Kvazi-perceptivna intuicija i njena uloga u spoznaji aritmetičkih istina[1]

Majda Trobok
Sveučilište u Rijeci
trobok@ffri.hr

1. UVOD Jedno od osnovnih problema u filozofiji matematike zasigurno je epistemički problem spoznaje matematičkih objekata. Kako spoznajemo matematičke istine i koju ulogu u tom procesu ima naša intuicija? Na ova su pitanja ponuđeni razni odgovori, iz različitih filozofskih perspektiva: od Platonove teze da duša spoznaje matematičke Ideje kojih je naše znanje reminiscencija, do suvemenije varijante spoznaje platonističkih objekata putem intuicije koja se sastoji u tome da "vidimo" matematičke istine (dovoljno se sjetiti Gödela i teze da nam se aksiomi teorije skupova "nameću kao istiniti"), pa do druge krajnosti poput Maddyjeve teorije da su skupovi prostorno-vremenski locirani te ih spoznajemo simultano sa spoznajom fizičkih objekata (tako kada vidimo npr. jabuku, percipiramo ujedno i skup koji sadrži jabuku, i skup koji ima za element skup koji sadrži jabuku itd. Jer je riječ o objektima koji su svi locirani tamo gdje se nalazi sama jabuka). Potrebno je međutim imati na umu da svi ti odgovori pretpostavljaju tezu o objektivnom postojanju matematičkih objekata odnosno ideju da matematiku otkrivamo a ne stvaramo jer u protivnom, koliko god da se pojavljivale ozbiljne dileme i nejasnoće, epstemički problem ipak biva riješen.

[1] Nenad Miščević osoba je koja me je prije popriličnog broja godina uvela u svijet filozofije matematike. Ovaj je tekst ne samo rezultat čitanja i analiziranja tekstova Nenada Miščevića o spoznaji u filozofiji matematike već je ponajviše rezultat dugih i iscrpnih rasprava na tu temu koje sam imala zadovoljstvo voditi sa Miščevićem tijekom dugog niza godina suradnje. Željela bih ovom prilikom izraziti zahvalnost Nenadu na njegovoj spremnosti i otvorenosti za diskusiju, te izraziti veliko poštovanje prema njegovom neiscrpnom znanju, zanosu i ljubavi prema filozofiji.

Mogući odgovori ne iscrpljuju se međutim u gore spomenutim teorijama, već postoji impresvino šarenilo ideja i teza o tome kako znamo bilo što o matematici odnosno kako spoznajemo (objektivno postojeće) matematičke objekte i tvrdnje te koju ulogu u tom procesu imaju naše intuicije.
U ovome ćemo se tekstu kritički osvrnuti na odgovor(e) koje nudi Nenad Mišćević.

2. JEDNOSTAVNE NUMERIČKE INTUICIJE I FILOZOFIJA MATEMATIKE NENADA MIŠČEVIĆA

Miščević u svom radu[2] brani tezu o postojanju tkz. kvazi-perceptivne intuicije te u svojim člancima analizira da li je i u kojoj mjeri imaginativna odnosno kvazi-perceptivna intuicija aplikabilna u kontekstu aritmetičke intuicije.

---

[2] Članci: Miščević, N. *Understanding Numerical Intuitions*,
Miščević, N. *The Rails of the Mind – Accessing Mathematical Reality*,
Miščević, N., 'Imagination and Necessity (the Contemporary Relevance of Meinong's Views on the Evident Cognition)'

Što je to uopće kvazi-perceptivna odnosno imaginativna intuicija?
Miščević koristi termin intuicija sa značenjem "spontane reakcije koja je fenomenološki neposredna i praćena osjećajem očitosti i sigurnosti"[3]. Riječ je dakle o vjerovanjima do kojih dolazimo neinferencijalnim putem, bez zaključivanja i koja nam se vjerovanja nameću kao očita i sigurna - "vidimo" da je nešto istina i čini nam se da je tome nužno tako.

