat{\mathfrak{h}})[[z^{\pm 1}]]$. U nastavku ćemo promatrati ireducibilan $U_q(\hat{\mathfrak{h}})$-modul $K(1)$ pa ćemo stoga gornje redove shvaćati isključivo kao elemente prostora $(\operatorname{End} K(1))[[z^{\pm 1}]]$.

Definicija 5.3 Za svaki $i = 1, \ldots, n$ definiramo na prostoru

$$V = K(1) \otimes \mathbb{C}\{P\}$$

operator ispreplitanja $\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z) \in \operatorname{Hom}(V, V\{Z\})$ s

$$\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z) := E_-(a_i^*, z) E_+(a_i^*, z) \otimes e^{\lambda_i} (-1)^{(1-\delta_{in}) i \lambda_n} z^{\lambda_i}.$$

Zbog restringiranog djelovanja operatora $a_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, na modulu $K(1)$, operatori $E_-(a_i^*, z)$ i $E_+(a_i^*, z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se nalaze u $\operatorname{Hom}(K(1), K(1)((z)))$. Sljedeća propozicija je jednostavna posljedica te činjenice.

Propozicija 5.4 *Za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ operator ispreplitanja $\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z)$ djeluje restringirano na V, tj. za svaki vektor $v \in V$ red $\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z)v$ sadrži samo konačno mnogo negativnih potencija varijable z.*

U sljedećem teoremu su nabrojana neka osnovna svojstva operatora $\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z)$.

Teorem 5.5 *Za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi*

(1) $[x_{\alpha_i}^+(z_1), \mathcal{Y}(e^{\lambda_j}, z_2)] = 0;$

(2) $[x^-_{\alpha_i}(z_1), \mathcal{Y}(e^{\lambda_j}, z_2)] = 0$ *ako je* $i \neq j$;

(3) $(z_1 - qz_2)x^-_{\alpha_i}(z_1)\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z_2) = (qz_1 - z_2)\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z_2)x^-_{\alpha_i}(z_1)$;

(4) $[\phi_i(z_1), \mathcal{Y}(e^{\lambda_j}, z_2)] = [\psi_i(z_1), \mathcal{Y}(e^{\lambda_j}, z_2)] = 0$ *ako je* $i \neq j$;

(5) $(q^{1/2}z_1 - qz_2)\phi_i(z_1)\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z_2) = (q^{3/2}z_1 - z_2)\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z_2)\phi_i(z_1)$;

(6) $(z_1 - q^{3/2}z_2)\psi_i(z_1)\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z_2) = (qz_1 - q^{1/2}z_2)\mathcal{Y}(e^{\lambda_i}, z_2)\psi_i(z_1)$.

Dokaz. Sve relacije iz teorema dokazuju se analogno pa ćemo stoga detaljno raspisati samo dokaz prve.

Iz formule (5.7) vidimo da za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi

$$\left[E^+_-(-a_i, z_1), E_-(a^*_j, z_2)\right] = \left[E^+_+(-a_i, z_1), E_+(a^*_j, z_2)\right] = 0. \tag{5.18}$$

Nadalje, također iz (5.7), vidimo da za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$ vrijedi

$$\left[E^+_-(-a_i, z_1), E_+(a^*_j, z_2)\right] = \left[E^+_+(-a_i, z_1), E_-(a^*_j, z_2)\right] = 0. \tag{5.19}$$

Koristeći formulu (5.7), za $i = 1, 2, \ldots, n$ računamo

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{-r/2}}{[r]} a_i(-r) z_1^r, -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{r/2}}{[r]} a^*_i(r) z_2^{-r}\right] = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{[r]^2} [a_i(-r), a^*_i(r)] \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^r \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{[r]^2} [a^*_i(r), a_i(-r)] \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^r = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{[r]^2} \frac{[r]^2}{r} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^r = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^r \\
&= -\log\left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right).
\end{aligned}$$

Time smo dokazali

$$E^+_-(-a_i, z_1) E_+(a^*_i, z_2) = \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)^{-1} E_+(a^*_i, z_2) E^+_-(-a_i, z_1). \tag{5.20}$$

Koristeći formulu (5.7) provodimo i sljedeći račun.

$$\begin{aligned}
&\left[-\sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{-r/2}}{[r]} a_i(r) z_1^{-r}, \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{r/2}}{[r]} a^*_i(-r) z_2^{r}\right] = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{[r]^2} [a_i(r), a^*_i(-r)] \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^r \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{[r]^2} [a^*_i(-r), a_i(r)] \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^r = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{[r]^2} \frac{[-r]^2}{-r} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^r = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^r \\
&= \log\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right).
\end{aligned}$$

Time smo dokazali

$$E^+_+(-a_i, z_1) E_-(a^*_i, z_2) = \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right) E_-(a^*_i, z_2) E^+_+(-a_i, z_1). \tag{5.21}$$

Iz relacija (5.18) i (5.19) za $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$, slijedi

$$\begin{aligned} &E_-^+(-a_i, z_1)E_+^+(-a_i, z_1)E_-(a_j^*, z_2)E_+(a_j^*, z_2) \\ &\qquad = E_-(a_j^*, z_2)E_+(a_j^*, z_2)E_-^+(-a_i, z_1)E_+^+(-a_i, z_1). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Iz relacija (5.20) i (5.21) za $i = 1, 2, \dots, n$ slijedi

$$\begin{aligned} &E_-^+(-a_i, z_1)E_+^+(-a_i, z_1)E_-(a_i^*, z_2)E_+(a_i^*, z_2) \\ &\qquad = -\frac{z_2}{z_1}E_-(a_i^*, z_2)E_+(a_i^*, z_2)E_-^+(-a_i, z_1)E_+^+(-a_i, z_1). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Iz leme 5.2 za $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$, dobivamo

$$\left[e^{\alpha_i} z_1^{\alpha_i}\, ,\, e^{\lambda_j}(-1)^{(1-\delta_{jn})j\lambda_n} z_2^{\lambda_j}\right] = 0. \tag{5.24}$$

Nadalje, također pomoću leme 5.2, za $i = 1, 2, \dots, n$ dobivamo

$$\left(e^{\alpha_i} z_1^{\alpha_i}\right)\left(e^{\lambda_i}(-1)^{(1-\delta_{in})i\lambda_n} z_2^{\lambda_i}\right) = -\frac{z_1}{z_2}\left(e^{\lambda_i}(-1)^{(1-\delta_{in})i\lambda_n} z_2^{\lambda_i}\right)\left(e^{\alpha_i} z_1^{\alpha_i}\right). \tag{5.25}$$

Koristeći relacije (5.22) i (5.24) za $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$, računamo

$$\begin{aligned} &x_{\alpha_i}^+(z_1)\mathcal{Y}(e^{\lambda_j}, z_2) \\ &= E_-^+(-a_i, z_1)E_+^+(-a_i, z_1)E_-(a_j^*, z_2)E_+(a_j^*, z_2) \otimes e^{\alpha_i} z_1^{\alpha_i} e^{\lambda_j}(-1)^{(1-\delta_{jn})j\lambda_n} z_2^{\lambda_j} \\ &= E_-(a_j^*, z_2)E_+(a_j^*, z_2)E_-^+(-a_i, z_1)E_+^+(-a_i, z_1) \otimes e^{\lambda_j}(-1)^{(1-\delta_{jn})j\lambda_n} z_2^{\lambda_j} e^{\alpha_i} z_1^{\alpha_i} \\ &= \mathcal{Y}(e^{\lambda_j}, z_2)x_{\alpha_i}^+(z_1). \end{aligned} \tag{5.26}$$

