



## 5. INTERNACIONALNI NAUČNO-STRUČNI SKUP GRAĐEVINARSTVO - NAUKA I PRAKSA

ŽABLJAK, 17-21. FEBRUARA 2014.

---

*Ivana Štimac Grandić<sup>1</sup>, Jug Drobac<sup>2</sup>, Davor Grandić<sup>3</sup>*

### PRORAČUN VERTIKALNIH UBRZANJA NA PJEŠAČKOM MOSTU PREMA RAZLIČITIM MODELIMA PJEŠAČKOG DINAMIČKOG OPTEREĆENJA

#### **Rezime**

U radu je dan pregled modela dinamičkih vertikalnih opterećenja pješačkih mostova jednim pješakom prema europskim prednormama i smjernicama baziranim na europskim normama. Izračunana su najveća vertikalna ubrzanja rasponskog sklopa pješačkog mosta u parku Maksimir u Zagrebu koristeći navedene modele opterećenja. U usporedbi rezultata i zaključku ukazano je na prednosti i nedostatke pojedinih modela opterećenja.

#### **Ključne riječi**

granično stanje vibracija, pješački most, dinamički modeli pješačkog opterećenja

### EVALUATION OF VERTICAL ACCELERATION ON THE PEDESTRIAN BRIDGE DUE TO DIFFERENT PEDESTRIAN DYNAMIC LOAD MODELS

#### **Summary**

In this paper, the different pedestrian dynamic load models in vertical direction due to single pedestrian according to European prenorm and guidelines to European norm are presented. The maximum vertical acceleration of the bridge deck due to different load models are calculated on the pedestrian bridge in Maksimir Park, in Zagreb. Advantages and disadvantages of the load models used in this paper are noted in the last chapters.

#### **Key words**

serviceability limite state, vibration, pedestrian bridge, pedestrian dynamic load models

---

<sup>1</sup> Ph.D, C.E., Faculty of Civil Engineering, University of Rijeka, Viktora Cara Emina 5, 51 000 Rijeka, Croatia, [ivana.stimac@gradri.hr](mailto:ivana.stimac@gradri.hr)

<sup>2</sup> C.E., Faculty of Civil Engineering, University of Rijeka, Viktora Cara Emina 5, 51 000 Rijeka, Croatia,

<sup>3</sup> Ph.D, C.E., Faculty of Civil Engineering, University of Rijeka, Viktora Cara Emina 5, 51 000 Rijeka, Croatia, [davor.gradic@gradri.hr](mailto:davor.gradic@gradri.hr)

## **1. UVOD**

Pješački mostovi su vrlo često projektirani i izvedeni kao vrlo fleksibilne konstrukcije čije se vlastite frekvencije poklapaju s frekvencijom ljudskog hoda. Stoga je takve konstrukcije lako pobuditi na vibriranje uslijed prolaska ljudi preko mosta. Da bi se osigurali sigurnost i udobnost korisnika pješačkih mostova razne norme za projektiranje [1-8] definiraju uvjete koje je potrebno zadovoljiti da bi most zadovoljio granična stanja uporabljivosti vezana za vibracije uzrokovane pješačkim prometom preko mosta. Dok neke norme i prijedlozi nalažu izbjegavanje konstrukcije mosta čija se osnovna vlastita frekvencija nalazi u rasponu prva dva harmonika ljudskog hodanja [4,5] druge norme propisuju vrijednosti frekvencija iznad kojih se smatra da je granično stanje uporabljivosti vezano za vibracije uzrokovane pješačkim prometom zadovoljno [2,3,6-8] ili kombiniraju ta dva kriterija [1]. Primjerice, europska norma u kojoj su definirani uvjeti za dokaz graničnog stanja uporabljivosti mostova [3] definira da je provjeru kriterija udobnosti za pješake potrebno provesti ako je osnovna frekvencija rasponskog sklopa manja od 5 Hz za vertikalne vibracije i 2,5 za horizontalne (bočne) vibracije.

Ukoliko je osnovna vlastita frekvencija manja od granične vrijednosti određene normom potrebno je provesti dinamičku analizu, tj. izračunati najveće ubrzanje raponskog sklopa uslijed pješačkog dinamičkog opterećenja. Da bi bio zadovoljeno granično stanje vibriranja uslijed pješačkog prometa najveća ubrzanja bilo kojeg dijela rasponskog sklopa konstrukcije moraju biti manja od normama propisanih vrijednosti [1,3,6]. Europska norma [3] ograničava ubrzanja od  $0,7 \text{ m/s}^2$  za vertikalne vibracije,  $0,2 \text{ m/s}^2$  za horizontalne vibracije pri normalnoj upotrebi i  $0,4 \text{ m/s}^2$  za uvjete izuzetnog gomilanja ljudi.

Modeli opterećenja za koje se provodi proračun ubrzanja konstrukcije pobuđene hodačem pješaka u nekim su normama definirani [1,2,6] a u nekim nisu. Primjerice, trenutno važeća europska norma za prometna opterećenja mostova EN 1991-2 [9] ne definira te modele, no postoje smjernice za primjenu norme EN 1991-2 [10,11] u kojima se definiraju pješački dinamički modeli.

U ovom radu, na mostu koji je projektiran u parku Maksimir u Zagrebu, izračunat će se najveća vertikalna ubrzanja uslijed opterećenja jednim pješakom prema modelima koji su definirani europskim prednormama [1,2] i smjernicama za primjenu europskih normi za projektiranje mostova [10,11]. Pješački mostovi jednostavnih statičkih sustava poput jednosrasponskih ili višerasponskih greda, razupora i rešetaka u pravilu nemaju problema s vibracijama uslijed pješačkog prometa u poprečnom i uzdužnom smjeru mosta, stoga je dokaz ganičnog stanja vibracija u tim smjerovima u ovom radu izostavljen.