Naprimitivnije intuicije su upravo elementarne imaginativne intuicije te one čine osnovu matematičke spoznaje. Kvazi-perceptivne odnosno imaginativne intuicije općenito nisu vezane iskljucivo za domenu matematičkog znanja ali predstavljaju bazu za spoznaju matematičkih istina pa su stoga posebno zanimljive u toj domeni.
Miščević kreće od načina na koji dolazimo do pojma jednakobrojnosti te smatra da je spoznaja jednakobrojnosti prototip za razumijevanje našim kompleksnijih intuicija koje se tiču brojeva. Pogledajmo stoga najprije kako dolazimo do pojma jednakobrojnosti.
Uzmimo primjer večere na koju smo pozvali drage prijatelje i pitanja prije posluživanja hrane ima li svaki gost (G) za stolom svoj tanjur (T). Pretpostavimo da je situacija za stolom sljedeća:
G_1 G_2 G_3 G_4 G_5
T_1 T_2 T_3 T_4 T_5
Kad tražimo odgovor na to pitanje onda koristimo ponajprijje vizualnu percepciju ne bismo li uopće vidjeli ljude za stolom i njihove tanjure. U sljedećem trenutku, putem imaginacije, zamislimo neke vrste poveznica između svake osobe i njegovog tanjura, grupirajući tako ljude i tanjure. U svemu nam pomaže imaginativna odnosno kvazi-perceptivna intuicija zahvaljujući kojoj nam postaje očito da svakom gostu odgovara jedan tanjur odnosno, matematičkim riječnikom, da postoji bijektivno preslikavanje između ljudi i tanjura. Dolazimo time, koristeći intuiciju, do pojma jednakobrojnosti te se cijeli proces od trenutka kad vidimo osobe i tanjure pa do toga da ih je jednako mnogo bazira na intuiciji – sigurni smo i očito nam je da je za odgovor na pitanje ima li svaki gost svoj tanjur potrebno sparivati osobe i predmete i da u konačnici (u našem slučaju) svaki gost ima svoj tanjur.

3. KRITIKA MIŠČEVIĆA I TEZE O POSTOJANJU BAZIČNIH ARITMETIĆKIH INTUICIJA

[3] Miščević, N., 'Understanding Numerical Intuitions', Str.7

Pogledajmo upravo izloženi primjer u kojemu pomoću imaginativne (ili kvazi-perceptivne) intuicije dolazimo do spoznaje pojma jednakobrojnosti. Takav se proces, smatra Miščević, bazira isključivo na vizualnoj percepciji, imaginaciji i intuiciji pa je stoga *per se* neinferencijalan. Predstavljeni je primjer paradigmatski za situaciju određivanja jednakobrojnosti dvaju skupina pa je korisno pobliže ga pogledati u kontekstu tvrdnje o neinferencijalnosti spoznajnog procesa. Neinferencijalnost procesa čini se neproblematičnom (barem) u nekoliko prvih faza: vizualnoj percepciji osoba i tanjura, kao i sparivanju svake osobe sa jednim tanjurom. Nakon toga međutim dolazi do **zaključka** da ne nedostaje tanjura, odnosno da je skupina ljudi jednakobrojna skupini tanjura. U tom koraku izgovaramo sljedeće: "**dakle**, jednako ih je mnogo". I to je trenutak u procesu koji nije jasno neinferencijalan jer se sastoji od zaključivanja koje je po definiciji inferencijalno. Naime, moguće je da vidimo ljude i tanjure, da imaginacijom koristeći intuiciju sparujemo ljude i tanjure a da ipak ne dođemo do sljedećeg koraka a taj je tvrdnja da su promatrane skupine jednakobrojne. Naravno, moglo bi se na takav prigovor odgovoriti protu-prigovorom da takvog inferencijalnog koraka, ako uopće postoji, nismo svjesni pa možemo stoga i dalje proces smatrati neinferencijalnim. Time bismo pod inferencijalnošću nekog procesa smatrali svaki proces u kojemu nemamo inferencijalnih koraka ili je riječ o koracima kojih nismo svjesni. Postavlja se međutim pitanje je li i u kojoj mjeri svjesnost uopće relevantna u određivanju (ne)inferencijalnosti nekog procesa i da li bismo takvim proširivanjem definicije "neinferencijalnog" ona (i dalje) imala eksplanatornu ulogu.