Koristeći relacije (5.23) i (5.25) za $i = 1, 2, \dots, n$ računamo

$$\begin{aligned} &x_{\alpha_i}^+(z_1)\mathcal{Y}(e^{\lambda_j}, z_2) \\ &= E_-^+(-a_i, z_1)E_+^+(-a_i, z_1)E_-(a_i^*, z_2)E_+(a_i^*, z_2) \otimes e^{\alpha_i} z_1^{\alpha_i} e^{\lambda_i}(-1)^{(1-\delta_{in})i\lambda_n} z_2^{\lambda_i} \\ &= -\frac{z_2}{z_1}(-1)\frac{z_1}{z_2}E_-(a_i^*, z_2)E_+(a_i^*, z_2)E_-^+(-a_i, z_1)E_+^+(-a_i, z_1) \otimes e^{\lambda_i}(-1)^{(1-\delta_{in})i\lambda_n} z_2^{\lambda_i} e^{\alpha_i} z_1^{\alpha_i} \\ &= E_-(a_i^*, z_2)E_+(a_i^*, z_2)E_-^+(-a_i, z_1)E_+^+(-a_i, z_1) \otimes e^{\lambda_i}(-1)^{(1-\delta_{in})i\lambda_n} z_2^{\lambda_i} e^{\alpha_i} z_1^{\alpha_i} \\ &= \mathcal{Y}(e^{\lambda_j}, z_2)x_{\alpha_i}^+(z_1) \end{aligned} \tag{5.27}$$

Jednakostima (5.26) i (5.27) dokazana je prva tvrdnja teorema,

$$[x_{\alpha_i}^+(z_1), \mathcal{Y}(e^{\lambda_j}, z_2)] = 0$$

za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$. □

5.4 Baza glavnog potprostora $W(\Lambda)$

U ovoj točki ćemo dokazati da je skup $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ linearno nezavisan. Podsjećamo kako i dalje radimo samo sa kvazičesticama tipa 1 pa to stoga nećemo posebno naglašavati.

Teorem 5.6 *Za svaku dominantnu integralnu težinu Λ oblika kao u (4.36) skup*

$$\mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda = \left\{ b v_\Lambda \mid b \in \mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \right\}$$

je linearno nezavisan.

Dokaz. Neka je $b \in \mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ monom kvazičestica,

$$b = x^+_{m_{r_n^{(1)},n}\alpha_n}(l_{r_n^{(1)},n}) \cdots x^+_{m_{1,n}\alpha_n}(l_{1,n}) \cdots x^+_{m_{r_1^{(1)},1}\alpha_1}(l_{r_1^{(1)},1}) \cdots x^+_{m_{1,1}\alpha_1}(l_{1,1})$$

tipa naboja

$$(m_{r_n^{(1)},n}, \ldots, m_{1,n}; \ldots; m_{r_1^{(1)},1}, \ldots, m_{1,1})$$

i dualnog tipa naboja

$$(r_n^{(1)}, \ldots, r_n^{(c)}; \ldots; r_1^{(1)}, \ldots, r_1^{(c)}).$$

Prvo ćemo dokazati kako nas pretpostavka $bv_\Lambda = 0$ dovodi do kontradikcije, a zatim tu činjenicu iskoristiti kako bismo završili dokaz teorema.

Pretpostavimo da je $bv_\Lambda = 0$. Tada je i

$$\pi_{(r_n^{(1)},\ldots,r_1^{(c)})} b v_\Lambda = 0.$$

Očito je $m := m_{1,1}$ maksimalan naboj koji se javlja kod kvazičestica boje 1 u monomu b. Sada ćemo na monom $\pi_{(r_n^{(1)},\ldots,r_1^{(c)})} b v_\Lambda$ djelovati sa

$$\underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{m-1} \otimes \operatorname*{Res}_z \left(z^{-1-(\lambda_1, \lambda_{j_m})} \mathcal{Y}(e^{\lambda_1}, z) \right) \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{c-m-1}. \tag{5.28}$$

Prema teoremu 5.5, m-ti faktor od (5.28) komutira sa svim operatorima na m-tom faktoru od

$$\pi_{(r_n^{(1)},\ldots,r_1^{(c)})} b v_\Lambda = \pi_{(r_n^{(1)},\ldots,r_1^{(c)})} b (v_{\Lambda_{j_1}} \otimes \ldots \otimes v_{\Lambda_{j_c}}),$$

koji djeluju na vektor $v_{\Lambda_{j_m}}$. Zbog toga ga možemo pomaknuti desno od svih njih tako da on prvi djeluje na $v_{\Lambda_{j_m}}$. Iz definicije od $\mathcal{Y}(e^{\lambda_1}, z)$ vidimo da je

$$\mathcal{Y}(e^{\lambda_1}, z) v_{\Lambda_{j_m}} = C e^{\lambda_1} v_{\Lambda_{j_m}},$$

gdje je $C \in \mathbb{C}(q^{1/2})$ neka konstanta različite od nule. Sada možemo invertibilan operator e^{λ_1} pomaknuti do kraja lijevo. Prema prvoj jednakosti iz leme 2.9, to će povećati stupnjeve svih kvazičestica naboja m i boje 1 za 1. Time ćemo dobiti

$$C e^{\lambda_1} \pi_{(r_n^{(1)},\ldots,r_1^{(c)})} b' v_\Lambda = 0,$$

gdje je $b^{'}$ monom dobiven iz monoma b povećavanjem za 1 stupnja svih kvazičestica naboja m i boje 1. Naravno, invertibilan operator e^{Λ_1} i konstantu $C \neq 0$ možemo izbaciti iz gornje jednakosti pa imamo

$$\pi_{(r_n^{(1)},\dots,r_1^{(c)})} b^{'} v_\Lambda = 0.$$

Opisanim postupkom možemo, korak po korak, povećavati za 1 stupnjeve svih kvazičestica naboja m i boje 1. Postupak ponavljamo sve dok jedna od njih ne bude imala stupanj $-m - \sum_{r=1}^{m} \delta_{1j_r}$. Upravo taj broj je najveća moguća vrijednost stupnja koju kvazičestica naboja m i boje 1 može imati, a da ne poništava vektor v_Λ. Naime, iz Frenkel-Jingove realizacije modula nivoa 1 slijede relacije

$$x_{\alpha_i}^{+}(-1-\delta_{ij}) v_{\Lambda_j} \neq 0 \quad \text{i} \quad x_{\alpha_i}^{+}(-\delta_{ij}) v_{\Lambda_j} = 0$$

za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$. Iz prve od njih vidimo kako čestica stupnja $-m - \sum_{r=1}^{m} \delta_{1j_r}$ neće poništavati maksimalni vektor v_Λ, a iz druge kako je to najveći mogući stupanj sa tim svojstvom.

Primijetimo kako iz definicije skupa $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ slijedi da je ta kvazičestica na samom početku dokaza, kada smo tek odabrali proizvoljan monom $b \in \mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$, imala stupanj manji ili jednak $-m - \sum_{r=1}^{m} \delta_{1j_r}$ što opravdava mogućnost provođenja gornjeg postupka. Označimo s $b^{''}$ monom koji dobijemo kada iz monoma kojeg trenutno imamo izbacimo tu posljednju kvazičesticu. Monom $b^{''}$ je tipa naboja

$$(m_{r_n^{(1)},n}, \dots, m_{1,n}; \dots; m_{r_2^{(1)},2}, \dots, m_{1,2}; m_{r_1^{(1)},1}, \dots, m_{2,1})$$

i dualnog tipa naboja

$$(r_n^{(1)}, \dots, r_n^{(c)}; \dots; r_2^{(1)}, \dots, r_2^{(c)}; r_1^{(1)} - 1, \dots, r_1^{(c)} - 1).$$

Računamo

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_{(r_n^{(1)},\dots,r_1^{(c)})} b^{''} x_{m\alpha_1}^{+}(-m - \sum_{r=1}^{m} \delta_{1j_r}) v_\Lambda \\ &= \pi_{(r_n^{(1)},\dots,r_1^{(c)})} b^{''} \left(\underbrace{e^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e^{\alpha_1}}_{m} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \right) v_\Lambda. \end{aligned}$$

Sad bismo htjeli sve invertibilne operatore e^{α_1} komutiranjem dovesti do kraja lijevo. Kada to napravimo, doći će do sljedeće promjene stupnjeva kvazičestica u monomu $b^{''}$:

- stupanj svake kvazičestice boje 1 će se povećati za dvostruku vrijednost naboja te kvazičestice;

- stupanj svake kvazičestice boje 2 će se smanjiti za vrijednost naboja te kvazičestice;

- stupnjevi kvazičestica preostalih boja neće se promijeniti.

Primjenom leme 2.9 na prvih m faktora možemo se uvjeriti da će zaista doći do opisanih promjena stupnjeva.

