Zajednički sveučilišni poslijediplomski doktorski studij matematike Sveučilišta u Zagrebu, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, Sveučilišta u Rijeci i Sveučilišta u Splitu

Jurica Perić

Nova metoda poboljšavanja klasičnih nejednakosti

Voditelj:

akademik Josip Pečarić
Sveučilište u Zagrebu

Zagreb, 2012.

Ova disertacija je predana na ocjenu Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, u svrhu stjecanja znanstvenog stupnja doktora prirodnih znanosti iz područja matematike.

Hvala mom voditelju akademiku Josipu Pečariću na velikoj pomoći i podršci te ukazanom razumijevanju pri nastajanju ove disertacije.

Hvala svim članovima Seminara za nejednakosti i primjene u Splitu i Zagrebu za ugodnu suradnju, korisne primjedbe i savjete.

Sadržaj

Uvod **iv**

1. Konverzna Jensenova nejednakost **1**
1.1. Konverzna Jensenova nejednakost - varijante 1
1.2. Poboljšanja i generalizacije 8
1.3. Giaccardi-Petrovićeva nejednakost 25
1.4. Poboljšanje konverzne Hölderove i Minkowskijeve nejednakosti 36

2. Varijante Jensenove nejednakosti **47**
2.1. Jessen-Mercerova nejednakost 47
2.1.1. Jessen-Mercerove razlike 57
2.2. Jensenova operatorska nejednakost 63

3. Hermite-Hadamardova nejednakost **90**
3.1. Uvod 90
3.2. Poboljšanja Hermite-Hadamardove nejednakosti 92
3.3. Hammer-Bullenove razlike 102

Bibliografija **108**

Sažetak **114**

Summary **115**

Životopis **116**

Uvod

U disertaciji ćemo se baviti poboljšavanjem i generaliziranjem varijanti nekih klasičnih nejednakosti. Metoda kojom ćemo poboljšavati nejednakosti se temelji na sljedećem rezultatu [51, str. 717, Teorem 1]:
Ako je f konveksna funkcija na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I^n (n \geq 2)$, $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ pozitivne n-torke takve da $p \geq q$ (to jest, $p_i \geq q_i, i = 1, \ldots, n$), $P_n = \sum_{i=1}^n p_i, Q_n = \sum_{i=1}^n$, tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) - P_n f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n q_i f(x_i) - Q_n f\left(\frac{1}{Q_n}\sum_{i=1}^n q_i x_i\right) \geq 0.$$

Osnovni rezultat iz kojega su se kasnije nejednakosti razvijale je poznata nejednakost danskog matematičara J. L. W. Jensena iz 1905. godine dobivena u radu [28]:
Neka je I interval u $\mathbb{R}$, funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ konveksna na I, te neka je za $n \in \mathbb{N}, \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ pozitivna realna n-torka, te neka je $P_n = \sum_{i=1}^n p_i > 0$. Tada za svako $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ vrijedi nejednakost

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$$

Ako je f strogo konveksna, nejednakost je stroga osim ako $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Ako je f konkavna funkcija, vrijedi suprotna nejednakost.
Usko povezana uz Jensenovu nejednakost je konverzna Jensenova nejednakost, jedna varijanta je poznata Lah-Ribaričeva nejednakost dobivena u radu [37] iz 1973. godine. Nakon dobivenih poboljšanja, gdje je moguće, definirat ćemo linearne funkcionale za koje ćemo dati dva teorema srednje vrijednosti Cauchyjevog tipa, te ćemo se baviti pojmom n-eksponencijalne i eksponencijalne konveksnosti. Iz većine rezultata ćemo dobiti i neka poboljšanja nejednakosti između sredina, posebno kvaziaritmetičkih, potencijalnih i onih Stolarskyjevog tipa.

U prvom poglavlju dajemo rezultate vezane uz konverznu Jensenovu nejednakost. Navodimo jednu od važnijih varijanti konverzne Jensenove nejednakosti, Lah-Ribaričevu nejednakost, te dajemo generalizaciju na pozitivne normalizirane linearne funkcionale iz rada [4]. Osnovni rezultat nam je poboljšanje generalizirane Lah-Ribaričeve nejednakosti (rezultat iz rada [35]). Iz tog rezultata dobivamo i poboljšanja ostalih rezultata iz rada [4]. Također, dobivamo poboljšanja nekih nejednakosti Hermite-Hadamardovog tipa. Dajemo generalizaciju na konveksne ljuske. Navodimo McShaneovu nejednakost, koja je generalizacija Jessenove nejednakosti na konveksne skupove u $\mathbb{R}^k$. Osnovni rezultat nam je poboljšanje generalizacije Lah-Ribaričeve nejednakosti koju su dali J. Pečarić i S. Ivelić. Kao specijalan slučaj konveksnih ljuski promatramo k-simplekse u $\mathbb{R}^k$. Baricentričke koordinate kod k-simpleksa su nenegativni linearni polinomi, te ih je moguće prikazati preko k-dimenzionalne Lebesgueove mjere. Kao specijalan slučaj ovih rezultata dobivamo k-dimenzionalnu verziju Hammer-Bullenove nejednakosti, te u jednoj dimenziji poboljšanje klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti. Još jedna varijanta konverzne Jensenove nejednakosti je Giaccardijeva nejednakost, te kao specijalan slučaj Petrovićeva nejednakost. Dajemo njihova poboljšanja, te pokazujemo da smo te rezultate mogli dobili i iz generalizacije i poboljšanja Lah-Ribaričeve nejednakosti. Koristimo dobivene rezultate za definiranje dva linearna funkcionala (Giaccardi-Petrovićeve razlike). Za njih prvo dajemo dva teorema srednje vrijednosti Cauchyjevog tipa. Tu prvi puta uvodimo pojam n-eksponencijalne i eksponencijalne konveksnosti. Koristimo ideju iz rada [27] i dajemo elegantnu metodu za dobivanje n-eksponencijalno konveksnih i eksponencijalno konveksnih funkcija primjenjujući definirane funkcionale na danu familiju funkcija sa istim svojstvom. Završavamo sa nekoliko primjera gdje konstruiramo velike familije funkcija koje su eksponencijalno konveksne. Također dobivamo neke rezultate vezane uz nejednakosti između sredina Stolarskyjevog tipa. Za kraj ovog poglavlja promatramo konverznu Hölderovu nejednakost za funkcionale, diskretnu verziju konverzne Beckenbachove nejednakosti, te konverznu Minkowskijevu nejednakost za funkcionale. Za sve tri nejednakosti dajemo poboljšanja. Dajemo i konverziju neprekidnog oblika Minkowskijeve nejednakosti ("konverzna Minkowskijeva integralna nejednakost"). Koristeći rezultate za Minkowskijevu nejednakost dobivamo poboljšanja nejednakosti između mješovitih sredina.

U drugom poglavlju se bavimo dvjema varijantama Jensenove nejednakosti. Prva je Jessen-Mercerova nejednakost. Navodimo Jessenovu nejednakost, što je generalizacija Jensenove nejednakosti na pozitivne normalizirane linearne funkcionale, zatim Jensen-Mercerovu nejednakost koju je dao A. McD. Mercer u radu [43] iz 2003. (a u kojoj se pojavljuju i rubne točke), te na kraju varijantu Jessen-Mercerove nejednakosti (generalizacija na pozitivne normalizirane linearne funkcionale, uključuje rubne točke) dobivenu u radu [12]. Glavni rezultat su nam dva teorema koja daju poboljšanja zadnje nejednakosti, to jest niza nejednakosti iz istog rada. Zatim dajemo generalizaciju Jessen-Mercerove nejednakosti na konveksne ljuske. Koristeći dobivene rezultate definiramo dva funkcionala (Jessen-Mercerove razlike). Za njih provodimo isti postupak kao i nad linearnim funkcionalima u prethodnom poglavlju. Također dobivamo neke rezultate vezane uz nejednakosti između sredina Stolarskyjevog tipa. Druga varijanta Jensenove nejednakosti kojom se bavimo je Jensenova operatorska nejednakost, to jest generalizacija na operatorski konveksne funkcije. Cilj nam je poboljšanje Jensenove operatorske nejednakosti bez operatorske konveksnosti dobivene u radu [44]. Koristeći dobivene rezultate poboljšat ćemo neke nejednakosti između kvaziaritmetičkih sredina, te neke rezultate u svezi monotonosti tih sredina. Također, poboljšat ćemo jedno proširenje Jensenove operatorske nejednakosti bez operatorske konveksnosti iz istog rada [44]. Specijalno, dobivamo neke rezultate u svezi potencijalnih sredina (kao specijalan slučaj kvaziaritmetičkih sredina).

U zadnjem poglavlju proučavamo jednu od najslavnijih nejednakosti, Hermite-Hadamardovu. Ona glasi:

Neka je f konveksna funkcija na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, gdje je $a < b$. Tada

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Prva nejednakost je jača od druge: ako je f konveksna na $[a, b]$, tada

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

i tu nejednakost zovemo Hammer-Bullenova nejednakost.
Fejér je 1906. godine dao proširenje Hermite-Hadamardove nejednakosti s težinskom fukcijom, a u radu [61] je dana generalizacija na pozitivne normalizirane linearne funkcionale. Glavni rezultat će nam biti dva poboljšanja generalizacije iz rada [61]. Koristeći ta poboljšanja dobivamo i poboljšanja ostalih varijanti Hermite-Hadamardove nejednakosti do sada spomenutih. Na kraju ponovo definiramo dva funkcionala (zovemo ih Hammer-Bullenove razlike) nad kojima provodimo isti postupak kao i u prijašnjim poglavljima.

Poglavlje 1.

Konverzna Jensenova nejednakost

Poboljšavamo razne varijante konverzne Jensenove nejednakosti, sa posebnim naglaskom na Lah-Ribaričevu nejednakost. Posebno, poboljšavamo Giaccardi-Petrovićevu nejednakost, s tim da na kraju pokazujemo da taj rezultat možemo dobiti kao specijalan slučaj prethodnih rezultata. Koristeći dobivene rezultate kreiramo dva funkcionala za koja dokazujemo dva teorema srednje vrijednosti Cauchyevog tipa, te uspostavljamo način dobivanja n-eksponencijalno konveksnih i eksponencijalno konveksnih funkcija. Dajemo generalizaciju Lah-Ribaričeve nejednakosti na konveksne ljuske, posebno na k-simplekse. Također, pokazujemo da iz ovih generaliziranih rezultata dobivamo poboljšanje klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti i k-dimenzionalnu varijantu Hammer-Bullenove nejednakosti.

1.1. Konverzna Jensenova nejednakost - varijante

Usko povezana uz Jensenovu nejednakost je konverzna Jensenova nejednakost (vidjeti [37]).
Jedna od važnijih varijanti konverzne Jensenove nejednakosti je Lah-Ribaričeva nejednakost (vidjeti npr. [9]).

Teorem 1.1.1. *Ako je $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija na $[a,b]$, $x_i \in [a,b]$, $p_i \geq 0$ za sve $i = 1, \ldots, n$ i $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, tada vrijedi*

$$\sum_{i_1}^{n} p_i f(x_i) \leq \frac{b - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{b-a} f(a) + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - a}{b-a} f(b) \tag{1.1}$$

Ako je f strogo konveksna, tada je (1.1) *stroga osim ukoliko $x_i \in \{a,b\}$ za svaki $i \in \{j : p_j > 0\}$.*

Rezultat vezan uz ovu nejednakost možemo pronaći u radu [52] (vidjeti također [51, str. 690]) gdje su autori dokazali sljedeći teorem.

Teorem 1.1.2. *Neka je $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ n-torka u I^n, $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ nenegativna n-torka takva da $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$, $m = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ i $M = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Ako je $f\colon I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna i f' strogo rastuća, tada vrijede nejednakosti

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \le \lambda + f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \tag{1.2}$$

gdje je

$$\begin{aligned}\lambda \;=\;& \frac{f(M)-f(m)}{M-m}\left(f'\right)^{-1}\left(\frac{f(M)-f(m)}{M-m}\right)\\ &+\frac{Mf(m)-mf(M)}{M-m}-f\left(\left(f'\right)^{-1}\left(\frac{f(M)-f(m)}{M-m}\right)\right).\end{aligned}$$

Neka je E neprazan skup i L vektorski prostor funkcija $f\colon E \to \mathbb{R}$ koji sadrži konstantne funkcije, to jest L ima sljedeća svojstva

$(L1)$ $(\forall f, g \in L)\,(\forall a, b \in \mathbb{R})\;\; af + bg \in L$

$(L2)$ $\mathbf{1} \in L$, odnosno ako vrijedi $f(t) = 1$ za svaki $t \in E$, tada je $f \in L$.

Ako L ima i dodatno svojstvo
$(L3)$ $(\forall f, g \in L)\,(\min\{f, g\} \in L \wedge \max\{f, g\} \in L)$,
tada je rešetka. Očito, $\left(\mathbb{R}^E, \le\right)$ (sa standardnim uređajem) je rešetka. Također se lagano može pokazati da je potprostor $X \subseteq \mathbb{R}^E$ rešetka ako i samo ako $x \in X$ implicira $|x| \in X$. To je jednostavna posljedica činjenice da za svaki $x \in X$ funkcije $|x|$, x^- i x^+ možemo definirati sa

$$|x|(t) = |x(t)|, \quad x^+(t) = \max\{0, x(t)\}, \quad x^-(t) = -\min\{0, x(t)\}, \qquad t \in E,$$

i $x^+ + x^- = |x|$, $x^+ - x^- = x$,

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|), \quad \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|). \tag{1.3}$$

Promatramo pozitivne linearne funkcionale $A\colon L \to \mathbb{R}$, odnosno pretpostavljamo

$(A1)$ $(\forall f, g \in L)(\forall a, b \in \mathbb{R})\quad A(af + bg) = aA(f) + bA(g)$ (linearnost)

$(A2)$ $(\forall f \in L)(f \ge 0 \Longrightarrow A(f) \ge 0)$ (pozitivnost).

Ako je zadovoljen i dodatni uvjet $A(\mathbf{1}) = 1$, za A kažemo da je pozitivan normaliziran linearni funkcional.

Sljedeći rezultat iz 1931. je Jessenova generalizacija Jensenove nejednakosti na pozitivne normalizirane linearne funkcionale (rad [30]).

Teorem 1.1.3. (Jessenova nejednakost) *Neka L zadovoljava $(L1)$ i $(L2)$ na nepraznom skupu E i neka je A pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Ako je φ neprekidna konveksna funkcija na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, tada za svaki $g \in L$ takav da je $\varphi(g) \in L$ vrijedi $A(g) \in I$ i*

$$\varphi(A(g)) \le A(\varphi(g)). \tag{1.4}$$

Idući teorem, koji su dokazali P. R. Beesack i J. Pečarić u radu [4] (vidjeti i [69]), daje generalizaciju Lah-Ribaričeve nejednakosti na pozitivne normalizirane linearne funkcionale.

Teorem 1.1.4. *Neka L zadovoljava $(L1)$ i $(L2)$ na nepraznom skupu E i A je pozitivan normaliziran linearan funkcional. Ako je $\phi\colon [m,M] \to \mathbb{R}$ konveksna, tada za svaki $g \in L$ takav da $\phi(g) \in L$ vrijedi nejednakost*

$$A(\phi(g)) \le \frac{M - A(g)}{M-m}\phi(m) + \frac{A(g)-m}{M-m}\phi(M). \tag{1.5}$$

Primjedba 1.1.5. *Desna strana nejednakosti* (1.5) *je rastuća funkcija po M i padajuća funkcija po m. To slijedi ako je zapišemo u obliku*

$$\phi(m) + (A(g)-m)\frac{\phi(M)-\phi(m)}{M-m} = \phi(M) - (M - A(g))\frac{\phi(M)-\phi(m)}{M-m}$$

te iz $m \le A(g) \le M$, dok su funkcije $m \mapsto \frac{\phi(M)-\phi(m)}{M-m}$ i $M \mapsto \frac{\phi(M)-\phi(m)}{M-m}$ rastuće zbog konveksnosti od ϕ.

U istom radu [4] (ili vidjeti [69, str. 100-101]) dokazan je i sljedeći teorem.

Teorem 1.1.6. *Neka su L, A i g kao u teoremu 1.1.4. i neka je $\phi\colon [m,M] \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija.*

(i) Ako je ϕ' strogo rastuća na $[m,M]$, tada vrijedi

$$A(\phi(g)) \le \lambda + \phi(A(g)) \tag{1.6}$$

za neki λ takav da $0 < \lambda < (M-m)(\mu - \phi'(m))$, gdje

$$\mu = \frac{\phi(M) - \phi(m)}{M-m}.$$

Preciznije, λ možemo odrediti na sljedeći način: Neka je $\tilde{x}$ jedinstveno rješenje jednadžbe $\phi'(x) = \mu$. Tada

$$\lambda = \phi(m) + \mu(\tilde{x} - m) - \phi(\tilde{x})$$

zadovoljava (1.6).

(ii) Ako je ϕ' strogo padajuća na $[m,M]$ tada vrijedi

$$\phi(A(g)) \le \lambda + A(\phi(g)) \tag{1.7}$$

za neki λ takav da $0 < \lambda < (M-m)(\phi'(m) - \mu)$, gdje je μ definiran kao u (i). Preciznije, za $\tilde{x}$ definiran kao u (i), imamo da

$$\lambda = \phi(\tilde{x}) - \phi(m) - \mu(\tilde{x} - m)$$

zadovoljava (1.7).

Lagano se pokaže da se desna strana nejednakosti (1.2) iz teorema 1.1.2. može dobiti kao specijalan slučaj od (1.6): samo promatramo $E = [m, M]$, $L = \mathbb{R}^E, g = id_E$, $A(f) = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ uz $P_n \neq 0$ i nakon nekoliko jednostavnih koraka dobijemo jednaki λ. Lijeva strana od (1.2) je očito specijalan slučaj Jensenove nejednakosti.

U [5] (ili vidjeti [69, str. 101]) Beesack i Pečarić su dali generalizaciju teorema 1.1.6. koja je istovremeno i generalizacija Knoppove nejednakosti za konveksne funkcije (vidjeti [36]).

Teorem 1.1.7. *Neka su L i A kao u teoremu 1.1.4. Neka je $\phi\colon [m, M] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i J interval u $\mathbb{R}$ takav da $\phi([m, M]) \subset J$. Ako je $F\colon J \times J \to \mathbb{R}$ rastuća funkcija po prvoj varijabli, tada za svaki $g \in L$ takav da je $\phi(g) \in L$ vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\begin{aligned} F(A(\phi(g)), \phi(A(g))) &\leq \max_{x\in[m,M]} F\left(\frac{M-x}{M-m}\phi(m) + \frac{x-m}{M-m}\phi(M), \phi(x)\right) \qquad (1.8)\\ &= \max_{\theta\in[0,1]} F(\theta\phi(m) + (1-\theta)\phi(M), \phi(\theta m + (1-\theta)M)). \end{aligned}$$

Štoviše, desna strana od (1.8) *je rastuća funkcija po M i padajuća funkcija po m.*

Lagano je dokazati da je teorem 1.1.6. specijalan slučaj teorema 1.1.7. Naime, ako primijenimo teorem 1.1.7. na ϕ koja je diferencijabilna i strogo konveksna na $[m, M]$ (u rubnim točkama $x = m$ i $x = M$ možemo gledati derivacije slijeva i zdesna, respektivno) u nekoliko koraka dobijemo nejednakost (1.6). Dajemo dokaz samo za prvi slučaj i); (ii) se dobije na sličan način ako u teoremu 1.1.7. uzmemo $-F$ umjesto F i gledamo ϕ koja je diferencijabilna i strogo konkavna.
Ako je F definirana sa $F(x, y) = x - y$, nejednakost u (1.8) postaje

$$A(\phi(g)) - \phi(A(g)) \leq \max_{x\in[m,M]} f(x; m, M, \phi), \qquad (1.9)$$

gdje je $f\colon [m, M] \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) := f(x; m, M, \phi) = \frac{(M-x)\phi(m) + (x-m)\phi(M)}{M-m} - \phi(x).$$

Primijetimo da je $f(m) = f(M) = 0$ i

$$f'(x) = \frac{\phi(M) - \phi(m)}{M-m} - \phi'(x) = \mu - \phi'(x).$$

Kako je ϕ strogo konveksna, f' je strogo padajuća na $[m, M]$ i jednadžba $f'(x) = 0$ (to jest, $\phi'(x) = \mu$) vrijedi za jedinstveni $x = \tilde{x} \in (m, M)$. Slijedi da je $f(x) \geq 0$ za sve $x \in [m, M]$ sa jednakošću za $x \in \{m, M\}$. Posljedično, maksimalna vrijednost desne strane od (1.9) se poprima za $x = \tilde{x}$, te za

$$\begin{aligned} \lambda &= f(\tilde{x}) = \frac{(M-\tilde{x})\phi(m) + (\tilde{x}-m)\phi(M)}{(M-m)} - \phi(\tilde{x})\\ &= \phi(m) + \mu(\tilde{x} - m) - \phi(\tilde{x}) \end{aligned}$$

imamo da vrijedi

$$A(\phi(g)) \leq \lambda + \phi(A(g)).$$

Diskretna verzija teorema 1.1.7. se može naći u [51, Teorem 8, str. 9-10]. Neki rezultati ovog tipa su promatrani u [18], gdje je dobivena i generalizacija za pozitivne linearne operatore. Daljnje generalizacije za pozitivne linearne operatore su dane u [49]. Neki rezultati vezani za konveksne funkcije višeg stupnja se mogu naći u [62], [63] i [64]. Nedavno su S. Ivelić i J. Pečarić u radu [25] dobili generalizacije teorema 1.1.7. za konveksne funkcije na konveksnim ljuskama.

Povijesne napomene

Pokazat ćemo da su neki od rezultata objavljenih posljednjih godina u svezi konverzne Jensenove nejednakosti već otprije poznati rezultati iz nekih standardnih monografija, npr. iz [51] ili [69] ili su specijalni slučajevi rezultata radova već objavljenih u matematičkim časopisima.
Neka je $I \subset \mathbb{R}$ interval, $(x_i)_{i=1}^n$ niz takav da $x_i \in I$, $i = 1, \ldots, n$, i $(p_i)_{i=1}^n$ niz pozitivnih težina takav da $\sum_1^n p_i = 1$. Sljedeći teoremi su dokazani u [74].

Teorem 1.1.8. *Ako je f konveksna na I, tada*

$$\max_{1\leq\mu<\nu\leq n}\left[p_\mu f(x_\mu) + p_\nu f(x_\nu) - (p_\mu + p_\nu) f\left(\frac{p_\mu x_\mu + p_\nu x_\nu}{p_\mu + p_\nu}\right)\right] \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)$$

i ograda je najbolja moguća.

Teorem 1.1.9. *Ako je $(x_i)_{i=1}^n \in [a,b]^n$, tada*

$$\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) := S_f(a,b)$$

Međutim, teorem 1.1.8. je sadržan u teoremu 3.14 i korolaru 3.15 (koje ćemo sada navesti) objavljenim u [69, str. 87]. Tvrdnja o najboljoj mogućoj ogradi u teoremu 1.1.8. je očita (jednakost se postiže za $n = 2$).

Teorem 1.1.10. *Neka je $f\colon U \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, gdje je U konveksan skup u realnom vektorskom prostoru M. Neka su I i J konačni poskupovi u $\mathbb{N}$ takvi da $I \cap J = \emptyset$. Neka je $(x_i)_{i\in I\cup J}$ niz takav da $x_i \in U$, $i \in I \cup J$ i $(p_i)_{i\in I\cup J}$ je realan niz takav da $P_I > 0$, $P_J > 0$ i $P_{I\cup J} > 0$, gdje $P_K = \sum_{k\in K} p_k$ za $K \subseteq I \cup J$. Ako $\frac{1}{P_I}\sum_{i\in I} p_i x_i \in U$, $\frac{1}{P_J}\sum_{i\in J} p_i x_i \in U$, $\frac{1}{P_{I\cup J}}\sum_{i\in I\cup J} p_i x_i \in U$, tada*

$$F(I \cup J) \leq F(I) + F(J), \tag{1.10}$$

gdje $F(K) = P_K f\left(\frac{1}{P_K}\sum_{k\in K} p_k x_k\right) - \sum_{k\in K} p_k f(x_k)$.

Primijetimo da funkcija F iz teorema 1.1.10. opisuje suprotnu Jensenovu razliku od razlike u teoremima 1.1.8. i 1.1.9.

Korolar 1.1.11. *Neka je f konveksna funkcija na U, gdje je U konveksan skup na proizvoljnom realnom vektorskom prostoru M. Neka je $(x_i)_{i=1}^n$ niz takav da $x_i \in U$, $i = 1, \ldots, n$, i $(p_i)_{i=1}^n$ je realan niz. Ako $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ i $I_k = \{1, \ldots, k\}$, tada*

$$F(I_n) \leq F(I_{n-1}) \leq \cdots \leq F(I_2) \leq 0$$

i

$$F(I_n) \leq \min_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ (p_i + p_j) f\left(\frac{p_i x_i + p_j x_j}{p_i + p_j}\right) - p_i f(x_i) - p_j f(x_j) \right\}.$$

Primjedba 1.1.12. *Primijetimo da su rezultati vezani uz teorem 1.1.10. i korolar 1.1.11., te implicirajući teorem 1.1.8. objavljeni prethodno u [10], [11], [50], [59], [84] i [85].*

Teorem 1.1.9. je dokazao prethodno isti autor u radu objavljenom jednu godinu prije [74], to jest, bio je glavni rezultat u [73]. To nije spomenuto u [74].
Spomenuto je u [19] da se taj glavni rezultat iz [73], i stoga teorem 1.1.9. može dobiti iz korolara 3 i 4 iz [40]. Štoviše, ti korolari daju sljedeća poboljšanja teorema 1.1.9.

Teorem 1.1.13. *Neka je $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $(x_i)_{i=1}^n$ niz takav da $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, n$ i $(p_i)_{i=1}^n$ niz pozitivnih težina takav da $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Ako je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada*

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \\ &\leq f\left(a + b - \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \\ &\leq f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = S_f(a, b) \end{aligned}$$

Sljedeća generalizacija i poboljšanje teorema 1.1.9. je dokazano u [19].

Teorem 1.1.14. *Neka L zadovoljava (L1) i (L2) i neka je Φ konveksna funkcija na $I = [a, b]$. Tada za svaki pozitivan normaliziran linearan funkcional A na L i za svaki $g \in L$ takav da $\Phi(g) \in L$ imamo*

$$A(\Phi(g)) - \Phi(A(g)) \leq \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{b-a} \left| \frac{a+b}{2} - A(g) \right| \right\} S_\Phi(a, b).$$

U radu [67] su dane generalizacije i poboljšanja teorema 1.1.8., 1.1.9., te poboljšanje teorema 1.1.14.
U sljedećem teoremu dajemo dvije generalizacije teorema 1.1.8. Za slične rezultate dobivene drukčijim metodama vidjeti [14].

Teorem 1.1.15. *Neka je f konveksna funkcija na U, gdje je U konveksan skup u proizvoljnom realnom vektorskom prostoru M. Neka je $(x_i)_{i=1}^n$ niz takav da $x_i \in U$, $i \in I_n = \{1, \ldots, n\}$, i $(p_i)_{i=1}^n$ pozitivan niz.*

(i) Ako je $\mathcal{S}$ familija podskupova od I_n, tada

$$F(I_n) \leq \min_{S\in\mathcal{S}} (F(S) + F(I_n \setminus S)) \leq \min_{S\in\mathcal{S}} F(S) + \max_{S\in\mathcal{S}} F(I_n \setminus S) \leq \min_{S\in\mathcal{S}} F(S). \tag{1.11}$$

(ii) Ako je $\mathcal{S}$ familija disjunktnih podskupova od I_n, tada

$$F(I_n) \leq \sum_{S\in\mathcal{S}} F(S), \tag{1.12}$$

gdje je F funkcija definirana u teoremu 1.1.10.

Dokaz. (i) Jednostavna posljedica teorema 1.1.10.
(ii) Očito $I_n = \cup_{S\in\mathcal{S}} S \cup_{i\notin\cup_{S\in\mathcal{S}}} \{i\}$, te (1.12) slijedi iz teorema 1.1.10. i $F(\{i\}) = 0$. ■

Poboljšanje teorema 1.1.14., koji je generalizacija i poboljšanje teorema 1.1.9., dobivamo iz sljedeće leme za $n = 2$.

Lema 1.1.16. *Neka je ϕ konveksna funkcija na intervalu $I \subset \mathbb{R}, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ i $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ nenegativna n-torka takva da $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Tada vrijedi*

$$\min\{p_1, \ldots, p_n\} \left[\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) - n\phi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right] \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} p_i\phi(x_i) - \phi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \tag{1.13}$$

$$\leq \max\{p_1, \ldots, p_n\} \left[\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) - n\phi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right]. \tag{1.14}$$

Dokaz. Jednostavna posljedica od [51, str. 717, Teorem 1]. ■

Teorem 1.1.17. *Neka L zadovoljava (L1), (L2) i (L3) i neka je Φ konveksna funkcija na $I = [a, b]$. Tada za svaki pozitivan normaliziran linearan funkcional A na L i za svaki $g \in L$ takav da $\Phi(g) \in L$ imamo*

$$A(\Phi(g)) - \Phi(A(g)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\left\{\left|\frac{a+b}{2} - A(g)\right| + A\left(\left|\frac{a+b}{2} - g\right|\right)\right\} S_\Phi(a, b). \tag{1.15}$$

Dokaz. Prvo primijetimo da $\Phi(g) \in L$ također znači da je kompozicija $\Phi(g)$ dobro definirana, stoga $g(E) \subseteq [a, b]$. Slijedi $A(g) \in [a, b]$.
Neka su funkcije $p, q \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definirane sa

$$p(x) = \frac{b-x}{b-a}, \quad q(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Za svaki $x \in [a,b]$ možemo pisati

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) = \Phi\left(p(x)a + q(x)b\right).$$

Kako je $A(g) \in [a,b]$, imamo $\Phi(A(g)) = \Phi(p(A(g))a + q(A(g))b)$ i po lemi 1.1.16. za $n = 2$ slijedi

$$\begin{aligned} \Phi(A(g)) &\geq p(A(g))\Phi(a) + q(A(g))\Phi(b) - \max\{p(A(g)), q(A(g))\}S_\Phi(a,b) \\ &= p(A(g))\Phi(a) + q(A(g))\Phi(b) - \left\{\frac{1}{2} + \frac{\left|\frac{a+b}{2} - A(g)\right|}{b-a}\right\} S_\Phi(a,b). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Ponovo po lemi 1.1.16. za $n = 2$ imamo

$$\Phi(x) \leq p(x)\Phi(a) + q(x)\Phi(b) - \min\{p(x), q(x)\}S_\Phi(a,b).$$

Imamo $p(g), q(g) \in L$ i ako primijenimo A na gornju nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned} A(\Phi(g)) &\leq A(p(g))\Phi(a) + A(q(g))\Phi(b) - A\left(\min\{p(g), q(g)\}\right) S_\Phi(a,b) \\ &= A(p(g))\Phi(a) + A(q(g))\Phi(b) - A\left(\frac{1}{2} - \frac{\left|g - \frac{a+b}{2}\right|}{b-a}\right) S_\Phi(a,b) \\ &= p(A(g))\Phi(a) + q(A(g))\Phi(b) - A\left(\frac{1}{2} - \frac{\left|g - \frac{a+b}{2}\right|}{b-a}\right) S_\Phi(a,b). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Sada iz nejednakosti (1.16) i (1.17) dobivamo traženu nejednakost (1.15) ■

Kako je $A(g) \in [a,b]$, očito je da je teorem 1.1.17. poboljšanje teorema 1.1.14.

1.2. Poboljšanja i generalizacije

Sada navodimo rezultate iz rada [35]. Za dobivanje poboljšanja koristimo lemu 1.1.16.

Prvo dajemo poboljšanje teorema 1.1.4.

Teorem 1.2.1. *Neka L zadovoljava (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E i neka je A pozitivan normaliziran linearan funkcional. Ako je ϕ konveksna funkcija na $[m,M]$, tada za svaki $g \in L$ takav da $\phi(g) \in L$ imamo $A(g) \in [m,M]$ i*

$$A(\phi(g)) \leq \frac{M - A(g)}{M-m}\phi(m) + \frac{A(g) - m}{M-m}\phi(M) - A(\tilde{g})\,\delta_\phi, \tag{1.18}$$

gdje

$$\tilde{g} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{\left|g - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right|}{M-m}, \qquad \delta_\phi = \phi(m) + \phi(M) - 2\phi\left(\frac{m+M}{2}\right).$$

Dokaz. Prvo primijetimo da $\phi(g) \in L$ također znači da je kompozicija $\phi(g)$ dobro definirana, stoga $g(E) \subseteq [m, M]$. Sada imamo $m\mathbf{1} \leq g \leq M\mathbf{1}$ i

$$m = A(m\mathbf{1}) \leq A(g) \leq A(M\mathbf{1}) = M.$$

Neka su funkcije $p, q \colon [m, M] \to \mathbb{R}$ definirane sa

$$p(x) = \frac{M-x}{M-m}, \qquad q(x) = \frac{x-m}{M-m}.$$

Za svaki $x \in [m, M]$ možemo pisati

$$\phi(x) = \phi\left(\frac{M-x}{M-m}m + \frac{x-m}{M-m}M\right) = \phi(p(x)m + q(x)M).$$

Po lemi 1.1.16. za $n = 2$ dobivamo

$$\begin{aligned}\phi(x) &\leq p(x)\phi(m) + q(x)\phi(M) \\ &\quad - \min\{p(x), q(x)\}\left[\phi(m) + \phi(M) - 2\phi\left(\frac{m+M}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Neka je $g \in L$ takav da $\phi(g) \in L$. Imamo $p(g), q(g) \in L$, te kada primijenimo A na gornju nejednakost uz $x \leftrightarrow g(x)$ dobivamo

$$\begin{aligned}A(\phi(g)) &\leq A(p(g))\phi(m) + A(q(g))\phi(M) \\ &\quad - A(\tilde{g})\left[\phi(m) + \phi(M) - 2\phi\left(\frac{m+M}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

gdje je funkcija $\tilde{g}$ definirana na E sa

$$\tilde{g}(x) = (\min\{p(g), q(g)\})(x) = \frac{1}{2} - \frac{\left|g(x) - \frac{m+M}{2}\right|}{M-m}$$

i po $(L3)$ pripada u L. Kako su p i q linearne funkcije, po svojstvima od A imamo $A(p(g)) = p(A(g))$ i $A(q(g)) = q(A(g))$, te stoga

$$A(\phi(g)) \leq p(A(g))\phi(m) + q(A(g))\phi(M) - A(\tilde{g})\delta_\phi,$$

što je (1.18). ■

Primjedba 1.2.2. *Teorem 1.2.1. je poboljšanje teorema 1.1.4., jer pod postavljenim uvjetima imamo*

$$A(\tilde{g})\delta_\phi = A\left(\frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{\left|g - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right|}{M-m}\right)\left(\phi(m) + \phi(M) - 2\phi\left(\frac{m+M}{2}\right)\right) \geq 0.$$

Idući korolar pokazuje da je teorem 1.2.1. poboljšanje i generalizacija Lah-Ribaričeve nejednakosti.

Korolar 1.2.3. *Neka je $\boldsymbol{p}$ nenegativna n-torka uz $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 0$ i $\boldsymbol{x} \in [m, M]^n$. Ako je $\phi \colon [m, M] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada vrijedi*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i \phi(x_i) && (1.19) \\ \leq \; & \frac{M - \bar{x}}{M - m} \phi(m) + \frac{\bar{x} - m}{M - m} \phi(M) - \frac{\delta_\phi}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{2} - \frac{\left| x_i - \frac{m+M}{2} \right|}{M - m} \right), \end{aligned}$$

gdje je $\bar{x} = \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ i δ_ϕ definiran u teoremu 1.2.1.

Dokaz. Ako uzmemo $E = [m, M]$, $L = \mathbb{R}^{[m,M]}$, $g = id_E$, $A(f) = \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$, nejednakost (1.18) postaje (1.19). ■

Koristimo teorem 1.2.1. za dobivanje poboljšanja još nekih do sada spomenutih nejednakosti. Prvo dobivamo poboljšanje teorema 1.1.7. za specijalan slučaj $F(x, y) = x - y$.

Teorem 1.2.4. *Uz pretpostavke teorema 1.2.1. vrijede sljedeća nejednakost i jednakost*

$$\begin{aligned} & A(\phi(g)) - \phi(A(g)) \\ \leq \; & \max_{x \in [m,M]} \left\{ \frac{M - x}{M - m} \phi(m) + \frac{x - m}{M - m} \phi(M) - \phi(x) \right\} - A(\tilde{g}) \delta_\phi \\ = \; & \max_{\theta \in [0,1]} \{ \theta \phi(m) + (1 - \theta) \phi(M) - \phi(\theta m + (1 - \theta) M) \} - A(\tilde{g}) \delta_\phi, \end{aligned}$$

gdje su $\tilde{g}$ i δ_ϕ definirani kao u teoremu 1.2.1.

Dokaz. To je direktna posljedica teorema 1.2.1. Identitet slijedi iz zamjene varijable $\theta = \frac{M-x}{M-m}$ tako da za $x \in [m, M]$ imamo $\theta \in [0, 1]$ i $x = \theta m + (1 - \theta) M$. ■

Zatim dajemo poboljšanje teorema 1.1.6. Razmatrat ćemo samo slučaj kada je ϕ' strogo rastuća (i stoga je ϕ konveksna), jer analogan rezultat za ϕ' strogo padajuću možemo dobiti na sličan način.

Teorem 1.2.5. *Neka su L i A kao u teoremu 1.2.1. Ako je $\phi \colon [m, M] \to \mathbb{R}$ diferencijabilna takva da je ϕ' strogo rastuća na $[m, M]$, tada za svaki $g \in L$ takav da je $\phi(g) \in L$ vrijedi nejednakost*

$$A(\phi(g)) \leq \lambda + \phi(A(g)) - A(\tilde{g}) \delta_\phi \tag{1.20}$$

za neki λ koji zadovoljava $0 < \lambda < (M - m)(\mu - \phi'(m))$, gdje je

$$\mu = \frac{\phi(M) - \phi(m)}{M - m}$$

i $\tilde{g}$, δ_ϕ definirani kao u teoremu 1.2.1.
Preciznije, λ možemo odrediti na sljedeći način: Neka je $\tilde{x}$ jedinstveno rješenje jednadžbe $\phi'(x) = \mu$. Tada

$$\lambda = \phi(m) + \mu(\tilde{x} - m) - \phi(\tilde{x})$$

zadovoljava (1.20).

Dokaz. Dokaz slijedi istim argumentiranjem kao u dokazu teorema 1.1.6., jer po teoremu 1.2.4. imamo

$$A(\phi(g)) - \phi(A(g)) \leq \max_{x\in[m,M]} f(x;m,M,\phi) - A(\tilde{g})\,\delta_\phi$$

gdje je f definirana kao u (1.9). ■

Još jedna zanimljiva posljedica teorema 1.2.1. je sljedeća nejednakost Hermite-Hadamardovog tipa, što je poboljšanje rezultata iz [61].

Teorem 1.2.6. *Neka su L i A kao u teoremu 1.2.1. Ako je $\phi\colon [m,M] \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija, tada za svaki $g \in L$ takav da $\phi(g) \in L$ vrijede nejednakosti*

$$\phi\left(\frac{pm+qM}{p+q}\right) \leq A(\phi(g)) \leq \frac{p\phi(m)+q\phi(M)}{p+q} - A(\tilde{g})\,\delta_\phi \tag{1.21}$$

gdje su p i q nenegativni realni brojevi takvi da

$$A(g) = \frac{pm+qM}{p+q} \tag{1.22}$$

i $\tilde{g}$, δ_ϕ su definirani kao u teoremu 1.2.1.

Dokaz. Prvo primijetimo da $\phi(g) \in L$ implicira $A(g) \in [m,M]$, stoga postoji jedinstveni nenegativan realan broj $\lambda \in [0,1]$ takav da $A(g) = \lambda m + (1-\lambda)M$. Ako su p,q nenegativni realni brojevi koji zadovoljavaju (1.22) tada očito

$$\frac{p}{p+q} = \lambda, \quad \frac{q}{p+q} = 1-\lambda.$$

Iz Jessenove nejednakosti (1.4) imamo

$$\phi\left(\frac{pm+qM}{p+q}\right) = \phi(A(g)) \leq A(\phi(g)),$$

što je prva nejednakost u (1.21).
Kako je

$$\frac{M-A(g)}{M-m}\phi(m) + \frac{A(g)-m}{M-m}\phi(M) = \frac{p}{p+q}\phi(m) + \frac{q}{p+q}\phi(M)$$

po (1.18) imamo

$$A(\phi(g)) \leq \frac{p\phi(m)+q\phi(M)}{p+q} - A(\tilde{g})\,\delta_\phi,$$

što je druga nejednakost u (1.21). ■

Kao korolar teorema 1.2.6. dobivamo rezultat iz [8] gdje je dokazano da trapezno pravilo daje veću grešku nego pravilo središnje točke.

Korolar 1.2.7. *Ako je $\phi\colon [m,M] \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija, tada vrijede nejednakosti*

$$\begin{aligned} &\frac{\phi(m)+\phi(M)}{2} - \frac{1}{M-m}\int_m^M \phi(x)\,\mathrm{d}x \\ \geq\ &\frac{1}{M-m}\int_m^M \phi(x)\,\mathrm{d}x - \phi\left(\frac{m+M}{2}\right) \geq 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Dokaz. Ovo je specijalan slučaj teorema 1.2.6. za $E = [m, M]$, $L = C([m, M])$, $g = id_E$, $A(f) = \frac{1}{M-m} \int_m^M f(x)\,\mathrm{d}x$, $p = q = 1$. Dobivamo

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{m+M}{2}\right) &\leq \frac{1}{M-m} \int_m^M \phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{\phi(m)+\phi(M)}{2} - \frac{\delta_\phi}{M-m} \int_m^M \tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Jednostavan račun daje

$$\frac{1}{M-m} \int_m^M \tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4},$$

stoga

$$\begin{aligned} & \frac{\phi(m)+\phi(M)}{2} - \frac{\delta_\phi}{M-m} \int_m^M \tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x \\ = {} & \frac{\phi(m)+\phi(M)}{2} - \frac{1}{4}\left[\phi(m)+\phi(M) - 2\phi\left(\frac{m+M}{2}\right)\right] \\ = {} & \frac{1}{2}\phi\left(\frac{m+M}{2}\right) + \frac{\phi(m)+\phi(M)}{4}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Iz (1.24) i (1.25) dobivamo

$$\begin{aligned} 2\phi\left(\frac{m+M}{2}\right) &\leq \frac{2}{M-m} \int_m^M \phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \phi\left(\frac{m+M}{2}\right) + \frac{\phi(m)+\phi(M)}{2}, \end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned} & \phi\left(\frac{m+M}{2}\right) - \frac{1}{M-m} \int_m^M \phi(x)\,\mathrm{d}x \\ \leq {} & \frac{1}{M-m} \int_m^M \phi(x)\,\mathrm{d}x - \phi\left(\frac{m+M}{2}\right) \\ \leq {} & \frac{\phi(m)+\phi(M)}{2} - \frac{1}{M-m} \int_m^M \phi(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Po Hermite-Hadamardovoj nejednakosti za konveksne funkcije znamo

$$0 \leq \frac{1}{M-m} \int_m^M \phi(x)\,\mathrm{d}x - \phi\left(\frac{m+M}{2}\right),$$

stoga je (1.23) dokazano. ■

Pogledajmo još dvije posljedice teorema 1.2.5.

Korolar 1.2.8. *Neka su L i A kao u teoremu 1.2.1. Ako je $g \in L$ takav da $\log(g)$ pripada u L i $g(E) \subseteq [m, M] \subset \mathbb{R}_+$, tada*

$$A(g) \leq \exp(A(\log(g))) \frac{\exp S\left(\frac{M}{m}\right)}{\left[\frac{(m+M)^2}{4mM}\right]^{A(\tilde{g})}},$$

gdje je $S(\cdot)$ Spechtov omjer i $\tilde{g}$ je definiran kao u teoremu 1.2.1.

Dokaz. Specijalan slučaj teorema 1.2.5. za $\phi = -\log$. U ovom slučaju (1.20) postaje

$$-A(\log(g)) \leq \lambda - \log A(g) - A(\tilde{g})\,\delta_{-\log},$$

to jest

$$\begin{aligned}\exp\log A(g) &= A(g) \leq \exp\left(A(\log(g)) + \lambda - A(\tilde{g})\,\delta_{-\log}\right)\\ &= \exp\left(A(\log(g))\right)\frac{\exp(\lambda)}{\exp\left(A(\tilde{g})\,\delta_{-\log}\right)},\end{aligned}$$

gdje

$$\delta_{-\log} = -\log m - \log M + 2\log\frac{m+M}{2} = \log\frac{(m+M)^2}{4mM},$$
$$\mu = \frac{\log m - \log M}{M-m}, \qquad \tilde{x} = -\frac{1}{\mu} = \frac{M-m}{\log M - \log m},$$

stoga

$$\begin{aligned}\lambda &= -\log m + \mu(\tilde{x} - m) + \log\tilde{x}\\ &= -\log m + \frac{\log m - \log M}{M-m}\left(\frac{M-m}{\log M - \log m} - m\right)\\ &\quad + \log\frac{M-m}{\log M - \log m}\\ &= \log\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{m}{M-m}} + \log\frac{M-m}{m\log\frac{M}{m}} - 1\\ &= \log\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{m}{M-m}}}{e\log\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{m}{M-m}}} = S\left(\frac{M}{m}\right),\end{aligned}$$

gdje je $S(\cdot)$ Spechtov omjer (vidjeti npr. [18, str. 71]) definiran sa

$$S(h) = \frac{h^{\frac{1}{h-1}}}{e\log h^{\frac{1}{h-1}}}, \quad h \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}.$$

Uzimajući sve u obzir dobivamo

$$A(g) \leq \exp\left(A(\log(g))\right)\frac{\exp S\left(\frac{M}{m}\right)}{\left[\frac{(m+M)^2}{4mM}\right]^{A(\tilde{g})}}.$$

■

Korolar 1.2.9. *Neka su L i A kao u teoremu 1.2.1. Ako je $p \in L$ takav da $\log(p)$ pripada u L i $p(E) \subseteq [m, M] \subset \mathbb{R}_+$, tada*

$$A(p) \leq \exp A(\log(p)) + \frac{M-m}{\log\frac{M}{m}}S\left(\frac{M}{m}\right) - A(\tilde{p})\left(m + M - 2\sqrt{mM}\right), \tag{1.26}$$

gdje je $S(\cdot)$ Spechtov omjer i $\tilde{p}$ je definiran sa

$$\tilde{p} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{\left|\log p - \log\sqrt{mM}\mathbf{1}\right|}{\log M - \log m}.$$

Dokaz. Specijalan slučaj teorema 1.2.5. za $\phi = \exp$ i $g = \log p$. U ovom slučaju (1.20) postaje

$$A(\exp\log(p)) \le \lambda + \exp A(\log(p)) - A(\tilde{p})\,\delta_{\exp},$$

gdje

$$\delta_{\exp} = \exp\log m + \exp\log M - 2\exp\frac{\log m + \log M}{2} = m + M - 2\sqrt{mM},$$

$$\mu = \frac{M-m}{\log M - \log m}, \qquad \tilde{x} = \log\mu = \log\frac{M-m}{\log M - \log m},$$

stoga

$$\begin{aligned}
\lambda &= \exp\log m + \mu\,(\tilde{x} - \log m) - \exp\tilde{x} \\
&= m + \frac{M-m}{\log M - \log m}\left(\log\frac{M-m}{\log M - \log m} - \log m - 1\right) \\
&= m + \frac{M-m}{\log\frac{M}{m}}\log\frac{1}{e\log\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{m}{M-m}}} \\
&= m + \frac{M-m}{\log\frac{M}{m}}\log\frac{\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{m}{M-m}}\left[\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{m}{M-m}}\right]^{-1}}{e\log\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{m}{M-m}}} \\
&= m + \frac{M-m}{\log\frac{M}{m}}\log\left[\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{m}{M-m}}\right]^{-1} + \frac{M-m}{\log\frac{M}{m}}S\left(\frac{M}{m}\right) \\
&= \frac{M-m}{\log\frac{M}{m}}S\left(\frac{M}{m}\right).
\end{aligned}$$

Uzimajući sve u obzir dobivamo (1.26). ∎

Sada želimo generalizirati i poboljšati Lah-Ribaričevu nejednakost na konveksne ljuske, i specijalno na k-simplekse u $\mathbb{R}^k$. Navodimo rezultate iz rada [70]. Prvo gledamo trivijalno proširenje Jensenove nejednakosti na konveksne skupove u $\mathbb{R}^k$.