Postavlja se nadalje pitanje je li takva imaginativne odnsono kvazi-perceptivna intuicija analogna platonističkoj percepciji i postoji li među njima neka poveznica. Miščević spominje Gödela i njegovu ideja o postojanju intuicija među matematičarima kao podršku teze da kvazi-perceptivna intuicija posjedovana i od strane vrhunskih matematičara, dakle za matematičke tvrdnje koje su znatno kompleksnije od bazičnih aritmetičkih istina (poput 2+3=5). Primjer za to je aksiom izbora kojega su matematičari smatrali očitim i intuitivno jasnim. U tom se kontekstu međutim pojavljuju dva problematična aspekta. U prvome redu čini se da Miščević ima prema Gödelovoj intuiciji kontroverzan stav. S jedne se strane Gödela spominje kao potvrdu teze da intuicija nije samo prisutna kod ne-matematičara niti se manifestira isljučivo kod elementarnih aritmetičkih istina. Gödelov primjer tako služi kao potvrda teze o prisutnosti kvazi-imaginativne

intuicije u matematici na različitim spoznajnim razinama. I u tom se smislu platonistička intuicija smatra primjerom kvazi-perceptivna intuicije.
Nije međutim jasno da li platonistička intuicija koju zastupa Gödel korespondira sa kvazi-percpeptivnom intuicijom s obzirom da se na platonističku intuiciju Miščević kritički osvrće, okarakterizirajući je kao "misteriozna sposobnost spoznaje apstraktnih objekata koja ne nudi nikakvo realno objanjenje za numeričke intuicije"[4] odnosno opisuje takvu intuiciju kao utopijsko rješenje epistemološkog pitanja o spoznaji matematičkih objekata.

No čak kad bismo blagonaklon stav prema platonističkoj intuiciji prihvatili kao jedini stav Miščevića, kvazi-perceptivna intuicija se ipak od Gödelove, platonističke intuicije, barem kod nekih autora[5], razlikuje po nekim bitnim obilježima. U prvome redu, platonistička intuicija ne uključuje "očitost" tvrdnji, riječ je o nekoj vrsti percepcije, analognoj vizualnoj percepciji. Mi vizualno percipirano i stvari koje ne razumijemo, jednostavno ih vidimo, bilo nam razumljiv i jasan sadržaj onoga što vidimo ili ne. Za neke će biti razumljiv, za druge neće. Kao što biolog koji gleda u jato ptica može po nekim elementima i na osnovi znanja i iskustva znati o kojoj je vrsti ptice riječ, te ima li u njiihovom letu nekih anomalija, mi ostali iako vidimo isto jato istom oštrinom oka, nismo u stanju izreći nikakav podatak o pticama iz jata, ako smo uopće u stanju prepoznati da je riječ o jatu ptica nad horizontom ispred nas. Po Miščeviću bi međutim takva analogija između vizulane i platonističke percepcije, trebala biti neodrživa, barem u slučaju jednostavnih matematičkih intuicija jer su ove zadnje nešto što čini se posjedujemo i u čemu smo uspješni već kao djeca. Nije dakle riječ o tome da vidimo da je 2+2=4, što neki razumiju I smatraju očitim a drugi ne, već je teza da nam je već od rane životne dobi *očito* da je 2+2= 4. Osim toga, čini se da je riječ o istinama koje zauzimaju centralno mjesto u Quinovoj mreži vjerovanja, i od kojih stoga istina teško, ako uoće pod specifičnim uvjetima, odustajemo.