Nakon što smo proveli taj korak, invertibilne operatore e^{α_1}, kao i skalare iz $\mathbb{C}(q^{1/2})\setminus\{0\}$ koji su se pojavili prilikom komutiranja (lema 2.9), možemo maknuti te, ako monom koji nam je preostao označimo s b''' (i koji je istog tipa boje i naboja te istog tipa boje i dualnog naboja kao b''), zaključiti da je

$$\pi_{(r_n^{(1)},\ldots,r_2^{(c)},r_1^{(1)}-1,\ldots,r_1^{(c)}-1)}b'''v_\Lambda = 0.$$

Ako usporedimo monom b''' s početnim monomom b, vidimo da se oni razlikuju u tome što monom b''' ima jednu kvazičesticu naboja m i boje 1 manje od monoma b te u nizovima njihovih stupnjeva. U ovom trenutku je važno napomenuti kako se novi monom b''' opet nalazi u skupu $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$. Naime, uklanjanje desne kvazičestice naboja m i boje 1, zajedno s povećavanjem stupnja svake kvazičestice boje 1 za dvostruku vrijednost njenog naboja, nije moglo promijeniti istinitost definirajućih nejednakosti skupa $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$, koje su vrijedile za monom b. Također, smanjivanje stupnja svih kvazičestica boje 2 za vrijednost njihovog naboja istinite nejednakosti za monom b ostavlja istinitima.

Opisani postupak ćemo sada iskoristiti kako bismo iz monoma b''', jednu po jednu, maknuli sve kvazičestice naboja m i boje 1. Zatim se na isti način rješavamo svih kvazičestica naboja $m-1$ i boje 1 itd. Naposlijetku dolazimo do monoma koji ne sadrži kvazičestice boje 1. Naravno, svi dobiveni među-monomi, kao i konačan monom b_{m-1}, nalazit će se u $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$.

Sada ćemo na isti način maknuti iz monoma b_{m-1} sve kvazičestice boje 2, zatim iz dobivenog monoma b_{m-2} maknuti sve kvazičestice boje 3 itd. Na kraju, kada iz monoma b_1 maknemo sve kvazičestice boje m, dobit ćemo

$$v_\Lambda = 0.$$

To je kontradikcija pa zaključujemo da je

$$bv_\Lambda \neq 0 \quad \text{za sve } b \in \mathfrak{B}_{W(\Lambda)}.$$

Sada napokon možemo dokazati linearnu nezavisnost skupa $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$. Pretpostavimo da su $b_1, \ldots, b_r \in \mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ i $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C}(q^{1/2}) \setminus \{0\}$ takvi da je

$$\sum_{s=1}^{r} a_s b_s v_\Lambda = 0. \tag{5.29}$$

Kako je glavni potprostor $W(\Lambda)$ direktna suma svojih težinskih potprostora, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da svi monomi b_s, $s = 1, 2, \ldots, r$, imaju jednak tip ukupnog naboja i jednak stupanj. Možemo ih usporediti s obzirom na linearni uređaj "$<$" te pronaći najmanjeg od njih. Pretpostavimo da je najmanji monom upravo b_1. Sada ćemo na čitavoj linearnoj kombinaciji (5.29) provoditi postupak redukcije naboja, koji smo detaljno opisali u prvom dijelu dokaza, sve dok iz najmanjeg monoma b_1 ne izbacimo sve naboje. Tada će $a_1 b_1 v_\Lambda$ postati $C a_1 v_\Lambda$ za neku konstantu $C \in \mathbb{C}(q^{1/2})$, $C \neq 0$. Preostali članovi iz (5.29), $a_2 b_2 v_\Lambda, \ldots, a_r b_r v_\Lambda$ dotad će već biti poništeni jer je b_1 bio najmanji monom. Dakle, dobili smo

$$C a_1 v_\Lambda = 0 \qquad \text{i} \qquad C \neq 0$$

pa stoga a_1 mora biti jednak nuli. To je kontradikcija pa zaključujemo da su vektori $b_1 v_\Lambda, \ldots, b_r v_\Lambda \in \mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$ linearno nezavisni, a zatim i da je čitav skup $\mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \cdot v_\Lambda$ linearno nezavisan. $\square$

Dokažimo i glavni rezultat ovog poglavlja.

Teorem 5.7 *Za svaku dominantnu integralnu težinu Λ oblika kao u (4.36) skup*

$$\left\{ b v_\Lambda \mid b \in \mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \right\}$$

je baza glavnog potprostora $W(\Lambda)$.

Dokaz. Tvrdnja teorema je jednostavna posljedica teorema 4.19 i 5.6. Za monom $b \in \mathfrak{B}_{W(\Lambda)}$ označimo s $\bar{b}$ monom iz $\bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)}$, koji je istog tipa naboja te istog niza stupnjeva kao b. Mogli bismo reći da je monom $\bar{b}$ dobiven iz monoma b dodavanjem crtica iznad svake kvazičestice. Dovoljno je primijetiti kako su oba vektora, $b v_\Lambda$ i $\bar{b} v_\Lambda$, težinski vektori iste težine. Nadalje, glavni potprostor $W(\Lambda) \subset L(\Lambda)$ je direktna suma konačnodimenzionalnih težinskih potprostora pa stoga za svaku težinu od $W(\Lambda)$ imamo konačno mnogo vektora $\bar{b} v_\Lambda$ koji generiraju pripadni težinski potprostor te isto toliko vektora $b v_\Lambda$ koji su linearno nezavisni i sadržani u tom težinskom potprostoru. Odatle zaključujemo da linearno nezavisan skup $\left\{ b v_\Lambda \mid b \in \mathfrak{B}_{W(\Lambda)} \right\}$ razapinje glavni potprostor $W(\Lambda)$, tj. da je baza glavnog potprostora $W(\Lambda)$. $\square$

Naravno, tvrdnja prethodnog teorema daje nam još jednu bazu.

Korolar 5.8 *Za svaku dominantnu integralnu težinu Λ oblika kao u (4.36) skup*

$$\left\{ b v_\Lambda \mid b \in \bar{\mathfrak{B}}_{W(\Lambda)} \right\}$$

je baza glavnog potprostora $W(\Lambda)$.

Poglavlje 6

Kvantne verteks-algebre

Cilj ovog posljednjeg poglavlja je pokazati kako se verteks-operatori za kvazičestice tipa 1 mogu na prirodan način dobiti pomoću operacija na prostoru $\mathrm{Hom}(V, V((z)))$, koje je definirao H.-S. Li u svom članku [36].

6.1 Kvazi-kompatibilnost

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ karakteristike nula. Uvedimo oznaku

$$\mathcal{E}(V) := \mathrm{Hom}(V, V((z))).$$

Označimo s $\mathbb{F}_*(z_1, \ldots, z_m)$ lokalizaciju od $\mathbb{F}[[z_1, \ldots, z_m]]$ sa $\mathbb{F}[z_1, \ldots, z_m] \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{F}_*(z_1, \ldots, z_m) := \left\{ \frac{f}{p} : f \in \mathbb{F}[[z_1, \ldots, z_m]],\ p \in \mathbb{F}[z_1, \ldots, z_m] \setminus \{0\} \right\}.$$

Kako je $\mathbb{F}[[z_1, \ldots, z_m]]$ potprsten polja $\mathbb{F}((z_1))((z_2)) \cdots ((z_m))$, postoji jedinstveno ulaganje prstena $\mathbb{F}_*(z_1, \ldots, z_m)$ u polje $\mathbb{F}((z_1))((z_2)) \cdots ((z_m))$. Označimo takvo ulaganje s $\iota_{z_1,\ldots,z_m}$:

$$\iota_{z_1,\ldots,z_m} \colon \mathbb{F}_*(z_1, \ldots, z_m) \to \mathbb{F}((z_1))((z_2)) \cdots ((z_m)).$$

Za $m \in \mathbb{Z}$ definiramo $(z_1 + z_2)^m$ sa

$$(z_1 + z_2)^m = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{m}{l} z_1^{m-l} z_2^l \in \mathbb{C}((z_1))((z_2)),$$

gdje je

$$\binom{m}{l} = \frac{m(m-1)\cdots(m-l+1)}{l!}$$

za sve $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Primijetimo kako je za negativne cijele brojeve m

$$(z_1 + z_2)^m \neq (z_2 + z_1)^m.$$

Navodimo definiciju iz članka [37].