Neka je U konveksan podskup od $\mathbb{R}^k$ i $n \in \mathbb{N}$. Ako je $f\colon U \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in U$ i $p_1, \ldots, p_n$ nenegativni realni brojevi uz $P_n = \sum_{i=1}^n p_i > 0$, tada vrijedi Jensenova nejednakost

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i\boldsymbol{x}_i\right) \le \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i f(\boldsymbol{x}_i). \tag{1.27}$$

Konveksna ljuska vektora $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^k$ je skup

$$\left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i\boldsymbol{x}_i \colon \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\right\}$$

i označavamo ga sa $K = co(\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\})$.

Baricentričke koordinate nad K su neprekidne realne funkcije $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na K sa sljedećim svojstvima:

$$\begin{aligned} &\lambda_i(\boldsymbol{x}) \geq 0, i = 1, ..., n \\ &\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{x}) = 1 \\ &\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_i \end{aligned} \tag{1.28}$$

Ako su $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_1$ linearno nezavisni vektori, tada svaki $\boldsymbol{x} \in K$ možemo zapisati na jedinstveni način kao konveksnu kombinaciju od $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ u obliku (1.28).
Također, promatramo k-simplekse $S = co(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}\})$ u $\mathbb{R}^k$, to jest konveksne ljuske vrhova $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^k$, gdje su vektori $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1} - \boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{R}^k$ linearno nezavisni. U ovom slučaju k-simpleks označavamo sa $S = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]$. Baricentričke koordinate $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ nad S su nenegativni linearni polinomi na S i imaju specijalan oblik (vidjeti [6]).

Sa L^k označavamo linearnu klasu funkcija $\boldsymbol{g}\colon E \to \mathbb{R}^k$ definiranih sa

$$\boldsymbol{g}(t) = (g_1(t), \ldots, g_k(t)), \quad g_i \in L \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Za dani linearni funkcional A promatramo linearni operator $\widetilde{A} = (A, \ldots, A)\colon L^k \to \mathbb{R}^k$ definiran sa

$$\widetilde{A}(\boldsymbol{g}) = (A(g_1), \ldots, A(g_k)). \tag{1.29}$$

Ako je zadovoljeno i $A(\mathbf{1}) = 1$, tada koristeći (A1) dobivamo

(A3) $A(f(\boldsymbol{g})) = f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))$ za svaku linearnu funkciju f na $\mathbb{R}^k$.

Primjedba 1.2.10. *Ako uzmemo $F(x,y) = x - y$, jednostavna posljedica teorema 1.1.7. je*

$$A(f(g)) - f(A(g)) \leq \max_{\theta\in[0,1]} [\theta f(m) + (1-\theta)f(M) - f(\theta m + (1-\theta)M)]. \tag{1.30}$$

Ako uzmemo $F(x,y) = \frac{x}{y}$, za $f > 0$ slijedi

$$\frac{A(f(g))}{f(A(g))} \leq \max_{\theta\in[0,1]} \left[\frac{\theta f(m) + (1-\theta)f(M)}{f(\theta m + (1-\theta)M)}\right]. \tag{1.31}$$

Dodatnu generalizaciju Jessenove nejednakosti (1.4) je dao E. J. McShane (vidjeti [42], [69, str. 48]).

Teorem 1.2.11. (McShaneova nejednakost) *Neka L zadovoljava svojstva (L1) i (L2) na nepraznom skupu E, A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L i $\widetilde{A}$ definiran kao u (1.29). Neka je f neprekidna konveksna funkcija na zatvorenom konveksnom skupu $U \subset \mathbb{R}^k$. Tada za svaki $\boldsymbol{g} \in L^k$ takav da $\boldsymbol{g}(E) \subset U$ i $f(\boldsymbol{g}) \in L$, imamo $\widetilde{A}(\boldsymbol{g}) \in U$ i*

$$f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g})) \leq A(f(\boldsymbol{g})). \tag{1.32}$$

J. Pečarić i S. Ivelić u radu [25] su dali generalizaciju teorema 1.1.4.

Teorem 1.2.12. *Neka L zadovoljava svojstva $(L1)$ i $(L2)$ na nepraznom skupu E i A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Neka $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^k$ i $K = co(\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\})$. Neka je f konveksna funkcija K i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ baricentričke koordinate nad K. Tada za svaki $\boldsymbol{g} \in L^k$ takav da $\boldsymbol{g}(E) \subset K$ i $f(\boldsymbol{g}), \lambda_i(\boldsymbol{g}) \in L, i = 1, \ldots, n$ imamo*

$$A(f(\boldsymbol{g})) \leq \sum_{i=1}^{n} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) f\left(\boldsymbol{x}_i\right).$$

Sada dajemo generalizacije i poboljšanja teorema 1.1.7. i 1.2.12. To dobivamo koristeći lemu 1.1.16. generaliziranu na konveksne skupove u $\mathbb{R}^k$.

Lema 1.2.13. *Neka je ϕ konveksna funkcija na U gdje je U konveksan skup u $\mathbb{R}^k$, $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in U^n$ i $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ je nenegativna n-torka takva da $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Tada*

$$\begin{aligned} \min\{p_1, \ldots, p_n\} &\left[\sum_{i=1}^{n} \phi(\boldsymbol{x}_i) - n\phi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\right)\right] \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} p_i\phi(\boldsymbol{x}_i) - \phi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\boldsymbol{x}_i\right) \qquad (1.33) \\ \leq \max\{p_1, \ldots, p_n\} &\left[\sum_{i=1}^{n} \phi(\boldsymbol{x}_i) - n\phi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\right)\right]. \qquad (1.34) \end{aligned}$$

Dokaz. Jednostavna posljedica od [51, str. 717, Teorem 1]. ■

Za $n \in \mathbb{N}$ označavamo

$$\Delta_{n-1} = \left\{(\mu_1, \ldots, \mu_n) \colon \mu_i \geq 0, i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1\right\}.$$

Također, ako je f funkcija definirana na konveksnom podskupu $U \subseteq \mathbb{R}^k$ i $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in U$, označavamo

$$S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_i) - nf\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\right).$$

Očito, ako je f konveksna, $S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \geq 0$.

Sljedeći teorem je poboljšanje teorema 1.2.12.

Teorem 1.2.14. *Neka L zadovoljava svojstva $(L1)$, $(L2)$ i $(L3)$ na nepraznom skupu E i A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Neka $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^k$ i $K = co(\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\})$. Neka je f konveksna funkcija na K i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ baricentričke koordinate nad K. Tada za svaki $\boldsymbol{g} \in L^k$ takav da $\boldsymbol{g}(E) \subset K$ i $f(\boldsymbol{g}), \lambda_i(\boldsymbol{g}) \in L, i = 1, \ldots, n$ imamo*

$$A(f(\boldsymbol{g})) \leq \sum_{i=1}^{n} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) f\left(\boldsymbol{x}_i\right) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n). \qquad (1.35)$$

Dokaz. Za svaki $t \in E$ imamo $\boldsymbol{g}(t) \in K$. Koristeći baricentričke koordinate imamo $\lambda_i(\boldsymbol{g}(t)) \geq 0, i = 1, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{g}(t)) = 1$ i

$$\boldsymbol{g}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\boldsymbol{x}_i.$$

Kako je f konveksna, možemo primijeniti lemu 1.2.13., te imamo

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{g}(t)) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\boldsymbol{x}_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{g}(t))f(\boldsymbol{x}_i) - \min\{\lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_i) - nf\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Sada primijenimo funkcional A na zadnju nejednakost i dobijemo

$$\begin{aligned} A\left(f(\boldsymbol{g})\right) &\leq A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{g})f\left(\boldsymbol{x}_i\right) - \min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\} S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) f\left(\boldsymbol{x}_i\right) - A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n). \end{aligned}$$

■

Primjedba 1.2.15. *Teorem 1.2.14. je poboljšanje teorema 1.2.12., jer pod danim pretpostavkama imamo*

$$A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \geq 0.$$

Primjedba 1.2.16. *Ako su zadovoljene sve pretpostavke teorema 1.2.14. i funkcija f je neprekidna, tada*

$$f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g})) \leq A(f(\boldsymbol{g})) \leq \sum_{i=1}^{n} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) f\left(\boldsymbol{x}_i\right) - A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n).$$

Prva nejednakost je teorem 1.2.11., a druga teorem 1.2.14.

Primjedba 1.2.17. *Znamo da pod pretpostavkama teorema 1.2.14. imamo*

$$A(f(\boldsymbol{g})) \leq \sum_{i=1}^{n} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) f\left(\boldsymbol{x}_i\right) - A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n).$$

Podijelimo ovo sa $f\left(\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right)\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\boldsymbol{x}_i\right)$, *za slučaj $f > 0$, te dobivamo*

$$\begin{aligned} &\frac{A\left(f\left(\boldsymbol{g}\right)\right)}{f\left(\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right)\right)} \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^{n} A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))f(\boldsymbol{x}_i)}{f\left(\sum_{i=1}^{n} A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\boldsymbol{x}_i\right)} - \frac{A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\colon i = 1, \ldots, n\}\right)}{f\left(\widetilde{A}(\boldsymbol{g})\right)} S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \\ &\leq \max_{\Delta_{n-1}} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(\boldsymbol{x}_i)}{f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{x}_i\right)} - \frac{A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\colon i = 1, \ldots, n\}\right)}{f\left(\widetilde{A}(\boldsymbol{g})\right)} S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \end{aligned}$$

što je ekvivalentno

$$A\left(f\left(\boldsymbol{g}\right)\right) \\ \leq \max_{\Delta_{n-1}} \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i f(\boldsymbol{x}_i)}{f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i \boldsymbol{x}_i\right)} f\left(\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right)\right) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\colon i=1,\ldots,n\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n). \tag{1.37}$$

To je poboljšanje nejednakosti (2.6) iz [25]

Koristeći teorem 1.2.14. dokazujemo generalizaciju i poboljšanje teorema 1.1.7.

Teorem 1.2.18. *Neka L zadovoljava (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E, A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L i $\widetilde{A}$ definiran kao u (1.29). Neka $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^k$ i $K = co(\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\})$. Neka je f konveksna funkcija na K i $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ baricentričke koordinate nad K. Ako je J interval u $\mathbb{R}$ takav da $f(K) \subset J$ i $F\colon J \times J \to \mathbb{R}$ je rastuća funkcija u prvoj varijabli, tada za svaki $\boldsymbol{g} \in L^k$ takav da $\boldsymbol{g}\,(E) \subset K$ i $f(\boldsymbol{g}), \lambda_i(\boldsymbol{g}) \in L, i = 1,\ldots,n$ imamo*

$$F\left(A(f(\boldsymbol{g})), f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right) \\ \leq F\left(\sum_{i=1}^n A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) f\left(\boldsymbol{x}_i\right) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n), f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right) \\ \leq \max_{\Delta_{n-1}} F\left(\sum_{i=1}^n \mu_i f(\boldsymbol{x}_i) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n), f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i \boldsymbol{x}_i\right)\right). \tag{1.38}$$

Dokaz. Za svaki $t \in E$ imamo $\boldsymbol{g}(t) \in K$. Koristeći baricentričke koordinate imamo $\lambda_i(\boldsymbol{g}(t)) \geq 0, i = 1,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i(\boldsymbol{g}(t)) = 1$ i

$$\boldsymbol{g}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\boldsymbol{x}_i.$$

Kako je A pozitivan normaliziran linearan funkcional na L i $\widetilde{A}$ linearan operator na L^k, imamo

$$\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right) = (A(g_1),\ldots,A(g_k)) = \sum_{i=1}^n A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)\boldsymbol{x}_i,$$

gdje

$$A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) \geq 0, i = 1,\ldots,n$$

i

$$\sum_{i=1}^n A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) = A\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(\boldsymbol{g})\right) = A(\mathbf{1}) = 1.$$

Stoga, $\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right) \in K$.
Kako je $F\colon J \times J \to \mathbb{R}$ rastuća funkcija u prvoj varijabli, koristeći (1.35) imamo

$$F\left(A(f(\boldsymbol{g})), f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right) \\ \leq F\left(\sum_{i=1}^n A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) f(\boldsymbol{x}_i) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n), f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right). \tag{1.39}$$

Supstitucijama

$$A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) = \mu_i, i = 1, \ldots, n,$$

slijedi

$$\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{x}_i.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
&F\left(\sum_{i=1}^{n} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) f(\boldsymbol{x}_i) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n), f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right) \\
&\quad = F\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(\boldsymbol{x}_i) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n), f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{x}_i\right)\right) \\
&\quad \leq \max_{\Delta_{n-1}} F\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(\boldsymbol{x}_i) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n), f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{x}_i\right)\right).
\end{aligned}$$

Kombinirajući (1.39) i zadnju nejednakost dobivamo (1.42). ■

Primjedba 1.2.19. *Ako uzmemo $F(x, y) = x - y$, kao jednostavna posljedica teorema 1.2.18. slijedi*

$$\begin{aligned}
&A(f(\boldsymbol{g})) - f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g})) \\
&\quad \leq \max_{\Delta_{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(\boldsymbol{x}_i) - f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{x}_i\right) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)\right).
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Ako uzmemo $F(x, y) = \frac{x}{y}$, za $f > 0$ slijedi

$$\frac{A(f(\boldsymbol{g}))}{f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))} \leq \max_{\Delta_{n-1}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(\boldsymbol{x}_i) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)}{f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{x}_i\right)}\right). \tag{1.41}$$

Nejednakosti (1.40) *i* (1.41) *su generalizacije i poboljšanja od* (1.30) *i* (1.31).

Ako zamijenimo F by $-F$ u teoremu 1.2.18. dobivamo sljedeći teorem

Teorem 1.2.20. *Neka L zadovoljava (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E, A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L i $\widetilde{A}$ definiran kao u (1.29). Neka $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^k$ i $K = co(\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\})$. Neka je f konveksna funkcija na K i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ baricentričke koordinate nad K. Ako je J interval u $\mathbb{R}$ takav da $f(K) \subset J$ i $F\colon J \times J \to \mathbb{R}$ je padajuća funkcija u prvoj varijabli, tada za svaki $\boldsymbol{g} \in L^k$ takav da $\boldsymbol{g}\,(E) \subset K$ i $f(\boldsymbol{g}), \lambda_i(\boldsymbol{g}) \in L, i = 1, \ldots, n$ imamo*

$$\begin{aligned}
&F\left(A(f(\boldsymbol{g})), f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right) \\
&\quad \geq F\left(\sum_{i=1}^{n} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) f\left(\boldsymbol{x}_i\right) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n), f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right) \\
&\quad \geq \min_{\Delta_{n-1}} F\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i f(\boldsymbol{x}_i) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n), f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{x}_i\right)\right).
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Sada promatramo specijalan slučaj kada je konveksna ljuska k-simpleks u $\mathbb{R}^k$. Neka je S k-simpleks u $\mathbb{R}^k$ sa vrhovima $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^k$. Baricentričke koordinate $\lambda_1, \ldots \lambda_{k+1}$ nad S su nenegativni linearni polinomi koji zadovoljavaju Lagrangeovo svojstvo

$$\lambda_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Poznato je (vidjeti [6]) da za svaki $\boldsymbol{x} \in S$ baricentričke koordinate $\lambda_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \lambda_{k+1}(\boldsymbol{x})$ imaju oblik

$$\begin{aligned} \lambda_1(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}, \\ \lambda_2(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}, \\ &\vdots \\ \lambda_{k+1}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}, \end{aligned} \tag{1.43}$$

gdje Vol_k označava k-dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru od S. Ovdje, na primjer, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]$ označava podsimpleks koji dobijemo ako zamijenimo $\boldsymbol{v}_2$ sa $\boldsymbol{x}$, tj. podsimpleks nasuprot $\boldsymbol{v}_2$ kada dodamo $\boldsymbol{x}$ kao novi vrh. Volumen sa predznakom $\mathrm{Vol}_k(S)$ je dan sa $(k+1) \times (k+1)$ determinantom

$$\mathrm{Vol}_k\left(S\right) = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_{11} & v_{21} & & v_{k+11} \\ v_{12} & v_{22} & & v_{k+12} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1k} & v_{2k} & \cdots & v_{k+1k} \end{vmatrix},$$

gdje $\boldsymbol{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1k}), \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1} = (v_{k+11}, v_{k+12}, \ldots, v_{k+1k})$ (vidjeti [71]).

Kako su vektori $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1} - \boldsymbol{v}_1$ linearno nezavisni, svaki $\boldsymbol{x} \in S$ možemo zapisati na jedinstven način kao konveksnu kombinaciju od $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}$ u obliku

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}\boldsymbol{v}_{k+1}. \tag{1.44}$$

Sada dajemo analogon teorema 1.2.14. za konveksne funkcije definirane na k-simpleksima u $\mathbb{R}^k$.

Teorem 1.2.21. *Neka L zadovoljava (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E, A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L i $\widetilde{A}$ definiran kao u (1.29). Neka je f konveksna funkcija na k-simpleksu $S = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]$ u $\mathbb{R}^k$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ su baricentričke koordinate nad S. Tada za svaki $\boldsymbol{g} \in L^k$ takav da $\boldsymbol{g}(E) \subset S$ i $f(\boldsymbol{g}) \in L$ imamo*

$$A(f(\boldsymbol{g})) \leq \sum_{i=1}^{k+1} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) f\left(\boldsymbol{v}_i\right) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right) S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}) \tag{1.45}$$

$$= \frac{\mathrm{Vol}_k\left(\left[\widetilde{A}(\boldsymbol{g}), \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}\right]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)} f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + \frac{\mathrm{Vol}_k\left(\left[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \widetilde{A}(\boldsymbol{g})\right]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)} f(\boldsymbol{v}_{k+1})$$
$$- A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right) S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}).$$

Dokaz. Za svaki $t \in E$ imamo $\boldsymbol{g}(t) \in S$. Koristeći baricentričke koordinate imamo

$$\lambda_1(\boldsymbol{g}(t)) = \frac{\mathrm{Vol}_k([\boldsymbol{g}(t), \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}])}{\mathrm{Vol}_k(S)} = \frac{\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ g_1(t) & v_{21} & & v_{k+11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(t) & v_{2k} & \cdots & v_{k+1k} \end{vmatrix}}{\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_{11} & v_{21} & & v_{k+11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1k} & v_{2k} & \cdots & v_{k+1k} \end{vmatrix}},$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{k+1}(\boldsymbol{g}(t)) = \frac{\mathrm{Vol}_k([\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{g}(t)])}{\mathrm{Vol}_k(S)} = \frac{\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ v_{11} & & v_{k1} & g_1(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{1k} & \cdots & v_{kk} & g_k(t) \end{vmatrix}}{\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_{11} & v_{21} & & v_{k+11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1k} & v_{2k} & \cdots & v_{k+1k} \end{vmatrix}},$$

$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\boldsymbol{g}(t)) = 1$ i $\boldsymbol{g}(t) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\boldsymbol{v}_i$.
Kako je f konveksna na S, koristeći lemu 1.2.13. imamo

$$f(\boldsymbol{g}(t)) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\boldsymbol{g}(t)) f(\boldsymbol{v}_i) - \min\{\lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\} \left[\sum_{i=1}^{k+1} f(\boldsymbol{v}_i) - (k+1) f\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} \boldsymbol{v}_i\right)\right].$$

Koristeći Laplaceov razvoj determinante lagano se provjeri $\lambda_i(\boldsymbol{g}) \in L$ za svaki $i = 1, \ldots, k+1$.
Sada primijenimo A na zadnju nejednakost i dobivamo

$$\begin{aligned} &A(f(\boldsymbol{g})) \\ &\quad \leq A\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\boldsymbol{g}) f(\boldsymbol{v}_i) - \min\{\lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\} \left[\sum_{i=1}^{k+1} f(\boldsymbol{v}_i) - (k+1) f\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} \boldsymbol{v}_i\right)\right]\right) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{k+1} A(\lambda_i(\boldsymbol{g})) f(v_i) - A(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\}) S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}), \end{aligned} \tag{1.46}$$

gdje

$$
\begin{aligned}
A\left(\lambda_1\left(\boldsymbol{g}\right)\right) &= \frac{\dfrac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ A(g_1) & v_{21} & & v_{k+11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(g_k) & v_{2k} & \cdots & v_{k+1k} \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_{11} & v_{21} & & v_{k+11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1k} & v_{2k} & \cdots & v_{k+1k} \end{vmatrix}} = \frac{\mathrm{Vol}_k\left(\left[\widetilde{A}(\boldsymbol{g}), \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}\right]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}, \\
&\vdots \qquad\qquad (1.47) \\
A\left(\lambda_{k+1}\left(\boldsymbol{g}\right)\right) &= \frac{\dfrac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ v_{11} & & v_{k1} & A(g_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{1k} & \cdots & v_{kk} & A(g_k) \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_{11} & v_{21} & & v_{k+11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1k} & v_{2k} & \cdots & v_{k+1k} \end{vmatrix}} = \frac{\mathrm{Vol}_k\left(\left[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \widetilde{A}(\boldsymbol{g})\right]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}.
\end{aligned}
$$

Kombinirajući (1.46) i (1.47) dobivamo (1.45). ∎

Koristeći teorem 1.2.21. dokazujemo analogon teorema 1.2.18. za k-simplekse u $\mathbb{R}^k$.

Teorem 1.2.22. *Neka L zadovoljava $(L1)$, $(L2)$ i $(L3)$ na nepraznom skupu E, A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L i $\widetilde{A}$ definiran kao u (1.29). Neka je f konveksna funkcija na k-simpleksu $S = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]$ u $\mathbb{R}^k$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ baricentričke koordinate nad S. Ako je J interval u $\mathbb{R}$ takav da $f(S) \subset J$ i $F\colon J \times J \to \mathbb{R}$ rastuća funkcija u prvoj varijabli, tada za svaki $\boldsymbol{g} \in L^k$ takav da $\boldsymbol{g}(E) \subset S$ i $f(\boldsymbol{g}) \in L$ imamo*

$$
\begin{aligned}
&F\left(A(f(\boldsymbol{g})), f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right) \qquad (1.48) \\
&\leq \max_{\boldsymbol{x}\in S} F\Big(\frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)} f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + \frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)} f(\boldsymbol{v}_{k+1}) \\
&-A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right) S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}), f\left(\boldsymbol{x}\right)\Big) \\
&= \max_{\Delta_k} F\left(\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i f(\boldsymbol{v}_i) - A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right) S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}), f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i \boldsymbol{v}_i\right)\right).
\end{aligned}
$$

Dokaz. Kako za svako $t \in E$ imamo $\boldsymbol{g}(t) \in S$, slijedi $\widetilde{A}(\boldsymbol{g}) \in S$ (vidjeti prvi dio dokaza teorema 1.2.18.).

Kako je $F\colon J\times J\to\mathbb{R}$ rastuća funkcija u prvoj varijabli, po teoremu 1.2.21. imamo

$$\begin{aligned}
&F\left(A(f(\boldsymbol{g})), f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right)\\
&\le F\Big(\frac{\mathrm{Vol}_k\left(\left[\widetilde{A}(\boldsymbol{g}),\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}\right]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}f(\boldsymbol{v}_1)+\cdots+\frac{\mathrm{Vol}_k\left(\left[\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\widetilde{A}(\boldsymbol{g})\right]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}f(\boldsymbol{v}_{k+1})\\
&-A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\}\right)S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}), f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\Big)\\
&\le \max_{\boldsymbol{x}\in S}F\Big(\frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}f(\boldsymbol{v}_1)+\cdots+\frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{x}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}f(\boldsymbol{v}_{k+1})\\
&-A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\}\right)S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}), f(\boldsymbol{x})\Big).
\end{aligned}\tag{1.49}$$

Nejednakost (1.48) je jednostavna posljedica supstitucija

$$\mu_1=\frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)},\ldots,\mu_{k+1}=\frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{x}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)},$$

i

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{k+1}\mu_i\boldsymbol{v}_i.$$

■

Primjedba 1.2.23. *Ako su sve pretpostavke teorema 1.2.21. zadovoljene, te ako je f neprekidna, tada*

$$\begin{aligned}
&f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\le A(f(\boldsymbol{g}))\\
&\le\sum_{i=1}^{k+1}A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)f\left(\boldsymbol{v}_i\right)-A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\}\right)S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}) \qquad (1.50)\\
&=\frac{\mathrm{Vol}_k\left(\left[\widetilde{A}(\boldsymbol{g}),\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}\right]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}f(\boldsymbol{v}_1)+\cdots+\frac{\mathrm{Vol}_k\left(\left[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\widetilde{A}(\boldsymbol{g})\right]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)}f(\boldsymbol{v}_{k+1})\\
&-A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\}\right)S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}).
\end{aligned}$$

Prva nejednakost je teorem 1.2.11., a druga teorem 1.2.21.

Primjer 1.2.24. *Neka je $S=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}]$ k-simpleks u $\mathbb{R}^k$ i f neprekidna konveksna funkcija na S. Neka je $L=(E,\mathcal{A},\lambda)$ prostor mjere sa pozitivnom mjerom λ. Definiramo funkcional $A\colon L\to\mathbb{R}$ sa*

$$A(g)=\frac{1}{\lambda(E)}\int_E g(t)d\lambda(t).$$

A je očito pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Tada je linearan operator $\widetilde{A}$ definiran sa

$$\widetilde{A}(\boldsymbol{g})=\frac{1}{\lambda(E)}\int_E\boldsymbol{g}(t)d\lambda(t).$$

Označavamo $\overline{\boldsymbol{g}} = \frac{1}{\lambda(E)} \int_E \boldsymbol{g}(t) d\lambda(t)$. *Ako* $\boldsymbol{g}(E) \subset S$ *i* $f(\boldsymbol{g}) \in L$, *tada iz* (1.50) *slijedi*

$$\begin{aligned} f(\overline{\boldsymbol{g}}) &\leq A(f(\boldsymbol{g})) \\ &\leq \frac{\mathrm{Vol}_k\left([\overline{\boldsymbol{g}}, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)} f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + \frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \overline{\boldsymbol{g}}]\right)}{\mathrm{Vol}_k(S)} f(\boldsymbol{v}_{k+1}) \\ &- \left(\frac{1}{\lambda(E)} \int_E \min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g}(t)) \colon i = 1, \ldots, k+1\right\} d\lambda(t)\right) S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}). \end{aligned} \tag{1.51}$$

Primjedba 1.2.25. *Neka je* $S = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]$ $k-$*simpleks u* $\mathbb{R}^k$. *Ako stavimo* $E = S, \boldsymbol{g} = \boldsymbol{id_S}$ *i* λ *Lebesgueova mjera na* S *u primjeru 1.2.24., dobivamo*

$$\overline{\boldsymbol{id_S}} = \frac{1}{|S|} \int_S t dt = \boldsymbol{v}^* = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \boldsymbol{v}_i$$
$$A(f(\boldsymbol{id_S})) = \frac{1}{|S|} \int_S f(t) dt$$

gdje je $\boldsymbol{v}^*$ *baricentar od* S. *Sada imamo*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}^*) &\leq \frac{1}{|S|} \int_S f(t) dt \\ &\leq \frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]\right)}{|S|} f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + \frac{\mathrm{Vol}_k\left([\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}^*]\right)}{|S|} f(\boldsymbol{v}_{k+1}) \\ &- \left(\frac{1}{|S|} \int_S \min\left\{\lambda_i(t) \colon i = 1, \ldots, k+1\right\} dt\right) \left[\sum_{i=1}^{k+1} f(\boldsymbol{v}_i) - (k+1) f(\boldsymbol{v}^*)\right] \\ &= \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=1}^{k+1} f(\boldsymbol{v}_i)\right) \\ &- \left(\frac{1}{|S|} \int_S \min\left\{\lambda_i(t) \colon i = 1, \ldots, k+1\right\} dt\right) \left[\sum_{i=1}^{k+1} f(\boldsymbol{v}_i) - (k+1) f(\boldsymbol{v}^*)\right]. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Za $i = 1, \ldots, k+1$, *neka je* S_i *simpleks čiji su vrhovi* $\boldsymbol{v}^*$ *i svi vrhovi od* S *osim* $\boldsymbol{v}_i$. *Označimo sa* $\boldsymbol{v}_i^*$ *baricentar od* $S_i, i = 1, \ldots, k+1$. *Kako je* $\mathrm{Vol}_k(S_i) = \mathrm{Vol}_k(S_j), i, j = 1, \ldots, k+1$, *slijedi iz (1.43) da* $t \in S_j$ *implicira* $\min_i \lambda_i(t) = \lambda_j(t)$. *Slijedi*

$$\int_S \min_i \lambda_i(t) dt = \sum_{j=1}^{k+1} \int_{S_j} \lambda_j(t) dt. \tag{1.53}$$

Imamo

$$\begin{aligned}
&\int_{S_j} \lambda_j(t)dt \\
&= \frac{1}{|S|}\int_{S_j} \mathrm{Vol}_k\left[\boldsymbol{v}_1,\ldots,t,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}\right]dt \\
&= \frac{1}{|\mathrm{S}|}\mathrm{Vol}_k\left[\boldsymbol{v}_1,\ldots,\int_{S_j} tdt,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}\right] \\
&= \frac{|S_j|}{|S|}\mathrm{Vol}_k\left[\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_j^*,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}\right] = \frac{1}{k+1}\mathrm{Vol}_k\left[\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_j^*,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}\right] \\
&= \frac{1}{(k+1)^2}\mathrm{Vol}_k\left[\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}^*,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+1}\right] = \frac{1}{(k+1)^3}|S|. \qquad (1.54)
\end{aligned}$$

Koristeći (1.53) i (1.54) dobivamo

$$\int_S \min_i \lambda_i(t)dt = \frac{1}{(k+1)^2}|S|. \qquad (1.55)$$

Ako stavimo (1.55) u (1.52), imamo

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}^*) &\le \frac{1}{|S|}\int_S f(t)dt \\
&\le \frac{k}{(k+1)^2}\sum_{i=1}^{k+1} f(\boldsymbol{v}_i) + \frac{1}{k+1}f(\boldsymbol{v}^*)
\end{aligned}$$

što je dobiveno u [21, Teorem 4.1].

Lagano se pokaže da je desna strana ove nejednakosti ekvivalentna k-dimenzionalnoj varijanti Hammer-Bullenove nejednakosti, naime

$$\frac{1}{|S|}\int_S f(t)dt - f(\boldsymbol{v}^*) \le \frac{k}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} f(\boldsymbol{v}_i) - \frac{k}{|S|}\int_S f(t)dt \qquad (1.56)$$

što je dokazano, na primjer, u [89].
U jednoj dimenziji dobivamo poboljšanje klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{4}S_f^2(a,b).$$

1.3. Giaccardi-Petrovićeva nejednakost

Giaccardijeva nejednakost kaže:

Teorem 1.3.1. *Neka je ϕ konveksna funkcija na intervalu I, $\mathbf{p}$ nenegativna n-torka takva da $\sum_{i=1}^n p_i = P_n \neq 0$ i $\mathbf{x}$ realna n-torka. Ako su $\mathbf{x} \in I^n$ i $x_0 \in I$ takvi da $\sum_{i=1}^n p_i x_i = \tilde{x} \in I, \tilde{x} \neq x_0$ i*

$$(x_i - x_0)(\tilde{x} - x_i) \ge 0, \quad i = 1,\ldots,n,$$

tada

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \phi(x_i) \leq A\phi(\tilde{x}) + B\bigg(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\bigg)\phi(x_0),$$

gdje

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - x_0}, B = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - x_0}.$$

Jednostavna posljedica Giaccardijeve nejednakosti je Petrovićeva nejednakost:

Korolar 1.3.2. *Neka je ϕ konveksna funkcija na $[0,a], 0 < a < \infty$. Tada za svaku nenegativnu n-torku $\mathbf{p}$ i svaki $\mathbf{x} \in [0,a]^n$ takav da $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \tilde{x} \in (0,a]$ i*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq x_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

vrijedi sljedeća nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \phi(x_i) \leq \phi(\tilde{x}) + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right)\phi(0).$$

Za više detalja o Giaccardijevoj i Petrovićevoj nejednakosti vidjeti [69].

U radu [66] smo poboljšali teorem 1.3.1. i korolar 1.3.2. koristeći lemu 1.1.16. za $n = 2$.

Teorem 1.3.3. *Neka je ϕ konveksna funkcija na intervalu I, $\mathbf{p}$ nenegativna n-torka takva da $\sum_{i=1}^{n} p_i = P_n \neq 0$ i $\mathbf{x}$ realna n-torka. Ako su $\mathbf{x} \in I^n$ i $x_0 \in I$ takvi da $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \tilde{x} \in I, \tilde{x} \neq x_0$ i*

$$(x_i - x_0)(\tilde{x} - x_i) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.57}$$

tada

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \phi(x_i) \leq A\phi(\tilde{x}) + B\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right)\phi(x_0) - \frac{\delta_\phi}{2}P_n + \delta_\phi \sum_{i=1}^{n} p_i \left|\frac{x_i - \frac{x_0+\tilde{x}}{2}}{\tilde{x} - x_0}\right|, \tag{1.58}$$

gdje

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - x_0}, B = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - x_0}, \delta_\phi = \phi(x_0) + \phi(\tilde{x}) - 2\phi\left(\frac{x_0 + \tilde{x}}{2}\right).$$

Dokaz. Uvjet $(x_i - x_0)(\tilde{x} - x_i) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, znači da vrijedi $x_0 \leq x_i \leq \tilde{x}$ ili $\tilde{x} \leq x_i \leq x_0$, $i = 1, \ldots, n$. Promotrimo prvi slučaj (drugi je analogan).
Neka su funkcije $p, q\colon [x_0, \tilde{x}] \to [0,1]$ definirane sa

$$p(x) = \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{x} - x_0}, \quad q(x) = \frac{x - x_0}{\tilde{x} - x_0}.$$

Za svaki $x \in [x_0, \tilde{x}]$ možemo pisati

$$\phi(x) = \phi\left(\frac{\tilde{x} - x}{\tilde{x} - x_0} x_0 + \frac{x - x_0}{\tilde{x} - x_0} \tilde{x}\right) = \phi(p(x)x_0 + q(x)\tilde{x}).$$

Po lemi 1.1.16. za $n = 2$ imamo za $x \in [x_0, \tilde{x}]$

$$\begin{aligned} &\min\{p(x), q(x)\} \left[\phi(x_0) + \phi(\tilde{x}) - 2\phi\left(\frac{x_0 + \tilde{x}}{2}\right)\right] \\ &\quad \leq p(x)\phi(x_0) + q(x)\phi(\tilde{x}) - \phi(p(x)x_0 + q(x)\tilde{x}) \end{aligned}$$

i tada

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(p(x)x_0 + q(x)\tilde{x}) \\ &\leq p(x)\phi(x_0) + q(x)\phi(\tilde{x}) - \min\{p(x), q(x)\} \left[\phi(x_0) + \phi(\tilde{x}) - 2\phi\left(\frac{x_0 + \tilde{x}}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Množeći $\phi(x_i)$ sa p_i i sumirajući, dobivamo

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i \phi(x_i) \\ &\quad \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \left[p(x_i)\phi(x_0) + q(x_i)\phi(\tilde{x}) - \min\{p(x_i), q(x_i)\} \left[\phi(x_0) + \phi(\tilde{x}) - 2\phi\left(\frac{x_0 + \tilde{x}}{2}\right)\right]\right] \\ &\quad = \phi(\tilde{x}) \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{x_i - x_0}{\tilde{x} - x_0} + \phi(x_0) \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\tilde{x} - x_i}{\tilde{x} - x_0} - \delta_\phi \sum_{i=1}^{n} p_i \min\{p(x_i), q(x_i)\} \\ &\quad = A\phi(\tilde{x}) + B(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1)\phi(x_0) - \frac{\delta_\phi}{2} P_n + \delta_\phi \sum_{i=1}^{n} p_i \left|\frac{x_i - \frac{x_0 + \tilde{x}}{2}}{\tilde{x} - x_0}\right|. \end{aligned}$$

■

Primjedba 1.3.4. *Teorem 1.3.3. je očito poboljšanje teorema 1.3.1., jer pod postavljenim uvjetima imamo*

$$\delta_\phi \sum_{i=1}^{n} p_i \min\{p(x_i), q(x_i)\} \geq 0.$$

Jednostavna posljedica Giaccardijeve nejednakosti je Petrovićeva nejednakost, pa dajemo i njeno poboljšanje.

Teorem 1.3.5. *Neka je ϕ konveksna funkcija na $[0, a]$, $0 < a < \infty$. Tada za svaku nenegativnu n-torku $\mathbf{p}$ i svaki $\mathbf{x} \in [0, a]^n$ takav da $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \tilde{x} \in (0, a]$ i*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq x_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.59}$$

vrijedi sljedeća nejednakost

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i \phi(x_i) \leq \phi(\tilde{x}) &+ \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right) \phi(0) \\ &- \frac{\delta_\phi}{2} P_n + \delta_\phi \sum_{i=1}^{n} p_i \left|\frac{x_i}{\tilde{x}} - \frac{1}{2}\right|, \end{aligned} \tag{1.60}$$

gdje $\delta_\phi = \phi(0) + \phi(\tilde{x}) - 2\phi\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)$.

Dokaz. Specijalan slučaj teorema 1.3.3.; uzmemo $x_0 = 0$. ■

Primjedba 1.3.6. *Primijetimo da smo poboljšanje Giaccardijeve nejednakosti mogli dobiti iz teorema 1.2.1. Gledamo specijalan slučaj tog teorema kao u korolaru 1.2.3.*
Pretpostavimo da $x_0 < \tilde{x}$. *Ako definiramo* $m = x_0$ *i* $M = \tilde{x}$, *iz* (1.57) *imamo* $\boldsymbol{x} \in [m, M]^n$ *i* (1.19) *daje*

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} p_i \phi(x_i) \\
\leq\ & \frac{P_n \tilde{x} - \tilde{x}}{\tilde{x} - x_0} \phi(x_0) + \frac{\tilde{x} - x_0 P_n}{\tilde{x} - x_0} \phi(\tilde{x}) - \frac{\delta_\phi}{2} P_n + \delta_\phi \sum_{i=1}^{n} p_i \left| \frac{x_i - \frac{x_0 + \tilde{x}}{2}}{\tilde{x} - x_0} \right| \\
=\ & A\phi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) + B\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right)\phi(x_0) - \frac{\delta_\phi}{2} P_n + \delta_\phi \sum_{i=1}^{n} p_i \left| \frac{x_i - \frac{x_0 + \tilde{x}}{2}}{\tilde{x} - x_0} \right|.
\end{aligned}$$

Ako je $x_0 > \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ *definiramo* $m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, $M = x_0$, *te je ostatak dokaza sličan.*

Motivirani nejednakostima (1.58) i (1.60), definiramo dva funkcionala:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f) \ =\ & A f(\tilde{x}) + B\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right) f(x_0) - \frac{\delta_f}{2} P_n \\
& + \delta_f \sum_{i=1}^{n} p_i \left| \frac{x_i - \frac{x_0 + \tilde{x}}{2}}{\tilde{x} - x_0} \right| - \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i), \qquad (1.61)
\end{aligned}$$

gdje je f funkcija na intervalu I, $\mathbf{p}$ nenegativna n-torka, $\mathbf{x}$ realna n-torka i $\tilde{x}$, P_n, δ_f, A, B kao u teoremu 1.3.3., i

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f) \ =\ & f(\tilde{x}) + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right) f(0) - \frac{\delta_\phi}{2} P_n \\
& + \delta_f \sum_{i=1}^{n} p_i \left| \frac{x_i}{\tilde{x}} - \frac{1}{2} \right| - \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i), \qquad (1.62)
\end{aligned}$$

gdje je f funkcija na intervalu $[0, a]$, $\mathbf{p}$ nenegativna n-torka, $\mathbf{x}$ realna n-torka i $\tilde{x}$, P_n, δ_f kao u korolaru 1.3.5..
Ako je f konveksna funkcija, tada teorem 1.3.3. i korolar 1.3.5. impliciraju $\Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f) \geq 0, i = 1, 2$.
Sada dajemo dva teorema srednje vrijednosti Cauchyevog tipa za funkcionale Φ_i, $i = 1, 2$.

Teorem 1.3.7. *Neka je* $I = [a, b]$, $\mathbf{p}$ *nenegativna* n*-torka takva da* $\sum_{i=1}^{n} p_i = P_n \neq 0$ *i* $\mathbf{x}$ *realna* n*-torka Neka su* $\mathbf{x} \in I^n$ *i* $x_0 \in I$ *takvi da* $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \tilde{x} \in I$, $\tilde{x} \neq x_0$ *i vrijedi (1.57). Neka* $f \in C^2(I)$. *Tada postoji* $\xi \in I$ *takav da*

$$\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f) = \frac{f''(\xi)}{2} \Phi_1(x, p, f_0), \qquad (1.63)$$

gdje $f_0(x) = x^2$.

Dokaz. Kako je $f \in C^2(I)$ postoje realni brojevi $m = \min_{x\in[a,b]} f''(x)$ i $M = \max_{x\in[a,b]} f''(x)$. Lagano se pokaže da su funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$, definirane sa

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{M}{2}x^2 - f(x), \\ f_2(x) &= f(x) - \frac{m}{2}x^2 \end{aligned}$$

konveksne. Stoga

$$\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f_1) \geq 0$$
$$\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f_2) \geq 0,$$

i dobivamo

$$\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f) \leq \frac{M}{2}\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f_0) \tag{1.64}$$

$$\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f) \geq \frac{m}{2}\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f_0). \tag{1.65}$$

Iz (1.64) i (1.65) dobivamo

$$\frac{m}{2}\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f_0) \leq \Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f) \leq \frac{M}{2}\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f_0).$$

Ako je $\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},x^2) = 0$ nemamo ništa za dokazati. Pretpostavimo $\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},x^2) > 0$. Imamo

$$m \leq \frac{2\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f)}{\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},x^2)} \leq M.$$

Stoga postoji $\xi \in I$ takav da

$$\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f) = \frac{f''(\xi)}{2}\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f_0).$$

■

Teorem 1.3.8. *Neka je $I = [0,a]$, $\mathbf{p}$ nenegativna n-torka i $\mathbf{x}$ realna n-torka. Neka je $\mathbf{x} \in [0,a]^n$ takav da $\sum_{i=1}^n p_i x_i = \tilde{x} \in I$ i vrijedi (1.59). Neka $f \in C^2(I)$. Tada postoji $\xi \in I$ takav da*

$$\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{p},f) = \frac{f''(\xi)}{2}\Phi_2(\mathbf{x},\mathbf{p},f_0) \tag{1.66}$$

gdje $f_0(x) = x^2$.

Dokaz. Analogan dokazu teorema 1.3.7. ■

Teorem 1.3.9. *Neka je $I = [a,b]$, $\mathbf{p}$ nenegativna n-torka takva da $\sum_{i=1}^n p_i = P_n \neq 0$ i $\mathbf{x}$ realna n-torka. Neka su $\mathbf{x} \in I^n$ i $x_0 \in I$ takvi da $\sum_{i=1}^n p_i x_i = \tilde{x} \in I$, $\tilde{x} \neq x_0$ i vrijedi (1.57). Neka $f, g \in C^2(I)$. Tada postoji $\xi \in I$ takav da*

$$\frac{\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},f)}{\Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{p},g)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}, \tag{1.67}$$

uz uvjet da su nazivnici različiti od nula.

Dokaz. Definiramo $h \in C^2([a,b])$ sa

$$h = c_1 f - c_2 g,$$

gdje je

$$c_1 = \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, g), \quad c_2 = \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f).$$

Sada koristeći teorem 1.3.7. postoji $\xi \in [a,b]$ takav da

$$\left(c_1 \frac{f''(\xi)}{2} - c_2 \frac{g''(\xi)}{2} \right) \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_0) = 0.$$

Kako je $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_0) \neq 0$ (inače dobivamo kontradikciju sa $\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, g) \neq 0$ po teoremu 1.3.7.), dobivamo

$$\frac{\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f)}{\Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, g)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

■

Teorem 1.3.10. *Neka je $I = [0,a]$, $\mathbf{p}$ nenegativna n-torka i $\mathbf{x}$ realna n-torka. Neka je $\mathbf{x} \in [0,a]^n$ takav da $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \tilde{x} \in I$ i vrijedi (1.59). Neka $f, g \in C^2(I)$. Tada postoji $\xi \in I$ takav da*

$$\frac{\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f)}{\Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}, g)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)} \tag{1.68}$$

uz uvjet da su nazivnici različiti od nula.