No je li to realno stanje stvari? Potrebno je najprije odvojiti pojmove jednakobrojnosti i (prirodnog) broja. Intuicija o jednakobrojnosti dvaju kolekcija, agregata ili skupova, jedna je od teza koje se standardno i neproblematično prihvaćene. Eksperimenti pokazuju da ne samo vrlo mala djeca, već i neke životinje, jesu u stanju odrediti je li u vrlo malim skupinima koje se pojavljauju u

---

[4] 'Understanding Numerical Intuitions', p.1.
[5] Vidi (Hardy, 1940).

dva navrata jednak broj elemenata ili nije (uzmimo primjer ekperimenta sa pticama koje su u stanju odrediti je li broj lovaca koji je ušao u toranj jednak broju lovaca koji su iz tornja izašli ili je izaslo manje lovaca nego je ušlo, napuštaju ili ne obližnje stablo što znači vraćajući se ili ne u toranj o kojemu se nalazi gnjezdo i u kojemu lovac stoga predstavlja opasnost). Eksperimenti su rađeni i sa djecom koja reagiraju na pomanjkanje nekog elementa u kolekciji koje se pred djetetom pojavljuje više puta. Je li onda riječ o (kvazi-perceptivnoj) intuiciji? Odgovor bi trebao glasiti: da. No, pojam jednakobrojnosti samo je prvi korak u spoznaji aritmetičkih odnsono brojevnih jednadžbi. O tome da je riječ o iznimno kompleksnom koraku puno je pisao i Frege, te uveo Humeov princip kao nači da se iz pojma jednakobrojnosti, pređe na pojam (prirodnog) broja. Je li pojam (prirodnog) broja jednako intutivno blizak djeci, kao što je to pojam jednakobrojnosti? Pogledajmo kakva je situacija u praksi. Postavlja se naime pitanje zašto za spoznaju istina koje su nama po nekim teorijama bliske i intuitivno jasne i očite, ipak potrebujemo neobično mnogo vremena da bismo ih usvojili. Kako se objašnjava činjenica da učimo osnovne matematičke operacije (i to samo zbrajanje I oduzimanje!) na (prirodnim) brojevima od 1 do 20 punih godinu dana. I zašto je uopće potrebno vrijeme da bismo, nakon napornih vježbi I provjera znanja, konačno sa sigurnošću znali da je npr. 7+2=9. U vsakodnevnom životu često nailazimo na matematičke tvrdnje koje smo u školi učili i vježbali ali nam i dalje ostaju nepoznate odnosno nejasne. Tako je začuđuje velikom broju čak i članova akademske zajednice nejasno da npr. 40 ocjenskih bodova od mogućih 70 nije isto što i 40% od 70 bodova? I kako to da aritmetičke tvrdnje koje u nekim teorijama imaju status očitih, odnosno intuitivno jasnih istina ipak tolikom broju ljudi predstavljaju ozbiljan problem tijekom pa i nakon školovanja, ostavljujući dojam da je riječ o domeni o kojoj učimo (pa onda i zaboravljamo) a ne o činjenicama koje su nam intuitivno očite?

Nakon tehnički zahtjevnom procesa zbrajanja i oduzimanja, dolazi još teže pitanje o tome **zašto** je npr. 2+2=4, te znamo li to i dokazati? Od trenutka spoznaje da je 2+2=4, do trenutka rasprave o dokazu tvrdnje standardno se prolazi kroz proces učenja i sazrijevanja koji traje 12-ak godina; većina nikada o tome neće raspravljati niti o tome učiti jer se smatra da je to ionako bitno samo za one koji se žele teorijskom matematikom baviti profesionalno.