Definicija 6.1 Za m-torku $(a_1(z), a_2(z), \ldots, a_m(z))$ u $\mathcal{E}(V)$ kažemo da je kvazi-kompatibilna ako postoji polinom $p(z_1, z_2) \in \mathbb{F}[z_1, z_2]$, $p(z_1, z_2) \neq 0$, takav da vrijedi

$$\left(\prod_{r=1}^{m-1} \prod_{s=r+1}^{m} p(z_r, z_s) \right) a_1(z_1)a_2(z_2) \cdots a_m(z_m) \in \mathrm{Hom}(V, V((z_1, \ldots, z_m))).$$

Iz teorema 4.8 slijedi da je svaki uređen par

$$(x^+_{m\alpha_i}(z), x^+_{k\alpha_{i-1}}(z)),$$

$m, k \in \mathbb{N}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, kvazi-kompatibilan. Naravno, pritom su koeficijenti promatranih verteks-operatora shvaćeni kao endomorfizmi nekog ireducibilnog modula V najveće težine.

Neka je odsada naše polje $\mathbb{F}$ karakteristike 0, koje promatramo, upravo polje $\mathbb{C}(q^{1/2})$ i neka je vektorski prostor V prostor nad poljem $\mathbb{C}(q^{1/2})$.

Definicija 6.2 Neka je $(a(z), b(z))$ kvazi-kompatibilan par u $\mathcal{E}(V)$. Za $\alpha \in \mathbb{C}(q) \setminus \{0\}$ i $l \in \mathbb{Z}$ definiramo $a(z)_{(\alpha,l)}b(z) \in (\mathrm{End}\, V)[[z^{\pm 1}]]$ kao koeficijente reda

$$Y^{(\alpha)}_{\mathcal{E}}(a(z), z_0)b(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (a(z)_{(\alpha,l)}b(z)) z_0^{-l-1} \in (\mathrm{End}\, V)[[z_0^{\pm 1}, z^{\pm 1}]]$$

danog s

$$Y^{(\alpha)}_{\mathcal{E}}(a(z), z_0)b(z) = \iota_{z,z_0} \left(p(z_0 + \alpha z, z)^{-1} \right) \left(p(z_1, z)a(z_1)b(z) \right)\big|_{z_1 = \alpha z + z_0}, \tag{6.1}$$

gdje je $p(z_1, z_2) \in \mathbb{C}(q)[z_1, z_2]$, $p(z_1, z_2) \neq 0$, bilo koji polinom za koji vrijedi

$$p(z_1, z_2)a(z_1)b(z_2) \in \mathrm{Hom}(V, V((z_1, z_2))). \tag{6.2}$$

U gornjoj definiciji

$$\left(p(z_1, z)a(z_1)b(z) \right)\big|_{z_1 = \alpha z + z_0} \tag{6.3}$$

označava zamjenu varijable z_1 u produktu $p(z_1, z)a(z_1)b(z)$ s $\alpha z + z_0$. Primijetimo da nismo mogli umjesto (6.3) pisati

$$p(\alpha z + z_0, z)a(\alpha z + z_0)b(z). \tag{6.4}$$

Naime, produkt $a(\alpha z + z_0)b(z)$ iz (6.4) uopće ne mora biti dobro definiran element prostora $(\mathrm{End}\, V)[[z_0^{\pm 1}, z^{\pm 1}]]$.

U članku [36] je skalar α uzet iz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a polinom $p(z_1, z_2)$ iz $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ dok je ovdje $\alpha \in \mathbb{C}(q) \setminus \{0\}$ i $p(z_1, z_2) \in \mathbb{C}(q)[z_1, z_2]$. U članku [37] je $\alpha = 1$, a polinom $p(z_1, z_2)$ je element prstena $\mathbb{F}[z_1, z_2]$, gdje je $\mathbb{F}$ proizvoljno polje karakteristike 0. Iako definicija 6.2 predstavlja malu modifikaciju definicija iz spomenutih članaka, ona je i dalje dobra, tj. desna strana relacije (6.1) zaista definira element prostora $(\mathrm{End}\, V)[[z_0^{\pm 1}, z^{\pm 1}]]$.

Za fiksan kvazi-kompatibilan par $(a(z), b(z))$ više različitih polinoma može zadovoljavati relaciju (6.2). U članku [35] je dokazano kako definicija od $Y_{\mathcal{E}}^{(\alpha)}$ ne ovisi o izboru takvog polinoma.

Navodimo jednu tvrdnju iz [36].

Propozicija 6.3 *Neka je su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(q) \setminus \{0\}$ i neka je $(a(z), b(z))$ kvazi-kompatibilan par u $\mathcal{E}(V)$. Tada je*

$$Y_{\mathcal{E}}^{(\alpha)}(a(\beta z), \beta^{-1} z_0) b(z) = Y_{\mathcal{E}}^{(\alpha\beta)}(a(z), z_0) b(z).$$

Iz tvrdnje prethodne propozicije jednostavno slijedi

$$a(\beta z)_{(\alpha,-1)} b(z) = a(z)_{(\alpha\beta,-1)} b(z) \tag{6.5}$$

za svaki kvazi-kompatibilan par $(a(z), b(z))$ u $\mathcal{E}(V)$ i za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(q) \setminus \{0\}$.

6.2 Kvazičestice tipa 1

Lema 6.4 *Za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ na ireducibilnom modulu V najveće težine vrijedi*

$$x_{\alpha_i}^{+}(z)_{(q^{-2},-1)} x_{\alpha_i}^{+}(z) = (1 - q^4) x_{2\alpha_i}^{+}(q^{-2} z). \tag{6.6}$$

Dokaz. Računamo:

$$\begin{aligned}
x_{2\alpha_i}^{+}(q^{-2}z) &= \lim_{z_p \to zq^{2(p-2)}} \left(1 - q^2 \frac{z_2}{z_1}\right) x_{\alpha_i}^{+}(z_1) x_{\alpha_i}^{+}(z_2) \\
&= \lim_{z_p \to zq^{2(p-2)}} \left(\sum_{r,s \in \mathbb{Z}} (x_{\alpha_i}^{+}(r) x_{\alpha_i}^{+}(s) - q^2 x_{\alpha_i}^{+}(r-1) x_{\alpha_i}^{+}(s+1)) z_1^{-r-1} z_2^{-s-1} \right) \\
&= \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} (x_{\alpha_i}^{+}(r) x_{\alpha_i}^{+}(s) - q^2 x_{\alpha_i}^{+}(r-1) x_{\alpha_i}^{+}(s+1)) (zq^{-2})^{-r-1} z^{-s-1} \\
&= \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} q^{2(r+1)} (x_{\alpha_i}^{+}(r) x_{\alpha_i}^{+}(s) - q^2 x_{\alpha_i}^{+}(r-1) x_{\alpha_i}^{+}(s+1)) z^{-r-s-2} \\
&= \sum_{A \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} q^{2(r+1)} (x_{\alpha_i}^{+}(r) x_{\alpha_i}^{+}(A-r) - q^2 x_{\alpha_i}^{+}(r-1) x_{\alpha_i}^{+}(A-r+1)) \right) z^{-A-2} \\
&= q^2 \sum_{A \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} q^{2r} (x_{\alpha_i}^{+}(r) x_{\alpha_i}^{+}(A-r) - q^2 x_{\alpha_i}^{+}(r-1) x_{\alpha_i}^{+}(A-r+1)) \right) z^{-A-2}.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Iz (1.3) vidimo da je

$$(z_1 - q^2 z_2) x_{\alpha_i}^{+}(z_1) x_{\alpha_i}^{+}(z_2) = (q^2 z_1 - z_2) x_{\alpha_i}^{+}(z_2) x_{\alpha_i}^{+}(z_1). \tag{6.8}$$

Prisjetimo se da verteks-operatori $x_{\alpha_i}^{+}(z)$ djeluju restringirano na ireducibilnim modulima najveće težine (korolar 3.8). Dakle, ako lijevu stranu gornje jednakosti primijenimo na proizvoljan vektor iz V, dobit ćemo element iz $V((z_1))((z_2))$, a ako desnu stranu primijenimo na proizvoljan vektor iz V, dobit ćemo element iz $V((z_2))((z_1))$. Prema tome, obje strane primijenjene na proizvoljan vektor iz V daju nam element iz

$$V((z_1, z_2)) = V((z_1))((z_2)) \cap V((z_2))((z_1))$$

pa zaključujemo da se obje strane jednakosti (6.8) nalaze u $\mathrm{Hom}(V, V((z_1, z_2)))$. Zbog toga za polinom $p(z_1, z_2)$ iz definicije 6.2 možemo odabrati upravo polinom

$$p(z_1, z_2) = z_1 - q^2 z_2.$$

Primijetimo kako nas u formuli za $Y_{\mathcal{E}}^{(q^{-2})}(x_{\alpha_i}^+(z), z_0)x_{\alpha_i}^+(z)$ zanima samo koeficijent uz z_0^0 jer se upravo uz njega nalazi lijeva strana jednakosti (6.6). Kako članovi

$$\iota_{z,z_0}\left(p(z_0 + q^{-2}z, z)^{-1}\right) \qquad \text{i} \qquad \left(p(z_1, z)x_{\alpha_i}^+(z_1)x_{\alpha_i}^+(z)\right)\Big|_{z_1=q^{-2}z+z_0}$$

sadrže samo nenegativne potencije varijable z_0, dovoljno je u svakome od njih pronaći koeficijent uz z_0^0.