Dokaz. Analogan dokazu teorema 1.3.9. ■

Uvodimo sada neka svojstva funkcija koja ćemo proučavati, a zatim ćemo dati neke karakterizacije tih svojstava.

Definicija 1.3.11. *Funkcija $\psi \colon I \to \mathbb{R}$ je $n-$eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na I ako vrijedi*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j \psi\left(\frac{x_i + x_j}{2} \right) \geq 0$$

za svaki izbor $\xi_i \in \mathbb{R}$ i $x_i \in I$, $i = 1, \ldots, n$.
Funkcija $\psi \colon I \to \mathbb{R}$ je $n-$eksponencijalno konveksna ako je $n-$eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu i neprekidna na I.

Primjedba 1.3.12. *Jasno je iz definicije da su 1-eksponencijalno konveksne funkcije u stvari nenegativne funkcije. Također, n-eksponencijalno konveksne funkcije u Jensenovom smislu su $k-$eksponencijalno konveksne u Jensenovom smislu za svaki $k \in \mathbb{N}, k \leq n$.*

Sljedeća propozicija slijedi iz definicije pozitivno semidefinitnih matrica.

Propozicija 1.3.13. *Ako je ψ n-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu, tada je $\left[\psi\left(\frac{x_i + x_j}{2} \right) \right]_{i,j=1}^{k}$ pozitivno semidefinitna matrica za svaki $k \in \mathbb{N}, k \leq n$. Specijalno,* $\det \left[\psi\left(\frac{x_i + x_j}{2} \right) \right]_{i,j=1}^{k} \geq 0$ *za sve $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.*

Definicija 1.3.14. *Funkcija* $\psi \colon I \to \mathbb{R}$ *je eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na* I *ako je* $n-$*eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu za svaki* $n \in \mathbb{R}$.
Funkcija $\psi \colon I \to \mathbb{R}$ *je eksponencijalno konveksna ako je eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu i neprekidna.*

Primjedba 1.3.15. *Poznato je (i lagano za pokazati) da je* $\psi \colon I \to \mathbb{R}^+$ *log-konveksna u Jensenovom smislu ako i samo ako*

$$\alpha^2\psi(x) + 2\alpha\beta\psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \beta^2\psi(y) \geq 0$$

vrijedi za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *i* $x, y \in I$. *Slijedi da je pozitivna funkcija log-konveksna u Jensenovom smislu ako i samo ako je 2-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu. Također, iz elementarne teorije konveksnosti slijedi da je pozitivna funkcija log-konveksna ako i samo ako je 2-eksponencijalno konveksna.*

Trebat će nam i sljedeći rezultat (vidjeti npr. [69]).

Propozicija 1.3.16. *Ako je* Ψ *konveksna funkcija na* I *i ako* $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ *tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{\Psi(x_2) - \Psi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\Psi(y_2) - \Psi(y_1)}{y_2 - y_1}. \tag{1.69}$$

Ako je Ψ *konkavna na* I *vrijedi suprotna nejednakost.*

Kada promatramo funkcije različitih stupnjeva glatkoće, podijeljene razlike se pokazuju vrlo korisne.

Definicija 1.3.17. *Podijeljena razlika drugog reda funkcije* $f \colon I \to \mathbb{R}$ *u međusobno različitim točkama* $y_0, y_1, y_2 \in I$ *se definira rekurzivno sa*

$$\begin{aligned}
[y_i; f] &= f(y_i), \quad i = 0, 1, 2 \\
[y_i, y_{i+1}; f] &= \frac{f(y_{i+1}) - f(y_i)}{y_{i+1} - y_i}, \quad i = 0, 1 \\
[y_0, y_1, y_2; f] &= \frac{[y_1, y_2; f] - [y_0, y_1; f]}{y_2 - y_0}.
\end{aligned} \tag{1.70}$$

Primjedba 1.3.18. *Vrijednost* $[y_0, y_1, y_2; f]$ *je nezavisna o poretku točaka* y_0, y_1 *i* y_2. *Definiciju možemo proširiti na slučaj kada se neke točke podudaraju. Naime, ako gledamo limes* $y_1 \to y_0$ *u (1.70), dobivamo*

$$\lim_{y_1 \to y_0} [y_0, y_1, y_2; f] = [y_0, y_0, y_2; f] = \frac{f(y_2) - f(y_0) - f'(y_0)(y_2 - y_0)}{(y_2 - y_0)^2}, y_2 \neq y_0$$

ukoliko f' *postoji, a ako uzmemo limese* $y_i \to y_0, i = 1, 2$ *u (1.70), dobivamo*

$$\lim_{y_2 \to y_0} \lim_{y_1 \to y_0} [y_0, y_1, y_2; f] = [y_0, y_0, y_0; f] = \frac{f''(y_0)}{2}$$

ukoliko f'' *postoji.*

Koristimo ideju iz [27] i dajemo elegantnu metodu za dobivanje n-eksponencijalno konveksnih i eksponencijalno konveksnih funkcija primjenjujući funkcionale Φ_1 i Φ_2 na danu familiju funkcija s istim svojstvom.

Teorem 1.3.19. *Neka je $\Upsilon = \{f_s : s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na intervalu I u $\mathbb{R}$, takva da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ $n-$eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Neka su $\Phi_i \quad (i = 1, 2)$ linearni funkcionali definirani kao u (1.61) i (1.62). Tada je $s \mapsto \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)$ $n-$eksponencijalno konveksna funkcija u Jensenovom smislu na J. Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)$ neprekidna na J, tada je $n-$eksponencijalno konveksna na J.*

Dokaz. Za $\xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ i $s_i \in J, i = 1, \ldots, n$, definiramo funkciju

$$g(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j f_{\frac{s_i+s_j}{2}}(y).$$

Koristeći pretpostavku da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ n-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu, imamo

$$[y_0, y_1, y_2; g] = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j [y_0, y_1, y_2; f_{\frac{s_i+s_j}{2}}] \geq 0,$$

što povlači da je g konveksna funkcija na I, te stoga imamo $\Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, g) \geq 0$, $i = 1, 2$. Slijedi

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_{\frac{s_i+s_j}{2}}) \geq 0.$$

Zaključujemo da je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)$ n-eksponencijalno konveksna na J u Jensenovom smislu. Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)$ neprekidna na J, tada je $s \mapsto \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)$ n-eksponencijalno konveksna po definiciji. ∎

Sljedeći korolar je direktna posljedica prethodnog teorema.

Korolar 1.3.20. *Neka je $\Upsilon = \{f_s : s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na intervalu I u $\mathbb{R}$, takva da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Neka su $\Phi_i \quad (i = 1, 2)$ linearni funkcionali definirani kao u (1.61) i (1.62). Tada je $s \mapsto \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)$ eksponencijalno konveksna funkcija u Jensenovom smislu na J. Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)$ neprekidna na J, tada je eksponencijalno konveksna na J.*

Korolar 1.3.21. *Neka je $\Omega = \{f_s : s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na intervalu I u $\mathbb{R}$, takva da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ $2-$eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Neka su $\Phi_i \quad (i = 1, 2)$, linearni funkcionali definirani kao u (1.61) i (1.62). Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) *Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)$ neprekidna na J, tada je $2-$eksponencijalno konveksna funkcija na J, i stoga log-konveksna funkcija.*

(*ii*) *Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)$ strogo pozitivna i diferencijabilna na J, tada za sve $s, q, u, v \in J$ takve da $s \leq u$ i $q \leq v$, imamo*

$$\mu_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_i, \Omega) \leq \mu_{u,v}(\mathbf{x}, \Phi_i, \Omega), \quad i = 1, 2, \tag{1.71}$$

gdje

$$\mu_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_i, \Omega) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)}{\Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_q)} \right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{\frac{d}{ds}\Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)}{\Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)} \right), & s = q, \end{cases} \tag{1.72}$$

za $f_s, f_q \in \Omega$.

Dokaz. (*i*) Direktna posljedica teorema 1.3.19. i primjedbe 1.3.15.
(*ii*) Po (*i*) funkcija $s \mapsto \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)$ je log-konveksna na J, to jest funkcija $s \mapsto \log \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s)$ je konveksna na J. Primijenimo propoziciju 1.3.16. i dobijemo

$$\frac{\log \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_s) - \log \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_q)}{s - q} \leq \frac{\log \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_u) - \log \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f_v)}{u - v} \tag{1.73}$$

za $s \leq u, q \leq v, s \neq q, u \neq v$, i iz toga zaključujemo

$$\mu_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_i, \Omega) \leq \mu_{u,v}(\mathbf{x}, \Phi_i, \Omega), \quad i = 1, 2.$$

Slučajevi $s = q$ i $u = v$ slijede iz (1.73) kao granični slučajevi. ■

Primjedba 1.3.22. *Primijetimo da rezultati iz teorema 1.3.19., korolara 1.3.20. i korolara 1.3.21. vrijede i kada se dvije od točaka $y_0, y_1, y_2 \in I$ podudaraju, recimo $y_1 = y_0$, za familiju diferencijabilnih funkcija φ_s takvu da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; \varphi_s]$ $n-$eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu (eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu, log-konveksna u Jensenovom smislu), i štoviše, vrijede kada se sve tri točke podudaraju za familiju dvaput diferencijabilnih funkcija sa istim svojstvom. Dokazi se dobivaju iz primjedbe 1.3.18. i prikladne karakterizacije konveksnosti.*

Sada predstavljamo nekoliko familija funkcija koje ispunjavaju uvjete teorema 1.3.19., korolara 1.3.20. i korolara 1.3.21. (i primjedbe 1.3.22.). To nam omogućava konstrukciju velike familije funkcija koje su eksponencijalno konveksne. Rasprava vezana uz ovaj problem se može naći u [16].

Primjer 1.3.23. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_1 = \{g_s : \mathbb{R} \to [0, \infty) : s \in \mathbb{R}\}$$

definiranu s

$$g_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{s^2} e^{sx}, & s \neq 0, \\ \frac{1}{2} x^2, & s = 0. \end{cases}$$

Imamo $\frac{d^2 g_s}{dx^2}(x) = e^{sx} > 0$ što pokazuje da je g_s konveksna na $\mathbb{R}$ za svaki $s \in \mathbb{R}$ i $s \mapsto \frac{d^2 g_s}{dx^2}(x)$ je eksponencijalno konveksna po definiciji. Koristeći analogno argumentiranje kao u dokazu teorema 1.3.19. također imamo da je $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; g_s]$ eksponencijalno konveksna (pa tako i eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu).

Koristimo teorem 1.3.20. i zaključujemo da su $s \mapsto \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, g_s)$, $i = 1, 2$, *eksponencijalno konveksne u Jensenovom smislu. Lagano se pokaže da su ova preslikavanja neprekidna (iako preslikavanje* $s \mapsto g_s$ *nije neprekidno za* $s = 0$*), pa su i eksponencijalno konveksna.*
Za ovu familiju funkcija, $\mu_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_i, \Omega_1)$, $i = 1, 2$, *iz (1.72) imaju oblik*

$$\mu_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_i, \Omega_1) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(\mathbf{x},\boldsymbol{p},g_s)}{\Phi_i(\mathbf{x},\boldsymbol{p},g_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{\Phi_i(\mathbf{x},\boldsymbol{p},id\cdot g_s)}{\Phi_i(\mathbf{x},\boldsymbol{p},g_s)} - \frac{2}{s}\right), & s = q \neq 0, \\ \exp\left(\frac{\Phi_i(\mathbf{x},\boldsymbol{p},id\cdot g_0)}{3\Phi_i(\mathbf{x},\boldsymbol{p},g_0)}\right), & s = q = 0, \end{cases}$$

te su koristeći (1.71) monotone funkcije u parametrima s i q.

Koristeći teoreme 1.3.9. i 1.3.10. slijedi da za $i = 1, 2$

$$M_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_i, \Omega_1) = \log \mu_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_i, \Omega_1)$$

zadovoljava $\min\{x_0, \tilde{x}\} \leq M_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_i, \Omega_1) \leq \max\{x_0, \tilde{x}\}$, *što pokazuje da su* $M_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_i, \Omega_1)$ *sredine (od* $x_0, x_1, \ldots x_n, \tilde{x}$*). Primijetimo da su po (1.71) i monotone.*

Primjer 1.3.24. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_2 = \{f_s : (0, \infty) \to \mathbb{R} : s \in \mathbb{R}\}$$

definiranu s

$$f_s(x) = \begin{cases} \frac{x^s}{s(s-1)}, & s \neq 0, 1, \\ -\log x, & s = 0, \\ x \log x, & s = 1. \end{cases}$$

Vrijedi $\frac{d^2 f_s}{dx^2}(x) = x^{s-2} = e^{(s-2)\log x} > 0$ *što pokazuje da je* f_s *konveksna za* $x > 0$ *i* $s \mapsto \frac{d^2 f_s}{dx^2}(x)$ *je eksponencijalno konveksna po definiciji. Koristeći argumentiranje kao u primjeru 1.3.23. dobivamo da je preslikavanje* $s \mapsto \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, g_s)$ *eksponencijalno konveksno. U ovom slučaju pretpostavimo* $x_j > 0$, $j = 0, 1 \ldots, n$. *Primijetimo da funkcional* Φ_2 *nije definiran u ovom slučaju (može se definirati za* $s \geq 0$*). Funkcije (1.72) su u ovom slučaju jednake sljedećem:*

$$\mu_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_1, \Omega_2) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_s)}{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{1-2s}{s(s-1)} - \frac{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_s f_0)}{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_s)}\right), & s = q \neq 0, 1, \\ \exp\left(1 - \frac{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_0^2)}{2\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_0)}\right), & s = q = 0, \\ \exp\left(-1 - \frac{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_0 f_1)}{2\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_1)}\right), & s = q = 1. \end{cases}$$

Ako je Φ_1 *pozitivan, tada teorem 1.3.9. i teorem 1.3.10. primijenjeni za* $f = f_s \in \Omega_2$ *i* $g = f_q \in \Omega_2$ *daju da postoji* $\xi \in [\min\{x_0, \tilde{x}\}, \max\{x_0, \tilde{x}\}]$ *takav da*

$$\xi^{s-q} = \frac{\Phi_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{p}, f_s)}{\Phi_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{p}, f_q)}.$$

Kako je funkcija $\xi \mapsto \xi^{s-q}$ *invertibilna za* $s \neq q$, *tako imamo*

$$\min\{x_0, \tilde{x}\} \leq \left(\frac{\Phi_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{p}, f_s)}{\Phi_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{p}, f_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}} \leq \max\{x_0, \tilde{x}\}, \tag{1.74}$$

što zajedno sa činjenicom da je $\mu_{s,q}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_2)$ neprekidna, simetrična i monotona (po (1.71)) pokazuje da je $\mu_{s,q}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_2)$ sredina. Sada supstitucijama $x_i \to x_i^t$, $s \to \frac{s}{t}$, $q \to \frac{q}{t}$ $(t \neq 0,\ s \neq q)$ iz (1.74) dobivamo

$$\min\left\{x_0^t, \tilde{x}^t\right\} \leq \left(\frac{\Phi_1(\mathbf{x}^t,\boldsymbol{p},f_{s/t})}{\Phi_1(\mathbf{x}^t,\boldsymbol{p},f_{q/t})}\right)^{\frac{t}{s-q}} \leq \max\left\{x_0^t, \tilde{x}^t\right\},$$

gdje $\mathbf{x}^t = (x_1^t,\ldots,x_n^t)$. Definiramo novu sredinu

$$\mu_{s,q;t}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_2) = \begin{cases} \left(\mu_{\frac{s}{t},\frac{q}{t}}(\mathbf{x}^t,\Phi_1,\Omega_2)\right)^{1/t}, & t \neq 0 \\ \mu_{s,q}(\log\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_1), & t = 0. \end{cases} \tag{1.75}$$

Ove nove sredine su također monotone. Preciznije, za $s,q,u,v \in \mathbb{R}$ takve da $s \leq u$, $q \leq v$, $s \neq u$, $q \neq v$, imamo

$$\mu_{s,q;t}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_2) \leq \mu_{u,v;t}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_2). \tag{1.76}$$

Znamo

$$\mu_{\frac{s}{t},\frac{q}{t}}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_2) = \left(\frac{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_{s/t})}{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_{q/t})}\right)^{\frac{t}{s-q}} \leq \mu_{\frac{u}{t},\frac{v}{t}}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_2) = \left(\frac{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_{s/t})}{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},f_{q/t})}\right)^{\frac{t}{s-q}},$$

za $s,q,u,v \in I$ takve da $s/t \leq u/t$, $q/t \leq v/t$ i $t \neq 0$, kako su $\mu_{s,q}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_2)$ monotone u oba parametra, tvrdnja slijedi. Za $t = 0$ dobijamo traženi rezultat uzimajući limes $t \to 0$.

Primjer 1.3.25. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_3 = \{h_s : (0,\infty) \to (0,\infty) : s \in (0,\infty)\}$$

definiranu s

$$h_s(x) = \begin{cases} \frac{s^{-x}}{\log^2 s}, & s \neq 1, \\ \frac{x^2}{2}, & s = 1. \end{cases}$$

Kako je $s \mapsto \frac{d^2h_s}{dx^2}(x) = s^{-x}$ Laplaceova transformacija nenegativne funkcije (vidjeti [90]), ona je eksponencijalno konveksna. Očito su h_s konveksne fukcije za svaki $s > 0$.
Za ovu familiju funkcija, $\mu_{s,q}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_3)$, u ovom slučaju za $x_j > 0$, $j = 0,1,\ldots,n$, iz (1.72) ima oblik

$$\mu_{s,q}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_3) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},h_s)}{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},h_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(-\frac{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},id\cdot h_s)}{s\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},h_s)} - \frac{2}{s\log s}\right), & s = q \neq 1, \\ \exp\left(-\frac{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},id\cdot h_1)}{3\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},h_1)}\right), & s = q = 1, \end{cases}$$

i monotona je u parametrima s i q po (1.71).
Koristeći teorem 1.3.9., slijedi da

$$M_{s,q}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_3) = -L(s,q)\log\mu_{s,q}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_3),$$

zadovoljava $\min\{x_0,\tilde{x}\} \leq M_{s,q}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_3) \leq \max\{x_0,\tilde{x}\}$, što pokazuje da je $M_{s,q}(\mathbf{x},\Phi_1,\Omega_3)$ sredina (od $x_0,x_1,\ldots x_n,\tilde{x}$). $L(s,q)$ je logaritamska sredina definirana s $L(s,q) = \frac{s-q}{\log s - \log q}$, $s \neq q$, $L(s,s) = s$.

Primjer 1.3.26. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_4 = \{k_s : (0,\infty) \to (0,\infty) : s \in (0,\infty)\}$$

definiranu s

$$k_s(x) = \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}.$$

Kako je $s \mapsto \frac{d^2 k_s}{dx^2}(x) = e^{-x\sqrt{s}}$ *Laplaceova transformacija nenegativne funkcije (vidjeti [90]), ona je i eksponencijalno konveksna. Očito su* k_s *konveksne funkcije za svaki* $s > 0$.
Za ovu familiju funkcija, $\mu_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_1, \Omega_4)$*, u ovom slučaju za* $x_j > 0$*,* $j = 0, 1, \ldots, n$*, iz (1.72) ima oblik*

$$\mu_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_1, \Omega_4) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},k_s)}{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},k_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(-\frac{\Phi_1(\mathbf{x},\boldsymbol{p},id\cdot k_s)}{2\sqrt{s}\Phi(\mathbf{x},\boldsymbol{p},k_s)} - \frac{1}{s}\right), & s = q, \end{cases}$$

i monotona je funkcija u parametrima s i q po (1.71).
Koristeći teorem 1.3.9., slijedi da

$$M_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_1, \Omega_4) = -\left(\sqrt{s} + \sqrt{q}\right) \log \mu_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_1, \Omega_4)$$

zadovoljava $\min\{x_0, \tilde{x}\} \leq M_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_1, \Omega_4) \leq \max\{x_0, \tilde{x}\}$*, što pokazuje da je* $M_{s,q}(\mathbf{x}, \Phi_1, \Omega_4)$ *sredina (od* $x_0, x_1, \ldots x_n, \tilde{x}$*).*

1.4. Poboljšanje konverzne Hölderove i Minkowskijeve nejednakosti

Dajemo poboljšanje konverzne Hölderove nejednakosti za funkcionale koristeći lemu 1.1.16. Također, dobivamo slično poboljšanje konverzne Beckenbachove nejednakosti. Promatramo konverznu Minkowskijevu nejednakost za funkcionale i njen neprekidni oblik, te dajemo poboljšanje prve i konverziju druge. Gledamo primjenu tih rezultata na integralne mješovite sredine.

Većina klasičnih nejednakosti ima varijante koje uključuju pozitivne linearne funkcionale (vidjeti [69]). Između ostalog, u [69, str.115] možemo naći sljedeću konverznu Hölderovu nejednakost.

Teorem 1.4.1. (Konverzna Hölderova nejednakost za funkcionale) *Neka* L *zadovoljava (L1) i (L2) i* A *je pozitivan linearan funkcional. Neka* $p > 1$*,* $q = \frac{p}{p-1}$*, i* $w, f, g \geq 0$ *na* E *tako da* $wf^p, wg^q, wfg \in L$*. Ako* $0 < m \leq f(x)g^{-q/p}(x) \leq M$ *za* $x \in E$*, tada*

$$K(p,m,M) A^{\frac{1}{p}}(wf^p) A^{\frac{1}{q}}(wg^q) \leq A(wfg) \tag{1.77}$$

gdje je $K(p,m,M)$ *konstanta definirana sa*

$$K(p,m,M) = |p|^{\frac{1}{p}} |q|^{\frac{1}{q}} \frac{(M-m)^{\frac{1}{p}} |mM^p - Mm^p|^{\frac{1}{q}}}{|M^p - m^p|}. \tag{1.78}$$

Ako $p < 0$ *ili* $0 < p < 1$*, tada vrijedi suprotna nejednakost u (1.77) ukoliko je ili* $A(wf^p) > 0$ *ili* $A(wg^q) > 0$*.*

Prisjetimo se AG nejednakosti u sljedećem obliku:

Propozicija 1.4.2. (AG nejednakost) *Neka su a i b pozitivni realni brojevi. Ako su α, β pozitivni realni brojevi takvi da $\alpha+\beta=1$, tada*

$$\alpha a+\beta b \geq a^{\alpha} b^{\beta}. \tag{1.79}$$

Ako je $\alpha<0$ ili $\alpha>1$, tada vrijedi suprotna nejednakost u (1.79).

Glavni rezultat u radu [68] je sljedeći teorem koji je poboljšanje konverzne Hölderove nejednakosti.

Teorem 1.4.3. *Neka L zadovoljava (L1) i (L2) i A je pozitivan linearan funkcional. Neka $p \in \mathbb{R}, q=\frac{p}{p-1}$, i $w, f, g \geq 0$ na E tako da $wf^{p}, wg^{q}, wfg \in L$.*
Neka su m i M takvi da $0<m \leq f(x) g^{-q/p}(x) \leq M$ za $x \in E$.
Ako $p>1$, tada

$$\begin{aligned} A(wfg) &\geq K(p,m,M) A^{\frac{1}{p}}(wf^{p}) A^{\frac{1}{q}}(wg^{q})+\Delta(g^{q}, fg) N(p,m,M) && (1.80)\\ &\geq K(p,m,M) A^{\frac{1}{p}}(wf^{p}) A^{\frac{1}{q}}(wg^{q}) && (1.81)\end{aligned}$$

gdje

$$K(p,m,M)=|p|^{\frac{1}{p}}|q|^{\frac{1}{q}} \frac{(M-m)^{\frac{1}{p}}|mM^{p}-Mm^{p}|^{\frac{1}{q}}}{|M^{p}-m^{p}|}$$

$$N(p,m,M)=\frac{m^{p}+M^{p}-2\left(\frac{m+M}{2}\right)^{p}}{M^{p}-m^{p}}$$

i

$$\Delta(g^{q}, fg)=A\left(w\left(\frac{M-m}{2} g^{q}-\left|fg-\frac{m+M}{2} g^{q}\right|\right)\right).$$

Ako $0<p<1$ i $A(wg^{q})>0$, ili $p<0$ i $A(wf^{p})>0$, tada vrijede suprotne nejednakosti u (1.80) i (1.81).

Dokaz. Ako stavimo u lemu 1.1.16. za $n=2$ $p_1=\alpha$, $p_2=\beta$, gdje su α i β pozitivni realni brojevi takvi da $\alpha+\beta=1$, $q_1=q_2=\min\{\alpha,\beta\}$, $\phi(x)=x^{p}$, $p>1$, dobivamo nejednakost

$$(\alpha x+\beta y)^{p} \leq \alpha x^{p}+\beta y^{p}-\min\{\alpha, \beta\}\left(x^{p}+y^{p}-2\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p}\right). \tag{1.82}$$

Neka je h funkcija iz L takva da $0<m \leq h(x) \leq M$ za $x \in E$, $m \neq M$, i definiramo α i β na sljedeći način:

$$\alpha(x)=\frac{M-h(x)}{M-m}, \quad \beta(x)=\frac{h(x)-m}{M-m}.$$

Očito, $\alpha(x)+\beta(x)=1$, $h(x)=\alpha(x) m+\beta(x) M$. Ako stavimo u (1.82) $x=m$ i $y=M$, te prethodno definirane $\alpha(x)$ i $\beta(x)$, imamo

$$\begin{aligned} h^{p}(x) \leq\; & \frac{M-h(x)}{M-m} m^{p}+\frac{h(x)-m}{M-m} M^{p}\\ &-\min\{\alpha(x), \beta(x)\}\left(m^{p}+M^{p}-2\left(\frac{m+M}{2}\right)^{p}\right).\end{aligned}$$

Ako pomnožimo ovu nejednakost sa $k(x) \geq 0$, te primijenimo linearni funkcional A dobivamo:

$$\begin{aligned} A(kh^p) &\leq \frac{m^p}{M-m}(MA(k) - A(kh)) + \frac{M^p}{M-m}(A(kh) - mA(k)) \\ &- A(k\min\{\alpha,\beta\})\left(m^p + M^p - 2\left(\frac{m+M}{2}\right)^p\right). \end{aligned}$$

Koristimo formulu $\min\{\alpha,\beta\} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta-|\beta-\alpha|)$, stavimo $h = fg^{-\frac{q}{p}}$, $k = wg^q$, gdje $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, te nakon množenja sa $M-m$ dobivamo

$$\begin{aligned} &(M-m)A(wf^p) + (mM^p - Mm^p)A(wg^q) \\ &+ A\left(w\left(\frac{M-m}{2}g^q - \left|fg - \frac{m+M}{2}g^q\right|\right)\right)\left[m^p + M^p - 2\left(\frac{m+M}{2}\right)^p\right] \\ &\leq (M^p - m^p)A(wfg). \end{aligned} \tag{1.83}$$

U nastavku izraz $A\left(w\left(\frac{M-m}{2}F - \left|G - \frac{m+M}{2}F\right|\right)\right)$ označavamo sa $\Delta(F,G)$. Koristeći AG nejednakost (1.79) uz $\alpha = \frac{1}{p} > 0$, $\beta = \frac{1}{q} > 0$, $a = p(M-m)A(wf^p) \geq 0$ i $b = q(mM^p - Mm^p)A(wg^q) \geq 0$ dobivamo

$$\begin{aligned} &(M-m)A(wf^p) + (mM^p - Mm^p)A(wg^q) \\ &= \frac{p}{p}(M-m)A(wf^p) + \frac{q}{q}(mM^p - Mm^p)A(wg^q) \\ &\geq p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}(M-m)^{\frac{1}{p}}(mM^p - Mm^p)^{\frac{1}{q}}A^{\frac{1}{p}}(wf^p)A^{\frac{1}{q}}(wg^q). \end{aligned} \tag{1.84}$$

Kombinirajući (1.83) i (1.84) dobivamo

$$\begin{aligned} &p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}(M-m)^{\frac{1}{p}}(mM^p - Mm^p)^{\frac{1}{q}}A^{\frac{1}{p}}(wf^p)A^{\frac{1}{q}}(wg^q) \\ &+ \Delta(g^q, fg)\left[m^p + M^p - 2\left(\frac{m+M}{2}\right)^p\right] \leq (M^p - m^p)A(wfg). \end{aligned}$$

Ako je $p > 1$, tada $M^p - m^p > 0$, te nakon dijeljenja sa $M^p - m^p$ dobivamo

$$K(p,m,M)A^{\frac{1}{p}}(wf^p)A^{\frac{1}{q}}(wg^q) + \Delta(g^q, fg)N(p,m,M) \leq A(wfg). \tag{1.85}$$

gdje je $K(p,m,M)$ konstanta iz (1.78) i $N(p,m,M)$ konstanta definirana sa

$$N(p,m,M) = \frac{m^p + M^p - 2\left(\frac{m+M}{2}\right)^p}{M^p - m^p}. \tag{1.86}$$

Kako je $\Delta(g^q, fg)N(p,m,M)$ nenegativan za $p > 1$, nejednakost (1.85) je poboljšanje konverzne Hölderove nejednakosti (1.77).

Pogledajmo ostale slučajeve eksponenta p.

Neka je $p < 0$. Tada je funkcija $x \mapsto x^p$ također konveksna na $\langle 0, \infty\rangle$, te vrijedi nejednakost (1.83). Želimo iskoristiti i AG nejednakost, ali ovdje je $\alpha < 0$, $a < 0$ i

$b \le 0$, jer je u ovom slučaju $mM^p - Mm^p \le 0$. Sada imamo $\alpha a + \beta b = -(\alpha|a| + \beta|b|) \ge -|a|^\alpha |b|^\beta$ i

$$\begin{aligned}
&(M-m)A(wf^p) + (mM^p - Mm^p)A(wg^q) \\
= \; & -\left(\frac{1}{p}|p(M-m)A(wf^p)| + \frac{1}{q}|q(mM^p - Mm^p)A(wg^q)|\right) \\
\ge \; & -|p|^{\frac{1}{p}}|q|^{\frac{1}{q}}(M-m)^{\frac{1}{p}}|mM^p - Mm^p|^{\frac{1}{q}}A^{\frac{1}{p}}(wf^p)A^{\frac{1}{q}}(wg^q).
\end{aligned}$$

Kombinirajući prethodne nejednakosti sa (1.83) i množenjem sa -1 dobivamo

$$\begin{aligned}
&|p|^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}(M-m)^{\frac{1}{p}}|mM^p - Mm^p|^{\frac{1}{q}}A^{\frac{1}{p}}(wf^p)A^{\frac{1}{q}}(wg^q) \\
- \; & \Delta(g^q, fg)\left[m^p + M^p - 2\left(\frac{m+M}{2}\right)^p\right] \\
\ge \; & -(M^p - m^p)A(wfg) = |M^p - m^p|A(wfg).
\end{aligned}$$

Izraz $m^p + M^p - 2\left(\frac{m+M}{2}\right)^p$ je pozitivan kao posljedica Jensenove nejednakosti za strogo konveksnu funkciju $x \mapsto x^p$, $p < 0$. Nakon dijeljenja sa $|M^p - m^p| = -(M^p - m^p)$ dobivamo

$$K(p,m,M)A^{\frac{1}{p}}(wf^p)A^{\frac{1}{q}}(wg^q) + \Delta(g^q, fg)N(p,m,M) \ge A(wfg). \tag{1.87}$$

Primijetimo da je u ovom slučaju faktor $N(p,m,M)$ negativan.

Ako je $0 < p < 1$, tada je $x \mapsto x^p$ konkavna na $[0, \infty\rangle$ i u (1.83) vrijedi suprotna nejednakost. Koristeći AG nejednakost za $\alpha = \frac{1}{p} > 1$, $\beta = \frac{1}{q} < 0$, $a = p(M - m)A(wf^p) \ge 0$ i $b = q(mM^p - Mm^p)A(wg^q) = |q| \cdot |mM^p - Mm^p|A(wg^q) \ge 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
&p^{\frac{1}{p}}|q|^{\frac{1}{q}}(M-m)^{\frac{1}{p}}|mM^p - Mm^p|^{\frac{1}{q}}A^{\frac{1}{p}}(wf^p)A^{\frac{1}{q}}(wg^q) \\
+ \; & \Delta(g^q, fg)\left[m^p + M^p - 2\left(\frac{m+M}{2}\right)^p\right] \ge (M^p - m^p)A(wfg).
\end{aligned}$$

U ovom slučaju je $M^p - m^p > 0$ i dijeljenjem prethodne nejednakosti sa $M^p - m^p$ dobijamo (1.87). Primijetimo da je u ovom slučaju $m^p + M^p - 2\left(\frac{m+M}{2}\right)^p$ negativan, pa je i faktor $N(p,m,M)$ negativan. ■

Jedna od generalizacija Hölderove nejednakosti je Beckenbachova nejednakost (vidjeti [92]). Ovdje promatramo konverznu Beckenbachovu nejednakost. U [54] je dan sljedeći rezultat (uz malu izmjenu).

Teorem 1.4.4. (Konverzna Beckenbachova nejednakost) *Pretpostavimo* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a, b, c, x_i, y_i > 0$ *i* $z_i = \left(\frac{ay_i}{b}\right)^{q/p}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. *Neka postoje pozitivni brojevi* m *i* M *takvi da*

$$m \le \left(\frac{a}{b}\right)^{q/p} \le M, \quad i \quad m \le \frac{x_i}{y_i^{q/p}} \le M, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ako $p > 1$, *tada*

$$\frac{\left(a + c\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}{b + c\sum_{i=1}^n x_i y_i} \le \frac{1}{K(p,m,M)} \frac{\left(a + c\sum_{i=1}^n z_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}{b + c\sum_{i=1}^n z_i y_i}. \tag{1.88}$$

Ako $p < 1$ $(p \neq 0)$, vrijedi suprotna nejednakost u (1.88).

Sljedeći teorem iz rada [68] daje poboljšanje prethodne konverzne Beckenbachove nejednakosti.

Teorem 1.4.5. *Pretpostavimo da vrijede pretpostavke teorema 1.4.4. Ako $p > 1$, tada*

$$\frac{\left(a + c\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}{b + c\sum_{i=1}^{n} x_i y_i} \leq \frac{1}{K(p,m,M)} \frac{\left(a + c\sum_{i=1}^{n} z_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}{b + c\sum_{i=1}^{n} z_i y_i} \left(1 - \frac{N(p,m,M)\Delta}{b + c\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}\right)$$
$$\leq \frac{1}{K(p,m,M)} \frac{\left(a + c\sum_{i=1}^{n} z_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}{b + c\sum_{i=1}^{n} z_i y_i},$$

gdje

$$\Delta = \frac{M-m}{2}\left(a^{-\frac{q}{p}} b^q + c\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right) - \left|b - \frac{m+M}{2a^{q/p}b^{-q}}\right| - c\sum_{i=1}^{n}\left|x_i y_i - \frac{m+M}{2} y_i^q\right|$$

i $K(p,m,M)$ je definiran kao u (1.78) Ako $p < 1$ $(p \neq 0)$, vrijede suprotne nejednakosti.

Dokaz. Neka $p > 1$. Iz jednakosti $\frac{q}{p} + 1 = q$ imamo

$$\left(\frac{a y_i}{b}\right)^{\frac{q}{p}} y_i = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{q}{p}} y_i^q,$$

i koristeći ovu jednakost dobivamo

$$\frac{\left(a + c\sum_{i=1}^{n} z_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}{b + c\sum_{i=1}^{n} z_i y_i} = \frac{\left(a + (\frac{a}{b})^q c\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{p}}}{b + (\frac{a}{b})^{\frac{q}{p}} c\sum_{i=1}^{n} y_i^q}$$
$$= \left(a^{-\frac{q}{p}} b^q + c\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{-\frac{1}{q}}. \tag{1.89}$$

Produkt $\left(a + c\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(a^{-\frac{q}{p}} b^q + c\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ je jedna strana Hölderove nejednakosti za dva niza $(a^{\frac{1}{p}}, x_1, \ldots, x_n)$ i $(a^{-\frac{1}{p}} b, y_1, \ldots, y_n)$ s težinama $(1, c, \ldots, c)$. Koristeći nejednakost (1.80) dobivamo

$$\left(a + c\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(a^{-\frac{q}{p}} b^q + c\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \frac{1}{K(p,m,M)}\left(b + c\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \Delta \cdot N(p,m,M)\right),$$

gdje su K i N definirani u teoremu 1.4.3. i Δ je definiran u teoremu 1.4.5. Dijeljenjem prethodne nejednakosti sa $(b + c\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)(a^{-q/p}b^q + c\sum_{i=1}^{n} y_i^q)^{1/q}$, te korištenjem rezultata (1.89) dobivamo traženo poboljšanje. ■

Sada proučavamo konverznu Minkowskijevu nejednakost za funkcionale i konverziju neprekidnog oblika Minkowskijeve nejednakosti. U [69, str.116] se može pronaći sljedeća konverzna Minkowskijeva nejednakost za funkcionale.

Teorem 1.4.6. (Konverzna Minkowskijeva nejednakost za funkcionale) *Neka su A, p, q, w, f, g kao u teoremu 1.4.3. s dodatnim svojstvom $w(f+g)^p \in L$. Neka su m i M takvi da $0 < m < f(x)(f(x)+g(x))^{-1} \leq M$ i $0 < m < g(x)(f(x)+g(x))^{-1} \leq M$ za $x \in E$.*

Ako $p > 1$, tada

$$A^{\frac{1}{p}}(w(f+g)^p) \geq K(p,m,M) \cdot \left(A^{\frac{1}{p}}(wf^p) + A^{\frac{1}{p}}(wg^p)\right), \tag{1.90}$$

gdje je $K(p,m,M)$ definiran kao u (1.78).

Ako $0 < p < 1$ ili ako $p < 0$, tada vrijedi suprotna nejednakost u (1.90) ukoliko je $A(w(f+g)^p) > 0$ za $p < 0$.

Koristimo poboljšanje konverzne Hölderove nejednakosti da bi dobili sljedeće poboljšanje konverzne Minkowskijeve nejednakosti za funkcionale.

Teorem 1.4.7. *Neka su zadovoljene pretpostavke teorema 1.4.6. Tada za $p > 1$ vrijedi*

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{p}}(w(f+g)^p) &\geq K(p,m,M)\left(A^{\frac{1}{p}}(wf^p) + A^{\frac{1}{p}}(wg^p)\right) \\ &+ N(p,m,M)\frac{\Delta((f+g)^p, f(f+g)^{p-1}) + \Delta((f+g)^p, g(f+g)^{p-1})}{A^{1-\frac{1}{p}}(w(f+g)^p)}. \end{aligned} \tag{1.91}$$

Za $p < 1$ ($p \neq 0$) vrijedi suprotna nejednakost.

Dokaz. Neka $p > 1$. Ako $A(w(f+g)^p)$ napišemo kao

$$A(w(f+g)(f+g)^{p-1}) = A(wf(f+g)^{p-1} + wg(f+g)^{p-1})$$

te ako iskoristimo nejednakost (1.80) dobivamo

$$\begin{aligned}
& A(w(f+g)^p) = A(wf(f+g)^{p-1}) + A(wg(f+g)^{p-1}) \\
\geq\ & K(p,m,M)A^{\frac{1}{p}}(wf^p)A^{\frac{1}{q}}(w(f+g)^p) \\
+\ & \Delta((f+g)^p, f(f+g)^{p-1})N(p,m,M) \\
+\ & K(p,m,M)A^{\frac{1}{p}}(wg^p)A^{\frac{1}{q}}(w(f+g)^p) \\
+\ & \Delta((f+g)^p, g(f+g)^{p-1})N(p,m,M) \\
=\ & K(p,m,M)A^{\frac{1}{q}}(w(f+g)^p)\Big(A^{\frac{1}{p}}(wf^p) + A^{\frac{1}{p}}(wg^p)\Big) \\
+\ & N(p,m,M)\Big(\Delta((f+g)^p, f(f+g)^{p-1}) + \Delta((f+g)^p, g(f+g)^{p-1})\Big).
\end{aligned}$$

Dijeljenjem s $A^{\frac{1}{q}}(w(f+g)^p)$ dobivamo traženi rezultat.

Ako $p > 1$, tada je drugi izraz u sumi na desnoj strani u (1.91) nenegativan i nejednakost (1.91) je poboljšanje poznate konverzije (1.90). Sličan dokaz prolazi za $p < 1 (p \neq 0)$. ■

Prethodna razmatranja ne pokrivaju tzv. Minkowskijevu integralnu nejednakost. Neka su (X, Σ_X, μ) i (Y, Σ_Y, ν) dva prostora mjere sa sigma-konačnim mjerama μ i ν, respektivno. Neka je f nenegativna funkcija na $X \times Y$ koja je integrabilna s obzirom na mjeru $(\mu \times \nu)$.

Ako je $p \geq 1$, tada

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X f^p(x,y)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y). \tag{1.92}$$

Prethodni rezultat se naziva "neprekidni oblik Minkowskijeve nejednakosti" ili "Minkowskijeva nejednakost za beskonačno mnogo funkcija" te je, npr. možemo naći u [38, str.41]. Iz dokaza ove nejednakosti zaključujemo da postoji vezani rezultat za ostale vrijednosti eksponenta p, (vidjeti [24]).

Ako $0 < p < 1$ i

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x) > 0, \int_Y f(x,y)d\nu(y) > 0, (\mu - g.s.) \tag{1.93}$$

tada vrijedi suprotna nejednakost.

Ako je $p < 0$, ako vrijede pretpostavke (1.93), te dodatna pretpostavka

$$\int_X f^p(x,y)d\mu(x) > 0 \quad (\nu - g.s.) \tag{1.94}$$

tada vrijedi suprotna nejednakost.

U literaturi za sada nije bilo rezultata vezanih uz konverzije prethodnih rezultata. U sljedećem teoremu dajemo konverziju te varijante Minkowskijeve nejednakosti.

Teorem 1.4.8. *(***Konverzni neprekidni oblik Minkowskijeve nejednakosti i poboljšanja***) Neka su (X, Σ_X, μ) i (Y, Σ_Y, ν) dva prostora mjere sa sigma-konačnim mjerama μ i ν, respektivno. Neka je f nenegativna funkcija na $X \times Y$ koja je integrabilna s obzirom na mjeru $(\mu \times \nu)$.*

Ako $0 < m \le \dfrac{f(x,y)}{\int_Y f(x,y)d\nu(y)} \le M$ *za sve* $y \in Y, x \in X$*, tada za* $p \ge 1$

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} &\ge K(p,m,M)\int_Y \left(\int_X f^p(x,y)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y) \\ &+ N(p,m,M)\left[\int_X H^p(x)d\mu(x)\right]^{\frac{1-p}{p}} \Delta_1 \qquad (1.95) \\ &\ge K(p,m,M)\int_Y \left(\int_X f^p(x,y)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y) \qquad (1.96) \end{aligned}$$

gdje je $K(p,m,M)$ *definiran sa (1.78),* $N(p,m,M)$ *definiran sa (1.86),* $H(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ *i*

$$\Delta_1 = \int_Y \left(\int_X \left(\frac{m-M}{2}H^p(x) - |f(x,y)H^{p-1}(x) - \frac{m+M}{2}H^p(x)|\right) d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

Ako je $0 < p < 1$ *uz (1.93) ili* $p < 0$ *uz (1.93) i (1.94), tada vrijedi suprotna nejednakost.*

Dokaz. Označimo

$$H(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(y).$$

Koristeći Fubinijev teorem dobivamo

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x) = \int_X H^p(x)d\mu(x)$$

$$= \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) H^{p-1}(x)d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)H^{p-1}(x)d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

Koristeći (1.81) za funkcional $A(\phi) = \int_X \phi(x)d\mu(x)$ dobivamo

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)H^{p-1}(x)d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

$$\ge K(p,m,M)\int_Y \left(\int_X f^p(x,y)d\mu(x)\right)^{1/p} \left(\int_X H^p(x)d\mu(x)\right)^{\frac{p-1}{p}} d\nu(y) + N(p,m,M)\Delta_1$$

$$\ge K(p,m,M)\int_Y \left(\int_X f^p(x,y)d\mu(x)\right)^{1/p} \left(\int_X H^p(x)d\mu(x)\right)^{\frac{p-1}{p}} d\nu(y)$$

Dijeljenjem sa $\left(\int_X H^p(x)d\mu(x)\right)^{\frac{p-1}{p}}$ dobivamo nejednakosti (1.95) i (1.96). ■

Sada gledamo neke primjene prethodnih rezultata na mješovite sredine.

Neka su r i s dva pozitivna broja, $r < s$. Stavimo $p = \frac{s}{r}$ i $f \to f^r$ u nejednakostima (1.92) i (1.96). Stavimo na potenciju $\frac{1}{r}$ i podijelimo sa $(\mu(X))^{1/s}$ i $(\nu(Y))^{1/r}$. Dobivamo sljedeće rezultate.

$$\left[\frac{\int_X \left(\frac{\int_Y f^r(x,y)d\nu(y)}{\nu(Y)}\right)^{\frac{s}{r}} d\mu(x)}{\mu(X)}\right]^{\frac{1}{s}} \leq \left[\frac{\int_Y \left(\frac{\int_X f^s(x,y)d\mu(x)}{\mu(X)}\right)^{\frac{r}{s}} d\nu(y)}{\nu(Y)}\right]^{\frac{1}{r}}, \tag{1.97}$$

i

$$\left[\frac{\int_X \left(\frac{\int_Y f^r(x,y)d\nu(y)}{\nu(Y)}\right)^{\frac{s}{r}} d\mu(x)}{\mu(X)}\right]^{\frac{1}{s}} \tag{1.98}$$

$$\geq K^{\frac{1}{r}}(\frac{s}{r}, m, M) \left[\frac{\int_Y \left(\frac{\int_X f^s(x,y)d\mu(x)}{\mu(X)}\right)^{\frac{r}{s}} d\nu(y)}{\nu(Y)}\right]^{\frac{1}{r}},$$

gdje su u (1.98) m i M realni brojevi takvi da $0 < m \leq \dfrac{f^r(x,y)}{\int_Y f^r(x,y)d\nu(y)} \leq M$. Koristeći oznaku

$$M^{[r]}(f,\mu) = \begin{cases} \left(\frac{\int_X f^r(x)d\mu(x)}{\mu(X)}\right)^{\frac{1}{r}}; & r \neq 0 \\ \exp\left(\frac{\int_X \log f(x)d\mu(x)}{\mu(X)}\right); & r = 0 \end{cases}$$

u nejednakostima (1.97) i (1.98) dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 1.4.9. *Neka vrijede pretpostavke teorema 1.4.8. Ako $r < s$, $r, s \neq 0$, tada*

$$M^{[s]}\Big(M^{[r]}(f,\nu),\mu\Big) \leq M^{[r]}\Big(M^{[s]}(f,\mu),\nu\Big). \tag{1.99}$$

Ako su m i M realni brojevi takvi da $0 < m \leq \dfrac{f^r(x,y)}{\int_Y f^r(x,y)d\nu(y)} \leq M$, tada

$$M^{[s]}\Big(M^{[r]}(f,\nu),\mu\Big) \geq K^{\frac{1}{r}}(\frac{s}{r}, m, M) \cdot M^{[r]}\Big(M^{[s]}(f,\mu),\nu\Big) \tag{1.100}$$

gdje je K definiran sa (1.78).