Kakva je situacija u standardnoj matematičkoj praksi i što nam povijest matematike govori o aritmetičkim tvrdnjama i njihovom statusu? Zanimljivo je povlačenje paralale između aritmetike i geometrije. Dok Euklidove aksiome i

postulate znamo još od 3 stoljeća p.n.e., aksiomatizacija aritmetike odnosno prirodnih brojeva pojavljuje se tek sa Peanom u 19-20. stoljeću. Od teorije brojeva kojom su se posebno bavili pitagorejci do Peanovih aksioma prošlo je gotovo 20 stoljeća razvoja aritmetike. Pitagora i njegovi sljedbenici razvili su teoriju brojeva u 5 stoljeću p.n.e. ali je odgovor na pitanje što je broj trebalo čekati do 19. stoljeća. Odgovor daje Frege te postavlja Humeov princip kao implicitnu definiciju (prirodnog) broja, odnosno kao princip koji omogućava prijelaz sa jednakobrojnosti (tj. sa relacije koja samo kategorizira) na broj kao objekt. Teza koja zastupa ideju da je Humeov princip očit, i to ne samo matematičarima, stoga je problematična i kontroverzna jer nema uporišta u praksi: govori u prilog tome već sama činjenica da je za definiciju broja i postavljanje Humeovog principa trebalo čekati stoljećima.
Netko će na to primijetiti kako je ono prvo po sebi zadnje za nas, ali ne potkrepljuje li ta teza dodatno sumnju u postojanje aritmetičkih, odnosno kvazi-perceptivnih intuicija? Jer ono što je zadnje za nas teško da je dio naših intuicija, koje su po definiciji neinferencijalne.

Primjedbe upućene tezi o kvazi-perceptivnoj intuiciji u filozofiji matematike Nenada Miščevića zajedničke su kritici koju je moguće uputiti strukturalistima,[6] naime teza o spoznaji putem imaginacije i apstrakcije zajednička je i osnovnom kredu strukturalista. Miščević u svojim tekstovima i sam povlači paralele i podcrtava zajedničke teze sa strukturalističkom teorijom o spoznaji aritmetičkih struktura[7] putem sustava koja ih oprimjeruju.[8] Riječ je naime o procesu koji uključuje kvazi-perceptivnu intuiciju i imaginaciju. Iznesenim primjedbama stoga, obraćajući se tezama Miščevića, obraćamo se ujedno i osnovnim postavkama strukturalističkog poimanja matematičke spoznaje. Time i sama diskusija dobiva na univerzalnosti te se proširuje na cijelu jednu klasu teorija u kontekstu spoznaje aritmetičkih istina.

Reference:

Brown, J.R., 1990, ‘Pi in the sky’ u Irvine, A., ur., *Physicalism in mathematics*, Kluwer.

---

[6] Vidi npr. (Shapiro, 1997).
[7] Paradigmatski je primjer struktura prirodnih brojeva.
[8] Miščević, N., 'Numerical knowledge and the issue of abstractness'

Frege,G., 1884/1995, *Osnove aritmetike*, Kruzak, Zagreb.

Hardy,G.H., 1940, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press.

Miščević, N., 1995, 'The rails of the mind : accessing mathematical reality. V: Philosophy of mathematics', Acta Analytica, 11. Dettelbach: Röll, str. 41-57.

Miščević, N., 'Imagination and Necessity (the Contemporary Relevance of Meinong's Views on the Evident Cognition)',

Miščević,N.,'Understanding Numerical Intuitions',

Miščević, N., 'Numerical knowledge and the issue of abstractness',

Resnik, M., 1997, *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press.

Resnik, M., 1982, 'Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology', NOUS 15, pp. 529-550.

Shapiro, S., 1996, 'Space, number and structure: a tale of two debates', Philosophia Mathematica, (3) Vol. 4, pp. 148-173.

Shapiro, S., 1997, *Philosophy of Mathematics – Structure and Ontology*, Oxford University Press.

Shapiro, S., 1983, 'Mathematics and reality', Philosophy of Science, 50, pp. 523-548.