Računamo:

$$\begin{aligned}
\iota_{z,z_0}\left(p(z_0 + q^{-2}z, z)^{-1}\right) &= \iota_{z,z_0}\left((z_0 + q^{-2}z - q^2 z)^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{z(q^{-2} - q^2)} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z(q^2 - q^{-2})}\right)^l.
\end{aligned}$$

Koeficijent uz z_0^0 u gornjem izrazu je

$$\frac{1}{z(q^{-2} - q^2)}. \tag{6.9}$$

Računamo drugi član:

$$\begin{aligned}
&\left(p(z_1, z)x_{\alpha_i}^+(z_1)x_{\alpha_i}^+(z)\right)\Big|_{z_1=q^{-2}z+z_0} = \left((z_1 - q^2 z)x_{\alpha_i}^+(z_1)x_{\alpha_i}^+(z)\right)\Big|_{z_1=q^{-2}z+z_0} \\
&\quad = \left(\sum_{r,s\in\mathbb{Z}} (x_{\alpha_i}^+(r+1)x_{\alpha_i}^+(s) - q^2 x_{\alpha_i}^+(r)x_{\alpha_i}^+(s+1))z_1^{-r-1}z^{-s-1}\right)\Bigg|_{z_1=q^{-2}z+z_0} \\
&\quad = \sum_{r,s\in\mathbb{Z}} (x_{\alpha_i}^+(r+1)x_{\alpha_i}^+(s) - q^2 x_{\alpha_i}^+(r)x_{\alpha_i}^+(s+1))(q^{-2}z + z_0)^{-r-1}z^{-s-1} \\
&\quad = \sum_{\substack{r,s\in\mathbb{Z} \\ l\geq 0}} \tbinom{-r-1}{l} q^{2(r+l+1)}(x_{\alpha_i}^+(r+1)x_{\alpha_i}^+(s) - q^2 x_{\alpha_i}^+(r)x_{\alpha_i}^+(s+1))z^{-r-l-s-2}z_0^l.
\end{aligned}$$

Koeficijent uz z_0^0 u gornjem izrazu je

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s\in\mathbb{Z}} q^{2(r+1)}(x_{\alpha_i}^+(r+1)x_{\alpha_i}^+(s) - q^2 x_{\alpha_i}^+(r)x_{\alpha_i}^+(s+1))z^{-r-s-2} \\
&\quad = \sum_{A\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}} q^{2(r+1)}(x_{\alpha_i}^+(r+1)x_{\alpha_i}^+(A-r) - q^2 x_{\alpha_i}^+(r)x_{\alpha_i}^+(A-r+1))\right) z^{-A-2} \\
&\quad = \sum_{A\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}} q^{2r}(x_{\alpha_i}^+(r)x_{\alpha_i}^+(A-r) - q^2 x_{\alpha_i}^+(r-1)x_{\alpha_i}^+(A-r+1))\right) z^{-A-1}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Produkt izraza u (6.9) i (6.10) jednak je upravo $x_{\alpha_i}^+(z)_{(q^{-2},-1)}x_{\alpha_i}^+(z)$. Iz posljednje u nizu jednakosti (6.7) vidimo da je produkt (6.9) i (6.10) jednak $(1-q^4)x_{2\alpha_i}^+(q^{-2}z)$ čime je tvrdnja leme dokazana. $\square$

Cilj nam je poopćiti tvrdnju prethodne leme na verteks-operatore proizvoljno visokog naboja. Za to će nam biti potrebna sljedeća činjenica:

Lema 6.5 *Na ireducibilnom modulu V najveće težine za sve $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi*

$$\left(\prod_{s=1}^{m+1}\left(z_1 - q^{2(s-m)}z\right)\right) x_{\alpha_i}^+(z_1)x_{(m+1)\alpha_i}^+(q^{-2m}z)$$
$$= \left(\prod_{s=1}^{m+1}\left(q^2z_1 - zq^{2(s-m-1)}\right)\right) x_{(m+1)\alpha_i}^+(q^{-2m}z)x_{\alpha_i}^+(z_1). \tag{6.11}$$

Specijalno, vrijedi

$$\left(\prod_{s=1}^{m+1}\left(z_1 - q^{2(s-m)}z\right)\right) x_{\alpha_i}^+(z_1)x_{(m+1)\alpha_i}^+(q^{-2m}z) \in \mathrm{Hom}(V, V((z_1, z))).$$

Dokaz. Pomoću definicione relacije (3.13) dobivamo:

$$\prod_{s=1}^{m+1}\left(z_1 - q^{2(s-m)}z\right) x_{\alpha_i}^+(z_1)x_{(m+1)\alpha_i}^+(q^{-2m}z)$$
$$= \prod_{s=1}^{m+1}\left(z_1 - q^{2(s-m)}z\right) x_{\alpha_i}^+(z_1) \lim_{w_p\to zq^{2(p-m-1)}} \prod_{r=1}^{m}\prod_{s=r+1}^{m+1}\left(1 - q^2\frac{w_s}{w_r}\right) x_{\alpha_i}^+(w_1)\cdots x_{\alpha_i}^+(w_{m+1})$$
$$= \lim_{w_p\to zq^{2(p-m-1)}} \left(\prod_{s=1}^{m+1}\left(z_1 - q^{2(s-m)}z\right) x_{\alpha_i}^+(z_1)\prod_{r=1}^{m}\prod_{s=r+1}^{m+1}\left(1 - q^2\frac{w_s}{w_r}\right) x_{\alpha_i}^+(w_1)\cdots x_{\alpha_i}^+(w_{m+1})\right)$$
$$= \lim_{w_p\to zq^{2(p-m-1)}} \left(\prod_{s=1}^{m+1}\left(z_1 - q^2w_s\right) x_{\alpha_i}^+(z_1)\prod_{r=1}^{m}\prod_{s=r+1}^{m+1}\left(1 - q^2\frac{w_s}{w_r}\right) x_{\alpha_i}^+(w_1)\cdots x_{\alpha_i}^+(w_{m+1})\right).$$

Primijenimo unutar limesa relaciju (1.3) iz Drinfeldove realizacije, kako bismo operator $x_{\alpha_i}^+(z_1)$ doveli desno od svih operatora $x_{\alpha_i}^+(w_s)$, $s = 1, 2, \ldots, m+1$:

$$= \lim_{w_p\to zq^{2(p-m-1)}} \left(\prod_{r=1}^{m}\prod_{s=r+1}^{m+1}\left(1 - q^2\frac{w_s}{w_r}\right) x_{\alpha_i}^+(w_1)\cdots x_{\alpha_i}^+(w_{m+1})\prod_{s=1}^{m+1}\left(q^2z_1 - w_s\right) x_{\alpha_i}^+(z_1)\right)$$
$$= \lim_{w_p\to zq^{2(p-m-1)}} \left(\prod_{r=1}^{m}\prod_{s=r+1}^{m+1}\left(1 - q^2\frac{w_s}{w_r}\right) x_{\alpha_i}^+(w_1)\cdots x_{\alpha_i}^+(w_{m+1})\right)$$
$$\cdot \prod_{s=1}^{m+1}\left(q^2z_1 - zq^{2(s-m-1)}\right) x_{\alpha_i}^+(z_1)$$
$$= \left(\prod_{s=1}^{m+1}\left(q^2z_1 - zq^{2(s-m-1)}\right)\right) x_{(m+1)\alpha_i}^+(q^{-2m}z)x_{\alpha_i}^+(z_1).$$

Time smo dokazali jednakost (6.11). Kako se, zbog restringiranog djelovanja verteks-operatora $x^+_{(m+1)\alpha_i}(z)$ na V (korolar 3.8), njena lijeva strana nalazi u $\mathrm{Hom}(V, V((z_1))((z)))$, a desna u $\mathrm{Hom}(V, V((z))((z_1)))$, kao u dokazu leme 6.4 zaključujemo da se obje strane nalaze u presjeku $\mathrm{Hom}(V, V((z_1, z)))$ pa slijedi i druga tvrdnja leme. □

Iz prethodne leme slijedi da je par $(x^+_{\alpha_i}(z), x^+_{(m+1)\alpha_i}(q^{-2m}z))$ kvazi-kompatibilan.