Koristeći (1.95) možemo dobiti poboljšanje prethodne mješovite sredine. To su nejednakosti za mješovite sredine, druga je konverzija prve nejednakosti. Diskretna verzija od (1.99) je dana u [51, str.109], dok je njena konverzija novi rezultat.

Korolar 1.4.10. *Neka su $a, b, \alpha, \gamma, r, s \in \mathbb{R}$ takvi da $a < b$, $r < s$, $\alpha, \gamma > 0$, $r, s \neq 0$. Ako je $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nenegativna izmjeriva funkcija, tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\left[\frac{1}{(b-a)^\gamma}\int_a^b (y-a)^{\gamma-1}\left(\frac{1}{(y-a)^\alpha}\int_a^y g^r(t)(t-a)^{\alpha-1}dt\right)^{\frac{s}{r}} dy\right]^{\frac{1}{s}} \tag{1.101}$$

$$\leq \left[\frac{1}{(b-a)^\alpha} \int_a^b (y-a)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{(y-a)^\gamma} \int_a^y g^s(t)(t-a)^{\gamma-1} dt \right)^{\frac{r}{s}} dy \right]^{\frac{1}{r}}.$$

Nadalje, ako su m i M realni brojevi takvi da $x \in [0,1]$, $y \in [a,b]$,

$$0 < m \leq \frac{g^r(a+x(y-a))}{\int_a^b g^r(a+x(y-a))(y-a)^{\alpha-1} dy} \leq M,$$

tada

$$\left[\frac{1}{(b-a)^\gamma} \int_a^b (y-a)^{\gamma-1} \left(\frac{1}{(y-a)^\alpha} \int_a^y g^r(t)(t-a)^{\alpha-1} dt \right)^{\frac{s}{r}} dy \right]^{\frac{1}{s}} \tag{1.102}$$

$$\geq K^{\frac{1}{r}}(\frac{s}{r}, m, M) \cdot \left[\frac{1}{(b-a)^\alpha} \int_a^b (y-a)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{(y-a)^\gamma} \int_a^y g^s(t)(t-a)^{\gamma-1} dt \right)^{\frac{r}{s}} dy \right]^{\frac{1}{r}}.$$

Dokaz. Stavimo u (1.99) sljedeće: $X = [0,1]$, $Y = [a,b]$, $d\mu(x) = x^{\gamma-1}dx$ i $d\nu(y) = (y-a)^{\alpha-1}dy$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x,y) = g(a+x(y-a))$ gdje je g nenegativna izmjeriva funkcija. Tada $\nu(Y) = \frac{1}{\alpha}(b-a)^\alpha$ i $\mu(X) = \frac{1}{\gamma}$.

Nakon supstitucija, nejednakost (1.97) postaje

$$\left[\frac{\gamma \alpha^{s/r}}{(b-a)^{\alpha s/r}} \int_0^1 \left(\int_a^b g^r(a+x(y-a))(y-a)^{\alpha-1} dy \right)^{\frac{s}{r}} x^{\gamma-1} dx \right]^{\frac{1}{s}} \tag{1.103}$$

$$\leq \left[\frac{\gamma^{r/s} \alpha}{(b-a)^\alpha} \int_a^b \left(\int_0^1 g^s(a+x(y-a)) x^{\gamma-1} dx \right)^{\frac{r}{s}} (y-a)^{\alpha-1} dy \right]^{\frac{1}{r}}.$$

Stavimo u desnu stranu nejednakosti novu varijablu $t = a + x(y-a)$, te dobivamo da desna strana ima oblik

$$\left[\frac{\gamma^{r/s} \alpha}{(b-a)^\alpha} \int_a^b \left(\frac{1}{(y-a)^\gamma} \int_a^y g^s(t)(t-a)^{\gamma-1} dt \right)^{\frac{r}{s}} (y-a)^{\alpha-1} dy \right]^{\frac{1}{r}}. \tag{1.104}$$

Jednaku supstituciju napravimo na lijevoj strani od (1.103) i dobivamo da je lijeva strana jednaka

$$\left[\frac{\gamma \alpha^{s/r}}{(b-a)^{\alpha s/r}} \int_0^1 x^{\gamma-1} \left(\frac{1}{x^\alpha} \int_a^{a+x(b-a)} g^r(t)(t-a)^{\alpha-1} dt \right)^{\frac{s}{r}} dx \right]^{\frac{1}{s}}.$$

Promjenom varijable $y = a + x(b-a)$ u vanjskom integralu dobivamo da je jednako

$$\left[\frac{\gamma \alpha^{s/r}}{(b-a)^{\alpha s/r}} \int_a^b \frac{(y-a)^{\gamma-1}}{(b-a)^{\gamma-1}} \left(\frac{(b-a)^\alpha}{(y-a)^\alpha} \int_a^y g^r(t)(t-a)^{\alpha-1} dt \right)^{\frac{s}{r}} \frac{dy}{b-a} \right]^{\frac{1}{s}}.$$

Napokon, dobivamo

$$\left[\frac{1}{(b-a)^\gamma}\int_a^b (y-a)^{\gamma-1}\left(\frac{1}{(y-a)^\alpha}\int_a^y g^r(t)(t-a)^{\alpha-1}dt\right)^{\frac{s}{r}} dy\right]^{\frac{1}{s}} \tag{1.105}$$

$$\leq \left[\frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b (y-a)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{(y-a)^\gamma}\int_a^y g^s(t)(t-a)^{\gamma-1}dt\right)^{\frac{r}{s}} dy\right]^{\frac{1}{r}},$$

gdje $\alpha, \gamma > 0$, $r < s$, $r, s \neq 0$. Iz (1.98) jednakim supstitucijama dobijamo konverziju od (1.101). ■

Spomenimo da je nejednakost (1.101) prvo dana u [13, Teorem 3] i koristila se u dokazu Hardyjeve nejednakosti. Također, prethodne nejednakosti za mješovite sredine možemo poboljšati kao i nejednakosti otprije.

Poglavlje 2.

Varijante Jensenove nejednakosti

U ovom poglavlju poboljšavamo dvije varijante Jensenove nejednakosti, Jessen-Mercerovu nejednakost i Jensenovu operatorsku nejednakost. Koristeći dobivene rezultate za Jessen-Mercerovu nejednakost kreiramo dva funkcionala (Jessen-Mercerove razlike) za koja dokazujemo dva teorema srednje vrijednosti Cauchyevog tipa, te uspostavljamo način dobivanja n-eksponencijalno konveksnih i eksponencijalno konveksnih funkcija. Iz rezultata za Jensenovu operatorsku nejednakost dobivamo razne rezultate vezane uz kvaziaritmetičku sredinu, te kao posljedicu neke rezultate vezane uz operatorsku potencijalnu sredinu.

2.1. Jessen-Mercerova nejednakost

Prvo dajemo Jensenov osnovni rezultat.

Teorem 2.1.1. (Jensenova nejednakost) *Neka je I interval u $\mathbb{R}$, funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ konveksna na I, neka je za $n \in \mathbb{N}, \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ pozitivna realna n-torka, te neka je $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$. Tada za svako $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ vrijedi nejednakost*

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i). \tag{2.1}$$

Ako je f strogo konveksna, nejednakost (2.1) *je stroga osim ako $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Ako je f konkavna funkcija, u* (2.1) *vrijedi suprotna nejednakost.*

Usko povezana uz Jensenovu nejednakost je obrnuta Jensenova nejednakost.

Teorem 2.1.2. (Obrnuta Jensenova nejednakost) *Neka je $\boldsymbol{p}$ realna n-torka takva da $\alpha_1 > 0, \alpha_i \leq 0 (i = 2, \ldots, n), S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 0$. Neka je U konveksan skup u realnom vektorskom prostoru M, $x_i \in U (i = 1, \ldots, n)$ i $\frac{1}{S_n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in U$. Ako je $f\colon U \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada vrijedi*

$$f\left(\frac{1}{S_n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \geq \frac{1}{S_n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f\left(x_i\right). \tag{2.2}$$

Godine 2003. u radu [43] A. McD. Mercer je dokazao sljedeću varijantu Jensenove nejednakosti (primijetimo da se u rezultatu sada pojavljuju i rubne točke).

Teorem 2.1.3. (Jensen-Mercerova nejednakost) *Neka je $[a,b]$ interval u $\mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [a,b]^n$ i neka je $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ nenegativna realna n-torka takva da je $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$. Ako je $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada vrijedi*

$$\varphi\left(a+b-\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \varphi(a)+\varphi(b)-\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(x_i). \tag{2.3}$$

Sljedeći rezultat u radu [12] je varijanta Jessenove nejednakosti Mercerovog tipa.

Teorem 2.1.4. (Jessen-Mercer) *Neka L zadovoljava $(L1)$ i $(L2)$ na nepraznom skupu E i neka je A pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Ako je φ neprekidna konveksna funkcija na $[m,M]$, tada za svaki $f \in L$ takav da je $\varphi(f), \varphi(m+M-f) \in L$ (tako da vrijedi $m \leq f(t) \leq M$ za svaki $t \in E$), vrijedi*

$$\varphi(m+M-A(f)) \leq \varphi(m)+\varphi(M)-A(\varphi(f)). \tag{2.4}$$

Primjedba 2.1.5. *Štoviše, u istom radu je dokazan sljedeći niz nejednakosti*

$$\begin{aligned}
&\varphi(m+M-A(f)) \\
&\leq A(\varphi(m+M-f)) \\
&\leq \frac{M-A(f)}{M-m}\varphi(M)+\frac{A(f)-m}{M-m}\varphi(m) \\
&\leq \varphi(m)+\varphi(M)-A(\varphi(f)).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Ako je funkcija φ konkavna, nejednakosti (2.4) *i* (2.5) *su suprotne.*

U radu [35] je dobiveno sljedeće poboljšanje teorema 1.1.4..

Teorem 2.1.6. *Neka L zadovoljava $(L1)$, $(L2)$ i $(L3)$ na nepraznom skupu E i neka je A pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Ako je φ konveksna funkcija na $[m,M]$, onda za svaki $g \in L$ takav da je $\varphi(g) \in L$ vrijedi $A(g) \in [m,M]$ i*

$$A(\varphi(g)) \leq \frac{M-A(g)}{M-m}\varphi(m)+\frac{A(g)-m}{M-m}\varphi(M)-A(\tilde{g})\,\delta_\varphi, \tag{2.6}$$

gdje je

$$\tilde{g}=\frac{1}{2}-\frac{1}{M-m}\left|g-\frac{m+M}{2}\right|, \qquad \delta_\varphi=\varphi(m)+\varphi(M)-2\varphi\left(\frac{m+M}{2}\right).$$

Koristeći nejednakost (2.6) i lemu 1.1.16. poboljšat ćemo niz nejednakosti (2.5). Sljedeća dva teorema su glavni rezultati u radu [41].

Teorem 2.1.7. *Neka L zadovoljava (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E i neka je A pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Ako je φ neprekidna konveksna funkcija na $[m, M]$, tada za svaki $f \in L$ takav da je $\varphi(f), \varphi(m+M-f) \in L$, vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\varphi(m+M-A(f)) \\
&\leq A(\varphi(m+M-f)) \\
&\leq \frac{M-A(f)}{M-m}\varphi(M) + \frac{A(f)-m}{M-m}\varphi(m) - A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{M-m}\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_\varphi \\
&\leq \varphi(m) + \varphi(M) - A(\varphi(f)) - \left[1 - \frac{2}{M-m}A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right)\right]\delta_\varphi \\
&\leq \varphi(m) + \varphi(M) - A(\varphi(f)),
\end{aligned}$$

gdje je

$$\delta_\varphi = \varphi(M) + \varphi(m) - 2\varphi\left(\frac{M+m}{2}\right). \tag{2.7}$$

Dokaz. *Primijenimo li prvu nejednakost iz niza (2.5) i nejednakost (2.6) prvo na funkciju $g = m+M-f$, a zatim na funkciju f, dobivamo*

$$\begin{aligned}
&\varphi(m+M-A(f)) \\
&\leq A(\varphi(m+M-f)) \\
&\leq \frac{M-A(f)}{M-m}\varphi(M) + \frac{A(f)-m}{M-m}\varphi(m) - A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{M-m}\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_\varphi \\
&= \varphi(m) + \varphi(M) - \left[\frac{M-A(f)}{M-m}\varphi(m) + \frac{A(f)-m}{M-m}\varphi(M)\right] \\
&- A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{M-m}\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_\varphi \\
&\leq \varphi(m) + \varphi(M) - A(\varphi(f)) - 2A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{M-m}\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_\varphi \\
&= \varphi(m) + \varphi(M) - A(\varphi(f)) - \left[1 - \frac{2}{M-m}A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right)\right]\delta_\varphi, \\
&\leq \varphi(m) + \varphi(M) - A(\varphi(f)).
\end{aligned}$$

Zadnja nejednakost je jednostavna posljedica činjenica $\delta_\varphi = \varphi(M) + \varphi(m) - 2\varphi\left(\frac{M+m}{2}\right) \geq 0$ *i* $1 - \frac{2}{M-m}A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right) \geq 0$. ■

Teorem 2.1.8. *Neka L zadovoljava (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E i neka je A pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Ako je φ neprekidna konveksna funkcija na $[m, M]$, tada za svaki $f \in L$ takav da je $\varphi(f), \varphi(m+M-f) \in L$,* *vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&\varphi\left(m+M-A\left(f\right)\right)\\
&\leq \frac{M-A\left(f\right)}{M-m}\varphi\left(M\right)+\frac{A\left(f\right)-m}{M-m}\varphi\left(m\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{M-m}\left|A\left(f\right)-\frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_{\varphi}\\
&\leq \varphi\left(m\right)+\varphi\left(M\right)-A\left(\varphi(f)\right)-\left[1-\frac{1}{M-m}\left(A\left(\left|f-\frac{m+M}{2}\right|\right)+\left|A\left(f\right)-\frac{m+M}{2}\right|\right)\right]\delta_{\varphi}\\
&\leq \varphi\left(m\right)+\varphi\left(M\right)-A\left(\varphi(f)\right)-\left[1-\frac{2}{M-m}A\left(\left|f-\frac{m+M}{2}\right|\right)\right]\delta_{\varphi}\\
&\leq \varphi\left(m\right)+\varphi\left(M\right)-A\left(\varphi\left(f\right)\right),
\end{aligned}
$$

gdje je δ_{φ} definiran kao u (2.7).

Dokaz. *Teorem 2.1.6. za funkciju f daje nam*

$$
A\left(\varphi(f)\right)\leq \frac{M-A\left(f\right)}{M-m}\varphi\left(m\right)+\frac{A\left(f\right)-m}{M-m}\varphi\left(M\right)-A\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{M-m}\left|f-\frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_{\varphi}. \tag{2.8}
$$

Definirajmo funkcije $p,q\colon[m,M]\to\mathbb{R}$ sa

$$
p\left(t\right)=\frac{M-t}{M-m},\qquad q\left(t\right)=\frac{t-m}{M-m}.
$$

Za svaki $t\in[m,M]$ možemo pisati

$$
\varphi(t)=\varphi(\frac{M-t}{M-m}m+\frac{t-m}{M-m}M)=\varphi(p\left(t\right)m+q\left(t\right)M).
$$

Po lemi 1.1.16. za $n=2$ slijedi

$$
\varphi(t)\leq p\left(t\right)\varphi\left(m\right)+q\left(t\right)\varphi\left(M\right)-\min\left\{p\left(t\right),q\left(t\right)\right\}\delta_{\varphi},
$$

gdje je $\delta_{\varphi}=\varphi\left(M\right)+\varphi\left(m\right)-2\varphi\left(\frac{M+m}{2}\right)$. Koristeći (1.3) pišemo to u obliku

$$
\varphi(t)\leq \frac{M-t}{M-m}\varphi\left(m\right)+\frac{t-m}{M-m}\varphi\left(M\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{M-m}\left|t-\frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_{\varphi}.
$$

Supstitucijom $t\leftrightarrow A\left(g\right)$, gdje je $g\in L$ takav da $A(g)\in\langle m,M\rangle$, dobivamo

$$
\varphi(A\left(g\right))\leq \frac{M-A\left(g\right)}{M-m}\varphi\left(m\right)+\frac{A\left(g\right)-m}{M-m}\varphi\left(M\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{M-m}\left|A\left(g\right)-\frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_{\varphi}. \tag{2.9}
$$

Sada primijenimo nejednakost (2.9) na $g=m+M-f$ (te koristimo linearnost i *normaliziranost od A), a zatim nejednakost (2.8), i dobivamo*

$$
\begin{aligned}
&\varphi(m+M-A(f)) \\
&\leq \frac{M-A(f)}{M-m}\varphi(M) + \frac{A(f)-m}{M-m}\varphi(m) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{M-m}\left|A(f) - \frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_\varphi \\
&= \varphi(m) + \varphi(M) - \left[\frac{M-A(f)}{M-m}\varphi(m) + \frac{A(f)-m}{M-m}\varphi(M)\right] \\
&- \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{M-m}\left|A(f) - \frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_\varphi \\
&\leq \varphi(m) + \varphi(M) - A(\varphi(f)) \\
&- A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{M-m}\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_\varphi - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{M-m}\left|A(f) - \frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_\varphi \\
&= \varphi(m) + \varphi(M) \\
&- A(\varphi(f)) - \left[1 - \frac{1}{M-m}\left(A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right) + \left|A(f) - \frac{m+M}{2}\right|\right)\right]\delta_\varphi \\
&\leq \varphi(m) + \varphi(M) - A(\varphi(f)) - \left[1 - \frac{2}{M-m}A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right)\right]\delta_\varphi.
\end{aligned}
$$

Zadnju nejednakost dobivamo koristeći Jessenovu nejednakost na neprekidnu i konveksnu funkciju $|x|$:

$$\left|A(f) - \frac{m+M}{2}\right| = \left|A\left(f - \frac{m+M}{2}\right)\right| \leq A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right).$$

■

Koristeći teorem 2.1.8. dobivamo gornju ogradu za razliku $A(\varphi(f)) - \varphi(A(f))$ dobivenu u radu [67].

Korolar 2.1.9. *Neka L zadovoljava $(L1)$, $(L2)$ i $(L3)$ na nepraznom skupu E i neka je A pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Ako je φ neprekidna konveksna funkcija na $[m, M]$, tada za svaki $f \in L$ takav da je $\varphi(f), \varphi(m+M-f) \in L$, vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&A(\varphi(f)) - \varphi(A(f)) \\
&\leq \frac{1}{M-m}\left(A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right) + \left|\frac{m+M}{2} - A(f)\right|\right)\delta_\varphi,
\end{aligned}
$$

gdje je δ_φ definiran kao u (2.7).
Dokaz. *Teorem 2.1.8. daje*

$$
\begin{aligned}
A(\varphi(f)) &\leq \varphi(m) + \varphi(M) - \varphi(m+M-A(f)) \\
&- \left[1 - \frac{1}{M-m}\left(A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right) + \left|\frac{m+M}{2} - A(f)\right|\right)\right]\delta_\varphi. \quad (2.10)
\end{aligned}
$$

Kako je funkcija φ konveksna, slijedi

$$\varphi(m+M-A(f)) + \varphi(A(f)) \geq 2\varphi\left(\frac{M+m}{2}\right). \quad (2.11)$$

Koristeći nejednakosti (2.10) *i* (2.11) *dobivamo*

$$\begin{aligned}
&A(\varphi(f)) - \varphi(A(f)) \\
&\leq \varphi(m) + \varphi(M) - [\varphi(m + M - A(f)) + \varphi(A(f))] \\
&- \left[1 - \frac{1}{M-m}\left(A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right) + \left|\frac{m+M}{2} - A(f)\right|\right)\right]\delta_\varphi \\
&\leq \varphi(m) + \varphi(M) - 2\varphi\left(\frac{M+m}{2}\right) \\
&- \left[1 - \frac{1}{M-m}\left(A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right) + \left|\frac{m+M}{2} - A(f)\right|\right)\right]\delta_\varphi \\
&= \frac{1}{M-m}\left(A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right) + \left|\frac{m+M}{2} - A(f)\right|\right)\delta_\varphi.
\end{aligned}$$

■

U istom radu [41] dajemo generalizaciju Jessen-Mercerove nejednakosti za konveksne funkcije na konveksnim ljuskama.
Sljedeću varijantu Jensenove nejednakosti su dokazali A. Matković i J. Pečarić u radu [40].

Teorem 2.1.10. *Neka je U konveksan podskup u $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in U$ i $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m \in co(\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\})$. Ako je f konveksna funkcija na U, onda*

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^m w_j \mathbf{y}_j}{P_n - W_m}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i f(\mathbf{x}_i) - \sum_{j=1}^m w_j f(\mathbf{y}_j)}{P_n - W_m} \tag{2.12}$$

vrijedi za sve pozitivne realne brojeve $p_1, \ldots, p_n$ i $w_1, \ldots, w_m$ koji zadovoljavaju uvjet

$$p_i \geq W_m \text{ za svaki } i = 1, \ldots, n,$$

gdje su $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$ i $W_m = \sum_{j=1}^m w_j$.

Sljedeći teorem generalizira i poboljšava teorem 2.1.10.

Teorem 2.1.11. *Neka L zadovoljava svojstva (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E, A je pozitivan linearan funkcional na L i $\widetilde{A}$ definiran kao u (1.29). Neka su $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^k$ i $K = co(\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\})$. Neka je f konveksna funkcija na K i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ baricentričke koordinate nad K. Tada za svaki $\mathbf{g} \in L^k$ takav da je $\mathbf{g}(E) \subset K$ i $f(\mathbf{g}), \lambda_i(\mathbf{g}) \in L, i = 1, \ldots, n$ i pozitivne realne brojeve $p_1, \ldots, p_n$ takve da $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$, i koji zadovoljavaju uvjet*

$$p_i \geq A(\mathbf{1}) \text{ za svaki } i = 1, \ldots, n, \tag{2.13}$$

imamo

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i \boldsymbol{x}_i - \widetilde{A}(\boldsymbol{g})}{P_n - A(\mathbf{1})}\right) \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i f(\boldsymbol{x}_i) - \sum_{i=1}^n A(\lambda_i(\boldsymbol{g})) f(\boldsymbol{x}_i) - \min\{p_i - A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\} S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)}{P_n - A(\mathbf{1})} \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i f(\boldsymbol{x}_i) - A(f(\boldsymbol{g})) - S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)[\min\{p_i - A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\} + A(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\})]}{P_n - A(\mathbf{1})}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Dokaz. Za svaki $t \in E$ znamo $\boldsymbol{g}(t) \in K$. Koristeći baricentričke koordinate imamo $\lambda_i(\mathbf{g}(t)) \geq 0, i = 1, \ldots, n,$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{g}(t)) = 1$ i

$$\boldsymbol{g}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\boldsymbol{x}_i.$$

Kako je f konveksna na K, imamo

$$f(\boldsymbol{g}(t)) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{g}(t)) f(\boldsymbol{x}_i) - \min\{\lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\} S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n). \tag{2.15}$$

Primijenimo pozitivan linearan funkcional A na (2.15) i dobivamo

$$A(f(\boldsymbol{g})) \leq \sum_{i=1}^{n} A(\lambda_i(\boldsymbol{g})) f(\boldsymbol{x}_i) - A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\}\right) S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n),$$

gdje je

$$\sum_{i=1}^{n} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{g})\right) = A(\mathbf{1})$$

i

$$A(\mathbf{1}) \geq A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) \geq 0 \text{ za svaki } i = 1, \ldots, n.$$

Također imamo

$$\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right) = \sum_{i=1}^{n} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) \boldsymbol{x}_i.$$

Sada možemo zapisati

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \boldsymbol{x}_i - \widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right)}{P_n - A\left(\mathbf{1}\right)} &= \frac{1}{P_n - A\left(\mathbf{1}\right)} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \boldsymbol{x}_i - \sum_{i=1}^{n} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) \boldsymbol{x}_i\right) \\
&= \frac{1}{P_n - A\left(\mathbf{1}\right)} \sum_{i=1}^{n} \left(p_i - A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)\right) \boldsymbol{x}_i.
\end{aligned}$$

Znamo

$$\frac{1}{P_n - A\left(\mathbf{1}\right)} \sum_{i=1}^{n} \left(p_i - A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)\right) = 1$$

i

$$\frac{1}{P_n - A\left(\mathbf{1}\right)} \left(p_i - A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)\right) \geq 0 \text{ za svaki } i = 1, \ldots, n,$$

jer je

$$p_i \geq A(\mathbf{1}) \geq A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) \text{ za svaki } i = 1, \ldots, n.$$

Stoga je izraz $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i \boldsymbol{x}_i - \widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right)}{P_n - A\left(\mathbf{1}\right)}$ konveksna kombinacija vektora $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ i pripada u K.

Kako je f konveksna na K, imamo

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \boldsymbol{x}_i - \widetilde{A}(g)}{P_n - A(\mathbf{1})}\right) &= f\left(\frac{1}{P_n - A(\mathbf{1})}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i - A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)\right)\boldsymbol{x}_i\right) \\
&\leq \frac{1}{P_n - A(\mathbf{1})}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i - A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)\right) f\left(\boldsymbol{x}_i\right) - \min\left\{\frac{p_i - A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))}{P_n - A(\mathbf{1})}\right\} S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f\left(\boldsymbol{x}_i\right) - \sum_{i=1}^{n} A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right) f\left(\boldsymbol{x}_i\right) - \min\left\{p_i - A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\right\} S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)}{P_n - A(\mathbf{1})} \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f\left(\boldsymbol{x}_i\right) - A(f(\boldsymbol{g})) - S_f^n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)\left[\min\left\{p_i - A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\right\} + A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right)\right]}{P_n - A(\mathbf{1})}.
\end{aligned}
$$

■

Idući korolar pokazuje da je teorem 2.1.11. generalizacija teorema 2.1.8. na konveksne ljuske.

Korolar 2.1.12. *Neka L zadovoljava (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E i A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Neka je φ konveksna funkcija na intervalu $I = [m, M] \subset \mathbb{R}(-\infty < m < M < \infty)$. Tada za svaki $g \in L$ takav da je $g(E) \subset I$ i $\varphi(g) \in L$, imamo*

$$
\begin{aligned}
&\varphi\left(m + M - A(g)\right) \\
&\quad \leq \frac{A(g) - m}{M - m}\varphi(m) + \frac{M - A(g)}{M - m}\varphi(M) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{M - m}\left|A(g) - \frac{m + M}{2}\right|\right) S_\varphi^2(m, M) \\
&\quad \leq \varphi(m) + \varphi(M) - A(\varphi(g)) \\
&\quad - \left[1 - \frac{1}{M - m}\left(\left|A(g) - \frac{m + M}{2}\right| + A\left(\left|g - \frac{m + M}{2}\right|\right)\right)\right] S_\varphi^2(m, M).
\end{aligned}
$$

Dokaz. Za svaki $t \in E$ imamo $g(t) \in I = [m, M]$.
Kako je interval $I = [m, M]$ 1-simpleks sa vrhovima m i M, tako baricentričke koordinate imaju specijalan oblik:

$$
\lambda_1(g(t)) = \frac{M - g(t)}{M - m} \text{ i } \lambda_2(g(t)) = \frac{g(t) - m}{M - m}.
$$

Primijenimo funkcional A i imamo

$$
A(\lambda_1(g)) = \frac{M - A(g)}{M - m} \text{ i } A(\lambda_2(g)) = \frac{A(g) - m}{M - m}. \tag{2.16}
$$

Stavimo $n = 2, p_1 = p_2 = 1, x_1 = m, x_2 = M$ u (2.14) i dobijemo

$$\begin{aligned}
\varphi\left(m+M-A(g)\right) &\leq \varphi(m)+\varphi(M)-\left[\frac{M-A(g)}{M-m}\varphi(m)+\frac{A(g)-m}{M-m}\varphi(M)\right] \\
&-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{M-m}\left|A(g)-\frac{m+M}{2}\right|\right)\left[\varphi(m)+\varphi(M)-2\varphi(\frac{m+M}{2}\right] \\
&=\frac{A(g)-m}{M-m}\varphi(m)+\frac{M-A(g)}{M-m}\varphi(M) \\
&-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{M-m}\left|A(g)-\frac{m+M}{2}\right|\right)S_{\varphi}^{2}(m,M) \\
&\leq \varphi(m)+\varphi(M)-A(\varphi(g)) \\
&-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{M-m}\left|A(g)-\frac{m+M}{2}\right|+A\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{M-m}\left|g-\frac{m+M}{2}\right|\right)\right]S_{\varphi}^{2}(m,M) \\
&=\varphi(m)+\varphi(M)-A(\varphi(g)) \\
&-\left[1-\frac{1}{M-m}\left(\left|A(g)-\frac{m+M}{2}\right|+A\left(\left|g-\frac{m+M}{2}\right|\right)\right)\right]S_{\varphi}^{2}(m,M).
\end{aligned}$$

■

Primjedba 2.1.13. *Nejednakosti u* (2.16) *su također poboljšanja nejednakosti dobivenih u radu [12].*

Teorem 2.1.14. *Neka L zadovoljava* (L1), (L2) *i* (L3) *na nepraznom skupu E, A je pozitivan linearan funkcional na L i $\widetilde{A}$ definiran kao u (1.29). Neka $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^k$ i $K = co(\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\})$. Neka je f konveksna funkcija na K i $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ baricentričke koordinate nad K. Tada za svaki $\boldsymbol{g} \in L^k$ takav da je $\boldsymbol{g}(E) \subset K$ i $f(\boldsymbol{g}),\lambda_i(\boldsymbol{g}) \in L, i = 1,\ldots,n$ i pozitivne realne brojeve $p_1,\ldots,p_n$ koji zadovoljavaju uvjete $P_n - A(1) > 0$, gdje je $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$, i*

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i - \widetilde{A}(g)}{P_n - A(1)} \in K, \tag{2.17}$$

imamo

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i\boldsymbol{x}_i-\widetilde{A}(\boldsymbol{g})}{P_n-A(\mathbf{1})}\right) &\geq \frac{P_n f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i\boldsymbol{x}_i\right)-A(\mathbf{1})f\left(\frac{1}{A(\mathbf{1})}\widetilde{A}(\boldsymbol{g})\right)}{P_n-A(\mathbf{1})} \\
&\geq \frac{P_n f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i\boldsymbol{x}_i\right)-\sum_{i=1}^n A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))f(\boldsymbol{x}_i)+\min\{A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\}S_f^n(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)}{P_n-A(\mathbf{1})}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Dokaz. Za svaki $t \in E$ imamo $\boldsymbol{g}(t) \in K$. Koristeći baricentričke koordinate imamo $\lambda_i(\boldsymbol{g}(t)) \geq 0, i = 1,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i(\boldsymbol{g}(t)) = 1$ i

$$\boldsymbol{g}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\boldsymbol{g}(t))\boldsymbol{x}_i.$$

Također vrijedi

$$\widetilde{A}(\boldsymbol{g}) = \sum_{i=1}^n A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\boldsymbol{x}_i.$$

Lagano se vidi

$$\frac{1}{A(\mathbf{1})}\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right)=\frac{1}{A(\mathbf{1})}\sum_{i=1}^{n}A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)\boldsymbol{x}_i\in K,$$

jer je

$$\frac{1}{A(\mathbf{1})}\sum_{i=1}^{n}A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)=1 \text{ i } \frac{1}{A(\mathbf{1})}A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)\geq 0, i=1,\ldots,n.$$

Kako je f konveksna na K, koristeći lemu 1.1.16. dobivamo

$$f\left(\frac{1}{A(\mathbf{1})}\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right)\right)\leq\frac{1}{A(\mathbf{1})}\sum_{i=1}^{n}A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)f(\boldsymbol{x}_i)-\min\left\{\frac{A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))}{A(\mathbf{1})}\right\}S_f^n(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n). \tag{2.19}$$

Koristimo prvo obrnutu Jensenovu nejednakost (2.2), a zatim (2.19), te dobivamo

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{P_n\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i\boldsymbol{x}_i\right)-A(\mathbf{1})\left(\frac{1}{A(\mathbf{1})}\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right)\right)}{P_n-A\left(\mathbf{1}\right)}\right)\geq\frac{P_nf\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i\boldsymbol{x}_i\right)-A(\mathbf{1})f\left(\frac{1}{A(\mathbf{1})}\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right)\right)}{P_n-A\left(\mathbf{1}\right)}\\
&\geq\frac{P_nf\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i\boldsymbol{x}_i\right)-A(\mathbf{1})\frac{1}{A(\mathbf{1})}\sum_{i=1}^n A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)f\left(\boldsymbol{x}_i\right)+\min\left\{A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\right\}S_f^n(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)}{P_n-A\left(\mathbf{1}\right)}.
\end{aligned}$$

■

Primjedba 2.1.15. *Ako pozitivni realni brojevi $p_1,\ldots,p_n$ zadovoljavaju uvjet* (2.13), *tada je zadovoljen i uvjet* (2.17), *jer je K konveksan skup. Tada* (2.14) *možemo proširiti na sljedeći način*

$$\begin{aligned}
&\frac{P_nf\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i\boldsymbol{x}_i\right)-\sum_{i=1}^n A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)f\left(\boldsymbol{x}_i\right)+\min\left\{A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\right\}S_f^n(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)}{P_n-A\left(\mathbf{1}\right)}\\
&\leq\frac{P_nf\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i\boldsymbol{x}_i\right)-A(\mathbf{1})f\left(\frac{1}{A(\mathbf{1})}\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right)\right)}{P_n-A\left(\mathbf{1}\right)}\\
&\leq f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i\boldsymbol{x}_i-\widetilde{A}\left(\boldsymbol{g}\right)}{P_n-A\left(\mathbf{1}\right)}\right)\\
&\leq\frac{\sum_{i=1}^n p_if\left(\boldsymbol{x}_i\right)-\sum_{i=1}^n A\left(\lambda_i(\boldsymbol{g})\right)f\left(\boldsymbol{x}_i\right)-\min\left\{p_i-A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\right\}S_f^n(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)}{P_n-A\left(\mathbf{1}\right)}\\
&\leq\frac{\sum_{i=1}^n p_if\left(\boldsymbol{x}_i\right)-A(f(\boldsymbol{g}))-S_f^n(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)\left[\min\left\{p_i-A(\lambda_i(\boldsymbol{g}))\right\}+A\left(\min\left\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\right\}\right)\right]}{P_n-A\left(\mathbf{1}\right)}.
\end{aligned}$$

Korolar 2.1.16. *Neka L zadovoljava* (L1), (L2) *i* (L3) *na nepraznom skupu E i A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Neka je φ konveksna funkcija na intervalu $I=[m,M]\subset\mathbb{R}(-\infty<m<M<\infty)$. Tada za svaki $g\in L$ takav da je $g(E)\subset I$ i $\varphi(g)\in L$, vrijedi*

$$\begin{aligned}
\varphi\left(m+M-A(g)\right)&\geq 2\varphi\left(\frac{m+M}{2}\right)-\varphi\left(A(g)\right)\\
&\geq 2\varphi\left(\frac{m+M}{2}\right)-\left[\frac{M-A(g)}{M-m}\varphi(m)+\frac{A(g)-m}{M-m}\varphi(M)\right]\\
&\quad+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{M-m}\left|A(g)-\frac{m+M}{2}\right|\right)S_\varphi^2(m,M).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Dokaz. Stavimo $n = 2$, $x_1 = m$, $x_2 = M$, $p_1 = p_2 = 1$ i koristimo (2.16). Nejednakosti u (2.20) lagano slijede iz (2.18). ∎

Sljedeći rezultat daje generalizacije korolara 2.1.12. i 2.1.16. za konveksne funkcije definirane na k-simpleksima u $\mathbb{R}^k$.

Korolar 2.1.17. *Neka L zadovoljava svojstva (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E, A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L i $\widetilde{A}$ definiran kao u (1.29). Neka je f konveksna funkcija na k-simpleksu $S = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1}]$ u $\mathbb{R}^k$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ baricentričke koordinate nad S. Tada za svaki $\boldsymbol{g} \in L^k$ takav da je $\boldsymbol{g}(E) \subset S$ i $f(\boldsymbol{g}) \in L$, vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\frac{(k+1)f\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\boldsymbol{v}_i\right) - \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))f(\boldsymbol{v}_i) + \min\left\{\lambda_i(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right\} S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1})}{k} \\
&\quad\le \frac{(k+1)f\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\boldsymbol{v}_i\right) - f(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))}{k} \\
&\quad\le f\left(\frac{\sum_{i=1}^{k+1}\boldsymbol{v}_i - \widetilde{A}(\boldsymbol{g})}{k}\right) \\
&\quad\le \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f(\boldsymbol{v}_i) - \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))f(\boldsymbol{v}_i) - \min\left\{1 - \lambda_i(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right\} S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1})}{k} \\
&\quad\le \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f(\boldsymbol{v}_i) - A(f(\boldsymbol{g})) - S_f^{k+1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1})\left[\min\left\{1 - \lambda_i(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))\right\} + A\left(\min\{\lambda_i(\boldsymbol{g})\}\right)\right]}{k}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Dokaz. Kako su baricentričke koordinate $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ nad k-simpleksom S u $\mathbb{R}^k$ nenegativni linearni polinomi, vrijedi $A(\lambda_i(\boldsymbol{g})) = \lambda_i(\widetilde{A}(\boldsymbol{g}))$ za svaki $i = 1, \ldots, k+1$. Stavimo $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{v}_i$ za svaki $i = 1, \ldots, k+1$ i $p_1 = p_2 = \cdots = p_{k+1} = 1$, pa nejednakosti u (2.21) lagano slijede iz (2.14) i (2.18). ∎

Primjedba 2.1.18. *Ako ponovimo postupak iz primjedbe 1.2.25. na zadnju nejednakost u (2.21), dobit ćemo k-dimenzionalnu varijantu Hammer-Bullenove nejednakosti*

$$\frac{1}{|S|}\int_S f(t)dt - f(\boldsymbol{v}^*) \le \frac{k}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} f(\boldsymbol{v}_i) - \frac{k}{|S|}\int_S f(t)dt$$

to jest nejednakost (1.56).

2.1.1. Jessen-Mercerove razlike

Motivirani teoremima 2.1.7. i 2.1.8., definiramo dva funkcionala $\Phi_i \colon L_f \to \mathbb{R}, i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\varphi) &= \varphi(m) + \varphi(M) - \varphi(m + M - A(f)) - A(\varphi(f)) \\
&\quad - \left[1 - \frac{2}{M-m}A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right)\right]\delta_\varphi
\end{aligned} \tag{2.22}$$

i

$$\Phi_2(\varphi) = \varphi(m) + \varphi(M) - \varphi(m + M - A(f)) - A(\varphi(f)) \\ - \left[1 - \frac{1}{M-m}\left(A\left(\left|f - \frac{m+M}{2}\right|\right) + \left|\frac{m+M}{2} - A(f)\right|\right)\right]\delta_\varphi, \quad (2.23)$$

gdje su A, f i δ_φ kao u teoremu 2.1.7., $L_f = \{\varphi\colon I \to \mathbb{R}\colon \varphi(f), \varphi(m+M-f) \in L\}$, $[m, M] \subseteq I$. Očito, Φ_1 i Φ_2 su linearni.
Ako je φ još i neprekidna i konveksna, tada teoremi 2.1.7. i 2.1.8. impliciraju $\Phi_i(f) \geq 0, i = 1, 2$.
U nastavku sa φ_0 označavamo funkciju definiranu sa $\varphi_0(x) = x^2$ na domeni koja nam treba.
Sada dajemo dva teorema srednje vrijednosti Cauchyevog tipa za funkcionale Φ_i, $i = 1, 2$.

Teorem 2.1.19. *Neka L zadovoljava svojstva (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E i A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Neka je $f \in L$ takva da $\varphi_0 \in L_f, f(E) \in [m, M], [m, M] \subseteq I$ i neka je $\varphi \in C^2(I)$ takva da $\varphi \in L_f$. Ako su Φ_1 i Φ_2 linearni funkcionali definirani kao u (2.22) i (2.23), tada postoje $\xi_i \in [m, M], i = 1, 2$ takvi da*

$$\Phi_i(\varphi) = \frac{\varphi''(\xi_i)}{2}\Phi_i(\varphi_0), \quad i = 1, 2.$$

Dokaz. Dat ćemo dokaz za funkcional Φ_1. Kako je $\varphi \in C^2(I)$, postoje realni brojevi $a = \min_{x\in[m,M]} \varphi''(x)$ i $b = \max_{x\in[m,M]} \varphi''(x)$. Lagano se vidi da su funkcije φ_1 i φ_2, definirane sa

$$\varphi_1(x) = \frac{b}{2}x^2 - \varphi(x), \quad \varphi_2(x) = f(x) - \frac{a}{2}x^2$$

neprekidne i konveksne, stoga $\Phi_1(\varphi_1) \geq 0, \Phi_1(\varphi_2) \geq 0$. To daje

$$\frac{a}{2}\Phi_1(\varphi_0) \leq \Phi_1(\varphi) \leq \frac{b}{2}\Phi_1(\varphi_0).$$

Ako je $\Phi_1(\varphi_0) = 0$, nemamo ništa za dokazati. Pretpostavimo $\Phi_1(\varphi_0) > 0$. Imamo

$$a \leq \frac{2\Phi_1(\varphi)}{\Phi_1(\varphi_0)} \leq b.$$

Dakle, postoji $\xi_1 \in [m, M]$ takav da

$$\Phi_1(\varphi) = \frac{\varphi''(\xi_1)}{2}\Phi_1(\varphi_0).$$

■

Teorem 2.1.20. *Neka L zadovoljava svojstva (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E i A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Neka je $f \in L$ takva da $\varphi_0 \in L_f, f(E) \in [m, M], [m, M] \subseteq I$ i $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(I)$ takve da $\varphi_1, \varphi_2 \in L_f$. Ako su Φ_1 i Φ_2 linearni funkcionali definirani kao u (2.22) i (2.23), tada postoje $\xi_i \in [m, M], i = 1, 2$ takvi da*

$$\frac{\Phi_i(\varphi_1)}{\Phi_i(\varphi_2)} = \frac{\varphi_1''(\xi_i)}{\varphi_2''(\xi_i)}, \quad i = 1, 2$$

uz uvjet da su nazivnici različiti od nule.

Dokaz. Dajemo dokaz za funkcional Φ_1. Definiramo $\varphi_3 \in C^2([m,M])$ sa

$$\varphi_3 = c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2, \text{ gdje su } c_1 = \Phi_1(\varphi_2), \ c_2 = \Phi_1(\varphi_1).$$

Koristeći teorem 2.1.19. znamo da postoji $\xi_1 \in [m,M]$ takav da

$$\left(c_1\frac{\varphi_1''(\xi_1)}{2} - c_2\frac{\varphi_2''(\xi_1)}{2}\right)\Phi_1(\varphi_0) = 0.$$

Kako je $\Phi_1(\varphi_0) \neq 0$ (inače dobijamo kontradikciju sa $\Phi_1(\varphi_2) \neq 0$, po teoremu 2.1.19.), dobivamo

$$\frac{\Phi_1(\varphi_1)}{\Phi_1(\varphi_2)} = \frac{\varphi_1''(\xi_1)}{\varphi_2''(\xi_1)}.$$

■

Teorem 2.1.21. *Neka su Φ_i $(i = 1,2)$ linearni funkcionali definirani kao u (2.22) i (2.23). Neka je $\Upsilon = \{\varphi_s \colon s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na otvorenom intervalu I takva da $\Upsilon \subseteq L_f$ i da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; \varphi_s]$ $n-$eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Tada je $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ $n-$eksponencijalno konveksna funkcija u Jensenovom smislu na J. Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ neprekidna na J, tada je $n-$eksponencijalno konveksna na J.*

Dokaz. Za $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$ i $s_i \in J$, $i = 1,\dots,n$, definiramo funkciju $\chi\colon I \to \mathbb{R}$ sa

$$\chi(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\xi_j\varphi_{\frac{s_i+s_j}{2}}(y).$$

Koristeći pretpostavku da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; \varphi_s]$ $n-$eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu, dobivamo

$$[y_0, y_1, y_2; \chi] = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\xi_j[y_0, y_1, y_2; \varphi_{\frac{s_i+s_j}{2}}] \geq 0,$$

što povlači da je χ konveksna (i neprekidna) na I, te stoga $\Phi_i(\chi) \geq 0, i = 1,2$. Slijedi

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\xi_j\Phi_i(\varphi_{\frac{s_i+s_j}{2}}) \geq 0.$$

Zaključujemo da je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ $n-$eksponencijalno konveksna na J u Jensenovom smislu. Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ neprekidna na J, tada je $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ $n-$eksponencijalno konveksna po definiciji. ■

Sljedeći korolar je direktna posljedica prethodnog teorema.

Korolar 2.1.22. *Neka su Φ_i $(i = 1,2)$ linearni funkcionali definirani kao u (2.22) i (2.23). Neka je $\Upsilon = \{\varphi_s \colon s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na otvorenom intervalu I takva da $\Upsilon \subseteq L_f$ i da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; \varphi_s]$ eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Tada je $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ eksponencijalno konveksna funkcija u Jensenovom smislu na J. Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ i neprekidna na J, tada je eksponencijalno konveksna na J.*

Korolar 2.1.23. *Neka su* $\Phi_i \quad (i = 1, 2)$ *linearni funkcionali definirani kao u (2.22) i (2.23). Neka je* $\Omega = \{\varphi_s : s \in J\}$, *gdje je* J *interval u* $\mathbb{R}$, *familija funkcija definiranih na otvorenom intervalu* I, *takva da* $\Omega \subseteq L_f$ *i da je funkcija* $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; \varphi_s]$ $2-$*eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na* J *za svake tri međusobno različite točke* $y_0, y_1, y_2 \in I$. *Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(*i*) *Ako je funkcija* $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ *neprekidna na* J, *tada je* $2-$*eksponencijalno konveksna funkcija na* J. *Ako je* $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ *dodatno i strogo pozitivna, tada je log-konveksna na* J.

(*ii*) *Ako je funkcija* $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ *strogo pozitivna i diferencijabilna na* J, *tada za sve* $s, q, u, v \in J$, *takve da* $s \leq u$ *i* $q \leq v$, *vrijedi*

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) \leq \mu_{u,v}(\Phi_i, \Omega), \quad i = 1, 2, \tag{2.24}$$

gdje je

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(\varphi_s)}{\Phi_i(\varphi_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{\frac{d}{ds}\Phi_i(\varphi_s)}{\Phi_i(\varphi_s)}\right), & s = q, \end{cases} \tag{2.25}$$

za $\varphi_s, \varphi_q \in \Omega$.

Dokaz. (*i*) Direktna posljedica teorema 2.1.21. i primjedbe 1.3.15.
(*ii*) Po (*i*), funkcija $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ je log-konveksna na J, to jest, funkcija $s \mapsto \log \Phi_i(\varphi_s)$ je konveksna na J. Primijenimo propoziciju 1.3.16. i dobijemo

$$\frac{\log \Phi_i(\varphi_s) - \log \Phi_i(\varphi_q)}{s - q} \leq \frac{\log \Phi_i(\varphi_u) - \log \Phi_i(\varphi_v)}{u - v} \tag{2.26}$$

za $s \leq u, q \leq v, s \neq q, u \neq v$, i iz toga zaključujemo

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) \leq \mu_{u,v}(\Phi_i, \Omega), \quad i = 1, 2.$$

Slučajevi $s = q$ i $u = v$ slijede iz (2.26) kao granični slučajevi. ∎

Primjedba 2.1.24. *Primijetimo da rezultati iz teorema 2.1.21., korolara 2.1.22. i korolara 2.1.23. vrijede i kada se dvije od točaka* $y_0, y_1, y_2 \in I$ *podudaraju, recimo* $y_1 = y_0$, *za familiju diferencijabilnih funkcija* φ_s *takvu da je funkcija* $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; \varphi_s]$ $n-$*eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu (eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu, log-konveksna u Jensenovom smislu), i štoviše, vrijede kada se sve tri točke podudaraju za familiju dvaput diferencijabilnih funkcija sa istim svojstvom. Dokazi se dobivaju iz primjedbe 1.3.18. i prikladne karakterizacije konveksnosti.*

Sada predstavljamo nekoliko familija funkcija koji ispunjavaju uvjete teorema 2.1.21., korolara 2.1.22. i korolara 2.1.23. (i primjedbe 2.1.24.). To nam omogućava konstrukciju velike familije funkcija koje su eksponencijalno konveksne. Rasprava vezana uz ovaj problem se može naći u [16].

U nastavku promatramo Φ_1 i Φ_2 definirane kao u (2.22) i (2.23) sa A koji je neprekidan i f takva da kompozicija sa bilo kojom funkcijom iz odabrane familije Ω_i, kao i sa bilo kojom funkcijom koja se pojavi kao argument od Φ_1 i Φ_2, ostaje u L.

Primjer 2.1.25. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_1 = \{g_s \colon \mathbb{R} \to [0,\infty) \colon s \in \mathbb{R}\}$$

definiranu s

$$g_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{s^2} e^{sx}, & s \neq 0, \\ \frac{1}{2} x^2, & s = 0. \end{cases}$$

Imamo $\frac{d^2 g_s}{dx^2}(x) = e^{sx} > 0$ *što pokazuje da je* g_s *konveksna na* $\mathbb{R}$ *za svaki* $s \in \mathbb{R}$ *i* $s \mapsto \frac{d^2 g_s}{dx^2}(x)$ *je eksponencijalno konveksna po definiciji. Koristeći analogno argumentiranje kao u dokazu teorema 2.1.21. također imamo da je* $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; g_s]$ *eksponencijalno konveksna (pa tako i eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu). Koristimo teorem 2.1.22. i zaključujemo da su* $s \mapsto \Phi_i(g_s)$, $i = 1, 2$, *eksponencijalno konveksne u Jensenovom smislu. Lagano se pokaže da su ova preslikavanja neprekidna (iako preslikavanje* $s \mapsto g_s$ *nije neprekidno za* $s = 0$*), pa su i eksponencijalno konveksna.*
Za ovu familiju funkcija, $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1), i = 1, 2$, *iz (2.25) imaju oblik*

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(g_s)}{\Phi_i(g_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{\Phi_i(id \cdot g_s)}{\Phi_i(g_s)} - \frac{2}{s}\right), & s = q \neq 0, \\ \exp\left(\frac{\Phi_i(id \cdot g_0)}{3\Phi_i(g_0)}\right), & s = q = 0, \end{cases}$$

te su koristeći (2.24) monotone funkcije u parametrima s i q.

Koristeći teorem 2.1.20. slijedi da za $i = 1, 2$

$$M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1) = \log \mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1)$$

zadovoljava $m \leq M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1) \leq M$, *što pokazuje da su* $M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1)$ *sredine (funkcije g). Primijetimo da su po (2.24) i monotone.*

Primjer 2.1.26. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_2 = \{f_s \colon (0,\infty) \to \mathbb{R} \colon s \in \mathbb{R}$$

definiranu s

$$f_s(x) = \begin{cases} \frac{x^s}{s(s-1)}, & s \neq 0, 1, \\ -\log x, & s = 0, \\ x \log x, & s = 1. \end{cases}$$

Vrijedi $\frac{d^2 f_s}{dx^2}(x) = x^{s-2} = e^{(s-2)\ln x} > 0$ *što pokazuje da je* f_s *konveksna za* $x > 0$ *i* $s \mapsto \frac{d^2 f_s}{dx^2}(x)$ *je eksponencijalno konveksna po definiciji. Koristeći argumentiranje kao u primjeru 2.1.25. dobivamo da su preslikavanja* $s \mapsto \Phi_i(g_s), i = 1, 2$ *eksponencijalno konveksna. Funkcije (2.25) su u ovom slučaju jednake*

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_2) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{1-2s}{s(s-1)} - \frac{\Phi_i(f_s f_0)}{\Phi_i(f_s)}\right), & s = q \neq 0, 1, \\ \exp\left(1 - \frac{\Phi_i(f_0^2)}{2\Phi_i(f_0)}\right), & s = q = 0, \\ \exp\left(-1 - \frac{\Phi_i(f_0 f_1)}{2\Phi_i(f_1)}\right), & s = q = 1. \end{cases}$$

Ako je Φ_i pozitivan, tada teorem 2.1.20. primijenjen za $f = f_s \in \Omega_2$ i $g = f_q \in \Omega_2$ daje da postoji $\xi \in [m, M]$ takav da

$$\xi^{s-q} = \frac{\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_q)}.$$

Kako je funkcija $\xi \mapsto \xi^{s-q}$ invertibilna za $s \neq q$, imamo

$$m \leq \left(\frac{\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}} \leq M, \tag{2.27}$$

što zajedno sa činjenicom da su $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_2)$ neprekidne, simetrične i monotone (po (2.24)), pokazuje da je $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_2)$ sredina (funkcije f).

Primjer 2.1.27. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_3 = \{h_s \colon (0, \infty) \to (0, \infty) \colon s \in (0, \infty)\}$$

definiranu s

$$h_s(x) = \begin{cases} \frac{s^{-x}}{\ln^2 s}, & s \neq 1, \\ \frac{x^2}{2}, & s = 1. \end{cases}$$

Kako je $s \mapsto \frac{d^2 h_s}{dx^2}(x) = s^{-x}$ Laplaceova transformacija nenegativne funkcije (vidjeti [90]), ona je eksponencijalno konveksna. Očito su h_s konveksne funkcije za svaki $s > 0$.
Za ovu familiju funkcija, $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3)$ iz (2.25) imaju oblik

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(h_s)}{\Phi_i(h_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(-\frac{\Phi_i(id \cdot h_s)}{s\Phi_i(h_s)} - \frac{2}{s \ln s}\right), & s = q \neq 1, \\ \exp\left(-\frac{2\Phi_i(id \cdot h_1)}{3\Phi_i(h_1)}\right), & s = q = 1, \end{cases}$$

i monotone su u parametrima s i q po (2.24).
Koristeći teorem 2.1.20. slijedi da

$$M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3) = -L(s,q) \log \mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3),$$

zadovoljava $m \leq M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3) \leq M$, što pokazuje da je $M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3)$ sredina (funkcije h). $L(s,q)$ je logaritamska sredina definirana sa $L(s,q) = \frac{s-q}{\log s - \log q}$, $s \neq q$, $L(s,s) = s$.

Primjer 2.1.28. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_4 = \{k_s : (0, \infty) \to (0, \infty) : s \in (0, \infty)\}$$

definiranu s

$$k_s(x) = \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}.$$

Kako je $s \mapsto \frac{d^2 k_s}{dx^2}(x) = e^{-x\sqrt{s}}$ Laplaceova transformacija nenegativne funkcije (vidjeti [90]), ona je eksponencijalno konveksna. Očito su k_s konveksne funkcije za svaki

$s > 0$.
Za ovu familiju funkcija, $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4)$ iz (2.25) imaju oblik

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(k_s)}{\Phi_i(k_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(-\frac{\Phi_i(id \cdot k_s)}{2\sqrt{s}\Phi_i(k_s)} - \frac{1}{s}\right), & s = q, \end{cases}$$

i monotone su u parametrima s i q po (2.24).
Koristeći teorem 2.1.20. slijedi da

$$M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4) = -\left(\sqrt{s} + \sqrt{q}\right) \log \mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4)$$

zadovoljava $m \leq M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4) \leq M$, što pokazuje da je $M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4)$ sredina (funkcije k).

2.2. Jensenova operatorska nejednakost

Pogledajmo potrebnu notaciju i definicije za ovo područje. Neka je $\mathcal{B}(H)$ C^*-algebra svih ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru H i 1_H je jedinični operator. Definiramo ograde hermitskog operatora $A \in \mathcal{B}(H)$ sa

$$m_A = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle \quad \text{i} \quad M_A = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle.$$

Neka je $\mathrm{Sp}(A)$ oznaka za spektar operatora A. Ako je A hermitski operator, onda je $\mathrm{Sp}(A)$ realan i $\mathsf{Sp}(A) \subseteq [m_A, M_A]$.

Za operator $A \in \mathcal{B}(H)$ definiramo operatore $|A|$, A^+, A^- sa

$$|A| = (A^*A)^{1/2}, \qquad A^+ = (|A| + A)/2, \qquad A^- = (|A| - A)/2.$$

Očito, ako je A hermitski, tada $|A| = (A^2)^{1/2}$ i $A^+, A^- \geq 0$ (pozitivan i negativan dio od $A = A^+ - A^-$).

B. Mond i J. Pečarić su u [53] dokazali sljedeću varijantu Jensenove operatorske nejednakosti.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \Phi_i(A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} w_i \Phi_i\left(f(A_i)\right), \tag{2.28}$$

za operatorski konveksne funkcije f definirane na intervalu I, gdje su $\Phi_i \colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$, $i = 1, \ldots, n$, unitalna pozitivna linearna preslikavanja, $A_1, \ldots, A_n$ su hermitski operatori sa spektrom u I i $w_1, \ldots, w_n$ su nenegativni realni brojevi uz $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

F. Hansen, J. Pečarić i I. Perić su dali u [23] generalizaciju od (2.28) za unitalna polja pozitivnih linearnih preslikavanja. Nedavno su J. Mićić, J. Pečarić i Y. Seo u [49] dali generalizaciju ovih rezultata za polja pozitivnih linearnih preslikavanja bez pretpostavke unitalnosti.

J. Mićić, Z. Pavić i J. Pečarić su dali u [44, Teorem 1] Jensenovu operatorsku nejednakost bez operatorske konveksnosti.

Teorem 2.2.1. *Neka je* $(A_1, \ldots, A_n)$ *n-torka hermitskih operatora* $A_i \in \mathcal{B}(H)$ *sa ogradama* m_i *i* M_i, $m_i \leq M_i$, $i = 1, \ldots, n$. *Neka je* $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ *n-torka pozitivnih linearnih preslikavanja* $\Phi_i : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$, $i = 1, \ldots, n$, *takvih da* $\sum_{i=1}^n \Phi_i(1_H) = 1_K$. *Ako*

$$(m_A, M_A) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \quad \text{za } i = 1, \ldots, n, \tag{2.29}$$

gdje su m_A *i* M_A, $m_A \leq M_A$ *ograde hermitskog operatora* $A = \sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i)$, *onda vrijedi*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n \Phi_i\left(f(A_i)\right) \tag{2.30}$$

za svaku neprekidnu konveksnu funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ *uz uvjet da interval* I *sadrži sve* m_i, M_i.

Ako je $f\colon I \to \mathbb{R}$ *konkavna, vrijedi suprotna nejednakost u* (2.30).

U istom radu [44] proučavala se kvaziaritmetička operatorska sredina

$$\mathcal{M}_\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i\left(\varphi(A_i)\right)\right), \tag{2.31}$$

gdje je $(A_1, \ldots, A_n)$ n-torka hermitskih operatora u $\mathcal{B}(H)$ sa spektrom u I, $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ je n-torka pozitivnih linearnih preslikavanja $\Phi_i : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ takva da $\sum_{i=1}^n \Phi_i(1_H) = 1_K$, a $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ je neprekidna strogo monotona funkcija.

Sljedeći rezultat o monotonosti ove sredine je dokazan u [44, Teorem 3].

Teorem 2.2.2. *Neka su* $(A_1, \ldots, A_n)$ *i* $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ *kao u definiciji kvaziaritmetičke sredine* (2.31). *Neka su* m_i *i* M_i, $m_i \leq M_i$, *ograde od* A_i, $i = 1, \ldots, n$. *Neka su* $\varphi, \psi\colon I \to \mathbb{R}$ *neprekidne strogo monotone funkcije na intervalu* I *koji sadrži sve* m_i, M_i. *Neka su* m_φ *i* M_φ, $m_\varphi \leq M_\varphi$, *ograde sredine* $\mathcal{M}_\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n)$, *takve da*

$$(m_\varphi, M_\varphi) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.32}$$

Ako je jedan od sljedećih uvjeta zadovoljen

(i) $\psi \circ \varphi^{-1}$ *je konveksna i* ψ^{-1} *je operatorski monotona,*

(i') $\psi \circ \varphi^{-1}$ *je konkavna i* $-\psi^{-1}$ *je operatorski monotona,*

onda vrijedi

$$\mathcal{M}_\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) \leq \mathcal{M}_\psi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n). \tag{2.33}$$

Ako je zadovoljen jedan od sljedećih uvjeta

(ii) $\psi \circ \varphi^{-1}$ *je konkavna i* ψ^{-1} *je operatorski monotona,*

(ii') $\psi \circ \varphi^{-1}$ *je konveksna i* $-\psi^{-1}$ *je operatorski monotona,*

onda vrijedi suprotna nejednakost u (2.33).

J. Mićić, Z. Pavić i J. Pečarić su promatrali u [45, Teorem 2.1] slučaj kada vrijedi $(m_A, M_A) \cap [m_i, M_i] = \emptyset$ za nekoliko $i \in \{1, \ldots, n\}$, ali ne za sve $i = 1, \ldots, n$, te su dobili proširenje od (2.30).

Teorem 2.2.3. *Neka je $(A_1,\dots,A_n)$ $n-$torka hermitskih operatora $A_i \in B(H)$ sa ogradama m_i i M_i, $m_i \le M_i$, $i=1,\dots,n$. Neka je $(\Phi_1,\dots,\Phi_n)$ $n-$torka pozitivnih linearnih preslikavanja $\Phi_i\colon B(H)\to B(K)$, takva da $\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(1_H)=\alpha\,1_K$, $\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(1_H)=\beta\,1_K$, gdje je $1\le n_1<n$, $\alpha,\beta>0$ i $\alpha+\beta=1$. Neka su $m=\min\{m_1,\dots,m_{n_1}\}$ i $M=\max\{M_1,\dots,M_{n_1}\}$. Ako je*

$$(m,M)\cap[m_i,M_i]=\emptyset \qquad \text{za} \quad i=n_1+1,\dots,n,$$

i jedna od jednakosti

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i)=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(A_i)=\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(A_i)$$

je valjana, onda vrijedi

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i))\le\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(f(A_i))\le\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)), \tag{2.34}$$

za svaku neprekidnu konveksnu funkciju $f\colon I\to\mathbb{R}$ uz uvjet da interval I sadrži sve m_i, M_i, $i=1,\dots,n,$.
Ako je $f\colon I\to\mathbb{R}$ konkavna, onda vrijede suprotne nejednakosi u (2.34).

U radu [48] smo dobili poboljšanje Jensenove operatorske nejednakosti dane u teoremu 2.2.3. Za to će nam trebati iduća lema.

Lema 2.2.4. *Neka je A hermitski operator $A\in B(H)$ i $\mathsf{Sp}(A)\subseteq[m,M]$, za neke skalare $m<M$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} f(A) &\le \frac{M1_H-A}{M-m}f(m)+\frac{A-m1_H}{M-m}f(M)-\delta_f\widetilde{A} \qquad (2.35)\\ (\textit{resp.}\qquad f(A) &\ge \frac{M1_H-A}{M-m}f(m)+\frac{A-m1_H}{M-m}f(M)+\delta_f\widetilde{A}\qquad) \end{aligned}$$

za svaku neprekidnu konveksnu (resp. konkavnu) funkciju $f\colon[m,M]\to\mathbb{R}$, gdje je

$$\begin{gathered}\delta_f=f(m)+f(M)-2f\left(\tfrac{m+M}{2}\right)\quad (\textit{resp. } \delta_f=2f\left(\tfrac{m+M}{2}\right)-f(m)-f(M)),\\ i\quad \widetilde{A}=\tfrac{1}{2}1_H-\tfrac{1}{M-m}\left|A-\tfrac{m+M}{2}1_H\right|.\end{gathered}$$

Dokaz. Dokazujemo samo konveksni slučaj. Ako stavimo $x=m, y=M$ u lemu 1.1.16. slijedi da

$$\begin{aligned} f(p_1m+p_2M) &\le p_1f(m)+p_2f(M)\\ &- \min\{p_1,p_2\}\left(f(m)+f(M)-2f\left(\tfrac{m+M}{2}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

vrijedi za sve $p_1,p_2\in[0,1]$ takve da $p_1+p_2=1$. Za svaki $t\in[m,M]$ možemo pisati

$$f(t)=f\left(\frac{M-t}{M-m}m+\frac{t-m}{M-m}M\right).$$

Sada koristeći (2.36) za $p_1 = \frac{M-t}{M-m}$ i $p_2 = \frac{t-m}{M-m}$ dobivamo

$$\begin{aligned} f(t) \leq & \frac{M-t}{M-m} f(m) + \frac{t-m}{M-m} f(M) \\ - & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{M-m} \left| t - \frac{m+M}{2} \right| \right) \left(f(m) + f(M) - 2f\left(\frac{m+M}{2} \right) \right), \end{aligned} \tag{2.37}$$

jer je

$$\min \left\{ \frac{M-t}{M-m}, \frac{t-m}{M-m} \right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{M-m} \left| t - \frac{m+M}{2} \right|.$$

Koristeći funkcionalni račun primjenjen na hermitski operator A iz (2.37) slijedi tvrdnja. ■

Teorem 2.2.5. *Neka je $(A_1, \ldots, A_n)$ $n-$torka hermitskih operatora $A_i \in B(H)$ sa ogradama m_i i M_i, $m_i \leq M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Neka je $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ $n-$torka pozitivnih linearnih preslikavanja $\Phi_i \colon B(H) \to B(K)$, $i = 1, \ldots, n$, takva da $\sum_{i=1}^n \Phi_i(1_H) = 1_K$. Neka*

$$(m_A, M_A) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \quad \text{za } i = 1, \ldots, n, \qquad \text{i} \qquad m < M,$$

gdje su m_A i M_A, $m_A \leq M_A$, ograde operatora $A = \sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i)$ i

$$m = \max\{M_i \colon M_i \leq m_A, i = 1, \ldots, n\}, \; M = \min\{m_i \colon m_i \geq M_A, i = 1, \ldots, n\}.$$

Ako je $f \colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna (resp. konkavna) funkcija uz uvjet da interval I sadrži sve m_i, M_i, onda vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i) \right) \leq \sum_{i=1}^n \Phi_i\left(f(A_i) \right) - \delta_f \widetilde{A} \leq \sum_{i=1}^n \Phi_i\left(f(A_i) \right) \tag{2.38}$$

(resp.

$$f\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i) \right) \geq \sum_{i=1}^n \Phi_i\left(f(A_i) \right) + \delta_f \widetilde{A} \geq \sum_{i=1}^n \Phi_i\left(f(A_i) \right) \Big), \tag{2.39}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \delta_f \equiv \delta_f(\bar{m}, \bar{M}) &= f(\bar{m}) + f(\bar{M}) - 2f\left(\tfrac{\bar{m}+\bar{M}}{2} \right) \\ (\textit{resp.} \quad \delta_f \equiv \delta_f(\bar{m}, \bar{M}) &= 2f\left(\tfrac{\bar{m}+\bar{M}}{2} \right) - f(\bar{m}) - f(\bar{M}) \;), \\ \widetilde{A} \equiv \widetilde{A}_A(\bar{m}, \bar{M}) &= \tfrac{1}{2} 1_K - \tfrac{1}{\bar{M}-\bar{m}} \left| A - \tfrac{\bar{m}+\bar{M}}{2} 1_K \right| \end{aligned} \tag{2.40}$$

i $\bar{m} \in [m, m_A]$, $\bar{M} \in [M_A, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, su proizvoljni brojevi

Dokaz. Dokazujemo samo konveksni slučaj.

Kako je $A = \sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i) \in B(K)$ hermitski operator takav da $\bar{m} 1_K \leq m_A 1_K \leq \sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i) \leq M_A 1_K \leq \bar{M} 1_K$ i f je konveksna na $[\bar{m}, \bar{M}] \subseteq I$, tada po lemi 2.2.4. dobivamo

$$f\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i) \right) \leq \frac{\bar{M} 1_K - \sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i)}{\bar{M} - \bar{m}} f(\bar{m}) + \frac{\sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i) - \bar{m} 1_K}{\bar{M} - \bar{m}} f(\bar{M}) - \delta_f \widetilde{A}, \tag{2.41}$$

gdje su δ_f i $\widetilde{A}$ definirani sa (2.40).

Kako je f konveksna na $[m_i, M_i]$ i kako $(m_A, M_A) \cap [m_i, M_i] = \emptyset$ implicira $(\bar{m}, \bar{M}) \cap [m_i, M_i] = \emptyset$, tada vrijedi

$$f(A_i) \geq \frac{\bar{M}1_H - A_i}{\bar{M} - \bar{m}} f(\bar{m}) + \frac{A_i - \bar{m}1_H}{\bar{M} - \bar{m}} f(\bar{M}), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Primijenimo pozitivno linearno preslikavanje Φ_i, zbrojimo i dodamo $-\delta_f \widetilde{A}$. Dobijemo

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(f(A_i)) - \delta_f \widetilde{A} \geq \frac{\bar{M}1_K - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(A_i)}{\bar{M} - \bar{m}} f(\bar{m}) + \frac{\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(A_i) - \bar{m}1_K}{\bar{M} - \bar{m}} f(\bar{M}) - \delta_f \widetilde{A}, \tag{2.42}$$

jer je $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(1_H) = 1_K$. Kombiniranjem nejednakosti (2.41) i (2.42), dobijemo lijevu stranu od (2.38).

Kako je $\delta_f \geq 0$ i $\widetilde{A} \geq 0$, imamo i desnu stranu od (2.38). ■

Primjedba 2.2.6. *Specijalno, ako je $m_A < M_A$, tada teorem 2.2.5. u konveksnom slučaju daje*

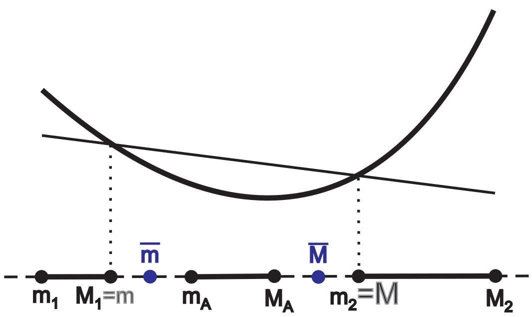
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(f(A_i)) - \bar{\delta}_f \bar{A} \leq \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(f(A_i)),$$

gdje je

$$\begin{array}{rrcl} & \bar{\delta}_f \equiv \delta_f(m_A, M_A) & = & f(m_A) + f(M_A) - 2f\left(\frac{m_A+M_A}{2}\right) \\ i & \bar{A} \equiv \widetilde{A}_A(m_A, M_A) & = & \frac{1}{2}1_K - \frac{1}{M_A - m_A}\left|A - \frac{m_A+M_A}{2}1_K\right|. \end{array}$$

Ali ako je $m < M$ i $m_A = M_A$, tada vrijedi nejednakost (2.38)*, ali $\bar{\delta}_f \bar{A}$ nije definirano. Neki primjeri za ovaj slučaj su dani u sljedećem primjeru I) i II).*

Primjer 2.2.7. *Sada dajemo tri primjera sa matricama i $n = 2$.*



$$f(\Phi_1(A_1) + \Phi_2(A_2)) \leq \Phi_1(f(A_1)) + \Phi_2(f(A_2)) - \delta_f \widetilde{A},$$

gdje je

$$\delta_f = f(\bar{m}) + f(\bar{M}) - 2f((\bar{M} + \bar{m})/2),$$

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2}1_K - \frac{1}{\bar{M} - \bar{m}}\left|\Phi_1(A_1) + \Phi_2(A_2) - \frac{\bar{M} + \bar{m}}{2}1_K\right|$$

Slika 2..1: Poboljšanje za dva operatora i konveksnu funkciju f

Stavimo $f(t) = t^4$ koja je konveksna, ali nije operatorski konveksna u (2.38)*. Također, definiramo preslikavanja $\Phi_1, \Phi_2 \colon M_3(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ na sljedeći način: $\Phi_1((a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}) = \frac{1}{2}(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$, $\Phi_2 = \Phi_1$ (tada $\Phi_1(I_3) + \Phi_2(I_3) = I_2$).*

I) *Prvo promatramo primjer kada je $\delta_f \widetilde{A}$ jednako razlici desne i lijeve strane Jensenove nejednakosti. Ako su $A_1 = -3I_3$ i $A_2 = 2I_3$, tada je $A = \Phi_1(A_1) + \Phi_2(A_2) = -0.5I_2$, te $m = -3$, $M = 2$. Stavimo također $\bar{m} = -3$ i $\bar{M} = 2$. Dobivamo*

$$(\Phi_1(A_1) + \Phi_2(A_2))^4 = 0.0625I_2 \leq 48.5I_2 = \Phi_1\left(A_1^4\right) + \Phi_2\left(A_2^4\right)$$

i poboljšanje

$$(\Phi_1(A_1) + \Phi_2(A_2))^4 = 0.0625I_2 = \Phi_1\left(A_1^4\right) + \Phi_2\left(A_2^4\right) - 48.4375I_2,$$

jer je $\delta_f = 96.875$, $\widetilde{A} = 0.5I_2$.

II) *Zatim promotrimo primjer kada $\delta_f \widetilde{A}$ nije jednako razlici desne i lijeve strane Jensenove nejednakosti. Ako su*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad i \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad tada\ je \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tako da $m = -1$, $M = 2$. Stavimo također $\bar{m} = -1$ i $\bar{M} = 2$. Dobivamo

$$(\Phi_1(A_1) + \Phi_2(A_2))^4 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & 0 \\ 0 & \frac{97}{2} \end{pmatrix} = \Phi_1\left(A_1^4\right) + \Phi_2\left(A_2^4\right)$$

i poboljšanje

$$\begin{aligned} (\Phi_1(A_1) + \Phi_2(A_2))^4 &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \leq \ \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 641 \end{pmatrix} &= \Phi_1\left(A_1^4\right) + \Phi_2\left(A_2^4\right) - \frac{135}{16}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

jer je $\delta_f = 135/8$, $\widetilde{A} = I_2/2$.

III) *Pogledajmo idući primjer. Ako su*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad i \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad tada\ je \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tako da $m_1 = -4.8662$, $M_1 = -0.3446$, $m_2 = 1.3446$, $M_2 = 5.8662$, $m = -0.3446$, $M = 1.3446$, te stavimo $\bar{m} = m$, $\bar{M} = M$ (zaokruženo na četiri decimalna mjesta). Imamo

$$(\Phi_1(A_1) + \Phi_2(A_2))^4 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \frac{1283}{2} & -255 \\ -255 & \frac{237}{2} \end{pmatrix} = \Phi_1\left(A_1^4\right) + \Phi_2\left(A_2^4\right)$$

i poboljšanje

$$\begin{aligned} (\Phi_1(A_1) + \Phi_2(A_2))^4 &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \leq \ \begin{pmatrix} 639.9213 & -255 \\ -255 & 117.8559 \end{pmatrix} &= \Phi_1\left(A_1^4\right) + \Phi_2\left(A_2^4\right) - \begin{pmatrix} 1.5787 & 0 \\ 0 & 0.6441 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(zaokruženo na četiri decimalna mjesta), jer je

$$\delta_f = 3.1574, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2040 \end{pmatrix}.$$

Ali ako stavimo $\bar{m} = m_A = 0$, $\bar{M} = M_A = 0.5$ *u primjer III), tada je* $\tilde{A} = \mathbf{0}$, *tako da nemamo poboljšanje Jensenove nejednakosti. Također, ako stavimo* $\bar{m} = 0$, $\bar{M} = 1$, *tada je* $\tilde{A} = 0.5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\delta_f = 7/8$ *i* $\delta_f \tilde{A} = 0.4375 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *što je lošije od gornjeg poboljšanja.*

Sada dajemo korolar teorema 2.2.5. sa konveksnom kombinacijom operatora A_i, $i = 1, \ldots, n$.

Korolar 2.2.8. *Neka je* $(A_1, \ldots, A_n)$ $n-$*torka hermitskih operatora* $A_i \in B(H)$ *sa ogradama* m_i *i* M_i, $m_i \leq M_i$, $i = 1, \ldots, n$. *Neka je* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $n-$*torka nenegativnih realnih brojeva takvih da* $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. *Neka je*

$$(m_A, M_A) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \quad \text{za } i = 1, \ldots, n, \qquad i \qquad m < M,$$

gdje su m_A *i* M_A, $m_A \leq M_A$ *ograde od* $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$ *i*

$$m = \max\{M_i \colon M_i \leq m_A, i = 1, \ldots, n\}, \; M = \min\{m_i \colon m_i \geq M_A, i = 1, \ldots, n\}.$$

Ako je $f \colon I \to \mathbb{R}$ *neprekidna konveksna (resp. konkavna) funkcija uz uvjet da interval* I *sadrži sve* m_i, M_i, *onda vrijedi*

$$\begin{array}{lrcl} & f\left(\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i A_i\right) & \leq & \sum_{i=1}^n \alpha_i f(A_i) - \delta_f \tilde{\tilde{A}} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(A_i) \\ (\textit{resp.} & f\left(\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i A_i\right) & \geq & \sum_{i=1}^n \alpha_i f(A_i) + \delta_f \tilde{\tilde{A}} \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(A_i) \qquad) \end{array}$$

gdje je δ_f *definiran sa (2.40),* $\tilde{\tilde{A}} = \frac{1}{2} 1_H - \frac{1}{\bar{M} - \bar{m}} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i - \frac{\bar{m} + \bar{M}}{2} 1_H \right|$ *i* $\bar{m} \in [m, m_A]$, $\bar{M} \in [M_A, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, *su proizvoljni brojevi.*

Dokaz. Primijenimo teorem 2.2.5. na pozitivna linearna preslikavanja $\Phi_i : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ definirana s $\Phi_i : B \mapsto \alpha_i B$, $i = 1, \ldots, n$. ■

Sada dajemo poboljšanja nejednakosti između kvaziaritmetičkih sredina definiranih sa (2.31).

Uvedimo oznake

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi,\psi}(m, M) &= \psi(m) + \psi(M) - 2\psi \circ \varphi^{-1}\left(\tfrac{\varphi(m)+\varphi(M)}{2}\right), \\ \widetilde{A}_\varphi(m, M) &= \tfrac{1}{2} 1_K - \tfrac{1}{|\varphi(M) - \varphi(m)|} \left| \sum_{i=1}^n \Phi_i(\varphi(A_i)) - \tfrac{\varphi(M)+\varphi(m)}{2} 1_K \right|, \end{aligned} \tag{2.43}$$

gdje je $(A_1, \ldots, A_n)$ n-torka hermitskih operatora u $\mathcal{B}(H)$ sa spektrom u I, $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ je n-torka pozitivnih linearnih preslikavanja $\Phi_i : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ takvih da su $\sum_{i=1}^n \Phi_i(1_H) = 1_K$, $\varphi, \psi \colon I \to \mathbb{R}$ neprekidne strogo monotone funkcije i $m, M \in I$, $m < M$. Implicitno pretpostavljamo $\widetilde{A}_\varphi(m, M) \equiv \widetilde{A}_{\varphi,A}(m, M)$, gdje $A = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\varphi(A_i))$.

Idući teorem daje poboljšanje rezultata iz teorema 2.2.2.

Teorem 2.2.9. *Neka su* $(A_1, \ldots, A_n)$ *i* $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ *kao u definiciji kvaziaritmetičkih sredina* (2.31). *Neka su* $\varphi, \psi \colon I \to \mathbb{R}$ *neprekidne strogo monotone funkcije na intervalu* I *koji sadrži svaki* m_i, M_i. *Neka*

$$(m_\varphi, M_\varphi) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \qquad \text{za } i = 1, \ldots, n, \qquad i \qquad m < M,$$

gdje su m_φ *i* M_φ, $m_\varphi \leq M_\varphi$, *ograde sredine* $\mathcal{M}_\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n)$ *i*
$m = \max\{M_i \colon M_i \leq m_\varphi, i = 1, \ldots, n\}$, $M = \min\{m_i \colon m_i \geq M_\varphi, i = 1, \ldots, n\}$.

(i) *Ako je* $\psi \circ \varphi^{-1}$ *konveksna i* ψ^{-1} *operatorski monotona, onda vrijedi*

$$\mathcal{M}_\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) \leq \psi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \Phi_i\left(\psi(A_i)\right) - \delta_{\varphi,\psi}\widetilde{A}_\varphi\right) \leq \mathcal{M}_\psi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) \tag{2.44}$$

gdje $\delta_{\varphi,\psi} \geq 0$ *i* $\widetilde{A}_\varphi \geq 0$.

(i′) *Ako je* $\psi \circ \varphi^{-1}$ *konveksna i* $-\psi^{-1}$ *operatorski monotona, onda vrijede suprotne nejednakosti u* (2.44), *gdje* $\delta_{\varphi,\psi} \geq 0$ *i* $\widetilde{A}_\varphi \geq 0$.

(ii) *Ako je* $\psi \circ \varphi^{-1}$ *konkavna i* $-\psi^{-1}$ *operatorski monotona, onda vrijedi* (2.44), *gdje* $\delta_{\varphi,\psi} \leq 0$ *i* $\widetilde{A}_\varphi \geq 0$.

(ii′) *Ako je* $\psi \circ \varphi^{-1}$ *konkavna i* ψ^{-1} *operatorski monotona, onda vrijede suprotne nejednakosti u* (2.44), *gdje* $\delta_{\varphi,\psi} \leq 0$ *i* $\widetilde{A}_\varphi \geq 0$.

U svim navedenim slučajevima pretpostavljamo da su $\delta_{\varphi,\psi} \equiv \delta_{\varphi,\psi}(\bar{m}, \bar{M})$, $\widetilde{A}_\varphi \equiv \widetilde{A}_\varphi(\bar{m}, \bar{M})$ *definirani sa* (2.43) *i* $\bar{m} \in [m, m_\varphi]$, $\bar{M} \in [M_\varphi, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, *su proizvoljni brojevi.*

Dokaz. Dokazujemo samo slučaj (i). Pretpostavimo da je φ strogo rastuća funkcija. Kako je $m_i 1_H \leq A_i \leq M_i 1_H$, $i = 1, \ldots, n$, i $m_\varphi 1_K \leq \mathcal{M}_\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) \leq M_\varphi 1_K$, vrijedi

$$\begin{gathered}\varphi(m_i)1_H \leq \varphi(A_i) \leq \varphi(M_i)1_H, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \varphi(m_\varphi)1_K \leq \textstyle\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\varphi(A_i)) \leq \varphi(M_\varphi)1_K.\end{gathered}$$

Također

$$(m_\varphi, M_\varphi) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \quad \text{za } i = 1, \ldots, n$$

implicira

$$(\varphi(m_\varphi), \varphi(M_\varphi)) \cap [\varphi(m_i), \varphi(M_i)] = \emptyset \quad \text{za } i = 1, \ldots, n. \tag{2.45}$$

Ako zamijenimo A_i sa $\varphi(A_i)$ u (2.38) i uzmemo u obzir (2.45), dobivamo da vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\varphi(A_i))\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \Phi_i\left(f(\varphi(A_i))\right) - \delta_f \widetilde{A}_\varphi \leq \sum_{i=1}^{n} \Phi_i\left(f(\varphi(A_i))\right) \tag{2.46}$$

za svaku konveksnu funkciju $f \colon J \to \mathbb{R}$ na intervalu J koji sadrži svaki $[\varphi(m_i), \varphi(M_i)] = \varphi([m_i, M_i])$, gdje je

$$\delta_f = f(\varphi(\bar{m})) + f(\varphi(\bar{M})) - 2f\left(\frac{\varphi(\bar{m}) + \varphi(\bar{M})}{2}\right) \geq 0 \tag{2.47}$$

i $\widetilde{A}_\varphi = \frac{1}{2}1_K - \frac{1}{\varphi(\bar{M}) - \varphi(\bar{m})}\left|\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\varphi(A_i)) - \frac{\varphi(\bar{M}) + \varphi(\bar{m})}{2}1_K\right| \geq 0.$

Također, ako je φ strogo padajuća, vidimo da vrijedi (2.46) za konveksnu $f\colon J \to \mathbb{R}$ na J koji sadrži svaki $[\varphi(M_i), \varphi(m_i)] = \varphi([m_i, M_i])$, gdje je δ_f definiran sa (2.47) i $\widetilde{A}_\varphi = \frac{1}{2}1_K - \frac{1}{\varphi(\bar{m})-\varphi(\bar{M})}\left|\sum_{i=1}^n \Phi_i(\varphi(A_i)) - \frac{\varphi(\bar{M})+\varphi(\bar{m})}{2}1_K\right| \geq 0$.

Stavimo $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ u (2.46) i primijenimo operatorski monotonu funkciju ψ^{-1}, te dobijemo (2.44).

Dokaz slučaja (ii) je sličan prethodnom slučaju uz nejednakost (2.39) umjesto (2.38). ■

Sada gledamo specijalan slučaj prethodnog teorema. To je poboljšanje od [44, Korolar 5].

Korolar 2.2.10. *Neka su $(A_1, \ldots, A_n)$ i $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ kao u definiciji kvaziaritmetičke sredine* (2.31). *Neka su m_i i M_i, $m_i \leq M_i$ ograde od A_i, $i = 1, \ldots, n$. Neka su $\varphi, \psi\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidne strogo monotone funkcije na intervalu I koji sadrži svaki m_i, M_i i $\mathcal{I}$ identička funkcija na I.*

(i) *Ako je φ^{-1} konveksna i vrijedi*

$$(m_\varphi, M_\varphi) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \qquad \text{za } i = 1, \ldots, n, \qquad \text{i} \qquad m_{[\varphi]} < M_{[\varphi]} \tag{2.48}$$

gdje su m_φ i M_φ, $m_\varphi \leq M_\varphi$ ograde od $M_\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n)$ i
$m_{[\varphi]} = \max\{M_i\colon M_i \leq m_\varphi, i = 1, \ldots, n\}$, $M_{[\varphi]} = \min\{m_i\colon m_i \geq M_\varphi, i = 1, \ldots, n\}$,
onda vrijedi

$$M_\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) \leq M_\mathcal{I}(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) - \delta_{\varphi,\mathcal{I}}(\bar{m}, \bar{M})\widetilde{A}_\varphi(\bar{m}, \bar{M}) \leq M_\mathcal{I}(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) \tag{2.49}$$

za svaki $\bar{m} \in [m_{[\varphi]}, m_\varphi]$, $\bar{M} \in [M_\varphi, M_{[\varphi]}]$, $\bar{m} < \bar{M}$, gdje su $\delta_{\varphi,\mathcal{I}}(\bar{m}, \bar{M}) \geq 0$ i $\widetilde{A}_\varphi(\bar{m}, \bar{M}) \geq 0$ su definirani sa (2.43).

(ii) *Ako je φ^{-1} konkavna i vrijedi* (2.48), *onda vrijedi*

$$M_\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) \geq M_\mathcal{I}(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) - \delta_{\varphi,\mathcal{I}}(\bar{m}, \bar{M})\widetilde{A}_\varphi(\bar{m}, \bar{M}) \geq M_\mathcal{I}(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n), \tag{2.50}$$

za svaki $\bar{m} \in [m_{[\varphi]}, m_\varphi]$, $\bar{M} \in [M_\varphi, M_{[\varphi]}]$, $\bar{m} < \bar{M}$, gdje su $\delta_{\varphi,\mathcal{I}}(\bar{m}, \bar{M}) \leq 0$ i $\widetilde{A}_\varphi(\bar{m}, \bar{M}) \geq 0$ definirani sa (2.43).

(iii) *Ako je φ^{-1} konveksna i vrijedi* (2.48) *i ako je ψ^{-1} konkavna, i*

$$(m_\psi, M_\psi) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \qquad \text{za } i = 1, \ldots, n, \qquad \text{i} \qquad m_{[\psi]} < M_{[\psi]}$$

vrijedi, gdje su m_ψ i M_ψ, $m_\psi \leq M_\psi$ ograde od $M_\psi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n)$ i
$m_{[\psi]} = \max\{M_i\colon M_i \leq m_\psi, i = 1, \ldots, n\}$, $M_{[\psi]} = \min\{m_i\colon m_i \geq M_\psi, i = 1, \ldots, n\}$,
onda vrijedi

$$\begin{aligned} M_\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) &\leq M_\mathcal{I}(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) - \delta_{\varphi,\mathcal{I}}(\bar{m}, \bar{M})\widetilde{A}_\varphi(\bar{m}, \bar{M}) \leq M_\mathcal{I}(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) \\ &\leq M_\mathcal{I}(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) - \delta_{\psi,\mathcal{I}}(\bar{\bar{m}}, \bar{\bar{M}})\widetilde{A}_\psi(\bar{\bar{m}}, \bar{\bar{M}}) \leq M_\psi(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n) \end{aligned} \tag{2.51}$$

za svaki $\bar{m} \in [m_{[\varphi]}, m_\varphi]$, $\bar{M} \in [M_\varphi, M_{[\varphi]}]$, $\bar{m} < \bar{M}$ i svaki $\bar{\bar{m}} \in [m_{[\psi], m_\psi}]$, $\bar{\bar{M}} \in [M_\psi, M_{[\psi]}]$, $\bar{\bar{m}} < \bar{\bar{M}}$, gdje su $\delta_{\varphi,\mathcal{I}}(\bar{m}, \bar{M}) \geq 0$, $\widetilde{A}_\varphi(\bar{m}, \bar{M}) \geq 0$ i $\delta_{\psi,\mathcal{I}}(\bar{\bar{m}}, \bar{\bar{M}}) \leq 0$, $\widetilde{A}_\psi(\bar{\bar{m}}, \bar{\bar{M}}) \geq 0$ definirani sa (2.43).

Dokaz. (i)-(ii): Ako stavimo $\psi = \mathcal{I}$ u teorem 2.2.9. (i) i (ii'), dobivamo (2.49) i (2.50), respektivno.

(iii): Zamijenimo ψ sa φ u (ii) i kombinirajući to sa (i), dobijemo traženu nejednakost (2.51). ■

Primjedba 2.2.11. *Neka vrijede pretpostavke korolara 2.2.10. (iii). Dobivamo sljedeće poboljšanje nejednakosti između kvaziaritmetičkih sredina*

$$M_\varphi(\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n) \le M_\varphi(\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n) + \Delta_{\varphi,\psi}(\bar{m},\bar{M},\bar{\bar{m}},\bar{\bar{M}}) \le M_\psi(\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n),$$

gdje

$$\Delta_{\varphi,\psi}(\bar{m},\bar{M},\bar{\bar{m}},\bar{\bar{M}}) = \delta_{\varphi,\mathcal{I}}(\bar{m},\bar{M})\widetilde{A}_\varphi(\bar{m},\bar{M}) - \delta_{\psi,\mathcal{I}}(\bar{\bar{m}},\bar{\bar{M}})\widetilde{A}_\psi(\bar{\bar{m}},\bar{\bar{M}}) \ge 0.$$

Specijalno,

$$\begin{aligned} & M_\varphi(\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n) \\ \le\; & M_\varphi(\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n) + \bar{\delta}_\varphi(\bar{m},\bar{M})\widetilde{A}_\varphi(\bar{m},\bar{M}) + \bar{\delta}_\psi(\bar{m},\bar{M})\widetilde{A}_\psi(\bar{m},\bar{M}) \le M_\psi(\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n), \end{aligned}$$

gdje

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_\varphi(\bar{m},\bar{M}) &= \bar{m} + \bar{M} - 2\varphi^{-1}\left(\tfrac{\varphi(\bar{m})+\varphi(\bar{M})}{2}\right) \ge 0, \\ \bar{\delta}_\psi(\bar{m},\bar{M}) &= 2\psi^{-1}\left(\tfrac{\psi(\bar{m})+\psi(\bar{M})}{2}\right) - \bar{m} - \bar{M} \ge 0. \end{aligned}$$

Zanimljivo je proučavati poboljšanje od (2.33) pod uvjetima postavljenim samo na ograde operatora čije sredine promatramo. Sljedeći korolar je poboljšanje rezultata danog u [46, Teorem 2.1].