Propozicija 6.6 *Za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ i za svaki prirodan broj m na ireducibilnom modulu V najveće težine vrijedi*

$$\begin{aligned} &x^+_{\alpha_i}(z)_{(q^{-2m},-1)}\Big(\ldots\big(x^+_{\alpha_i}(z)_{(q^{-4},-1)}(x^+_{\alpha_i}(z)_{(q^{-2},-1)}x^+_{\alpha_i}(z))\big)\ldots\Big) \\ &= \left(\prod_{r=1}^{m}\prod_{s=r+1}^{m+1}\left(1-q^{2(s-r)+2}\right)\right)x^+_{(m+1)\alpha_i}(q^{-2m}z). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Dokaz. Tvrdnju propozicije dokazujemo indukcijom po $m \in \mathbb{N}$. Za $m = 1$ imamo upravo tvrdnju leme 6.4. Pretpostavimo da vrijedi (6.12).

Računamo:

$$\begin{aligned} x^+_{(m+2)\alpha_i}(q^{-2(m+1)}z) &= \lim_{\substack{z_1\to zq^{-2(m+1)}\\ \vdots \\ z_{m+2}\to z}}\left(\prod_{r=1}^{m+1}\prod_{s=r+1}^{m+2}\left(1-q^2\frac{z_s}{z_r}\right)x^+_{\alpha_i}(z_1)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{m+2})\right) \\ &= \lim_{z_1\to zq^{-2(m+1)}}\left(\lim_{\substack{z_2\to zq^{-2m}\\ \vdots \\ z_{m+2}\to z}}\left(\prod_{r=1}^{m+1}\prod_{s=r+1}^{m+2}\left(1-q^2\frac{z_s}{z_r}\right)x^+_{\alpha_i}(z_1)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{m+2})\right)\right) \\ &= \lim_{z_1\to zq^{-2(m+1)}}\left(\lim_{\substack{z_2\to zq^{-2m}\\ \vdots \\ z_{m+2}\to z}}\left(\prod_{s=2}^{m+2}\left(1-q^2\frac{z_s}{z_1}\right)x^+_{\alpha_i}(z_1)\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\cdot\prod_{r=2}^{m+1}\prod_{s=r+1}^{m+2}\left(1-q^2\frac{z_s}{z_r}\right)x^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{m+2})\right)\right) \\ &= \lim_{z_1\to zq^{-2(m+1)}}\left(\prod_{s=2}^{m+2}\left(1-q^2q^{2(s-(m+2))}\frac{z}{z_1}\right)x^+_{\alpha_i}(z_1)\right. \\ &\qquad \left.\cdot\lim_{\substack{z_2\to zq^{-2m}\\ \vdots \\ z_{m+2}\to z}}\left(\prod_{r=2}^{m+1}\prod_{s=r+1}^{m+2}\left(1-q^2\frac{z_s}{z_r}\right)x^+_{\alpha_i}(z_2)\cdots x^+_{\alpha_i}(z_{m+2})\right)\right). \end{aligned}$$

Na izraz iz prethodnog retka možemo primijeniti definicionu jednakost (3.13):

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z_1 \to z q^{-2(m+1)}} \left(\prod_{s=2}^{m+2} \left(1 - q^{2(s-m-1)} \frac{z}{z_1}\right) x^+_{\alpha_i}(z_1) x^+_{(m+1)\alpha_i}(q^{-2m} z) \right) \\
&= \lim_{z_1 \to z q^{-2(m+1)}} \left(\frac{1}{z_1^{m+1}} \prod_{s=2}^{m+2} \left(z_1 - q^{2(s-m-1)} z\right) x^+_{\alpha_i}(z_1) x^+_{(m+1)\alpha_i}(q^{-2m} z) \right) \\
&= \frac{1}{\left(z q^{-2(m+1)}\right)^{m+1}} \\
&\qquad \cdot \operatorname*{Res}_{z_0} z_0^{-1} \left(\prod_{s=2}^{m+2} \left(z_1 - q^{2(s-m-1)} z\right) x^+_{\alpha_i}(z_1) x^+_{(m+1)\alpha_i}(q^{-2m} z) \right) \Bigg|_{z_1 = z q^{-2(m+1)} + z_0} .
\end{aligned}
$$

Uvedimo oznaku

$$
p(z_1, z) := \prod_{s=2}^{m+2} \left(z_1 - q^{2(s-m-1)} z\right) = \prod_{s=1}^{m+1} \left(z_1 - q^{2(s-m)} z\right).
$$

Dosad smo dokazali

$$
\begin{aligned}
&x^+_{(m+2)\alpha_i}(q^{-2(m+1)} z) \\
&\qquad = \frac{1}{\left(z q^{-2(m+1)}\right)^{m+1}} \operatorname*{Res}_{z_0} z_0^{-1} \left(p(z_1, z) x^+_{\alpha_i}(z_1) x^+_{(m+1)\alpha_i}(q^{-2m} z) \right) \Bigg|_{z_1 = z q^{-2(m+1)} + z_0} .
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Prema lemi 6.5 polinom $p(z_1, z)$ je upravo takav da vrijedi

$$
p(z_1, z) x^+_{\alpha_i}(z_1) x^+_{(m+1)\alpha_i}(q^{-2m} z) \in \operatorname{Hom}(V, V((z_1, z))).
$$

U

$$
\begin{aligned}
\iota_{z,z_0} \frac{1}{p(z_0 + q^{-2(m+1)} z, z)} &= \iota_{z,z_0} \prod_{s=2}^{m+2} \frac{1}{z_0 + z\left(q^{-2(m+1)} - q^{2(s-m-1)}\right)} \\
&= \prod_{s=2}^{m+2} \left(\frac{1}{z\left(q^{-2(m+1)} - q^{2(s-m-1)}\right)} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{z_0}{z\left(q^{2(s-m-1)} - q^{-2(m+1)}\right)} \right)^l \right)
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

je koeficijent uz z_0^0 jednak

$$
\prod_{s=2}^{m+2} \frac{1}{z\left(q^{-2(m+1)} - q^{2(s-m-1)}\right)} = \frac{1}{\left(z q^{-2(m+1)}\right)^{m+1}} \prod_{s=1}^{m+1} \frac{1}{1 - q^{2(s+1)}}
\tag{6.15}
$$

i to je najniža potencija od z_0 koja se pojavljuje u (6.14).