Korolar 2.2.12. *Neka su A_i, Φ_i, m_i, M_i, $i = 1,\ldots,n$, i $\varphi,\psi,\mathcal{I}$ kao u pretpostavkama korolara 2.2.10.*
Neka vrijedi

$$(m_A, M_A) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \quad \text{za } i = 1,\ldots,n, \qquad \text{i} \qquad m < M$$

gdje su m_A i M_A, $m_A \le M_A$, ograde od $A = \sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i)$ i

$$m = \max\{M_i \colon M_i \le m_A, i = 1,\ldots,n\}, \; M = \min\{m_i \colon m_i \ge M_A, i = 1,\ldots,n\}.$$

Ako je ψ konveksna, ψ^{-1} operatorski monotona, φ konkavna, φ^{-1} operatorski monotona, onda vrijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\varphi(\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n) &\le \varphi^{-1}\left(\textstyle\sum_{i=1}^n \Phi_i\left(\varphi(A_i)\right) + \delta_\varphi \widetilde{A}\right) \le M_{\mathcal{I}}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n) \\ &\le \psi^{-1}\left(\textstyle\sum_{i=1}^n \Phi_i\left(\psi(A_i)\right) - \delta_\psi \bar{A}\right) \le \mathcal{M}_\psi(\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n) \end{aligned} \tag{2.52}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \delta_\varphi = 2\varphi\left(\tfrac{\bar{m}+\bar{M}}{2}\right) - \varphi(\bar{m}) - \varphi(\bar{M}) \ge 0, &\quad \delta_\psi = \psi(\bar{\bar{m}}) + \psi(\bar{\bar{M}}) - 2\psi\left(\tfrac{\bar{\bar{m}}+\bar{\bar{M}}}{2}\right) \ge 0, \\ \widetilde{A} = \tfrac{1}{2}1_K - \tfrac{1}{\bar{M}-\bar{m}}\left|A - \tfrac{\bar{m}+\bar{M}}{2}1_K\right|, &\quad \bar{A} = \tfrac{1}{2}1_K - \tfrac{1}{\bar{\bar{M}}-\bar{\bar{m}}}\left|A - \tfrac{\bar{\bar{m}}+\bar{\bar{M}}}{2}1_K\right| \end{aligned}$$

i $\quad \bar{m},\bar{\bar{m}} \in [m, m_A]$, $\bar{M},\bar{\bar{M}} \in [M_A, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, $\bar{\bar{m}} < \bar{\bar{M}}$ $\quad$ *su proizvoljni brojevi.*

Ako je ψ konveksna, $-\psi^{-1}$ operatorski monotona, φ konkavna, $-\varphi^{-1}$ operatorski monotona, onda vrijede suprotne nejednakosti u (2.52).

Dokaz. Dokazujemo samo (2.52). Ako zamijenimo φ sa $\mathcal{I}$ i zatim ψ sa φ u teoremu 2.2.9. (ii') dobivamo lijevu stranu od (2.52). Također, ako zamijenimo φ sa $\mathcal{I}$ u teoremu 2.2.9. (i) dobivamo desnu stranu od (2.52). ■

Pogledajmo primjenu prethodnih rezultata na poboljšanje nejednakosti između potencijalnih sredina.
Kao specijalan slučaj kvaziaritmetičkih sredina (2.31) možemo proučavati operatorske potencijalne sredine

$$\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi}) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i\left(A_i^r\right)\right)^{1/r}, & r\in\mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ \exp\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i\left(\log\left(A_i\right)\right)\right), & r=0, \end{cases} \tag{2.53}$$

gdje je $(A_1,\ldots,A_n)$ $n-$torka strogo pozitivnih operatora u $\mathcal{B}(H)$ i $(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ je n-torka pozitivnih linearnih preslikavanja $\Phi_i\colon \mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$ takvih da $\sum_{i=1}^n \Phi_i(1_H) = 1_K$.

Uvedimo oznake za specijalan slučaj od (2.43) na sljedeći način

$$\begin{aligned} \delta_{r,s}(m,M) &= \begin{cases} m^s+M^s-2\left(\frac{m^r+M^r}{2}\right)^{s/r}, & r\neq 0, \\ m^s+M^s-2\left(mM\right)^{s/2}, & r=0, \end{cases} \\ \widetilde{A}_r(m,M) &= \begin{cases} \frac{1}{2}1_K-\frac{1}{|M^r-m^r|}\left|\sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i^r)-\frac{M^r+m^r}{2}1_K\right|, & r\neq 0, \\ \frac{1}{2}1_K-\left|\log\left(\frac{M}{m}\right)\right|^{-1}\left|\sum_{i=1}^n \Phi_i(\log A_i)-\log\sqrt{Mm}1_K\right|, & r=0, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.54}$$

gdje $m,M\in\mathbb{R}$, $0<m<M$ i $r,s\in\mathbb{R}$, $r\leq s$. Implicitno pretpostavljamo da $\widetilde{A}_r(m,M)\equiv\widetilde{A}_{r,A}(m,M)$, gdje $A=\sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i^r)$ za $r\neq 0$ i $A=\sum_{i=1}^n \Phi_i(\log A_i)$ za $r=0$.
Primijenimo teorem 2.2.9. na operatorsku potencijalnu sredinu, te dobijemo poboljšanje nejednakosti između potencijalnih sredina dobivene u [44, Korolar 7].

Korolar 2.2.13. *Neka su* $(A_1,\ldots,A_n)$ *i* $(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ *kao u definiciji potencijalne sredine* (2.53). *Neka su* m_i *i* M_i, $0<m_i\leq M_i$ *ograde od* A_i, $i=1,\ldots,n$.

(i) *Ako* $r\leq s$, $s\geq 1$ *ili* $r\leq s\leq -1$,

$$\left(m^{[r]},M^{[r]}\right)\cap[m_i,M_i]=\emptyset,\quad i=1,\ldots,n,\qquad i\qquad m<M,$$

gdje su $m^{[r]}$ *i* $M^{[r]}$, $m^{[r]}\leq M^{[r]}$ *ograde od* $\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})$ *i*
$m=\max\left\{M_i\colon M_i\leq m^{[r]}, i=1,\ldots,n\right\}$, $M=\min\left\{m_i\colon m_i\geq M^{[r]}, i=1,\ldots,n\right\}$, *tada vrijedi*

$$\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})\leq\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i\left(A_i^s\right)-\delta_{r,s}\widetilde{A}_r\right)^{1/s}\leq\mathcal{M}_n^{[s]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi}), \tag{2.55}$$

gdje $\delta_{r,s}\geq 0$ *za* $s\geq 1$, $\delta_{r,s}\leq 0$ *za* $s\leq -1$ *i* $\widetilde{A}_r\geq 0$. *Ovdje pretpostavljamo da su* $\delta_{r,s}\equiv\delta_{r,s}(\bar{m},\bar{M})$, $\widetilde{A}_r\equiv\widetilde{A}_r(\bar{m},\bar{M})$ *definirani sa* (2.54) *i* $\bar{m}\in[m,m^{[r]}]$, $\bar{M}\in[M^{[r]},M]$, $\bar{m}<\bar{M}$, *su proizvoljni brojevi.*

(ii) *Ako* $r\leq s$, $r\leq -1$ *ili* $1\leq r\leq s$,

$$\left(m^{[s]},M^{[s]}\right)\cap[m_i,M_i]=\emptyset,\quad i=1,\ldots,n,\qquad i\qquad m<M,$$

gdje su $m^{[s]}$ *i* $M^{[s]}$, $m^{[s]} \leq M^{[s]}$ *ograde od* $\mathcal{M}_n^{[s]}(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi})$ *i*
$m = \max\{M_i \colon M_i \leq m^{[s]}, i = 1, \ldots, n\}$, $M = \min\{m_i \colon m_i \geq M^{[s]}, i = 1, \ldots, n\}$, *tada vrijedi*

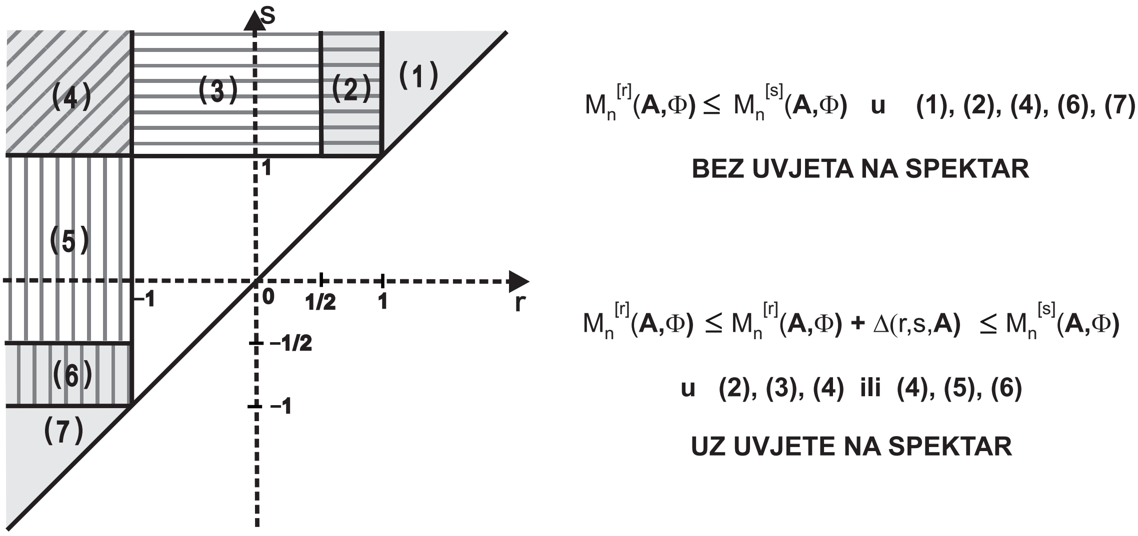
$$\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \Phi_i \left(A_i^r \right) - \delta_{s,r} \widetilde{A}_s \right)^{1/r} \leq \mathcal{M}_n^{[s]}(\mathbf{A}, \mathbf{\Phi}),$$

gdje $\delta_{s,r} \geq 0$ *za* $r \leq -1$, $\delta_{s,r} \leq 0$ *za* $r \geq 1$ *i* $\widetilde{A}_s \geq 0$. *Ovdje pretpostavljamo da su* $\delta_{s,r} \equiv \delta_{s,r}(\bar{m}, \bar{M})$, $\widetilde{A}_s \equiv \widetilde{A}_s(\bar{m}, \bar{M})$ *definirani sa* (2.54) *i* $\bar{m} \in [m, m^{[s]}]$, $\bar{M} \in [M^{[s]}, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, *su proizvoljni brojevi.*

Dokaz. Dokazujemo samo slučaj (i). Stavimo $\varphi(t) = t^r$ i $\psi(t) = t^s$ za $t > 0$. Tada je $\psi \circ \varphi^{-1}(t) = t^{s/r}$ konkavna za $r \leq s$, $s \leq 0$ i $r \neq 0$. Kako je $-\psi^{-1}(t) = -t^{1/s}$ operatorski monotona za $s \leq -1$ i zadovoljeno je $\left(m^{[r]}, M^{[r]}\right) \cap [m_i, M_i] = \emptyset$, tada primjenjujući teorem 2.2.9.-(ii) dobivamo (2.55) za $r \leq s \leq -1$.
Ali, $\psi \circ \varphi^{-1}(t) = t^{s/r}$ je konveksna za $r \leq s$, $s \geq 0$ i $r \neq 0$. Kako je $\psi^{-1}(t) = t^{1/s}$ operatorski monotona za $s \geq 1$, tada primjenjujući teorem 2.2.9.-(i) dobivamo (2.55) za $r \leq s$, $s \geq 1$, $r \neq 0$.
Ako $r = 0$ i $s \geq 1$, stavimo $\varphi(t) = \ln t$ i $\psi(t) = t^s$, $t > 0$. Kako je $\psi \circ \varphi^{-1}(t) = \exp(st)$ konveksna, tada slično kao gore dobivamo traženu nejednakost.

U slučaju (ii) stavimo $\varphi(t) = t^s$ i $\psi(t) = t^r$ za $t > 0$, te koristimo istu tehniku kao u slučaju (i). ∎

Sljedeća slika prikazuje područja (1),(2),(4),(6),(7) u kojima vrijedi monotonost potencijalnih sredina [44, Korolar 6], također slika prikazuje područja (1)-(7) gdje to vrijedi uz uvjet na spektru [44, Korolar 7]. Pokazano je u [44, Primjer 2] da odnos između potencijalnih sredina ne vrijedi općenito bez uvjeta na spektru u područjima (3),(5). Sada, koristeći korolar 2.2.13. dajemo poboljšanje nejednakosti između potencijalnih sredina u područjima (2)-(6) (vidjeti primjedbu 2.2.15.).



Slika 2..2: Područja koja prikazuju nejednakosti između potencijalnih sredina

Korolar 2.2.14. *Neka su* $(A_1,\ldots,A_n)$ *i* $(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ *kao u definiciji potencijalnih sredina* (2.53). *Neka su* m_i *i* M_i, $0<m_i\le M_i$ *ograde od* A_i, $i=1,\ldots,n$. *Neka*

$$\begin{aligned}&\left(m^{[r]},M^{[r]}\right)\cap[m_i,M_i]=\emptyset,\quad i=1,\ldots,n,\qquad m_{[r]}<M_{[r]},\\&\left(m^{[s]},M^{[s]}\right)\cap[m_i,M_i]=\emptyset,\quad i=1,\ldots,n,\qquad m_{[s]}<M_{[s]},\end{aligned}$$

gdje su $m^{[r]}$, $M^{[r]}$, $m^{[r]}\le M^{[r]}$ *i* $m^{[s]}$, $M^{[s]}$, $m^{[s]}\le M^{[s]}$ *ograde od* $\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})$ *i* $\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})$, *respektivno, i*

$$\begin{aligned}m_{[r]}&=\max\left\{M_i\colon M_i\le m^{[r]},i=1,\ldots,n\right\},\quad M_{[r]}=\min\left\{m_i\colon m_i\ge M^{[r]},i=1,\ldots,n\right\}\\m_{[s]}&=\max\left\{M_i\colon M_i\le m^{[s]},i=1,\ldots,n\right\},\quad M_{[s]}=\min\left\{m_i\colon m_i\ge M^{[s]},i=1,\ldots,n\right\}.\end{aligned}$$

Neka su $\bar m\in[m_{[r]},m^{[r]}]$, $\bar M\in[M^{[r]},M_{[r]}]$, $\bar m<\bar M$, *i* $\bar{\bar m}\in[m_{[s]},m^{[s]}]$, $\bar{\bar M}\in[M^{[s]},M_{[s]}]$, $\bar{\bar m}<\bar{\bar M}$ *proizvoljni brojevi.*

(**i**) *Ako* $r\le 1\le s$, *onda vrijedi*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})&\le\sum_{i=1}^n\Phi_i\left(A_i\right)-\delta_{r,1}(\bar m,\bar M)\widetilde{A}_r(\bar m,\bar M)\le\mathcal{M}_n^{[1]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})\\&\le\sum_{i=1}^n\Phi_i\left(A_i\right)-\delta_{s,1}(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\widetilde{A}_s(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\le\mathcal{M}_n^{[s]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})\end{aligned}\tag{2.56}$$

gdje su $\delta_{r,1}(\bar m,\bar M)\ge 0$, $\widetilde{A}_r(\bar m,\bar M)\ge 0$, $\delta_{s,1}(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\le 0$ *i* $\widetilde{A}_s(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\ge 0$ *definirani sa* (2.54).

(**ii**) *Nadalje, ako* $r\le -1\le s$, *onda vrijedi*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})&\le\left(\sum_{i=1}^n\Phi_i\left(A_i^{-1}\right)-\delta_{r,-1}(\bar m,\bar M)\widetilde{A}_r(\bar m,\bar M)\right)^{-1}\le\mathcal{M}_n^{[-1]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})\\&\le\left(\sum_{i=1}^n\Phi_i\left(A_i^{-1}\right)-\delta_{s,-1}(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\widetilde{A}_s(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\right)^{-1}\le\mathcal{M}_n^{[s]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})\end{aligned}\tag{2.57}$$

gdje su $\delta_{r,-1}(\bar m,\bar M)\le 0$, $\widetilde{A}_r(\bar m,\bar M)\ge 0$, $\delta_{s,-1}(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\ge 0$ *i* $\widetilde{A}_s(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\ge 0$ *definirani sa* (2.54).

(**iii**) *Nadalje, ako* $r\le -1$, $s\ge 1$, *onda vrijedi*

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})\le\left(\sum_{i=1}^n\Phi_i\left(A_i^{-1}\right)-\delta_{r,-1}(\bar m,\bar M)\widetilde{A}_r(\bar m,\bar M)\right)^{-1}\le\mathcal{M}_n^{[-1]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})\\\le\ &\mathcal{M}_n^{[1]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})\le\sum_{i=1}^n\Phi_i\left(A_i\right)-\delta_{s,1}(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\widetilde{A}_s(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\le\mathcal{M}_n^{[s]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})\end{aligned}\tag{2.58}$$

gdje su $\delta_{r,-1}(\bar m,\bar M)\le 0$, $\widetilde{A}_r(\bar m,\bar M)\ge 0$, $\delta_{s,1}(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\le 0$, $\widetilde{A}_s(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\ge 0$ *definirani sa* (2.54).

Dokaz. Dokazujemo samo (2.56). Ako $r\le 1$, stavljajući $s=1$ u korolar 2.2.13. (i) dobivamo lijevu stranu od (2.56). Također, ako $s\ge 1$, stavljajući $r=1$ u korolar 2.2.13. (ii) dobivamo desnu stranu od (2.56). ■

Primjedba 2.2.15. *Neka vrijede pretpostavke korolara 2.2.14. Dobivamo poboljšanje nejednakosti između potencijalnih sredina na sljedeći način.*

Ako $r\le 1\le s$, *onda*

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})\le\\\le\ &\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi})+\delta_{r,1}(\bar m,\bar M)\widetilde{A}_r(\bar m,\bar M)-\delta_{s,1}(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\widetilde{A}_s(\bar{\bar m},\bar{\bar M})\le\mathcal{M}_n^{[s]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi}).\end{aligned}$$

Ako $r \le -1 \le s$, onda

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi}) &\le \mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi}) + \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i\left(A_i^{-1}\right) - \delta_{s,-1}(\bar{\bar{m}},\bar{\bar{M}})\widetilde{A}_s(\bar{\bar{m}},\bar{\bar{M}})\right)^{-1} \\ &- \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i\left(A_i^{-1}\right) - \delta_{r,-1}(\bar{m},\bar{M})\widetilde{A}_r(\bar{m},\bar{M})\right)^{-1} \le \mathcal{M}_n^{[s]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi}).\end{aligned}$$

Ako $r \le -1$, $s \ge 1$, onda

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi}) &\le \mathcal{M}_n^{[r]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi}) + \mathcal{M}_n^{[1]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi}) - \delta_{s,1}(\bar{\bar{m}},\bar{\bar{M}})\widetilde{A}_s(\bar{\bar{m}},\bar{\bar{M}}) \\ &- \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i\left(A_i^{-1}\right) - \delta_{r,-1}(\bar{m},\bar{M})\widetilde{A}_r(\bar{m},\bar{M})\right)^{-1} \le \mathcal{M}_n^{[s]}(\mathbf{A},\mathbf{\Phi}).\end{aligned}$$

Zatim smo u radu [47] dobili iduće proširenje Jensenove nejednakosti dane u teoremu 2.2.5., te poboljšanje teorema 2.2.3.

Teorem 2.2.16. *Neka je $(A_1,\ldots,A_n)$ $n-$torka hermitskih operatora $A_i \in B(H)$ sa ogradama m_i i M_i, $m_i \le M_i$, $i=1,\ldots,n$. Neka je $(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ $n-$torka pozitivnih linearnih preslikavanja $\Phi_i : B(H) \to B(K)$, takva da $\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(1_H) = \alpha\, 1_K$, $\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(1_H) = \beta\, 1_K$, gdje $1 \le n_1 < n$, $\alpha,\beta > 0$ i $\alpha+\beta=1$. Neka je $m_L = \min\{m_1,\ldots,m_{n_1}\}$, $M_R = \max\{M_1,\ldots,M_{n_1}\}$ i*

$$\begin{aligned} m &= \begin{cases} m_L, & \text{ako } \{M_i\colon M_i \le m_L, i=n_1+1,\ldots,n\} = \emptyset, \\ \max\{M_i\colon M_i \le m_L, i=n_1+1,\ldots,n\}, & \text{inače,}\end{cases} \\ M &= \begin{cases} M_R, & \text{ako } \{m_i\colon m_i \ge M_R, i=n_1+1,\ldots,n\} = \emptyset, \\ \min\{m_i\colon m_i \ge M_R, i=n_1+1,\ldots,n\}, & \text{inače.}\end{cases}\end{aligned}$$

Ako

$$(m_L, M_R) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \quad za \quad i=n_1+1,\ldots,n, \qquad m < M,$$

i vrijedi jedna od jednakosti

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(A_i) = \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(A_i)$$

onda

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) &\le \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) + \beta\delta_f\widetilde{A} \le \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(f(A_i)) \\ &\le \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)) - \alpha\delta_f\widetilde{A} \le \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)), \quad (2.59)\end{aligned}$$

vrijedi za svaku neprekidnu konveksnu funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ uz uvjet da interval I sadrži sve m_i, M_i, $i=1,\ldots,n$, gdje

$$\begin{aligned}\delta_f \equiv \delta_f(\bar{m},\bar{M}) &= f(\bar{m}) + f(\bar{M}) - 2f\left(\frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}\right) \\ \widetilde{A} \equiv \widetilde{A}_{A,\Phi,n_1,\alpha}(\bar{m},\bar{M}) &= \frac{1}{2}1_K - \frac{1}{\alpha(\bar{M}-\bar{m})}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(\left|A_i - \frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}1_H\right|\right)\end{aligned} \quad (2.60)$$

i $\bar{m} \in [m, m_L]$, $\bar{M} \in [M_R, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, su proizvoljni brojevi.

Ako je $f\colon I \to \mathbb{R}$ konkavna, onda vrijede suprotne nejednakosti u (2.59).

Dokaz. Dokazujemo samo konveksni slučaj. Označimo

$$A=\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i),\qquad B=\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(A_i),\qquad C=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(A_i).$$

Lagano se provjeri da $A=B$ ili $B=C$ ili $A=C$ implicira $A=B=C$.
Kako je f konveksna na $[\bar{m},\bar{M}]$ i $\mathsf{Sp}(A_i)\subseteq[m_i,M_i]\subseteq[\bar{m},\bar{M}]$ za $i=1,\ldots,n_1$, iz leme 2.2.4. slijedi da

$$f\left(A_i\right)\leq\frac{\bar{M}1_H-A_i}{\bar{M}-\bar{m}}f(\bar{m})+\frac{A_i-\bar{m}1_H}{\bar{M}-\bar{m}}f(\bar{M})-\delta_f\widetilde{A}_i,\qquad i=1,\ldots,n_1$$

vrijedi, gdje $\delta_f=f(\bar{m})+f(\bar{M})-2f\left(\frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}\right)$ i $\widetilde{A}_i=\frac{1}{2}1_H-\frac{1}{\bar{M}-\bar{m}}\left|A_i-\frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}1_H\right|$.
Primijenimo pozitivno linearno preslikavanje Φ_i i sumirajmo, te dobijemo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(f(A_i)\right)\quad&\leq\quad\frac{\bar{M}\alpha1_K-\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i)}{\bar{M}-\bar{m}}f(\bar{m})+\frac{\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i)-\bar{m}\alpha1_K}{\bar{M}-\bar{m}}f(\bar{M})\\&-\quad\delta_f\left(\frac{\alpha}{2}1_K-\frac{1}{\bar{M}-\bar{m}}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(\left|A_i-\frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}1_H\right|\right)\right),\end{aligned}$$

jer je $\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(1_H)=\alpha1_K$. Slijedi

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(f(A_i)\right)\leq\frac{\bar{M}1_K-A}{\bar{M}-\bar{m}}f(\bar{m})+\frac{A-\bar{m}1_K}{\bar{M}-\bar{m}}f(\bar{M})-\delta_f\widetilde{A},\tag{2.61}$$

gdje $\widetilde{A}=\frac{1}{2}1_K-\frac{1}{\alpha(\bar{M}-\bar{m})}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(\left|A_i-\frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}1_H\right|\right)$.

Dodatno, kako je f konveksna na cijelom $[m_i,M_i]$ i $(\bar{m},\bar{M})\cap[m_i,M_i]=\emptyset$ za $i=n_1+1,\ldots,n$, imamo

$$f(A_i)\geq\frac{\bar{M}1_H-A_i}{\bar{M}-\bar{m}}f(\bar{m})+\frac{A_i-\bar{m}1_H}{\bar{M}-\bar{m}}f(\bar{M}),\qquad i=n_1+1,\ldots,n.$$

Slijedi

$$\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i\left(f(A_i)\right)-\delta_f\widetilde{A}\geq\frac{\bar{M}1_K-B}{\bar{M}-\bar{m}}f(\bar{m})+\frac{B-\bar{m}1_K}{\bar{M}-\bar{m}}f(\bar{M})-\delta_f\widetilde{A}.\tag{2.62}$$

Kombinirajući (2.61) i (2.62), te uzimajući u obzir $A=B$, dobivamo

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(f(A_i)\right)\leq\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i\left(f(A_i)\right)-\delta_f\widetilde{A}.\tag{2.63}$$

Sada

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i))\\
=\ &\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i))+\frac{\beta}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) \quad (\text{by } \alpha+\beta=1)\\
\le\ &\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i))+\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i))-\beta\delta_f\widetilde{A} \qquad (\text{po } (2.63))\\
\le\ &\frac{\alpha}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i))-\alpha\delta_f\widetilde{A}+\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i))-\beta\delta_f\widetilde{A} \qquad (\text{po } (2.63))\\
=\ &\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i))-\delta_f\widetilde{A} \quad (\text{po } \alpha+\beta=1),
\end{aligned}$$

što daje sljedeću dvostruku nejednakost

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i))\le\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(f(A_i))-\beta\delta_f\widetilde{A}\le\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i))-\delta_f\widetilde{A}.$$

Dodajući $\beta\delta_f\widetilde{A}$ gornjim nejednakostima imamo

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i))+\beta\delta_f\widetilde{A}\le\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(f(A_i))\le\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i))-\alpha\delta_f\widetilde{A}. \tag{2.64}$$

Primijetimo, $\delta_f\ge 0$ i $\widetilde{A}\ge 0$. (Kako

$$\mathsf{Sp}(A_i)\subseteq[\bar{m},\bar{M}] \quad\Rightarrow\quad \left|A_i-\frac{\bar{M}+\bar{m}}{2}1_H\right|\le\frac{\bar{M}-\bar{m}}{2}1_H, \qquad \text{za } i=1,\dots,n_1,$$

tada

$$\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(\left|A_i-\frac{\bar{M}+\bar{m}}{2}1_H\right|\right)\le\frac{\bar{M}-\bar{m}}{2}\alpha 1_K,$$

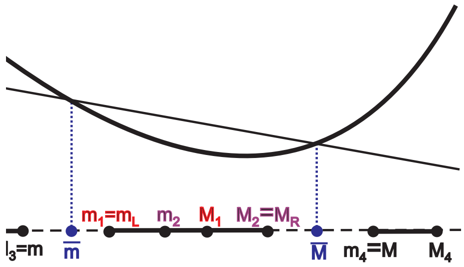
što daje

$$0\le\frac{1}{2}1_K-\frac{1}{\alpha(\bar{M}-\bar{m})}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(\left|A_i-\frac{\bar{M}+\bar{m}}{2}1_H\right|\right)=\widetilde{A}. \qquad)$$

Posljedično, vrijede sljedeće nejednakosti

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i))&\le\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i))+\beta\delta_f\widetilde{A},\\
\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i))-\alpha\delta_f\widetilde{A}&\le\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)),
\end{aligned}$$

što zajedno sa (2.64) dokazuje traženi niz nejednakosti (2.59). ∎



$$\frac{1}{\alpha}\left(\Phi_1(f(A_1))+\Phi_2(f(A_2))\right)\leq\frac{1}{\alpha}\left(\Phi_1(f(A_1))+\Phi_2(f(A_2))\right)+\beta\delta_f\tilde{A}$$
$$\leq\Phi_1(f(A_1))+\Phi_2(f(A_2))+\Phi_3(f(A_3))+\Phi_4(f(A_4))$$
$$\leq\frac{1}{\beta}\left(\Phi_3(f(A_3))+\Phi_4(f(A_4))\right)-\alpha\delta_f\tilde{A}\leq\Phi_3(f(A_3))+\Phi_4(f(A_4)),$$

gdje je

$$\delta_f=f(\overline{m})+f(\overline{M})-2f((\overline{M}+\overline{m})/2),$$
$$\tilde{A}=\frac{1}{2}1_K-\frac{1}{\alpha(\overline{M}-\overline{m})}\left(\Phi_1(|A_1-\frac{\overline{M}+\overline{m}}{2}1_H|)+\Phi_2(|A_2-\frac{\overline{M}+\overline{m}}{2}1_H|)\right)$$

Slika 2..3: Primjer konveksne funkcije i ograde za četiri operatora

Primjer 2.2.17. *Promotrimo matrični slučaj teorema 2.2.16. za $f(t)=t^4$ koja je konveksna funkcija, ali nije operatorski konveksna, $n=4$, $n_1=2$ i ograde kao na slici.*

Pokažimo primjer tako da vrijedi

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\alpha}\left(\Phi_1(A_1^4)+\Phi_2(A_2^4)\right) &< \tfrac{1}{\alpha}\left(\Phi_1(A_1^4)+\Phi_2(A_2^4)\right)+\beta\delta_f\widetilde{A}\\ &< \Phi_1(A_1^4)+\Phi_2(A_2^4)+\Phi_3(A_3^4)+\Phi_4(A_4^4)\\ &< \tfrac{1}{\beta}\left(\Phi_3(A_3^4)+\Phi_4(A_4^4)\right)-\alpha\delta_f\widetilde{A} < \tfrac{1}{\beta}\left(\Phi_3(A_3^4)+\Phi_4(A_4^4)\right)\end{aligned} \tag{2.65}$$

gdje $\delta_f=\bar{M}^4+\bar{m}^4-(\bar{M}+\bar{m})^4/8$ i

$$\widetilde{A}=\frac{1}{2}I_2-\frac{1}{\alpha(\bar{M}-\bar{m})}\left(\Phi_1\left(|A_1-\frac{\bar{M}+\bar{m}}{2}I_h|\right)+\Phi_2\left(|A_2-\frac{\bar{M}+\bar{m}}{2}I_3|\right)\right).$$

Definiramo preslikavanja $\Phi_i\colon M_3(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C})$ na sljedeći način: $\Phi_i((a_{jk})_{1\leq j,k\leq 3})=\frac{1}{4}(a_{jk})_{1\leq j,k\leq 2}$, $i=1,\ldots,4$. Tada $\sum_{i=1}^4\Phi_i(I_3)=I_2$ i $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$.
Neka su

$$A_1=2\begin{pmatrix}2&9/8&1\\9/8&2&0\\1&0&3\end{pmatrix},\qquad A_2=3\begin{pmatrix}2&9/8&0\\9/8&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$
$$A_3=-3\begin{pmatrix}4&1/2&1\\1/2&4&0\\1&0&2\end{pmatrix},\qquad A_4=12\begin{pmatrix}5/3&1/2&0\\1/2&3/2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Tada $m_1=1.28607$, $M_1=7.70771$, $m_2=0.53777$, $M_2=5.46221$, $m_3=-14.15050$, $M_3=-4.71071$, $m_4=12.91724$, $M_4=36.$, te su $m_L=m_2$, $M_R=M_1$, $m=M_3$ i $M=m_4$ (zaokruženo na četiri decimalna mjesta). Također,

$$\frac{1}{\alpha}\left(\Phi_1(A_1)+\Phi_2(A_2)\right)=\frac{1}{\beta}\left(\Phi_3(A_3)+\Phi_4(A_4)\right)=\begin{pmatrix}4&9/4\\9/4&3\end{pmatrix},$$

i

$$\begin{aligned}A_f\equiv\frac{1}{\alpha}\left(\Phi_1(A_1^4)+\Phi_2(A_2^4)\right) &= \begin{pmatrix}989.00391&663.46875\\663.46875&526.12891\end{pmatrix},\\ C_f\equiv\Phi_1(A_1^4)+\Phi_2(A_2^4)+\Phi_3(A_3^4)+\Phi_4(A_4^4) &= \begin{pmatrix}68093.14258&48477.98437\\48477.98437&51335.39258\end{pmatrix},\\ B_f\equiv\frac{1}{\beta}\left(\Phi_3(A_3^4)+\Phi_4(A_4^4)\right) &= \begin{pmatrix}135197.28125&96292.5\\96292.5&102144.65625\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Tada vrijedi

$$A_f < C_f < B_f \tag{2.66}$$

što je konzistentno sa (2.34)*).*

Izaberemo tri para brojeva $(\bar{m}, \bar{M})$, $\bar{m} \in [-4.71071, 0.53777]$, $\bar{M} \in [7.70771, 12.91724]$ *na sljedeći način:*

i) $\bar{m} = m_L = 0.53777$, $\bar{M} = M_R = 7.70771$, *tada*

$$\widetilde{\Delta}_1 = \beta\delta_f\widetilde{A} = 0.5 \cdot 2951.69249 \cdot \begin{pmatrix} 0.15678 & 0.09030 \\ 0.09030 & 0.15943 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 231.38908 & 133.26139 \\ 133.26139 & 235.29515 \end{pmatrix},$$

ii) $\bar{m} = m = -4.71071$, $\bar{M} = M = 12.91724$, *tada*

$$\widetilde{\Delta}_2 = \beta\delta_f\widetilde{A} = 0.5 \cdot 27766.07963 \cdot \begin{pmatrix} 0.36022 & 0.03573 \\ 0.03573 & 0.36155 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000.89860 & 496.04498 \\ 496.04498 & 5019.50711 \end{pmatrix},$$

iii) $\bar{m} = -1$, $\bar{M} = 10$, *tada*

$$\widetilde{\Delta}_3 = \beta\delta_f\widetilde{A} = 0.5 \cdot 9180.875 \cdot \begin{pmatrix} 0.28203 & 0.08975 \\ 0.08975 & 0.27557 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1294.66 & 411.999 \\ 411.999 & 1265. \end{pmatrix}.$$

Sada dobijemo poboljšanje od (2.66) *(vidjeti* (2.65)*):*

i)
$$\begin{aligned} A_f &< A_f + \widetilde{\Delta}_1 = \begin{pmatrix} 1220.39299 & 796.73014 \\ 796.73014 & 761.42406 \end{pmatrix} \\ &< C_f < \begin{pmatrix} 134965.89217 & 96159.23861 \\ 96159.23861 & 101909.36110 \end{pmatrix} = B_f - \widetilde{\Delta}_1 < B_f, \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} A_f &< A_f + \widetilde{\Delta}_2 = \begin{pmatrix} 5989.90251 & 1159.51373 \\ 1159.51373 & 5545.63601 \end{pmatrix} \\ &< C_f < \begin{pmatrix} 130196.38265 & 95796.45502 \\ 95796.45502 & 97125.14914 \end{pmatrix} = B_f - \widetilde{\Delta}_2 < B_f, \end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned} A_f &< A_f + \widetilde{\Delta}_3 = \begin{pmatrix} 2283.66362 & 1075.46746 \\ 1075.46746 & 1791.12874 \end{pmatrix} \\ &< C_f < \begin{pmatrix} 133902.62153 & 95880.50129 \\ 95880.50129 & 100879.65641 \end{pmatrix} = B_f - \widetilde{\Delta}_3 < B_f. \end{aligned}$$

Koristeći teorem 2.2.16. dobivamo sljedeći rezultat.

Korolar 2.2.18. *Neka vrijede pretpostavke teorema 2.2.16. Tada vrijedi*

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) \le \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) + \gamma_1\delta_f\widetilde{A} \le \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)) \tag{2.67}$$

i

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) \le \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)) - \gamma_2\delta_f\widetilde{A} \le \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)) \tag{2.68}$$

za svaki γ_1, γ_2 *u zatvorenom intervalu koji spaja* α *i* β, *gdje su* δ_f *i* $\widetilde{A}$ *definirani sa* (2.60).

Dokaz. Dodamo $\alpha\delta_f\widetilde{A}$ u (2.59) i primijetimo $\delta_f\widetilde{A} \geq 0$, te dobijemo

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) \leq \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) + \alpha\delta_f\widetilde{A} \leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)).$$

Uzimajući u obzir prethodnu nejednakost i lijevu stranu nejednakosti (2.59), dobivamo (2.67).

Slično, oduzmemo $\beta\delta_f\widetilde{A}$ u (2.59), te dobijemo (2.68). ■

Primjedba 2.2.19. *Neka vrijede pretpostavke teorema 2.2.16.*
1) Primijetimo da sljedeće nejednakosti

$$f\left(\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(A_i)\right) \leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)) - \delta_f\widetilde{A}_\beta \leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i))$$

vrijede za svaku neprekidnu konveksnu funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ uz uvjet da interval I sadrži sve m_i, M_i, $i = 1,\ldots,n$, gdje je δ_f definiran sa (2.60),

$$\widetilde{A}_\beta \equiv \widetilde{A}_{\beta,A,\Phi,n_1}(\bar{m},\bar{M}) = \frac{1}{2}1_K - \frac{1}{\bar{M}-\bar{m}}\left|\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i A_i - \frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}1_K\right|$$

i $\bar{m} \in [m, m_L]$, $\bar{M} \in [M_R, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, *su proizvoljni brojevi.*

Doista, po pretpostavkama teorema 2.2.16. imamo

$$m_L\alpha 1_H \leq \sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i) \leq M_R\alpha 1_H \quad i \quad \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i) = \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(A_i)$$

što implicira

$$m_L 1_H \leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(A_i) \leq M_R 1_H.$$

Također $(m_L, M_R)\cap[m_i, M_i] = \emptyset$ *za* $i = n_1+1,\ldots,n$ *i vrijedi* $\sum_{i=n_1+1}^{n}\frac{1}{\beta}\Phi_i(1_H) = 1_K$. *Možemo primijeniti teorem 2.2.5. na operatore* $A_{n_1+1},\ldots,A_n$ *i preslikavanja* $\frac{1}{\beta}\Phi_i$. *Sada dobivamo traženu nejednakost.*

2) Sa m_C i M_C označimo ograde od $C = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(A_i)$. Ako $(m_C, M_C)\cap[m_i, M_i] = \emptyset$, $i = 1,\ldots,n_1$, tada niz nejednakosti (2.59) *možemo proširiti sa lijeve strane ako koristimo lijevu stranu poboljšane Jensenove operatorske nejednakosti* (2.38)

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(A_i)\right) &= f\left(\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i)\right) \leq \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) - \delta_f\widetilde{A}_\alpha \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) \leq \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) + \beta\delta_f\widetilde{A} \leq \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(f(A_i)) \\
&\leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)) - \alpha\delta_f\widetilde{A} \leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)),
\end{aligned}$$

gdje su δ_f *i* $\widetilde{A}$ *definirani sa* (2.60),

$$\widetilde{A}_\alpha \equiv \widetilde{A}_{\alpha,A,\Phi,n_1}(\bar{m},\bar{M}) = \frac{1}{2}1_K - \frac{1}{\bar{M}-\bar{m}}\left|\frac{1}{\alpha}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i A_i - \frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}1_K\right|.$$

Primjedba 2.2.20. *Dobivamo nejednakosti ekvivalentne onima u teoremu 2.2.16. za slučaj kada* $\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(1_H) = \gamma\, 1_K$, *za neki pozitivan skalar* γ. *Ako vrijedi* $\alpha+\beta=\gamma$ *i jedna od jednakosti*

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i) = \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(A_i) = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(A_i),$$

tada vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) &\le \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f(A_i)) + \frac{\beta}{\gamma}\delta_f\widetilde{A} \le \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(f(A_i))\\ &\le \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)) - \frac{\alpha}{\gamma}\delta_f\widetilde{A} \le \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f(A_i)),\end{aligned}$$

za svaku neprekidnu konveksnu funkciju $f\colon I\to\mathbb{R}$ *uz uvjet da interval* I *sadrži sve* m_i, M_i, $i=1,\dots,n$, *gdje su* δ_f *i* $\widetilde{A}$ *definirani sa* (2.60).

Uvažavajući primjedbu 2.2.20., dobivamo očiti korolar teorema 2.2.16. sa konveksnom kombinacijom operatora $A_i, i=1,\dots,n$.

Korolar 2.2.21. *Neka je* $(A_1,\dots,A_n)$ *n-torka hermitskih operatora* $A_i\in B(H)$ *sa ogradama* m_i *i* M_i, $m_i\le M_i$, $i=1,\dots,n$. *Neka je* $(p_1,\dots,p_n)$ $n-$*torka nenegativnih brojeva takvih da* $0<\sum_{i=1}^{n_1}p_i=\mathbf{p_{n_1}}<\mathbf{p_n}=\sum_{i=1}^{n}p_i$, *gdje* $1\le n_1<n$. *Neka* $m_L=\min\{m_1,\dots,m_{n_1}\}$, $M_R=\max\{M_1,\dots,M_{n_1}\}$ *i*

$$\begin{aligned} m &= \begin{cases} m_L, & \text{ako } \{M_i\colon M_i\le m_L, i=n_1+1,\dots,n\}=\emptyset,\\ \max\{M_i\colon M_i\le m_L, i=n_1+1,\dots,n\}, & \text{inače,}\end{cases}\\ M &= \begin{cases} M_R, & \text{ako } \{m_i\colon m_i\ge M_R, i=n_1+1,\dots,n\}=\emptyset,\\ \min\{m_i\colon m_i\ge M_R, i=n_1+1,\dots,n\}, & \text{inače.}\end{cases}\end{aligned}$$

Ako vrijedi

$$(m_L,M_R)\cap[m_i,M_i]=\emptyset \quad za \quad i=n_1+1,\dots,n, \qquad m<M,$$

i jedna od jednakosti

$$\frac{1}{\mathbf{p_{n_1}}}\sum_{i=1}^{n_1}p_iA_i = \frac{1}{\mathbf{p_n}}\sum_{i=1}^{n}p_iA_i = \frac{1}{\mathbf{p_n}-\mathbf{p_{n_1}}}\sum_{i=n_1+1}^{n}p_iA_i,$$

onda

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathbf{p_{n_1}}}\sum_{i=1}^{n_1}p_if(A_i) &\le \frac{1}{\mathbf{p_{n_1}}}\sum_{i=1}^{n_1}p_if(A_i) + \left(1-\frac{\mathbf{p_{n_1}}}{\mathbf{p_n}}\right)\delta_f\widetilde{A} \le \frac{1}{\mathbf{p_n}}\sum_{i=1}^{n}p_if(A_i)\\ &\le \frac{1}{\mathbf{p_n}-\mathbf{p_{n_1}}}\sum_{i=n_1+1}^{n}p_if(A_i) - \frac{\mathbf{p_{n_1}}}{\mathbf{p_n}}\delta_f\widetilde{A} \le \frac{1}{\mathbf{p_n}-\mathbf{p_{n_1}}}\sum_{i=n_1+1}^{n}p_if(A_i),\end{aligned} \tag{2.69}$$

vrijedi za svaku neprekidnu konveksnu funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ uz uvjet da interval I sadrži sve m_i, M_i, $i = 1, \ldots, n$, gdje je δ_f definirano sa (2.60),

$$\widetilde{A} \equiv \widetilde{A}_{A,p,n_1}(\bar{m}, \bar{M}) = \frac{1}{2}1_H - \frac{1}{\mathbf{p_{n_1}}(\bar{M} - \bar{m})} \sum_{i=1}^{n_1} p_i \left(\left| A_i - \frac{\bar{m} + \bar{M}}{2} 1_H \right| \right)$$

i $\bar{m} \in [m, m_L]$, $\bar{M} \in [M_R, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, *su proizvoljni brojevi.*

Ako je $f\colon I \to \mathbb{R}$ konkavna, onda vrijede suprotne nejednakosti u (2.69).

Kao specijalan slučaj korolara 2.2.21. dobivamo proširenje od korolara 2.2.8.

Korolar 2.2.22. *Neka je $(A_1, \ldots, A_n)$ $n-$torka hermitskih operatora $A_i \in B(H)$ sa ogradama m_i i M_i, $m_i \le M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Neka je $(p_1, \ldots, p_n)$ $n-$torka nenegativnih brojeva takvih da $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Neka*

$$(m_A, M_A) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \quad \text{za } i = 1, \ldots, n, \qquad \text{i} \qquad m < M,$$

gdje su m_A i M_A, $m_A \le M_A$, ograde od $A = \sum_{i=1}^n p_i A_i$ i

$$m = \max\{M_i \colon M_i \le m_A, i = 1, \ldots, n\}, \ M = \min\{m_i \colon m_i \ge M_A, i = 1, \ldots, n\}.$$

Ako je $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija uz uvjet da interval I sadrži sve m_i, M_i, onda vrijedi

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^n p_i A_i) &\le f(\sum_{i=1}^n p_i A_i) + \frac{1}{2}\delta_f \tilde{\tilde{A}} \le \frac{1}{2} f(\sum_{i=1}^n p_i A_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n p_i f(A_i) \\ &\le \sum_{i=1}^n p_i f(A_i) - \frac{1}{2}\delta_f \tilde{\tilde{A}} \le \sum_{i=1}^n p_i f(A_i), \end{aligned} \tag{2.70}$$

gdje je δ_f definirano sa (2.60), $\tilde{\tilde{A}} = \frac{1}{2}1_H - \frac{1}{\bar{M}-\bar{m}} \left| \sum_{i=1}^n p_i A_i - \frac{\bar{m}+\bar{M}}{2} 1_H \right|$ *i* $\bar{m} \in [m, m_A]$, $\bar{M} \in [M_A, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, *su proizvoljni brojevi.*

Ako je $f\colon I \to \mathbb{R}$ konkavna, onda vrijede suprotne nejednakosti u (2.70).