Sada formulu (6.13), pomoću jednakosti (6.14) i (6.15), možemo zapisati kao

$$
\begin{aligned}
x^+_{(m+2)\alpha_i}(q^{-2(m+1)} z) &= \prod_{s=1}^{m+1} \left(1 - q^{2(s+1)}\right)^{-1} \operatorname*{Res}_{z_0} \left(z_0^{-1} \iota_{z,z_0} \frac{1}{p(z_0 + q^{-2(m+1)} z, z)} \right) \\
&\quad \cdot \operatorname*{Res}_{z_0} z_0^{-1} \left(p(z_1, z) x^+_{\alpha_i}(z_1) x^+_{(m+1)\alpha_i}(q^{-2m} z) \right) \Bigg|_{z_1 = z q^{-2(m+1)} + z_0} .
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Kako je najniža potencija od z_0 u oba izraza pod reziduumom u jednakosti (6.16) upravo z_0^{-1}, tu jednakost možemo zapisati i kao

$$x^+_{(m+2)\alpha_i}(q^{-2(m+1)}z) = \prod_{s=1}^{m+1} \left(1 - q^{2(s+1)}\right)^{-1}$$
$$\cdot \operatorname*{Res}_{z_0} \left(z_0^{-1} \iota_{z,z_0} \frac{1}{p(z_0 + q^{-2(m+1)}z, z)} \left(p(z_1, z) x^+_{\alpha_i}(z_1) x^+_{(m+1)\alpha_i}(q^{-2m}z) \right) \Big|_{z_1 = zq^{-2(m+1)} + z_0} \right).$$

Dobivenu jednakost možemo prepoznati kao

$$x^+_{(m+2)\alpha_i}(q^{-2(m+1)}z) = \prod_{s=1}^{m+1} \left(1 - q^{2(s+1)}\right)^{-1} x^+_{\alpha_i}(z)_{(q^{-2(m+1)},-1)} x^+_{(m+1)\alpha_i}(q^{-2m}z). \tag{6.17}$$

Ako na član $x^+_{(m+1)\alpha_i}(q^{-2m}z)$ iz jednakosti (6.17) primijenimo pretpostavku indukcije (6.12), dobivamo

$$x^+_{(m+2)\alpha_i}(q^{-2(m+1)}z) = \left(\prod_{s=1}^{m+1} \left(1 - q^{2(s+1)}\right)^{-1} \right) \left(\prod_{r=1}^{m} \prod_{s=r+1}^{m+1} \left(1 - q^{2(s-r)+2}\right)^{-1} \right)$$
$$\cdot x^+_{\alpha_i}(z)_{(q^{-2(m+1)},-1)} \left(x^+_{\alpha_i}(z)_{(q^{-2m},-1)} \Big(\ldots \big(x^+_{\alpha_i}(z)_{(q^{-4},-1)} (x^+_{\alpha_i}(z)_{(q^{-2},-1)} x^+_{\alpha_i}(z)) \big) \ldots \Big) \right)$$
$$= \left(\prod_{r=1}^{m+1} \prod_{s=r+1}^{m+2} \left(1 - q^{2(s-r)+2}\right)^{-1} \right) x^+_{\alpha_i}(z)_{(q^{-2(m+1)},-1)} \Big(\ldots \big(x^+_{\alpha_i}(z)_{(q^{-2},-1)} x^+_{\alpha_i}(z) \big) \ldots \Big),$$

što je i trebalo dokazati. □

Napomena 6.7 Kako je lijeva strana jednakosti (6.12) dobro definirana na svakom modulu V na kojem operatori $x^+_{\alpha_i}(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, djeluju restringirano, mogli bismo je upotrijebiti za proširenje definicije kvazičestica tipa 1. Podsjetimo se, za prirodan broj m je operator $x^+_{(m+1)\alpha_i}(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, definiran na ireducibilnom modulu najveće težine s

$$x^+_{(m+1)\alpha_i}(z) = \lim_{z_p \to zq^{2(p-1)}} \left(\prod_{r=1}^{m} \prod_{s=r+1}^{m+1} \left(1 - q^2 \frac{z_s}{z_r}\right) \right) x^+_{\alpha_i}(z_1) \ldots x^+_{\alpha_i}(z_{m+1}).$$

Koristeći tvrdnju propozicije 6.6 i relaciju (6.5) možemo proširiti tu definiciju na sve module na kojima operatori $x^+_{\alpha_i}(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, djeluju restringirano:

$$x^+_{(m+1)\alpha_i}(z) := \left(\prod_{r=1}^{m} \prod_{s=r+1}^{m+1} \frac{1}{1 - q^{2(s-r)+2}} \right)$$
$$\cdot x^+_{\alpha_i}(z)_{-1} \Big(\ldots \big(x^+_{\alpha_i}(zq^{2(m-2)})_{-1} (x^+_{\alpha_i}(zq^{2(m-1)})_{-1} x^+_{\alpha_i}(zq^{2m})) \big) \ldots \Big).$$

Naravno, ako je naboj jednak 1, onda kao i prije definiramo

$$x^+_{1\alpha_i}(z) := x^+_{\alpha_i}(z).$$

Zaključak

Jedno fundamentalno svojstvo kvantnih grupa je da je, grubo govoreći, njihova teorija reprezentacija slična teoriji reprezentacija pripadnih Liejevih algebri. Kao što smo i očekivali, ono se očituje i u glavnom rezultatu ove disertacije. Kombinatorne baze glavnih potprostora kvantne afine algebre $U_q(A_n^{(1)})$, koje smo konstruirali, daju nam iste formule karaktera kao i kombinatorne baze odgovarajućih glavnih potprostora afinih Liejevih algebri tipa $A_n^{(1)}$.

Proučavajući glavne potprostore vidjeli smo kako za kvazičestice, koje su prvi promatrali B. Feigin, A. Stoyanovsky i G. Georgiev, možemo uvesti njihove kvantne analogone, kvazičestice tipa 1 i 2. Iz rezultata dobivenih u ovom radu možemo zaključiti kako su ti novi objekti zadržali sva bitna svojstva kvazičestica iz klasične teorije. Naime, relacije između kvazičestica tipa 1 ili 2 u određenoj mjeri odgovaraju upravo relacijama iz klasične teorije omogućavajući nam time proširenje konstrukcije sistema izvodnica glavnog potprostora, koju je proveo G. Georgiev za afinu Liejevu algebru tipa $A_n^{(1)}$, na kvantnu grupu $U_q(A_n^{(1)})$.

Provedenim istraživanjem naučili smo kako se neki od rezultata iz teorije reprezentacija kvantnih afinih algebri, npr. Frenkel-Jingova realizacija i konstrukcija Ding-Feiginovih operatora, kao i teorija kvantnih verteks-algebri, koju je razvio H.-S. Li, mogu primijeniti u proučavanju glavnih potprostora. Činjenica da neki od spomenutih rezultata vrijede i za druge tipove kvantnih afinih algebri, kojima se u ovom radu nismo bavili, može nam poslužiti kao motivacija za daljnje istraživanje glavnih potprostora kvantnih afinih algebri tipa različitog od $A_n^{(1)}$.

Ključne riječi: afina Liejeva algebra, kvantna afina algebra, kvantna verteks-algebra, glavni potprostor, kvazičestica, kombinatorna baza.

Bibliografija

[1] I. I. Anguelova, M. J. Bergvelt, H_D-Quantum vertex algebras and bicharacters, arXiv:0706.1528.

[2] J. Beck, Braid group action and quantum affine algebras, *Comm. Math. Phys.* **165**, no. 3 (1994), 555–568.

[3] D. Bernard, Vertex operator representations of quantum affine algebras $U_q(B^{(1)})$, *Lett. Math. Phys.* **17** (1989), 239–245.

[4] R. Borcherds, Quantum vertex algebras; *Taniguchi Conference on Mathematics Nara'98*, Adv. Stud. Pure Math., 31, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001, 51–74.

[5] J. Ding, B. Feigin, Quantum Current Operators - II. Difference Equations of Quantum Current Operators and Quantum Parafermion Construction, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **33** (1997), 285–300.

[6] J. Ding, B. Feigin, Commutative quantum current operators, semi-infinite construction and functional models, *Represent. Theory* **4**, (2000), 330–341.

[7] J. Ding, K. Iohara, Drinfeld comultiplication and vertex operators, *Jour. Geom. Phys.* **23** (1997), 1–13.

[8] J. Ding, T. Miwa, Quantum current operators - I. Zeros and poles of quantum current operators and the condition of quantum integrability, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **33** (1997), 277–284.

[9] V. G. Drinfeld, New realization of Yangian and quantized affine algebras, *Soviet Math. Dokl.* **36** (1988), 212–216.

[10] V. G. Drinfeld, Quantum Groups, Proc. Internat. Congr. Math., Berkeley, Amer. Math. Soc. **1** (1987), 798–820.

[11] P. Etingof, D. Kazhdan, Quantization of Lie bialgebras, V, *Selecta Math.* (New Series) **6** (2000), 105–130.

[12] L. D. Fadeev, N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Leningrad Math. Jour.* **1** (1990), no. 1, 193–225.

[13] L. D. Fadeev, N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, Quantum groups, Braid group, knot theory and statistical mechanics, *Adv. Ser. Math. Phys.*, 9, World Sci. Publishing, 1989, pp. 97–110.