Dokaz. Dokazujemo samo konveksni slučaj.
Definiramo $(n+1)$-torku operatora $(B_1, \ldots, B_{n+1})$, $B_i \in B(H)$, sa $B_1 = A = \sum_{i=1}^n p_i A_i$ i $B_i = A_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n+1$. Tada su $m_{B_1} = m_A$, $M_{B_1} = M_A$ ograde od B_1 i $m_{B_i} = m_{i-1}$, $M_{B_i} = M_{i-1}$ su ograde od B_i, $i = 2, \ldots, n+1$. Također, definiramo $(n+1)-$torku nenegativnih brojeva $(q_1, \ldots, q_{n+1})$ sa $q_1 = 1$ i $q_i = p_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n+1$. Imamo $\sum_{i=1}^{n+1} q_i = 2$ i vrijedi

$$(m_{B_1}, M_{B_1}) \cap [m_{B_i}, M_{B_i}] = \emptyset, \ \text{ za } i = 2, \ldots, n+1 \quad \text{i} \quad m < M. \tag{2.71}$$

Kako je

$$\sum_{i=1}^{n+1} q_i B_i = B_1 + \sum_{i=2}^{n+1} q_i B_i = \sum_{i=1}^n p_i A_i + \sum_{i=1}^n p_i A_i = 2B_1,$$

tada

$$q_1 B_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} q_i B_i = \sum_{i=2}^{n+1} q_i B_i. \tag{2.72}$$

Uzimajući u obzir (2.71) i (2.72) možemo primijeniti korolar 2.2.21. za $n_1 = 1$ i B_i, q_i kao gore, te dobijemo

$$q_1 f(B_1) \leq q_1 f(B_1) + \frac{1}{2}\delta_f \widetilde{B} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} q_i f(B_i) \leq \sum_{i=2}^{n+1} q_i f(B_i) - \frac{1}{2}\delta_f \widetilde{B} \leq \sum_{i=2}^{n+1} q_i f(B_i),$$

gdje $\widetilde{B} = \frac{1}{2}1_H - \frac{1}{\bar{M}-\bar{m}}\left|B_1 - \frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}1_H\right|$, što daje tražene nejednakosti (2.70). ∎

Sada proučavamo primjene teorema 2.2.16. na kvaziaritmetičke sredine sa težinom.
Za podskup $\{A_{n_1}, \ldots, A_{n_2}\}$ od $\{A_1, \ldots, A_n\}$, označavamo kvaziaritmetičku sredinu sa težinom sa

$$\mathcal{M}_\varphi(\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n_1, n_2) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\gamma}\sum_{i=n_1}^{n_2} \Phi_i\left(\varphi(A_i)\right)\right), \tag{2.73}$$

gdje su $(A_{n_1}, \ldots, A_{n_2})$ hermitski operatori u $\mathcal{B}(H)$ sa spektrom u I, $(\Phi_{n_1}, \ldots, \Phi_{n_2})$ su pozitivna linearna preslikavanja $\Phi_i \colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ takva da $\sum_{i=n_1}^{n_2} \Phi_i(1_H) = \gamma\, 1_K$, i $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ je neprekidna strogo monotona funkcija.
Pod istim uvjetima uvodimo sljedeće oznake

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi,\psi}(m, M) &= \psi(m) + \psi(M) - 2\psi \circ \varphi^{-1}\left(\tfrac{\varphi(m)+\varphi(M)}{2}\right), \\ \widetilde{A}_{\varphi,n_1,\gamma}(m, M) &= \tfrac{1}{2}1_K - \tfrac{1}{\gamma(M-m)}\textstyle\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i\left(\left|\varphi(A_i) - \tfrac{\varphi(M)+\varphi(m)}{2}1_H\right|\right), \end{aligned} \tag{2.74}$$

gdje su $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ neprekidne strogo monotone funkcije i $m, M \in I$, $m < M$. Implicitno pretpostavljamo $\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\gamma}(m, M) \equiv \widetilde{A}_{\varphi,A,\Phi,n_1,\gamma}(m, M)$.

Sljedeći teorem je proširenje teorema 2.2.9. i poboljšanje [45, Teorem 3.1].

Teorem 2.2.23. *Neka je $(A_1, \ldots, A_n)$ $n-$torka hermitskih operatora $A_i \in B(H)$ sa ogradama m_i i M_i, $m_i \leq M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Neka su $\varphi, \psi \colon I \to \mathbb{R}$ neprekidne strogo monotone funkcije na intervalu I koji sadrži sve m_i, M_i. Neka je $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ n-torka pozitivnih linearnih preslikavanja $\Phi_i \colon B(H) \to B(K)$, takva da $\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(1_H) = \alpha\, 1_K$, $\sum_{i=n_1+1}^{n} \Phi_i(1_H) = \beta\, 1_K$, gdje $1 \leq n_1 < n$, $\alpha, \beta > 0$ i $\alpha + \beta = 1$. Neka vrijedi jedna od jednakosti*

$$\mathcal{M}_\varphi(\alpha, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n_1) = \mathcal{M}_\varphi(1, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n) = \mathcal{M}_\varphi(\beta, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n_1 + 1, n) \tag{2.75}$$

i neka

$$(m_L, M_R) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \quad za \quad i = n_1 + 1, \ldots, n, \qquad m < M,$$

gdje $m_L = \min\{m_1, \ldots, m_{n_1}\}$, $M_R = \max\{M_1, \ldots, M_{n_1}\}$,

$$\begin{aligned} m &= \begin{cases} m_L, & \text{ako } \{M_i \colon M_i \leq m_L, i = n_1 + 1, \ldots, n\} = \emptyset, \\ \max\{M_i \colon M_i \leq m_L, i = n_1 + 1, \ldots, n\}, & \text{inače,} \end{cases} \\ M &= \begin{cases} M_R, & \text{ako } \{m_i \colon m_i \geq M_R, i = n_1 + 1, \ldots, n\} = \emptyset, \\ \min\{m_i \colon m_i \geq M_R, i = n_1 + 1, \ldots, n\}, & \text{inače.} \end{cases} \end{aligned}$$

(i) *Ako je $\psi \circ \varphi^{-1}$ konveksna i ψ^{-1} operatorski monotona, onda vrijedi*

$$\mathcal{M}_\psi(\alpha, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n_1) \leq \psi^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(\psi(A_i)\right) + \beta\delta_{\varphi,\psi}\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha}\right) \leq \mathcal{M}_\psi(1, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n)$$
$$\leq \psi^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i\left(\psi(A_i)\right) - \alpha\delta_{\varphi,\psi}\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha}\right) \leq \mathcal{M}_\psi(\beta, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n_1+1, n) \tag{2.76}$$

gdje $\delta_{\varphi,\psi} \geq 0$ and $\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} \geq 0$.

(i′) *Ako je $\psi \circ \varphi^{-1}$ konveksna i $-\psi^{-1}$ operatorski monotona, onda vrijede suprotne nejednakosti u* (2.76)*, gdje $\delta_{\varphi,\psi} \geq 0$ i $\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} \geq 0$.*

(ii) *Ako je $\psi \circ \varphi^{-1}$ konkavna i $-\psi^{-1}$ operatorski monotona, onda vrijedi* (2.76)*, gdje $\delta_{\varphi,\psi} \leq 0$ i $\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} \geq 0$.*

(ii′) *Ako je $\psi \circ \varphi^{-1}$ konkavna i ψ^{-1} operatorski monotona, onda vrijede suprotne nejednakosti u* (2.76)*, gdje $\delta_{\varphi,\psi} \leq 0$ i $\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} \geq 0$.*

U svim gornjim slučajevima pretpostavljamo da su $\delta_{\varphi,\psi} \equiv \delta_{\varphi,\psi}(\bar{m}, \bar{M})$, $\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} \equiv \widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha}(\bar{m}, \bar{M})$ definirani sa (2.74) *i $\bar{m} \in [m, m_L]$, $\bar{M} \in [M_R, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, su proizvoljni brojevi.*

Dokaz. Dokazujemo samo slučaj (i). Pretpostavimo da je φ strogo rastuća funkcija. Tada

$$(m_L, M_R) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \qquad \text{za} \quad i = n_1+1, \ldots, n$$

implicira

$$(\varphi(m_L), \varphi(M_R)) \cap [\varphi(m_i), \varphi(M_i)] = \emptyset \quad \text{za } i = n_1+1, \ldots, n. \tag{2.77}$$

Također, koristeći (2.75) imamo

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(\varphi(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i\left(\varphi(A_i)\right) = \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i\left(\varphi(A_i)\right).$$

Uzimajući u obzir (2.77) i gornju dvostruku nejednakost, po teoremu 2.2.16. dobivamo

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f\left(\varphi(A_i)\right)) \leq \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(f\left(\varphi(A_i)\right)) + \beta\delta_f\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} \leq \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(f\left(\varphi(A_i)\right))$$
$$\leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f\left(\varphi(A_i)\right)) - \alpha\delta_f\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} \leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(f\left(\varphi(A_i)\right)), \tag{2.78}$$

za svaku neprekidnu konveksnu funkciju $f\colon J \to \mathbb{R}$ na intervalu J koji sadrži sve $[\varphi(m_i), \varphi(M_i)] = \varphi([m_i, M_i]), i = 1, \ldots, n$, gdje je $\delta_f = f(\varphi(m)) + f(\varphi(M)) - 2f\left(\frac{\varphi(m)+\varphi(M)}{2}\right)$.

Također, ako je φ strogo padajuća, tada vidimo da (2.78) vrijedi za konveksnu $f\colon J \to \mathbb{R}$ na J koji sadrži sve $[\varphi(M_i), \varphi(m_i)] = \varphi([m_i, M_i])$.

Ako stavimo $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ u (2.78), dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(\psi(A_i)\right) &\leq \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(\psi(A_i)\right) + \beta\delta_{\varphi,\psi}\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} \leq \sum_{i=1}^{n}\Phi_i\left(\psi(A_i)\right) \\ &\leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i\left(\psi(A_i)\right) - \alpha\delta_{\varphi,\psi}\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} \leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i\left(\psi(A_i)\right).\end{aligned}$$

Ako primijenimo operatorski monotonu funkciju ψ^{-1} na gornju dvostruku nejednakost, dobivamo tražene nejednakosti (2.76). ■

Sada dajemo neke zanimljive rezultate koje možemo dobiti iz teorema 2.2.23., a koji su proširenja korolara 2.2.10. i 2.2.12.i i poboljšanje od [45, Korolar 3.3].

Korolar 2.2.24. *Neka su $(A_1,\dots,A_n),(\Phi_1,\dots,\Phi_n)$, m_i, M_i, m, M, m_L, M_R, α i β kao u teoremu 2.2.23. Neka je I interval koji sadrži sve m_i, M_i i*

$$(m_L, M_R)\cap[m_i,M_i] = \emptyset \quad za \quad i = n_1+1,\dots,n, \qquad m < M.$$

I) *ako vrijedi jedna od jednakosti*

$$\mathcal{M}_\varphi(\alpha,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},1,n_1) = \mathcal{M}_\varphi(1,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},1,n) = \mathcal{M}_\varphi(\beta,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n_1+1,n)$$

onda vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i) &\leq \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i) + \beta\delta_{\varphi^{-1}}\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} \leq \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(A_i) \\ &\leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(A_i) - \alpha\delta_{\varphi^{-1}}\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} \leq \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i\Phi_i(A_i)\end{aligned} \tag{2.79}$$

za svaku neprekidnu strogo monotonu funkciju $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ takvu da je φ^{-1} konveksna na I, gdje su $\delta_{\varphi^{-1}} = \bar{m} + \bar{M} - 2\ \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(\bar{m})+\varphi(\bar{M})}{2}\right) \geq 0$, $\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha} = \frac{1}{2}1_K - \frac{1}{\alpha(\bar{M}-\bar{m})}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(\left|\varphi(A_i) - \frac{\varphi(\bar{M})+\varphi(\bar{m})}{2}1_H\right|\right)$ i $\bar{m}\in[m,m_L]$, $\bar{M}\in[M_R,M]$, $\bar{m}<\bar{M}$, proizvoljni brojevi.

Ali, ako je φ^{-1} konkavna, onda vrijede suprotne nejednakosti u (2.79) *za $\delta_{\varphi^{-1}} \leq 0$.*

II) *Ako vrijedi jedna od jednakosti*

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(A_i) = \frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(A_i)$$

onda vrijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\varphi(\alpha,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},1,n_1) &\leq \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(\varphi(A_i)\right) + \beta\delta_\varphi\widetilde{A}_{n_1}\right) \leq \mathcal{M}_\varphi(1,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},1,n) \\ &\leq \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i\left(\varphi(A_i)\right) - \alpha\delta_\varphi\widetilde{A}_{n_1}\right) \leq \mathcal{M}_\varphi(\beta,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n_1+1,n)\end{aligned} \tag{2.80}$$

za svaku neprekidnu strogo monotonu funkciju $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ takvu da je zadovoljen jedan od sljedećih uvjeta *(i)* φ *je konveksna i* φ^{-1} *operatorski monotona*

(i') φ *je konkavna i* $-\varphi^{-1}$ *operatorski monotona*

gdje su $\delta_\varphi = \varphi(\bar{m})+\varphi(\bar{M})-2\varphi\left(\frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}\right)$, $\widetilde{A}_{n_1} = \frac{1}{2}1_K - \frac{1}{\alpha(\bar{M}-\bar{m})} \times \sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i\left(\left|A_i - \frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}1_H\right|\right)$ *i* $\bar{m} \in [m, m_L]$, $\bar{M} \in [M_R, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, *proizvoljni brojevi.*

Ali, ako vrijedi jedan od sljedećih uvjeta

(ii) φ *je konkavna i* φ^{-1} *operatorski monotona,*

(ii') φ *je konveksna i* $-\varphi^{-1}$ *operatorski monotona,*

onda vrijede suprotne nejednakosti u (2.80).

Dokaz. Nejednakosti (2.79) slijede iz teorema 2.2.23. ako zamijenimo ψ sa identičkom funkcijom, dok nejednakosti (2.80) slijede ako zamijenimo φ sa identičkom funkcijom i ψ sa φ. ■

Primjedba 2.2.25. *Neka vrijede pretpostavke teorema 2.2.23.*
1) Primijetimo da ako je zadovoljen jedan od sljedećih uvjeta

(i) $\psi \circ \varphi^{-1}$ *je konveksna i* ψ^{-1} *operatorski monotona,*

(i') $\psi \circ \varphi^{-1}$ *je konkavna i* $-\psi^{-1}$ *operatorski monotona.*

onda vrijede sljedeće nejednakosti (vidjeti primjedbu 2.2.19.-1))

$$\mathcal{M}_\varphi(\beta, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n_1{+}1, n) \le \psi^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n} \Phi_i(\psi(A_i)) - \delta_\varphi \widetilde{A}_\beta\right) \le \mathcal{M}_\psi(\beta, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n_1{+}1, n),$$

gdje su $\delta_\varphi = \varphi(\bar{m})+\varphi(\bar{M})-2\varphi\left(\frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}\right)$, $\widetilde{A}_\beta = \frac{1}{2}1_K - \frac{1}{\bar{M}-\bar{m}}\left|\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n} \Phi_i A_i - \frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}1_K\right|$ *i* $\bar{m} \in [m, m_L]$, $\bar{M} \in [M_R, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, *proizvoljni brojevi.*
2) Označimo sa m_φ *i* M_φ *ograde od* $\mathcal{M}_\varphi(1, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n)$. *Ako* $(m_\varphi, M_\varphi) \cap [m_i, M_i] = \emptyset$, $i = 1, \ldots, n_1$, *i vrijedi jedan od sljedećih uvjeta*

(i) $\psi \circ \varphi^{-1}$ *je konveksna i* ψ^{-1} *operatorski monotona*

(ii) $\psi \circ \varphi^{-1}$ *je konkavna i* $-\psi^{-1}$ *operatorski monotona*

onda dvostruku nejednakost (2.76) *možemo proširiti sa lijeve strane na sljedeći način*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_\varphi(1, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n) = \mathcal{M}_\varphi(1, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n_1) \le \psi^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i(f(A_i)) - \delta_{\varphi,\psi}\widetilde{A}_\alpha\right)\\
\le\ & \mathcal{M}_\psi(\alpha, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n_1) \le \psi^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i\left(\psi(A_i)\right) + \beta\delta_{\varphi,\psi}\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha}\right) \le \mathcal{M}_\psi(1, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n)\\
\le\ & \psi^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n} \Phi_i\left(\psi(A_i)\right) - \alpha\delta_{\varphi,\psi}\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha}\right) \le \mathcal{M}_\psi(\beta, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n_1+1, n),
\end{aligned}$$

gdje su $\delta_{\varphi,\psi}$ *i* $\widetilde{A}_{\varphi,n_1,\alpha}$ *definirani sa* (2.74),

$$\widetilde{A}_\alpha = \frac{1}{2}1_K - \frac{1}{\bar{M}-\bar{m}}\left|\frac{1}{\alpha}\sum_{i=n_1+1}^{n} \Phi_i A_i - \frac{\bar{m}+\bar{M}}{2}1_K\right|.$$

Kao specijalan slučaj kvaziaritmetičke sredine (2.73) proučavamo težinske potencijalne sredine. Za podskup $\{A_{p_1},\dots,A_{p_2}\}$ od $\{A_1,\dots,A_n\}$ označavamo ovu sredinu s

$$M^{[r]}(\gamma,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},p_1,p_2)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\sum_{i=p_1}^{p_2}\Phi_i\left(A_i^r\right)\right)^{1/r}, & r\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\\ \exp\left(\dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\sum_{i=p_1}^{p_2}\Phi_i\left(\log\left(A_i\right)\right)\right), & r=0,\end{cases}$$

gdje su $(A_{p_1},\dots,A_{p_2})$ strogo pozitivni operatori, $(\Phi_{p_1},\dots,\Phi_{p_2})$ su pozitivna linearna preslikavanja $\Phi_i\colon\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$ takva da $\sum_{i=p_1}^{p_2}\Phi_i(1_H)=\gamma\,1_K$.

Pod jednakim uvjetima uvodimo oznake za specijalan slučaj od (2.74) na sljedeći način

$$\begin{aligned}\delta_{r,s}(m,M)&=\begin{cases}m^s+M^s-2\left(\frac{m^r+M^r}{2}\right)^{s/r}, & r\neq 0,\\ m^s+M^s-2\left(mM\right)^{s/2}, & r=0,\end{cases}\\ \widetilde{A}_r(m,M)&=\begin{cases}\frac{1}{2}1_K-\frac{1}{|M^r-m^r|}\left|\sum_{i=1}^n\Phi_i(A_i^r)-\frac{M^r+m^r}{2}1_K\right|, & r\neq 0,\\ \frac{1}{2}1_K-\left|\log\left(\frac{M}{m}\right)\right|^{-1}\left|\sum_{i=1}^n\Phi_i(\log A_i)-\log\sqrt{Mm}1_K\right|, & r=0,\end{cases}\end{aligned}\tag{2.81}$$

gdje $m,M\in\mathbb{R}$, $0<m<M$ i $r,s\in\mathbb{R}$, $r\le s$. Implicitno pretpostavljamo $\widetilde{A}_r(m,M)\equiv\widetilde{A}_{r,A}(m,M)$, gdje $A=\sum_{i=1}^n\Phi_i(A_i^r)$ za $r\neq 0$ i $A=\sum_{i=1}^n\Phi_i(\log A_i)$ za $r=0$.

Sljedeći korolar dobijamo ako primijenimo teorem 2.2.23. na gornju sredinu. To je proširenje od 2.2.14. i poboljšanje od [45, Korolar 3.4].

Korolar 2.2.26. *Neka je $(A_1,\dots,A_n)$ n-torka hermitskih operatora $A_i\in B(H)$ sa ogradama m_i i M_i, $m_i\le M_i$, $i=1,\dots,n$. Neka je $(\Phi_1,\dots,\Phi_n)$ n-torka pozitivnih linearnih preslikavanja $\Phi_i\colon B(H)\to B(K)$, takva da $\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i(1_H)=\alpha\,1_K$, $\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i(1_H)=\beta\,1_K$, gdje $1\le n_1<n$, $\alpha,\beta>0$ i $\alpha+\beta=1$. Neka*

$$(m_L,M_R)\cap[m_i,M_i]=\emptyset\quad za\quad i=n_1+1,\dots,n,\qquad m<M,$$

gdje $m_L=\min\{m_1,\dots,m_{n_1}\}$, $M_R=\max\{M_1,\dots,M_{n_1}\}$ i

$$\begin{aligned}m&=\begin{cases}m_L, & \text{ako } \{M_i\colon M_i\le m_L, i=n_1+1,\dots,n\}=\emptyset,\\ \max\{M_i\colon M_i\le m_L, i=n_1+1,\dots,n\}, & \text{inače},\end{cases}\\ M&=\begin{cases}M_R, & \text{ako } \{m_i\colon m_i\ge M_R, i=n_1+1,\dots,n\}=\emptyset,\\ \min\{m_i\colon m_i\ge M_R, i=n_1+1,\dots,n\}, & \text{inače}.\end{cases}\end{aligned}$$

(i) *Ako je $r\le s$, $s\ge 1$ ili $r\le s\le -1$ i vrijedi jedna od jednakosti*

$$\mathcal{M}^{[r]}(\alpha,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},1,n_1)=\mathcal{M}^{[r]}(1,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},1,n)=\mathcal{M}^{[r]}(\beta,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n_1+1,n)$$

onda vrijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{[s]}(\alpha,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},1,n_1)&\le\left(\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_1}\Phi_i\left(A_i^s\right)+\beta\delta_{r,s}\widetilde{A}_{s,n_1,\alpha}\right)^{1/s}\le\mathcal{M}^{[s]}(1,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},1,n)\\ &\le\left(\frac{1}{\beta}\sum_{i=n_1+1}^{n}\Phi_i\left(A_i^s\right)-\alpha\delta_{r,s}\widetilde{A}_{s,n_1,\alpha}\right)^{1/s}\le\mathcal{M}^{[s]}(\beta,\mathbf{A},\mathbf{\Phi},n_1+1,n)\end{aligned}$$

gdje $\delta_{r,s} \geq 0$ *i* $\widetilde{A}_{s,n_1,\alpha} \geq 0$.

U ovom slučaju pretpostavljamo da su $\delta_{r,s} \equiv \delta_{r,s}(\bar{m}, \bar{M})$, $\widetilde{A}_{s,n_1,\alpha} \equiv \widetilde{A}_{s,n_1,\alpha}(\bar{m}, \bar{M})$ *definirani s* (2.81) *i* $\bar{m} \in [m, m_L]$, $\bar{M} \in [M_R, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, *su proizvoljni brojevi.*

(ii) *Ako je* $r \leq s$, $r \leq -1$ *ili* $1 \leq r \leq s$ *i vrijedi jedna od jednakosti*

$$\mathcal{M}^{[s]}(\alpha, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n_1) = \mathcal{M}^{[s]}(1, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n) = \mathcal{M}^{[s]}(\beta, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n_1 + 1, n)$$

onda vrijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{[r]}(\alpha, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n_1) &\geq \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n_1} \Phi_i \left(A_i^r \right) + \beta \delta_{s,r} \widetilde{A}_{r,n_1,\alpha} \right)^{1/r} \geq \mathcal{M}^{[r]}(1, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, 1, n) \\ &\geq \left(\frac{1}{\beta} \sum_{i=n_1+1}^{n} \Phi_i \left(A_i^r \right) - \alpha \delta_{s,r} \widetilde{A}_{r,n_1,\alpha} \right)^{1/r} \geq \mathcal{M}^{[r]}(\beta, \mathbf{A}, \mathbf{\Phi}, n_1 + 1, n) \end{aligned}$$

gdje $\delta_{s,r} \leq 0$ *i* $\widetilde{A}_{s,n_1,\alpha} \geq 0$.

U ovom slučaju pretpostavljamo da su $\delta_{s,r} \equiv \delta_{s,r}(\bar{m}, \bar{M})$, $\widetilde{A}_{r,n_1,\alpha} \equiv \widetilde{A}_{r,n_1,\alpha}(\bar{m}, \bar{M})$ *definirani sa* (2.81) *i* $\bar{m} \in [m, m_L]$, $\bar{M} \in [M_R, M]$, $\bar{m} < \bar{M}$, *su proizvoljni brojevi.*

Dokaz. U slučaju (i) stavimo $\psi(t) = t^s$ i $\varphi(t) = t^r$ ako $r \neq 0$ ili $\varphi(t) = \ln t$ ako $r \neq 0$ u teorem 2.2.23.. U slučaju (ii) stavimo $\psi(t) = t^r$ i $\varphi(t) = t^s$ ako $s \neq 0$ ili $\varphi(t) = \ln t$ ako $s \neq 0$. ∎

Poglavlje 3.

Hermite-Hadamardova nejednakost

3.1. Uvod

Jedna od najslavnijih nejednakosti kod klase konveksnih funkcija je Hermite-Hadamardova nejednakost. Ova dvostruka nejednakost, koju je prvi otkrio Hermite 1881. godine, glasi (vidjeti npr. [69, str. 137]):
Neka je f konveksna funkcija na intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$, gdje je $a<b$. Tada

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.1}$$

Taj rezultat se poslije netočno pripisivao Hadamardu koji nije bio upoznat s Hermiteovim rezultatom, te se danas, kada se govori o (3.1), koriste oba imena.
Primijetimo da je prva nejednakost u (3.1) jača od druge:
ako je f konveksna na $[a,b]$, tada

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

Geometrijski dokaz od (3.2) je dan u [22], a analitički u [8] (vidjeti također [69, str. 140]). U nastavku ćemo nejednakost (3.2) zvati Hammer-Bullenova nejednakost.

1906. godine Fejér je prilikom proučavanja trigonometrijskih polinoma dobio nejednakosti koje generaliziraju nejednakosti Hermite-Hadamardovog tipa. Dokazao je da ako je $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nenegativna integrabilna funkcija takva da je krivulja $y = w(x)$ simetrična s obzirom na pravac $x = \frac{a+b}{2}$, tada za svaku konveksnu funkciju $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ vrijede sljedeće nejednakosti (vidjeti [69, str. 138]):

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b w(x) f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

Očito, za $w = \mathbf{1}$ nejednakosti u (3.3) postaju Hermite-Hadamardove nejednakosti. Još jedna generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti je dana u [83] i [39] (ili vidjeti [69, str. 143]).

Teorem 3.1.1. *Neka su p,q dani pozitivni brojevi i $[a,b] \subseteq I,\ a<b$. Tada vrijede nejednakosti*

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{2y}\int_{T-y}^{T+y} f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \tag{3.4}$$

za $T = \frac{pa+qb}{p+q}$, $y > 0$ *i svaku neprekidnu konveksnu funkciju* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *ako je*

$$y \leq \frac{b-a}{p+q} \min\{p, q\}.$$

Lagano se pokaže da za $p = q = 1$ i $y = \frac{b-a}{2}$ nejednakosti u (3.4) postaju Hermite-Hadamardove nejednakosti. Koristeći istu tehniku kao u dokazu od (3.2) (vidjeti [60]) može se dokazati da je prva nejednakost u (3.4) jača od druge, to jest,

$$\frac{1}{2y}\int_{T-y}^{T+y} f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} - \frac{1}{2y}\int_{T-y}^{T+y} f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

U radu [7] Brenner i Alzer su dokazali sljedeću generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti, što je u stvari Fejérova varijanta od (3.4).

Teorem 3.1.2. *Neka su* p, q *dani pozitivni brojevi i* $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ *integrabilna i simetrična s obzirom na pravac* $x = \frac{pa+qb}{p+q} = T$ *u smislu da je* $w(T+t) = w(T-t)$ *za svaki* $t \in \left[0, \frac{b-a}{p+q}\min\{p,q\}\right]$. *Ako je* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *konveksna funkcija, tada za svaki* $y \in \mathbb{R}$ *takav da*

$$0 < y \leq \frac{b-a}{p+q}\min\{p, q\} \tag{3.6}$$

vrijede sljedeće nejednakosti

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\int_{T-y}^{T+y} w(x)\mathrm{d}x \qquad (3.7)\\ & \leq \int_{T-y}^{T+y} w(x) f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}\int_{T-y}^{T+y} w(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Teorem 3.1.1. je generaliziran na pozitivne normalizirane linearne funkcionale u radu [61].

Teorem 3.1.3. *Neka* L *zadovoljava* ($L1$) *i* ($L2$) *na nepraznom skupu* E *i neka je* A *pozitivan normaliziran linearan funkcional. Ako je* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *neprekidna konveksna funkcija i* $[a,b] \subseteq I$, *gdje je* $a < b$, *tada za svaki* $g \in L$ *takav da* $f(g) \in L$ *vrijede nejednakosti*

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq A(f(g)) \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \tag{3.8}$$

gdje su p *i* q *nenegativni realni brojevi takvi da*

$$A(g) = \frac{pa+qb}{p+q}. \tag{3.9}$$

Primjedba 3.1.4. *Lagano se može pokazati da se teorem 3.1.2. (i stoga teorem 3.1.1.) može dobiti kao specijalan slučaj teorema 3.1.3. Naime, za dane pozitivne brojeve* p *i* q, T *i* w *kao u teoremu 3.1.2. i* y *koji zadovoljava* (3.6) *takav da* $\overline{w} = \int_{T-y}^{T+y} w(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, *definiramo* $E = [a,b]$, $L = \mathcal{R}(E)$, $g = id_E$ *i*

$$A(f) = \frac{1}{\overline{w}}\int_{T-y}^{T+y} w(x) f(x)\mathrm{d}x.$$

Ovdje $\mathcal{R}(E)$ *označava potprostor svih (ograničenih) R-integrabilnih funkcija na* $E = [a, b]$*. Primijetimo da je* A *pozitivan normaliziran linearan funkcional i*

$$A(g) = A(id_E) = \frac{1}{\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x)\, x\mathrm{d}x = T = \frac{pa+qb}{p+q}.$$

Iz teorema 3.1.3. odmah dobivamo (3.7).

3.2. Poboljšanja Hermite-Hadamardove nejednakosti

Sada dajemo poboljšanja raznih oblika Hermite-Hadamardove nejednakosti (rezultati iz rada [34]). U nastavku sa I označavamo interval u $\mathbb{R}$, a sa $[a, b]$ interval u $\mathbb{R}$ takav da $-\infty < a < b < \infty$.
Primijetimo da je $\mathcal{R}([a, b])$ iz primjedbe 3.1.4. rešetka, jer $f \in \mathcal{R}([a, b])$ implicira $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$.

Glavni rezultat će nam biti sljedeće poboljšanje teorema 3.1.3.

Teorem 3.2.1. *Neka* L *zadovoljava* (L1), (L2) *i* (L3) *na nepraznom skupu* E *i neka je* A *pozitivan normaliziran linearan funkcional. Ako je* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *neprekidna konveksna funkcija i* $[a, b] \subseteq I$*, tada za svaki* $g \in L$ *takav da* $g(E) \subseteq [a, b]$ *i* $f(g) \in L$ *imamo* $A(g) \in [a, b]$ *i*

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \le A(f(g)) \le \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} - A(\tilde{g})\,\delta_f, \tag{3.10}$$

gdje su p *i* q *nenegativni realni brojevi takvi da*

$$A(g) = \frac{pa+qb}{p+q} \tag{3.11}$$

i $\tilde{g}$, δ_f *su definirani sa*

$$\tilde{g} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{\left|g - \frac{a+b}{2}\mathbf{1}\right|}{b-a}, \qquad \delta_f = f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Dokaz. Prvo primijetimo da $g(E) \subseteq [a, b]$ implicira

$$a = A(a\mathbf{1}) \le A(g) \le A(b\mathbf{1}) = b,$$

stoga postoji jedinstveni nenegativan realan broj $\lambda \in [0, 1]$ takav da $A(g) = \lambda a + (1-\lambda)\, b$. Ako su p, q nenegativni realni brojevi takvi da zadovoljavaju (3.11), tada

$$\frac{p}{p+q} = \lambda, \quad \frac{q}{p+q} = 1 - \lambda.$$

Koristeći Jessenovu nejednakost (1.4) imamo

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) = f(A(g)) \le A(f(g)),$$

što je prva nejednakost u (3.10).
Po lemi 1.1.16. za $n = 2$ imamo

$$\begin{aligned}
& f(g(x)) \\
&= f\left(\frac{b-g(x)}{b-a}a + \frac{g(x)-a}{b-a}b\right) \\
&\leq \frac{b-g(x)}{b-a}f(a) + \frac{g(x)-a}{b-a}f(b) \\
&- \min\left\{\frac{b-g(x)}{b-a}, \frac{g(x)-a}{b-a}\right\}\left[f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Primijenimo A na prethodnu nejednakost i dobijemo

$$\begin{aligned}
A(f(g)) \leq{}& \frac{b-A(g)}{b-a}f(a) + \frac{A(g)-a}{b-a}f(b) \\
&- A(\tilde{g})\left[f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

gdje je $\tilde{g}$ definiran na E sa

$$\tilde{g}(x) = \min\left\{\frac{b-g(x)}{b-a}, \frac{g(x)-a}{b-a}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{\left|g(x)-\frac{a+b}{2}\right|}{b-a},$$

te po $(L3)$ pripada L. Po (3.11) dobivamo

$$A(f(g)) \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} - A(\tilde{g})\,\delta_f,$$

što je druga nejednakost u (3.10). ■

Primjedba 3.2.2. *Teorem 3.2.1. je poboljšanje teorema 3.1.3., jer pod postavljenim uvjetima vrijedi*

$$A(\tilde{g})\,\delta_f = A\left(\frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{\left|g-\frac{a+b}{2}\mathbf{1}\right|}{b-a}\right)\left(f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq 0.$$

Štoviše

$$0 \leq A\left(\frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{\left|g-\frac{a+b}{2}\mathbf{1}\right|}{b-a}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Sljedeći teorem je također poboljšanje teorema 3.1.3. .

Teorem 3.2.3. *Neka L zadovoljava $(L1)$, $(L2)$ i $(L3)$ na nepraznom skupu E i neka je A pozitivan normaliziran linearan funkcional. Ako je $f\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija i $[a,b] \subseteq I$, tada za svaki $g \in L$ takav da $g(E) \subseteq [a,b]$ i $f(g) \in L$ i za svaki y takav da*

$$0 < y \leq \frac{b-a}{p+q}\min\{p,q\} \tag{3.12}$$

imamo

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq A\left(f\left(g\right)\right) \tag{3.13}$$
$$\leq \frac{pf\left(a\right)+qf\left(b\right)}{p+q} - 2A\left(\tilde{g}\right)\left[\frac{pf\left(a\right)+qf\left(b\right)}{p+q} - f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\right],$$

gdje su p i q nenegativni realni brojevi takvi da

$$A\left(g\right) = \frac{pa+qb}{p+q} \tag{3.14}$$

i $\tilde{g}$ je definiran sa

$$\tilde{g} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{\left|g - A\left(g\right)\mathbf{1}\right|}{2y}.$$

Dokaz. Iz $g\left(E\right) \subseteq [a,b]$ slijedi $A(g) \in [a,b]$ i po (3.12) imamo

$$a \leq A\left(g\right) - y < A\left(g\right) + y \leq b.$$

Ako primijenimo teorem 3.2.1. na $a_1 = A\left(g\right) - y,\ b_1 = A\left(g\right) + y$ imamo

$$A\left(g\right) = \frac{A\left(g\right) - y + A\left(g\right) + y}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

što implicira da možemo staviti $p = q = 1$ i po (3.10) dobivamo

$$f\left(A\left(g\right)\right) \leq A\left(f\left(g\right)\right)$$

i

$$A\left(f\left(g\right)\right) \leq \frac{f\left(A\left(g\right)-y\right) + f\left(A\left(g\right)+y\right)}{2}$$
$$- A\left(\tilde{g}\right)\left[f\left(A\left(g\right)-y\right) + f\left(A\left(g\right)+y\right) - 2f\left(A\left(g\right)\right)\right]$$
$$= \left(1 - 2A\left(\tilde{g}\right)\right)\frac{f\left(A\left(g\right)-y\right) + \left(A\left(g\right)+y\right)}{2} + 2A\left(\tilde{g}\right)f\left(A\left(g\right)\right).$$

Kako je f konveksna na $[a,b]$ znamo

$$f\left(A\left(g\right)-y\right) \leq \frac{b-\left(A\left(g\right)-y\right)}{b-a}f\left(a\right) + \frac{A\left(g\right)-y-a}{b-a}f\left(b\right),$$
$$f\left(A\left(g\right)+y\right) \leq \frac{b-\left(A\left(g\right)+y\right)}{b-a}f\left(a\right) + \frac{A\left(g\right)+y-a}{b-a}f\left(b\right),$$

stoga

$$\frac{f\left(A\left(g\right)-y\right) + f\left(A\left(g\right)+y\right)}{2} \leq \frac{b-A\left(g\right)}{b-a}f\left(a\right) + \frac{A\left(g\right)-a}{b-a}f\left(b\right).$$

Ako su p i q nenegativni brojevi takvi da vrijedi(3.14) (primijetimo da su različiti od onih s kojima smo počeli), dobivamo

$$\frac{f\left(A\left(g\right)-y\right) + f\left(A\left(g\right)+y\right)}{2} \leq \frac{pf\left(a\right)+qf\left(b\right)}{p+q}.$$

Koristeći i činjenicu $1 - 2A(\tilde{g}) \geq 0$ (vidjeti primjedbu 3.2.2.) dobivamo

$$\begin{aligned} A(f(g)) &\leq (1 - 2A(\tilde{g})) \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q} + 2A(\tilde{g}) f(A(g)) \\ &= \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q} - 2A(\tilde{g}) \left[\frac{pf(a) + qf(b)}{p+q} - f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \right]. \end{aligned}$$

■

Iz (3.13) lagano dobivamo varijantu Hamer-Bullenove nejednakosti za pozitivne normalizirane linearne funkcionale.

Korolar 3.2.4. *Uz uvjete teorema 3.2.3. vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$\begin{aligned} &(1 - 2A(\tilde{g})) \left[\frac{pf(a) + qf(b)}{p+q} - A(f(g)) \right] \\ &\geq 2A(\tilde{g}) \left[A(f(g)) - f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \right]. \end{aligned}$$

Koristeći prethodne rezultate dobivamo dva poboljšanja teorema 3.1.2., kao i pripadne varijante Hammer-Bullenove nejednakosti.

Korolar 3.2.5. *Neka su p, q dani pozitivni brojevi i $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ integrabilna i simetrična s obzirom na pravac $x = \frac{pa+qb}{p+q} = T$ u smislu da je $w(T+t) = w(T-t)$ za svaki $t \in \left[0, \frac{b-a}{p+q} \min\{p,q\}\right]$. Ako je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada za svaki $y \in \mathbb{R}$ takav da*

$$0 < y \leq \frac{b-a}{p+q} \min\{p,q\} \tag{3.15}$$

i

$$\overline{w} = \int_{T-y}^{T+y} w(x) \mathrm{d}x \neq 0$$

vrijede sljedeće nejednakosti

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x) f(x) \mathrm{d}x \leq \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q} - \Delta_w \delta_f, \tag{3.16}$$

gdje

$$\begin{aligned} \Delta_w &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x) \frac{\left|x - \frac{a+b}{2}\right|}{b-a} \mathrm{d}x, \\ \delta_f &= f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

Dokaz. Ovo je specijalan slučaj teorema 3.2.1. Prvo primijetimo da za dane pozitivne brojeve p, q i $T = \frac{pa+qb}{p+q}$ pretpostavke na y impliciraju $a \leq T - y < T + y \leq b$, stoga je f definiran na $[T-y, T+y]$. Ako uzmemo E, L, A i g kao u primjedbi 3.1.4. svi uvjeti teorema 3.2.1. su zadovoljeni i (3.10) postaje

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \\ &\leq \frac{1}{\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x) f(x) \mathrm{d}x \leq \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q} - A(\tilde{g}) \delta_f, \end{aligned}$$

gdje

$$A(\tilde{g}) = \frac{1}{\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x)\, \tilde{g}(x) \mathrm{d}x \tag{3.17}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x) \frac{\left|x - \frac{a+b}{2}\right|}{b-a} \mathrm{d}x = \Delta_w.$$

Uvjet neprekidnosti funkcije f na $[a,b]$, koji postoji uz proizvoljan A u teoremu 3.2.1. možemo izostaviti iz istih razloga kao u Jessenovoj nejednakosti. ■

Primjedba 3.2.6. *Naglasimo da pod uvjetima korolara 3.2.5. imamo* $\Delta_w \delta_f > 0$, *stoga je* (3.16) *poboljšanje od* (3.7).

Ako želimo pojednostaviti Δ_w iz prethodnog teorema, moramo promatrati četiri slučaja:

1. $T \in \left(a, \frac{3a+b}{4}\right]$ i y koji zadovoljava (3.15) ili $T \in \left(\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}\right]$ i $0 < y \leq \frac{a+b}{2} - T$
   Za takav T i y imamo $x - \frac{a+b}{2} \leq 0$ za svaki $x \in [T-y, T+y]$, i stoga
   $$\Delta_w = \frac{1}{2} + \frac{1}{\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x) \frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \mathrm{d}x$$
   $$= \frac{1}{2} + \frac{T}{b-a} - \frac{a+b}{2(b-a)} = \frac{T-a}{b-a}.$$
   Koristili smo činjenicu da simetrija od w povlači
   $$\frac{1}{\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x)\, x \mathrm{d}x = T.$$

2. $T \in \left(\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}\right]$ i $y > \frac{a+b}{2} - T$, ali i dalje zadovoljava (3.15)
   Za takav T i y, funkcija definirana sa $v = x - \frac{a+b}{2}$ mijenja predznak na $[T-y, T+y]$, stoga ostavljamo Δ_w u obliku (3.17).

3. $T \in \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4}\right]$ i $y > T - \frac{a+b}{2}$, ali i dalje zadovoljava (3.15)
   Za takav T i y, funkcija v definirana sa $v = x - \frac{a+b}{2}$ mijenja predznak na $[T-y, T+y]$, stoga ponovo ostavljamo Δ_w u obliku (3.17) .

4. $T \in \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4}\right]$ i $0 < y \leq T - \frac{a+b}{2}$ ili $T \in \left[\frac{a+3b}{4}, b\right)$ i y koji zadovoljava (3.15)
   Za takav T i y imamo $x - \frac{a+b}{2} \geq 0$ za svaki $x \in [T-y, T+y]$, stoga slično kao u 1. dobivamo
   $$\Delta_w = \frac{b-T}{b-a}.$$

Kao specijalan slučaj korolara 3.2.5. dobivamo Hammer-Bullenovu nejednakost (3.2).

Korolar 3.2.7. *Ako je* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *konveksna funkcija, tada vrijedi nejednakost*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{3.18}$$

Dokaz. To je specijalan slučaj korolara 3.2.5. za $w = \mathbf{1}, p = q = 1,\ y = \frac{b-a}{2}$. U ovom slučaju imamo

$$\int_{T-y}^{T+y} w(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a,$$

tako da iz (3.16) slijedi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \Delta_w \delta_f. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Jednostavan račun daje $\Delta_w = 1/4$, stoga

$$\begin{aligned} &\frac{f(a)+f(b)}{2} - \Delta_w \delta_f \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{4}\left[f(a)+f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{4}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Iz (3.19) i (3.20) dobivamo

$$\begin{aligned} 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}, \end{aligned}$$

što implicira

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

■

Slično, kao specijalan slučaj korolara 3.2.5. dobivamo (3.5). Ovaj dokaz ćemo preskočiti.

Korolar 3.2.8. *Neka su p, q dani pozitivni brojevi i $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ integrabilna i simetrična s obzirom na pravac $x = \frac{pa+qb}{p+q} = T$ u smislu da je $w(T+t) = w(T-t)$ za svaki $t \in \left[0, \frac{b-a}{p+q}\min\{p,q\}\right]$. Ako je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada za svaki y takav da*

$$0 < y \leq \frac{b-a}{p+q}\min\{p,q\} \quad i \quad \overline{w} = \int_{T-y}^{T+y} w(x)\mathrm{d}x \neq 0$$

vrijede sljedeće nejednakosti

$$\begin{aligned} f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) &\leq \frac{1}{\overline{w}}\int_{T-y}^{T+y} w(x) f(x)\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} - \Delta_w\left(\frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} - f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\right), \end{aligned} \tag{3.21}$$

gdje

$$\Delta_w = 1 - \frac{1}{y\overline{w}} \left[\int_T^{T+y} w(x)\, x \mathrm{d}x - \int_{T-y}^{T} w(x)\, x \mathrm{d}x \right].$$

Dokaz. Ovo je specijalan slučaj teorema 3.2.3. za E, L, A i g kao u primjedbi 3.1.4. U ovom slučaju (3.13) postaje

$$\begin{aligned} f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) &\leq \frac{1}{\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x)\, f(x) \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} - 2A(\tilde{g}) \left[\frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} - f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\right], \end{aligned}$$

gdje

$$\begin{aligned} A(\tilde{g}) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2y\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x)\, |x-T|\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2y\overline{w}} \left[T\int_{T-y}^{T} w(x)\, \mathrm{d}x - T\int_{T}^{T+y} w(x)\, \mathrm{d}x \right. \\ &\left. - \int_{T-y}^{T} w(x)\, x\mathrm{d}x + \int_{T}^{T+y} w(x)\, x\mathrm{d}x \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2y\overline{w}} \left[\int_{T}^{T+y} w(x)\, x\mathrm{d}x - \int_{T-y}^{T} w(x)\, x\mathrm{d}x \right] = \frac{1}{2}\Delta_w. \end{aligned}$$

■

Primjedba 3.2.9. *Varijanta Hammer-Bullenove nejednakosti lagano slijedi iz* (3.21)*: uz uvjete korolara 3.2.8. sljedeća nejednakost vrijedi*

$$\begin{aligned} &(1-\Delta_w) \left[\frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} - \frac{1}{\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x)\, f(x)\mathrm{d}x\right] \\ &\geq \Delta_w \left[\frac{1}{\overline{w}} \int_{T-y}^{T+y} w(x)\, f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\right]. \end{aligned}$$

Sljedeća nejednakost daje poboljšanje diskretnog analogona Hermite-Hadamardove nejednakosti (vidjeti [69, str. 145]).

Korolar 3.2.10. *Neka su $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ekvidistantne točke u I. Tada za svaku konveksnu funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ vrijede sljedeće nejednakosti:*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_n}{2}\right) &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ &\leq \frac{f(x_1)+f(x_n)}{2} - \Delta_n \left(\frac{f(x_1)+f(x_n)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_n}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

gdje

$$\Delta_n = \begin{cases} 1 - \frac{k+1}{2k+1}, & n = 2k+1 \\ 1 - \frac{k}{2k-1}, & n = 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz. Ovo je specijalan slučaj teorema 3.2.1. za $E = [a, b] = [x_1, x_n]$, $L = \mathbb{R}^E, g = id_E$ i A definiran sa

$$A(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Kako je

$$x_{i+1} - x_i = h, \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

imamo

$$\begin{aligned} A(g) = A(id_E) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{nx_1 + \frac{(n-1)(h+(n-1)h)}{2}}{n} \\ &= \frac{2x_1 + (n-1)h}{2} = \frac{x_1 + x_n}{2}, \end{aligned}$$

to jest možemo odabrati $p = q = 1$ i (3.10) postaje

$$f\left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \frac{f(x_1) + f(x_n)}{2} - A(\tilde{g})\,\delta_f,$$

gdje

$$\delta_f = 2\left(\frac{f(x_1) + f(x_n)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right)\right)$$

i

$$\begin{aligned} A(\tilde{g}) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n(x_n - x_1)}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \frac{x_1 + x_n}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)h}\sum_{i=1}^{n}\left|x_1 + (i-1)h - \frac{2x_1 + (n-1)h}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}|2i - n - 1|. \end{aligned}$$

Ovisno o parnosti od n dobivamo

$$\begin{aligned} A(\tilde{g}) &= \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2k(2k+1)}\sum_{i=1}^{k} 2i, & n = 2k+1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2k(2k-1)}\sum_{i=1}^{k}(2i-1), & n = 2k \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k+1}{2k+1}\right), & n = 2k+1 \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k}{2k-1}\right), & n = 2k \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\Delta_n. \end{aligned}$$

Primijetimo da za $n = 1$ i $n = 2$ imamo $\Delta_n = 0$. ■

Za sljedeći rezultat, vektorski prostor L mora imati jedno dodatno svojstvo.