[14] B. Feigin, A. Stoyanovsky, Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifolds, *Funct. Anal. Appl.* **28** (1994), no. 1, 68–90.

[15] E. Frenkel, N. Reshetikhin, Towards deformed chiral algebras, Quantum Group Symposium, XXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (Goslar, 1996), Heron Press, Sofia, 1997, pp. 27–42.

[16] I. B. Frenkel, N. Jing, Vertex representations of quantum affine algebras, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. **85** (1988), 9373–9377.

[17] I. B. Frenkel, N. Yu. Reshetikhin, Quantum affine algebras and holonomic difference equations, *Comm. Math. Phys.* **149** (1992), 1–60.

[18] G. Georgiev, Combinatorial constructions of modules for infinitedimensional Lie algebras I. Principal subspace, *Jour. Pure and Appl. Algebra* **112** (1996), 247–286.

[19] J. Hong, S.-J. Kang, *Introduction to quantum groups and crystal bases*, Amer. Math. Soc., 2002.

[20] M. Idzumi, Level two irreducible representations of $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **9** (1994), 4449–4484.

[21] M. A. Jimbo, A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter euation, *Lett. Math. Phys.* **11** (1986), 247–252.

[22] M. A. Jimbo, A q-difference analogue of $U\mathfrak{g}$ and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 62–69.

[23] N. Jing, Higher level representations of the quantum affine algebra $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$, *Jour. Alg.* **182** (1996), 448–468.

[24] N. Jing, On Drinfeld realization of quantum affine algebras, The Monster and Lie algebras, *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.*, Vol. **7**, (1998), 195–206.

[25] N. Jing, Quantum Z-algebras and representations of quantum affine algebras, *Comm. Alg.*, Vol. **2** (2000), 829–844.

[26] N. Jing, S.-J. Kang, Y. Koyama, Vertex operators of quantum affine Lie algebras $U_q(D_n^{(1)})$, *Comm. Math. Phys.* **174** (1995), 367–392.

[27] N. Jing, J. Koyama, Vertex operators of admissible modules of $U_q(C_n^{(1)})$, *Jour. Alg.* **205** (1998), 294–316.

[28] N. Jing, Y. Koyama, K. C. Misra, Bosonic realizations of $U_q(C_n^{(1)})$, *Jour. Alg.* **200** (1998), 155–172.

[29] N. Jing, Y. Koyama, K. C. Misra, Level one realizations of quantum affine algebras $U_q(C_n^{(1)})$, *Selecta Math.* Vol. **5** (1999), 243–255.

[30] N. Jing, K. C. Misra, Vertex operators of level one $U_q(B_n^{(1)})$-modules, *Lett. Math. Phys.* **36** (1996), 127–143.

[31] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd ed. Cambridge University Press, 1990.

[32] Y. Koyama, Staggered Polarization of vertex models with $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$-symmetry, *Comm. Math. Phys.* **164**, no. 2 (1994), 277–291.

[33] J. Lepowsky, H. Li, *Introduction to vertex operator algebras and their representations*, Birkhäuser, Boston, 2004.

[34] J. Lepowsky, M. Primc, Structure of the standard modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, *Cont. Math.* **46**, Amer. Math. Soc., Providence, 1985.

[35] H.-S. Li, A new construction of vertex algebras and quasi modules for vertex algebras, *Adv. Math.* **202** (2006), 232–286.

[36] H.-S. Li, Nonlocal vertex algebras generated by formal vertex operators, *Selecta Math.* (New Series) **11** (2005), 349–397.

[37] H.-S. Li, Quantum vertex $\mathbb{F}((t))$-algebras and their modules, *Jour. Alg.* **324** (2010), 2262–2304.

[38] G. Lusztig, Quantum deformation of certain simple modules over enveloping algebras, *Adv. Math.* **70** (1988), 237–249.

Sažetak

Za kvantnu afinu algebru tipa $U_q(A_n^{(1)})$ uvodimo, koristeći Drinfeldovu realizaciju, pojam glavnog potprostora pridruženog ireducibilnom modulu najveće težine. Cilj ove disertacije je pronaći kombinatorne baze glavnih potprostora u terminima monoma kvazičestica, koje su prvi promatrali B. Feigin, A. Stoyanovsky i G. Georgiev za afinu Liejevu algebru $\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$.

Prvo, koristeći Drinfeldovu realizaciju, definiramo kvazičestice tipa 1, a nakon toga, pomoću verteks-operatora, koje su konstruirali J. Ding i B. Feigin, definiramo i kvazičestice tipa 2. Ključan dio ove disertacije je onaj u kojem pronalazimo relacije za kvazičestice tipa 1 ili 2. Pomoću tih relacija te kvantne integrabilnosti, koju su otkrili J. Ding i T. Miwa, dolazimo do sistema izvodnica glavnog potprostora, pridruženog integralnoj dominantnoj težini određenog tipa. On se sastoji od vektora dobivenih djelovanjem monoma kvazičestica tipa 2, čiji naboji i stupnjevi zadovoljavaju određene uvjete razlike, na maksimalan vektor.

Zatim definiramo skup koji se sastoji od vektora dobivenih djelovanjem monoma kvazičestica tipa 1, čiji naboji i stupnjevi zadovoljavaju određene uvjete razlike, na maksimalan vektor. Koristeći operatore preplitanja dokazujemo da je taj skup linearno nezavisan. Napokon, uspostavljanjem veze između kvazičestica tipa 1 i 2 dobivamo dvije baze glavnog potprostora pridruženog integralnoj dominantnoj težini određenog tipa.

Na kraju pronalazimo način kako definirati kvazičestice tipa 1 u terminima teorije kvantnih verteks-algebri, koju je razvio H.-S. Li, proširujući tako početnu definiciju.

Summary

We introduce the notion of principal subspace associated with the irreducible highest weight module for quantum affine algebra of type $U_q(A_n^{(1)})$.

The main purpose of this thesis is finding a combinatorial basis for the principal subspace. The basis will be expressed in terms of monomials of quasi-particles, which were originally used by B. Feigin, A. Stoyanovsky and G. Georgiev for affine Lie algebra $\hat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$.

First, we define a quasi-particle of type 1, using Drinfeld realization, and then we define a quasi-particle of type 2, using the vertex operators which were constructed by J. Ding and B. Feigin. The most important part of this thesis is the one in which we find the relations among quasi-particles of type 1 or 2. By using theese relations and quantum integrability, discovered by J. Ding and T. Miwa, we construct a spanning set for the principal subspace associated with the integral dominant weight of certain type. The set consists of the vectors which are obtained by the action of the monomials of quasi-particles of type 2, whose charges and degrees satisfy certain difference conditions, on the highest weight vector.

Next, we define a set which consists of the vectors obtained by the action of the monomials of quasi-particles of type 1, whose charges and degrees satisfy certain difference conditions, on the highest weight vector. Using certain intertwining operators we prove this set is linearly independant. Finally, by establishing the connection between quasi-particles of type 1 and 2, we get two bases for the principal subspace associated with the integral dominant weight of certain type.

At the end of this thesis we find the way to define the quasi-particle of type 1 in terms of the theory of quantum vertex algebras, which was developed by H.-S. Li, thus generalizing the original definition.

Životopis

Slaven Kožić rođen je u Zagrebu, 4. kolovoza 1985. godine, gdje je završio osnovnu i srednju školu.

Dodiplomski studij matematike upisao je 2004. godine na PMF Matematičkom odjelu u Zagrebu. Diplomirao je 2008. godine na smjeru Teorijska matematika diplomskim radom *Reprezentacije kvantnih grupa* kod prof. dr. sc. Mirka Primca. Iste godine upisao je poslijediplomski doktorski studij matematike.

Od veljače do travnja 2009. godine radio je kao profesor matematike u Grafičkoj školi u Zagrebu. U travnju 2009. godine zaposlen je kao znanstveni novak na PMF Matematičkom odjelu, gdje radi i danas. Do sada je držao auditorne vježbe iz kolegija Algebarske strukture, Analitička geometrija, Matematika 1 i 2 (preddiplomski studij kemije), Numerička matematika i Strukture podataka i algoritmi.

Član je Seminara za algebru i Hrvatskog matematičkog društva.