Neka je $\mathcal{A}$ algebra podskupova od E i neka je L klasa funkcija $f\colon E \to \mathbb{R}$ sa svojstvima $(L1)$, $(L2)$, $(L3)$ i

$(L4)$ $(\forall f \in L)\,(\forall E_1 \in \mathcal{A})$ $fC_{E_1} \in L$;

gdje je C_{E_1} karakteristična funkcija od E_1, to jest,

$$C_{E_1}(t) = \begin{cases} 1, & t \in E_1 \\ 0, & t \in E \setminus E_1 \end{cases}.$$

Lagano se vidi da za svaki $E_1 \in \mathcal{A}$ vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) $C_{E_1} \in L$.

(ii) Ako je A pozitivan linearan funkcional na L takav da $A(C_{E_1}) > 0$ i $g \in L$, tada je A_1, definiran sa

$$A_1(g) = \frac{A(gC_{E_1})}{A(C_{E_1})}$$

pozitivan normaliziran linearan funkcional.

(iii) Ako je A pozitivan linearan funkcional na L i $g \in L$, tada

$$A(gC_{E_1}) + A\left(gC_{E\setminus E_1}\right) = A(g).$$

Teorem 3.2.11. *Neka L zadovoljava $(L1)$ - $(L4)$ na nepraznom skupu E, $f : I \to \mathbb{R}$ je neprekidna konveksna funkcija, te neka su $g, h \in L$ takve da $f(g), f(h) \in L$. Neka su A i B dva pozitivna normalizirana linearna funkcionala na L takva da $A(h) = B(g)$. Ako $E_1 \in \mathcal{A}$ zadovoljava $A(C_{E_1}) > 0$, $A\left(C_{E\setminus E_1}\right) > 0$ i*

$$(\forall t \in E) \quad a \leq g(t) \leq b,$$

gdje

$$a = \min\left\{\frac{A(hC_{E_1})}{A(C_{E_1})}, \frac{A\left(hC_{E\setminus E_1}\right)}{A\left(C_{E\setminus E_1}\right)}\right\},$$

$$b = \max\left\{\frac{A(hC_{E_1})}{A(C_{E_1})}, \frac{A\left(hC_{E\setminus E_1}\right)}{A\left(C_{E\setminus E_1}\right)}\right\},$$

tada

$$f(A(h)) \leq B(f(g)) \leq A(f(h)) - B(\tilde{g})\,\delta_f, \tag{3.22}$$

gdje su $\tilde{g}$ i δ_f definirani kao u teoremu 3.2.1. U graničnom slučaju $a = b$, (3.22) postaje

$$f(A(h)) = B(f(g)) \leq A(f(h)).$$

Dokaz. Po Jessenovoj nejednakosti (1.4) (i koristeći (ii)) imamo

$$f\left(\frac{A(hC_{E_1})}{A(C_{E_1})}\right) \leq \frac{A(f(h)\,C_{E_1})}{A(C_{E_1})}$$

i

$$f\left(\frac{A\left(hC_{E\setminus E_1}\right)}{A\left(C_{E\setminus E_1}\right)}\right) \leq \frac{A\left(f(h)\,C_{E\setminus E_1}\right)}{A\left(C_{E\setminus E_1}\right)}.$$

Bez smanjena općenitosti možemo pretpostaviti

$$a = \min\left\{\frac{A(hC_{E_1})}{A(C_{E_1})}, \frac{A\left(hC_{E\setminus E_1}\right)}{A\left(C_{E\setminus E_1}\right)}\right\} = \frac{A(hC_{E_1})}{A(C_{E_1})},$$
$$b = \max\left\{\frac{A(hC_{E_1})}{A(C_{E_1})}, \frac{A\left(hC_{E\setminus E_1}\right)}{A\left(C_{E\setminus E_1}\right)}\right\} = \frac{A\left(hC_{E\setminus E_1}\right)}{A\left(C_{E\setminus E_1}\right)}.$$

Ako je $a < b$ i

$$p = A(C_{E_1}), \quad q = A\left(C_{E\setminus E_1}\right),$$

imamo

$$p + q = A(C_E) = A(\mathbf{1}) = 1,$$
$$B(g) = A(h) = A(hC_{E_1}) + A\left(hC_{E\setminus E_1}\right) = pa + qb,$$

te primjenom teorema 3.2.1. na B i g po (3.10) dobivamo

$$\begin{aligned} f(A(h)) &= f(B(g)) \leq B(f(g)) \leq pf(a) + qf(b) - B(\tilde{g})\,\delta_f \\ &= A(C_{E_1})\, f\left(\frac{A(hC_{E_1})}{A(C_{E_1})}\right) + A\left(C_{E\setminus E_1}\right) f\left(\frac{A\left(hC_{E\setminus E_1}\right)}{A\left(C_{E\setminus E_1}\right)}\right) - B(\tilde{g})\,\delta_f \\ &\leq A(f(h)\, C_{E_1}) + A\left(f(h)\, C_{E\setminus E_1}\right) - B(\tilde{g})\,\delta_f \\ &= A(f(h)) - B(\tilde{g})\,\delta_f. \end{aligned}$$

Ako je $a = b$, slijedi da je g konstantna funkcija, te granični slučaj slijedi direktno. ■

Teorem 3.2.11. je poboljšanje od [69, Teorem 5.14], a istovremeno daje i poboljšanje Jessenove nejednakosti (1.4). Također dajemo sljedeće poboljšanje od [69, Teorem 5.14].

Teorem 3.2.12. *Pretpostavimo da vrijede pretpostavke teorema 3.2.11. Ako je $a < b$, tada za svaki y takav da*

$$0 < y \leq \min\{B(g) - a, b - B(g)\} \tag{3.23}$$

vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(A(h)) &\leq B(f(g)) \\ &\leq A(f(h)) - 2B(\tilde{g})\left[A(C_{E_1})\, f(a) + A\left(C_{E\setminus E_1}\right) f(b) - f(B(g))\right], \end{aligned}$$

gdje

$$\tilde{g} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{|g - B(g)\,\mathbf{1}|}{2y}.$$

Dokaz. Dokaz je gotovo identičan dokazu teorema 3.2.11. osim što koristimo teorem 3.2.3. umjesto teorema 3.2.1., stoga za $a < b$ i y koji zadovoljava (3.23), koristeći (3.13) dobivamo

$$\begin{aligned} f(A(h)) &\leq B(f(g)) \\ &\leq A(f(h)) - 2B(\tilde{g})\left[A(C_{E_1})\, f(a) + A\left(C_{E\setminus E_1}\right) f(b) - f(B(g))\right]. \end{aligned}$$

3.3. Hammer-Bullenove razlike

Motivirani teoremima 3.2.1. i 3.2.3., definiramo dva funkcionala $\Phi_i\colon L_f \to \mathbb{R}, i = 1, 2$,

$$\Phi_1(\varphi) = \frac{p\varphi(a) + q\varphi(b)}{p+q} - A(\varphi(f)) - A(\tilde{f})\delta_\varphi, \tag{3.24}$$

gdje su $A, f, \tilde{f}, p$ i q kao u teoremu 3.2.1., $L_f = \{\varphi\colon I \to \mathbb{R}\colon \varphi(f) \in L\}$, $[m, M] \subseteq I$ i

$$\Phi_2(\varphi) = \frac{p\varphi(a) + q\varphi(b)}{p+q} - A(\varphi(f)) - 2A(\tilde{f}) \left[\frac{p\varphi(a) + q\varphi(b)}{p+q} - \varphi\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\right], \tag{3.25}$$

gdje su $A, f, \tilde{f}, p$ i q kao u teoremu 3.2.3., L_f kao gore i $[m, M] \subseteq I$. Očito, Φ_1 i Φ_2 su linearni.
Ako je φ još i neprekidna i konveksna, tada teoremi 3.2.1. i 3.2.3. impliciraju $\Phi_i(\varphi) \geq 0, i = 1, 2$.
U nastavku sa φ_0 označavamo funkciju definiranu sa $\varphi_0(x) = x^2$ na domeni koja nam treba.
Sada dajemo dva teorema srednje vrijednosti Cauchyevog tipa za funkcionale Φ_i, $i = 1, 2$.

Teorem 3.3.1. *Neka L zadovoljava svojstva (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E i A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Neka je $f \in L$ takav da $\varphi_0 \in L_f, f(E) \in [m, M], [m, M] \subseteq I$ i neka je $\varphi \in C^2(I)$ takav da $\varphi \in L_f$. Ako su Φ_1 i Φ_2 linearni funkcionali definirani kao u (3.24) i (3.25), tada postoje $\xi_i \in [m, M], i = 1, 2$ takvi da*

$$\Phi_i(\varphi) = \frac{\varphi''(\xi_i)}{2}\Phi_i(\varphi_0), \quad i = 1, 2.$$

Dokaz. Dat ćemo dokaz za funkcional Φ_1. Kako $\varphi \in C^2(I)$, postoje realni brojevi $a = \min\limits_{x\in[m,M]} \varphi''(x)$ i $b = \max\limits_{x\in[m,M]} \varphi''(x)$. Lagano se vidi da su funkcije φ_1, φ_2, definirane sa

$$\varphi_1(x) = \frac{b}{2}x^2 - \varphi(x), \quad \varphi_2(x) = \varphi(x) - \frac{a}{2}x^2$$

neprekidne i konveksne, stoga $\Phi_1(\varphi_1) \geq 0, \Phi_1(\varphi_2) \geq 0$. To daje

$$\frac{a}{2}\Phi_1(\varphi_0) \leq \Phi_1(\varphi) \leq \frac{b}{2}\Phi_1(\varphi_0).$$

Ako je $\Phi_1(\varphi_0) = 0$, nemamo ništa za dokazati. Pretpostavimo $\Phi_1(\varphi_0) > 0$. Imamo

$$a \leq \frac{2\Phi_1(\varphi)}{\Phi_1(\varphi_0)} \leq b.$$

Dakle, postoji $\xi_1 \in [m, M]$ takav da

$$\Phi_1(\varphi) = \frac{\varphi''(\xi_1)}{2}\Phi_1(\varphi_0).$$

■

Teorem 3.3.2. *Neka L zadovoljava svojstva (L1), (L2) i (L3) na nepraznom skupu E i A je pozitivan normaliziran linearan funkcional na L. Neka je $f \in L$ takva da $\varphi_0 \in L_f, f(E) \in [m, M], [m, M] \subseteq I$ i $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(I)$ takve da $\varphi_1, \varphi_2 \in L_f$. Ako su Φ_1 i Φ_2 linearni funkcionali definirani kao u (3.24) i (3.25), tada postoje $\xi_i \in [m, M], i = 1, 2$ takvi da*

$$\frac{\Phi_i(\varphi_1)}{\Phi_i(\varphi_2)} = \frac{\varphi_1''(\xi_i)}{\varphi_2''(\xi_i)}, \quad i = 1, 2$$

uz uvjet da su nazivnici različiti od nule.

Dokaz. Dajemo dokaz za funkcional Φ_1. Definiramo $\varphi_3 \in C^2([m, M])$ sa

$$\varphi_3 = c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2, \quad \text{gdje } c_1 = \Phi_1(\varphi_2), \quad c_2 = \Phi_1(\varphi_1).$$

Koristeći teorem 3.3.1. znamo da postoji $\xi_1 \in [m, M]$ takav da

$$\left(c_1\frac{\varphi_1''(\xi_1)}{2} - c_2\frac{\varphi_2''(\xi_1)}{2}\right)\Phi_1(\varphi_0) = 0.$$

Kako je $\Phi_1(\varphi_0) \neq 0$, (inače dobijamo kontradikciju sa $\Phi_1(\varphi_2) \neq 0$, po teoremu 3.3.1.), dobivamo

$$\frac{\Phi_1(\varphi_1)}{\Phi_1(\varphi_2)} = \frac{\varphi_1''(\xi_1)}{\varphi_2''(\xi_1)}.$$

■

Teorem 3.3.3. *Neka su $\Phi_i \quad (i = 1, 2)$ linearni funkcionali definirani kao u (3.24) i (3.25). Neka je $\Upsilon = \{\varphi_s : s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na otvorenom intervalu I takva da $\Upsilon \subseteq L_f$ i da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; \varphi_s]$ $n-$eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Tada je $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ $n-$eksponencijalno konveksna funkcija u Jensenovom smislu na J. Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ neprekidna na J, tada je $n-$eksponencijalno konveksna na J.*

Dokaz. Za $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ i $s_i \in J$, $i = 1, \ldots, n$, definiramo funkciju $\chi : I \to \mathbb{R}$ sa

$$\chi(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\xi_j\varphi_{\frac{s_i+s_j}{2}}(y).$$

Koristeći pretpostavku da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; \varphi_s]$ $n-$eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu, dobivamo

$$[y_0, y_1, y_2; \chi] = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\xi_j[y_0, y_1, y_2; \varphi_{\frac{s_i+s_j}{2}}] \geq 0,$$

što povlači da je χ konveksna (i neprekidna) na I, te stoga $\Phi_i(\chi) \geq 0, \quad i = 1, 2$. Slijedi

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\xi_j\Phi_i(\varphi_{\frac{s_i+s_j}{2}}) \geq 0.$$

Zaključujemo da je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ $n-$eksponencijalno konveksna na J u Jensenovom smislu. Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ neprekidna na J, tada je $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ $n-$eksponencijalno konveksna po definiciji. ■

Sljedeći korolar je direktna posljedica prethodnog teorema.

Korolar 3.3.4. *Neka su $\Phi_i \quad (i = 1, 2)$ linearni funkcionali definirani kao u (3.24) i (3.25). Neka je $\Upsilon = \{\varphi_s \colon s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na otvorenom intervalu I takva da $\Upsilon \subseteq L_f$ i da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; \varphi_s]$ eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Tada je $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ eksponencijalno konveksna funkcija u Jensenovom smislu na J. Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ i neprekidna na J, tada je eksponencijalno konveksna na J.*

Korolar 3.3.5. *Neka su $\Phi_i \quad (i = 1, 2)$ linearni funkcionali definirani kao u (3.24) i (3.25). Neka je $\Omega = \{\varphi_s \colon s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na otvorenom intervalu I, takva da $\Omega \subseteq L_f$ i da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; \varphi_s]$ $2-$eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ neprekidna na J, tada je $2-$eksponencijalno konveksna funkcija na J. Ako je $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ dodatno i strogo pozitivna, tada je log-konveksna na J.

(ii) Ako je funkcija $s \mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ strogo pozitivna i diferencijabilna na J, tada za sve $s, q, u, v \in J$, takve da $s \leq u$ i $q \leq v$, vrijedi

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) \leq \mu_{u,v}(\Phi_i, \Omega), \quad i = 1, 2, \tag{3.26}$$

gdje je

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(\varphi_s)}{\Phi_i(\varphi_q)} \right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{\frac{d}{ds}\Phi_i(\varphi_s)}{\Phi_i(\varphi_s)} \right), & s = q, \end{cases} \tag{3.27}$$

za $\varphi_s, \varphi_q \in \Omega$.

Dokaz. (i) Direktna posljedica teorema 3.3.3. i primjedbe 1.3.15.
(ii) Po (i), funkcija $\mapsto \Phi_i(\varphi_s)$ je log-konveksna na J, to jest funkcija $s \mapsto \log \Phi_i(\varphi_s)$ je konveksna na J. Primijenimo propoziciju 1.3.16. i dobijemo

$$\frac{\log \Phi_i(\varphi_s) - \log \Phi_i(\varphi_q)}{s - q} \leq \frac{\log \Phi_i(\varphi_u) - \log \Phi_i(\varphi_v)}{u - v} \tag{3.28}$$

za $s \leq u, q \leq v, s \neq q, u \neq v$, i iz toga zaključujemo

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) \leq \mu_{u,v}(\Phi_i, \Omega), \quad i = 1, 2.$$

Slučajevi $s = q$ i $u = v$ slijede iz (3.28) kao granični slučajevi. ■

Primjedba 3.3.6. *Primijetimo da rezultati iz teorema 3.3.3., korolara 3.3.4. i korolara 3.3.5. vrijede i kada se dvije od točaka $y_0, y_1, y_2 \in I$ podudaraju, recimo $y_1 = y_0$, za familiju diferencijabilnih funkcija φ_s takvu da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; \varphi_s]$ $n-$eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu (eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu, log-konveksna u Jensenovom smislu), i štoviše, vrijede kada se sve tri točke podudaraju za familiju dvaput diferencijabilnih funkcija sa istim svojstvom. Dokazi se dobivaju iz primjedbe 1.3.18. i prikladne karakterizacije konveksnosti.*

Sada predstavljamo nekoliko familija funkcija koji ispunjavaju uvjete teorema 3.3.3., korolara 3.3.4. i korolara 3.3.5. (i primjedbe 3.3.6.). To nam omogućava konstrukciju velike familije funkcija koje su eksponencijalno konveksne. Rasprava vezana uz ovaj problem se može naći u [16].

U nastavku promatramo Φ_1 i Φ_2 definirane kao u (3.24) i (3.25) sa A koji je neprekidan i f takav da kompozicija sa bilo kojom funkcijom iz odabrane familije Ω_i, kao i sa bilo kojom funkcijom koja se pojavi kao argument od Φ_1 i Φ_2, ostaje u L.

Primjer 3.3.7. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_1 = \{g_s \colon \mathbb{R} \to [0,\infty) \colon s \in \mathbb{R}\}$$

definiranu s

$$g_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{s^2}\, e^{sx}, & s \neq 0, \\ \frac{1}{2}\, x^2, & s = 0. \end{cases}$$

Imamo $\frac{d^2 g_s}{dx^2}(x) = e^{sx} > 0$ *što pokazuje da je* g_s *konveksna na* $\mathbb{R}$ *za svaki* $s \in \mathbb{R}$ *i* $s \mapsto \frac{d^2 g_s}{dx^2}(x)$ *je eksponencijalno konveksna po definiciji. Koristeći analogno argumentiranje kao u dokazu teorema 3.3.3. također imamo da je* $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; g_s]$ *eksponencijalno konveksna (pa tako i eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu). Koristimo teorem 3.3.4. i zaključujemo da su* $s \mapsto \Phi_i(g_s)$, $i = 1, 2$, *eksponencijalno konveksne u Jensenovom smislu. Lagano se pokaže da su ova preslikavanja neprekidna (iako preslikavanje* $s \mapsto g_s$ *nije neprekidno za* $s = 0$*), pa su i eksponencijalno konveksna.*
Za ovu familiju funkcija, $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1), i = 1, 2$, *iz (3.27) postaje*

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(g_s)}{\Phi_i(g_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{\Phi_i(id \cdot g_s)}{\Phi_i(g_s)} - \frac{2}{s}\right), & s = q \neq 0, \\ \exp\left(\frac{\Phi_i(id \cdot g_0)}{3\Phi_i(g_0)}\right), & s = q = 0, \end{cases}$$

te su koristeći (3.26) monotone funkcije u parametrima s i q.

Koristeći teorem 3.3.2. slijedi da za $i = 1, 2$

$$M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1) = \log \mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1)$$

zadovoljava $m \leq M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1) \leq M$*, što pokazuje da su* $M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1)$ *sredine (funkcije g). Primijetimo da su po (3.26) i monotone.*

Primjer 3.3.8. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_2 = \{f_s \colon (0,\infty) \to \mathbb{R} \colon s \in \mathbb{R}$$

definiranu s

$$f_s(x) = \begin{cases} \frac{x^s}{s(s-1)}, & s \neq 0, 1, \\ -\log x, & s = 0, \\ x \log x, & s = 1. \end{cases}$$

Vrijedi $\frac{d^2 f_s}{dx^2}(x) = x^{s-2} = e^{(s-2)\ln x} > 0$ *što pokazuje da je* f_s *konveksna za* $x > 0$ *i* $s \mapsto \frac{d^2 f_s}{dx^2}(x)$ *je eksponencijalno konveksna po definiciji. Koristeći argumentiranje kao u primjeru 3.3.7. dobivamo da su preslikavanja* $s \mapsto \Phi_i(g_s), i = 1, 2$ *eksponencijalno konveksna. Funkcije (3.27) su u ovom slučaju jednake:*

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_2) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(\frac{1-2s}{s(s-1)} - \frac{\Phi_i(f_s f_0)}{\Phi_i(f_s)}\right), & s = q \neq 0, 1, \\ \exp\left(1 - \frac{\Phi_i(f_0^2)}{2\Phi_i(f_0)}\right), & s = q = 0, \\ \exp\left(-1 - \frac{\Phi_i(f_0 f_1)}{2\Phi_i(f_1)}\right), & s = q = 1. \end{cases}$$

Ako je Φ_i *pozitivna, tada teorem 3.3.2. primijenjen za* $f = f_s \in \Omega_2$ *i* $g = f_q \in \Omega_2$ *daje da postoji* $\xi \in [m, M]$ *takav da*

$$\xi^{s-q} = \frac{\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_q)}.$$

Kako je funkcija $\xi \mapsto \xi^{s-q}$ *invertibilna za* $s \neq q$*, imamo*

$$m \leq \left(\frac{\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}} \leq M, \tag{3.29}$$

što zajedno sa činjenicom da je $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_2)$ *neprekidna, simetrična i monotona (po (3.26)), pokazuje da su* $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_2), i = 1, 2$ *sredine (funkcije* f*).*

Primjer 3.3.9. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_3 = \{h_s\colon (0, \infty) \to (0, \infty)\colon s \in (0, \infty)\}$$

definiranu s

$$h_s(x) = \begin{cases} \frac{s^{-x}}{\log^2 s}, & s \neq 1, \\ \frac{x^2}{2}, & s = 1. \end{cases}$$

Kako je $s \mapsto \frac{d^2 h_s}{dx^2}(x) = s^{-x}$ *Laplaceova transformacija ne-negativne funkcije (vidjeti [90]), ona je eksponencijalno konveksna. Očito su* h_s *konveksne funkcije za svaki* $s > 0$*.*
Za ovu familiju funkcija, $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3)$ *iz (3.27) postaje*

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3) = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(h_s)}{\Phi_i(h_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(-\frac{\Phi_i(id{\cdot}h_s)}{s\Phi_i(h_s)} - \frac{2}{s\ln s}\right), & s = q \neq 1, \\ \exp\left(-\frac{2\Phi_i(id{\cdot}h_1)}{3\Phi_i(h_1)}\right), & s = q = 1, \end{cases}$$

i monotona je u parametrima s *i* q *po (3.26).*
Koriteći teorem 3.3.2. slijedi da

$$M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3) = -L(s, q) \log \mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3)$$

zadovoljava $m \leq M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3) \leq M$*, što pokazuje da su* $M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3), i = 1, 2$ *sredine (funkcije* h*).* $L(s, q)$ *je logaritamska sredina definirana sa* $L(s, q) = \frac{s-q}{\log s - \log q}$*,* $s \neq q$*,* $L(s, s) = s$*.*

Primjer 3.3.10. *Promatramo familiju funkcija*

$$\Omega_4 = \{k_s : (0,\infty) \to (0,\infty) : s \in (0,\infty)\}$$

definiranih sa

$$k_s(x) = \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}.$$

Kako je $s \mapsto \frac{d^2k_s}{dx^2}(x) = e^{-x\sqrt{s}}$ *Laplaceova transformacija nenegativne funkcije (vidjeti [90]), ona je eksponencijalno konveksna. Očito su* k_s *konveksne funkcije za svaki* $s > 0$.
Za ovu familiju funkcija, $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4)$ *iz (3.27) postaje*

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4) \; = \begin{cases} \left(\frac{\Phi_i(k_s)}{\Phi_i(k_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q, \\ \exp\left(-\frac{\Phi_i(id \cdot k_s)}{2\sqrt{s}\Phi_i(k_s)} - \frac{1}{s}\right), & s = q, \end{cases}$$

i monotona je u parametrima s i q po (3.26).
Koristeći teorem 3.3.2., slijedi da

$$M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4) \; = -\left(\sqrt{s} + \sqrt{q}\right) \log \mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4)$$

zadovoljava $m \leq M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4) \leq M$, *što pokazuje da su* $M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4), i = 1, 2$ *sredine (funkcije k).*

■

Bibliografija

[1] S. Abramovich, G. Jameson, G. Sinnamon, *Refining Jensen's inequality*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) **47** 95 (2004), no. 1–2, 3–14.

[2] M. Anwar, J. Jakšetić, J. Pečarić, Atiq ur Rehman, *Exponential convexity, positive semi-definite matrices and fundamental inequalities*, J. Math. Inequal. **4** (2) (2010), 171–189.

[3] J. Barić, A. Matković, *Bounds for the normalized Jensen-Mercer functional*, J. Math. Inequal. **3** (2009), no. 4, 529–541.

[4] P. R. Beesack, Josip E. Pečarić, *On Jessen's inequality for convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **110** (1985), no. 2, 536–552.

[5] P. R. Beesack, Josip E. Pečarić, *On Knopp's inequality for convex functions*, Canad. Math. Bull. **30** (1987), no. 3, 267–272.

[6] M. Bessenyei, *The Hermite-Hadamard inequality on Simplices*, Amer. Math. Monthly **115** (4) (2008) 339 345.

[7] J. L. Brenner, H. Alzer, *Integral inequalities for concave functions with applications to special functions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **118** (1991), no. 1-2, 173–192.

[8] P. S. Bullen, *Error estimates for some elementary quadrature rules*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 602-633 (1978), 97–103.

[9] P. S. Bullen, *A Dictionary of Inequalities, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, 97, Addison Wesley Longman, 1998.

[10] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2003.

[11] P. S. Bullen, P. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Boston, Lancaster and Tokyo, 1987

[12] W.S. Cheung, A. Matković, J. Pečarić, *A variant of Jessen's inequality and generalized means*, J. Ineq. Pure and Appl. Math. **7** (1) (2006).

[13] A. Čižmešija, J. Pečarić, *Mixed means and Hardy's inequality*, Math. Inequal. Appl. **1**(4) (1998), 491–506.

[14] A. Čižmešija, J. Pečarić, L.-E. Persson, *On strengthened weighted Carleman's inequality*, B. Aust. Math. Soc. **68** (2003), 481–490.

[15] S. S. Dragomir, *A new refinement of Jensen's inequality in linear spaces with applications*, Math. Comput. Modelling **52** (2010), 1497–1505.

[16] W. Ehm, M. G. Genton, T. Gneiting, *Stationary covariances associated with exponentially convex functions*, Bernoulli **9**(4) (2003), 607–615.

[17] A. Florea, C. P. Niculescu, *A Hermite-Hadamard inequality for convex-concave symmetric functions*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome **50** (98) (2007) 149-156.

[18] T. Furuta, J. Mićić, J. Pečarić, Y. Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities / Inequalities for bounded selfadjoint operators on a Hilbert space*, Element, Zagreb, 2005.

[19] B. Gavrea, J. Jakšetić, J. Pečarić, *On a global upper bound for Jessen' s inequality*, ANZIAM J. **50** (2009) 246-257.

[20] A. Guessab, O. Nouisser, J. Pečarić, *A multivariate extension of an inequality of Brenner-Alzer*, Archiv der Mathematik, 2012, **98**, Issue 3, 277-287

[21] A. Guessab, G. Schmeisser, *Convexity results and sharp error estimates in approximate multivariate integration*, Math. Comp., 2003, **73**, Number 247, 1365-1384

[22] P. C. Hammer, *The midpoint method of numerical integration*, Math. Mag. **31** (1957/1958), 193–195.

[23] F. Hansen, J. Pečarić, I. Perić, *Jensen's operator inequality and it's converses*, Math. Scand. **100** (2007), 61–73.

[24] B. Ivanković, J. Pečarić, S. Varošanec, *Properties of mappings related to the Minkowski inequality*, Mediterranean Journal of Mathematics, **8** (2011), 543–551.

[25] S. Ivelić, J. Pečarić, *Generalizations of Converse Jensen's inequality and related results*, J. Math. Ineq. **5**, Number 1 (2011), 43-60

[26] S. Ivelić, J. Pečarić, *Remarks on the paper "On a converse of Jensen's discrete inequality" of S. Simić*, J. Inequal. Appl., prihvaćeno za objavljivanje

[27] J. Jakšetić, J. Pečarić, *Exponential Convexity Method*, podneseno za objavljivanje

[28] J. L. W. V. Jensen, *Om konvexe funktioner og uligheder mellem Middelvaerdier*, (German) Nyt. Tidsskrift for Mathematik **16** B (1905), 49–69.

[29] J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les iné galités entre les valeurs moyennes*, (French) Acta Math. **30** (1906), no. 1, 175–193.

[30] B. Jessen, *Bemaerkinger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier I*, Mat. Tidsskrift B (1931), 17–29.

[31] M. Khosravi, J. S. Aujla, S. S. Dragomir, M. S. Moslehian, *Refinements of Choi-Davis-Jensen's inequality*, Bull. Math. Anal. Appl. **3** 2 (2011), 127–133.

[32] A. Khan Khuram, J. Pečarić, I. Perić, *Differences of weighted mixed symmetric means and related results*, J. Inequal. Appl. **2010** (2010), Article ID 289730, 16 stranica.

[33] M. Klaričić Bakula, M. Matić, J. Pečarić, *On inequalities complementary to Jensen's inequality*, Mat. Bilten **32** (2008), 17–27.

[34] M. Klaričić Bakula, J. Pečarić, J. Perić, *Extensions of the Hermite-Hadamard inequality with Applications*, Math. Inequal. Appl. **12** (2012), no. 4, 899–921

[35] M. Klaričić Bakula, J. Pečarić, J. Perić, *On the converse Jensen inequality*, Appl. Math. Comput. **218** (11) (2012), 6566–6575.

[36] K. Knopp, *Über die maximalen Abstände und Verhältnisse verschiedener Mittelwerte*, (German) Math. Z. **39** (1935), no. 1, 768–776.

[37] P. Lah, M. Ribarič, *Converse of Jensen's inequality for convex functions*, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 412-460 (1973), 201–205.

[38] E. H. Lieb, M. Loss, *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, **14**, American Mathematical Society, Providence R.I., 2001.

[39] A. Lupaş, *A generalization of Hadamard's inequalities for convex functions*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 544–576 (1976), 115–121.

[40] A. Matković, J. Pečarić, *A variant of Jensen's inequality for convex functions of several variables*, J. Math. Ineq. **1** (1) (2007) 45-51.

[41] A. Matković, J. Pečarić, J. Perić, *A refinement of the Jessen-Mercer inequality and a generalization on convex hulls in* $\mathbb{R}^k$, rukopis.

[42] E. J. McShane, *Jensen's inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (1937), 521-527.

[43] A. McD. Mercer, *A variant of Jensen's inequality*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **4** (2003), no. 4, Article 73, 2 pp.

[44] J. Mićić, Z. Pavić, J. Pečarić, *Jensen's inequality for operators without operator convexity*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), 1228–1237.

[45] J. Mićić, Z. Pavić, J. Pečarić, *Extension of Jensen's operator inequality for operators without operator convexity*, Abstr. Appl. Anal. **2011** (2011), 1–14.

[46] J. Mićić, Z. Pavić, J. Pečarić, *Jensen type inequalities on quasi-arithmetic operator means*, Sci. Math. Japon. **73** (2011), 183–192.

[47] J. Mićić, J. Pečarić, J. Perić, *Extension of the refined Jensen's operator inequality with condition on spectra*, Ann. Funct. Anal. **3** (2012), no. 1, 67–85.

[48] J. Mićić, J. Pečarić, J. Perić, *Refined Jensen's operator inequality with condition on spectra*, Oper. Matrices, (2011), prihvaćeno za objavljivanje.

[49] J. Mićić, J. Pečarić, Y. Seo, *Converses of Jensen's operator inequality*, Oper. Matrices **4** (2010), no. 3, 385–403.

[50] P. S. Mitrinović, P. S. Bullen, P. M. Vasić, *Sredine i sa njima povezane nejednakosti*, Publikacije elektrotehničkog fakulteta, Serija: Matematika i fizika, No 600, 1977.

[51] D. S. Mitrinović, J. Pečarić, A. M. Fink, *Classical and new inequalities in analysis*, Kulwer Academic Publishers, The Netherlands, 1993.

[52] D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *The centroid method in inequalities*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 498-541 (1975), 3–16.

[53] B. Mond, J. Pečarić, *Converses of Jensen's inequality for several operators*, Revue d'analyse numer. et de théorie de l'approxim. **23** (1994) 179-183.

[54] B. Mond, J. E. Pečarić, *On Converses of Hölder and Beckenbach Inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **196** (1995), 795–799.

[55] M. S. Moslehian, *Operator extensions of Hua's inequality*, Linear Algebra Appl. **430** (2009), 1131–1139.

[56] C. P. Niculescu, *The Hermite-Hadamard inequality for convex functions of a vector variable*, Math. Inequal. Appl. **5** (2002).

[57] C. P. Niculescu, *The Hermite-Hadamard inequality for convex functions on a global NPC space*, J. Math. Anal. Appl. **356** (2009).

[58] C. P. Niculescu, L.-E. Persson, *Old and new on the Hermite-Hadamard inequality*, Real Anal. Exchange **29** (2) (2003/2004) 663-685.

[59] J. Pečarić, *Konveksne funkcije: Nejednakosti*, Naučna knjiga, Beograd, 1987.

[60] J. E. Pečarić, *Notes on convex functions*, General inequalities, **6** (Oberwolfach, 1990), 449–454, Internat. Ser. Numer. Math., 103, Birkhäuser, Basel, 1992.

[61] J. Pečarić, P. Beesack, *On Jessen's inequality for convex functions*, II. J. Math. Anal. Appl. **118** (1986), no. 1, 125–144.

[62] J. Pečarić, V. Čuljak, *Interpolation polynomials and inequalities for convex functions of higher order*, Inequalities, 2001 (Timişoara). Math. Inequal. Appl. **5** (2002), no. 3, 369–386.

[63] Josip Pečarić, Vera Čuljak, A. M. Fink, *On some inequalities for convex functions of higher order*, Nonlinear Stud. **6** (1999), no. 2, 131–140.

[64] J. Pečarić, V. Čuljak, M. Rogina, *On some inequalities for convex functions of higher order*, II. Nonlinear Anal. **45** (2001), no. 3, Ser. A: Theory Methods, 281–294.

[65] J. Pečarić, A. Mesihović, *On some complementary inequalities*, Makedon. Akad. Nauk. Umet. Oddel. Mat.-Tehn. Nauk. Prilozi **14** (1993), no. 2, 49–54 (1995).

[66] J. Pečarić, J. Perić, *Improvements of the Giaccardi and the Petrović inequality and related Stolarsky type means*, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series. **39** (1) (2012), 65–75

[67] J. Pečarić, J. Perić, *Remarks on the paper " Jensen's inequality and new entropy bounds" by S. Simic*, Math. Inequal. Appl. **6** (2012), no. 4, 631–636

[68] J. Pečarić, J. Perić, S. Varošanec, *Refinements of the converse Hölder and Minkowski inequalities*, rukopis.

[69] J. E. Pečarić, F. Proschan, Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*, Academic Press, New York, 1992.

[70] J. Perić, J. Pečarić, *Generalizations and improvements of converse Jensen's inequality for convex hulls in* $\mathbb{R}^k$, rukopis.

[71] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Math. Ser. No. 28, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[72] J. Rooin, *A refinement of Jensen's inequality*, J. Ineq. Pure and Appl. Math., **6**, 2 (2005), Art. 38., 4 pp.

[73] S. Simić, *On a global upper bound for Jensen's inequality*, J. Math. Anal. Appl. **343** (2008), 414–419.

[74] S. Simić, *Jensen's inequality and new entropy bounds*, Appl. Math. Lett. **22** (2009), 1262–1265.

[75] S. Simić, *On an upper bound for Jensen's inequality*, J. Inequal. Pure Appl. Math. **10** (2009), no. 2, Article 60, 5 pp.

[76] S. Simić, *On a new converse of Jensen's inequality*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **85**(99) (2009), 107–110.

[77] S. Simić, *Best possible global bounds for Jensen's inequality*, Appl. Math. Comput. **215** (2009), no. 6, 2224–2228.

[78] S. Simić, *On a converse of Jensen's discrete inequality*, J. Inequal. Appl. 2009, Art. ID 153080, 6 pp.

[79] S. Simić, *Best possible global bounds for Jensen functional*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 7, 2457–2462.

[80] H. M. Srivastava, Z.-G. Xia, Z.-H. Zhang, *Some further refinements and extensions of the Hermite-Hadamard and Jensen inequalities in several variables*, Math. Comput. Modelling **54** (2011), 2709–2717.

[81] J. F. Steffensen, *On certain inequalities and methods of approximation*, J. Inst. Actuaries **51** (1919), 274–297.

[82] T. Trif, *Characterizations of convex functions of a vector variable via Hermite-Hadamard's inequality*, J. Math. Ineq. **2** (1) (2008) 37-44.

[83] P. M. Vasić, I. B. Lacković, *Some complements to the paper: On an inequality for convex functions*, (Univ. Beograd. Publ. Elektrotech. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 461–497 (1974), 63–66). Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 544–576 (1976), 59–62.

[84] P. M. Vasić, Ž. Mijalković, *On an index set function connected with Jensen inequality*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No 544-576 (1976), 110–112.

[85] P. M. Vasić, J. E. Pečarić, *On the Jensen inequality*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No 637-677 (1977), 50–54.

[86] P. M. Vasić, J. E. Pečarić, *Sur une inegalite de Jensen-Steffensen*, General Inequalities **4**, Birkhauser Verlag, Basel, Boston and Stuttgart, 1984, 87–92.

[87] L.-C. Wang, X.-F. Ma, L.-H. Liu, *A note on some new refinements of Jensen's inequality for convex functions*, J. Inequal. Pure Appl. Math., **10**, 2 (2009), Art. 48., 6 pp.

[88] S. Wąsowicz, *Hermite-Hadamard-type inequalities in the aproximate integration*, Math. Ineq. Appl. **11** (2008), 693-700.

[89] S. Wąsowicz, A. Witkowski, *On some inequality of Hermite-Hadamard type*, Opuscula Math. **32/3** (2012), 591-600

[90] D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1941.

[91] Z.-G. Xiao, H. M. Srivastava, Z.-H. Zhang, *Further refinements of the Jensen inequalities based upon samples with repetitions*, Math. Comput. Modelling **51** (2010), 592–600.

[92] Y.-D. Zhuang, *The Beckenbach inequality and its inverse*, J. Math. Anal. Appl. **175** (1993), 118–125.

Sažetak

U disertaciji poboljšavamo varijante nekih klasičnih nejednakosti. Metoda kojom poboljšavamo nejednakosti temelji se na monotonosti Jensenovog funkcionala s obzirom na težine. Osnovni rezultat iz kojega su se kasnije nejednakosti razvijale je poznata Jensenova nejednakost. Neki od važnijih rezultata vezanih uz Jensenovu nejednakost su Jessenova nejednakost iz 1931. godine (generalizacija na pozitivne normalizirane linearne funkcionale), te Lah-Ribaričeva nejednakost iz 1973. godine (varijanta konverzne Jensenove nejednakosti).

U prvom poglavlju glavni rezultat nam je poboljšanje generalizacije Lah-Ribaričeve nejednakosti na pozitivne normalizirane linearne funkcionale. Dajemo generalizaciju na konveksne ljuske, te specijalno na k-simplekse. Kao specijalan slučaj ovih rezultata dobivamo k-dimenzionalnu verziju Hammer-Bullenove nejednakosti, te u jednoj dimenziji poboljšanje klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti. Još jedna varijanta konverzne Jensenove nejednakosti je Giaccardijeva nejednakost, te kao specijalan slučaj Petrovićeva nejednakost. Dajemo njihova poboljšanja, te koristimo dobivene rezultate za definiranje dva linearna funkcionala za koje dajemo dva teorema srednje vrijednosti Cauchyevog tipa, te dajemo elegantnu metodu za dobivanje n-eksponencijalno konveksnih i eksponencijalno konveksnih funkcija. Za kraj ovog poglavlja promatramo konverznu Hölderovu nejednakost za funkcionale, diskretnu verziju konverzne Beckenbachovu nejednakost, te konverznu Minkowskijevu nejednakost za funkcionale. Za sve tri nejednakosti dajemo poboljšanja.

U drugom poglavlju disertacije gledamo dvije varijante Jensenove nejednakosti. Prva je Jessen-Mercerova nejednakost. Dajemo dva teorema koja poboljšavaju varijantu Jessen-Mercerove nejednakosti. Dajemo generalizaciju ovih rezultata na konveksne ljuske. Zatim definiramo dva funkcionala (Jessen-Mercerove razlike) nad kojima provodimo isti postupak kao i nad linearnim funkcionalima u prethodnom poglavlju. Druga varijanta Jensenove nejednakosti kojom se bavimo je Jensenova operatorska nejednakost, to jest generalizacija Jensenove nejednakosti na operatorski konveksne funkcije. Cilj nam je poboljšanje Jensenove operatorske nejednakosti bez operatorske konveksnosti. Poboljšavamo neke nejednakosti između kvaziaritmetičkih sredina (kao specijalan slučaj promatramo potencijalne sredine).

U zadnjem poglavlju proučavamo jednu od najslavnijih nejednakosti, Hermite-Hadamardovu. Dajemo dva poboljšanja generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti na pozitivne normalizirane linearne funkcionale. Poboljšavamo i Hammer-Bullenovu nejednakost, te Fejérovo proširenje Hermite-Hadamardove nejednakosti sa težinskom funkcijom iz 1906. godine. Na kraju ponovo definiramo dva funkcionala (zovemo ih Hammer-Bullenove razlike) nad kojima provodimo isti postupak kao i u prijašnjim poglavljima.

Summary

In disertation we improve variants of some classical inequalities. Method for improving inequalities is based on the monotonicity of Jensen's functional with weights. Main result from which all later inequalities have developed is famous Jensen's inequality. Some of the most important results related to the Jensen's inequality are Jessen's inequality from 1931. (generalization on positive normalized linear functionals) and the Lah-Ribaričeva inequality from 1973. (variant of the converse Jensen's inequality).

In the first chapter main result is improvement of the generalized Lah-Ribarič inequality on positive normalized linear functionals. We give generalization on convex hulls and as a special case on k-simplex. From this results we obtain k-dimensional version of the Hammer-Bullen inequality and in one dimension improvement of the classical Hermite-Hadamard inequality. Another variant of the converse Jensen's inequality is Giaccardi's inequality and as a special case Petrović's inequality. We give their improvements. Then we define two functionals, give Cauchy mean value theorems and an elegant method of producing an n-exponentially convex and exponentially convex functions. At the end of this chapter improvement of the converse Hölderovu inequality for functionals, discrete version of the converse Beckenbachovu inequality and converse Minkowski inequality for functionals is given.

In the second chapter we are dealing with two variants of the Jensen's inequality. First one is the Jessen-Mercer inequality. Improvement of a variant of the Jessen-Mercer inequality and a generalization of this result on convex hulls is given. Then we define two functionals (the Jessen-Mercer differences) and we apply same procedure on them as on the linear functionals in chapter one. Second variant of Jensen's inequality we deal with is Jensen's operator inequality, that is generalization on operator convex functions. We improve Jensen's operator inequality without operator convexity. Obtained results are applied to improve some inequalities between quasi-arithmetic means (as a special case we are observing power means).

In the last chapter we give improvement of the generalization of one of the most famous inequalities, Hermite-Hadamard inequality for positive normalized linear functionals. We also improve the Hammer-Bullen inequality and Fejér's generalization of the Hermite-Hadamard inequality with weighted function from 1906. Again we define two functionals (the Hammer-Bullen differences) and we apply on them same procedure as in previous chapters.

Životopis

Rođen sam 13. veljače 1980. godine u Zagrebu. Osnovnu školu završio sam u Zagrebu, nakon čega sam upisao XV. matematičku gimnaziju, također u Zagrebu, gdje sam maturirao 1998. godine. Diplomirao sam 13. srpnja 2005. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, Matematički odjel, smjer računarstvo. Diplomski rad s naslovom "MySql i aplikacija u C++" izradio sam pod vodstvom prof. dr. sc. Roberta Mangera.

Od veljače 2006. godine radim kao asistent na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematički odsjek u Splitu. Iste godine upisao sam doktorski studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

Član sam Seminara za nejednakosti i primjene, Hrvatskog matematičkog društva, te Splitskog matematičkog druztva. Održao sam govor na dvije međunarodne matematičke konferencije (5. Hrvatski matematički kongres u Rijeci, te Mathematical Inequalities and Nonlinear Functional Analysis with Applications u Južoj Koreji).

Koautor sam sljedećih znanstvenih radova:

- M. Klaričić Bakula, J. Pečarić, J. Perić, *Extensions of the Hermite-Hadamard inequality with Applications*, Math. Inequal. Appl. **12** (2012), no. 4, 899–921

- M. Klaričić Bakula, J. Pečarić, J. Perić, *On the converse Jensen inequality*, Appl. Math. Comput. **218** (11) (2012), 6566–6575.

- A. Matković, J. Pečarić, J. Perić, *A refinement of the Jessen-Mercer inequality and a generalization on convex hulls in* $\mathbb{R}^k$, rukopis.

- J. Mićić, J. Pečarić, J. Perić, *Extension of the refined Jensen's operator inequality with condition on spectra*, Ann. Funct. Anal. **3** (2012), no. 1, 67–85.

- J. Mićić, J. Pečarić, J. Perić, *Refined Jensen's operator inequality with condition on spectra*, Oper. Matrices, (2011), Oper. Matrices, (2011), prihvaćeno za objavljivanje.

- J. Pečarić, J. Perić, *Improvements of the Giaccardi and the Petrović inequality and related Stolarsky type means*, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series. **39** (1) (2012), 65–75

- J. Pečarić, J. Perić, *Remarks on the paper " Jensen's inequality and new entropy bounds" by S. Simic*, Math. Inequal. Appl. **6** (2012), no. 4, 631–636

- J. Pečarić, J. Perić, S. Varošanec, *Refinements of the converse Hölder and Minkowski inequalities*, rukopis.

- J. Perić, J. Pečarić, *Generalizations and improvements of converse Jensen's inequality for convex hulls in* $\mathbb{R}^k$, rukopis.