## **2. MODEL PJEŠAČKOG OPTEREĆENJA**

### **2.1. MODEL SILE HODANJA**

Ritmičko kretanje tijela tijekom hodanja koje traje najmanje 20 sekundi može smatrati periodičkim kretanjem, tj. opisati periodičkom silom. Kod određivanja modela kojim se opisuju vertikalna sila izazvana hodačem po mostu usvaja se pretpostavka potpune periodičnosti ljudskog hoda (obje noge proizvode potpuno istu silu a svi koraci su identični) [12]. Vertikalna komponenta periodične sile hodanja  $F(t)$ , stoga, se može predstaviti Fourierovim nizom:

$$F(t) = G + G \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin(2 \cdot \pi \cdot i \cdot f_s \cdot t - \varphi_i) \quad (1)$$

gdje su:  $G$  težina pješaka (700 N [13]),  $f_s$  frekvencija hoda,  $\alpha_{i,v}$ , Fourierov koeficijent  $i$ -tog harmonika ( $FK$ ),  $n$  ukupan broj harmonika,  $\varphi_i$  fazni pomak  $i$ -tog harmonika. Fourierovi koeficijenti za pojedini harmonik, fazni pomaci i broj harmonika variraju u ovisnosti o izvoru [9,10] kao što je prikazano u tablici 1.

Tablica 1. Fourierovi koeficijenti i fazni pomaci prema različitim izvorima

| Autor(i)           | Fourierovi koeficijenti ( $FK$ )                                                                                                        | Fazni pomaci                |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| Blanchard i ostali | $\alpha_1=0,257$                                                                                                                        | -                           |
| Bachmann i ostali  | $\alpha_1=0,4/0,5$ ; $\alpha_2=\alpha_3=0,1$                                                                                            | $\varphi_2=\varphi_3=\pi/2$ |
| Charles i Hoopah   | $\alpha_1=0,4$                                                                                                                          | -                           |
| Young              | $\alpha_1 = (f_s - 0,95) \leq 0,5$ ; $\alpha_2 = 0,054 + 0,0088 f_s$<br>$\alpha_3 = 0,026 + 0,015 f_s$ ; $\alpha_4 = 0,01 + 0,0204 f_s$ | -                           |
| Schulze            | $\alpha_1=0,37$ ; $\alpha_2=0,1$ ; $\alpha_3=0,12$ ; $\alpha_4=0,04$ ; $\alpha_5=0,08$                                                  | -                           |

## 2.2. MODEL I SILE U NORMAMA

Većina normi i preporuka koje navode modele za dokaz graničnog stanja uporabljivosti pješačkih mostova uslijed vibracija uzrokovanih pješačkim opterećenjima [1,2,10-13] definiraju silu jednog pješaka kao pokretnu ili stacionarnu silu u kojoj je samo pulsirajući dio iz jednadžbe (1) uzet u obzir. Dinamički proračun se provodi za frekvenciju koračanja  $f_s$  koja je jednaka vlastitoj frekvenciji mosta u vertikalnom smjeru  $f_v$ .

Prema europskoj prednomi za projektiranje betonskih mostova HRN ENV 1992-2 [1] jedini model pješačkog opterećenja za koji treba provjeriti granično stanje vibracija definiran je kao pulsirajuća sila  $F_{pok}(t)$  koja se kreće konstrukcijom brzinom od  $0,9f_v$ :

$$F_{pok}(t) = 180 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_v \cdot t) \quad [\text{N}] \quad (2)$$

gdje je  $f_v$  prva vlastita frekvencija vibriranja u vertikalnom smjeru, a amplituda od 180 N je umnožak težine pješaka  $G=700$  N i  $FK=0,257$  (prema Blanchard-u). Ovakav model je definiran i nekim drugim normama, primjerice The Ontario Highway Bridge Design Code, Canadian Highway Bridge Design Code and The Hong Kong Structures Design Manual for Highways and Railways [13] i Design Manual for Road and Bridges [6].

Prema europskoj prednomi za projektiranje drvenih mostova HRN ENV 1995-2 [2] pulsirajuća pokretna sila koja se kreće rasponskom konstrukcijom mosta brzinom od  $0,9f_v$  definirana je kao:

$$F_{pok}(t) = 280 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_v \cdot t) \quad [\text{N}] \quad (3)$$

Amplituda od 280 N je umnožak težine  $G=700$  N i  $FK=0,4$  (prema Bachmann-u, Charles-u i Hoopah-u). Prema navodima autora SETRA smjernica [14] u radnoj verziji Dodatka Eurokodu 1 preporučeni dinamički model za provjeru graničnog stanja vibracija od pješaka

u vertikalnom smjeru bio je definiran na isti način kao i u normi [2], premda je nakon toga taj model izbrisan iz Eurokod normi.

Prema FIB smjernicama [10] pokretna pulsirajuća sila definirana izrazom (3) zamjenjuje se pulsirajućom stacionarnom silom, definiranom izrazom (4), koja djeluje na najnepovoljnijem mjestu na konstrukciji.

$$F_{stac}(t) = 180 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_v \cdot t) \quad [\text{N}] \quad (4)$$

Amplituda pulsirajuće sile je određena kao umnožak  $G=700$  N,  $FK=0,4$  i  $R=0,64$  gdje je  $R$  faktor redukcije usljed promjene mjesta djelovanja pulsirajuće sile. Faktor redukcije osigurava da pokretna pulsirajuća sila i stacionarna pulsirajuća sila kojom zamjenjujemo pokretnu silu pobude istovjetni dinamički odgovor konstrukcije. Faktor redukcije  $R$  se nalazi u granicama od 0,6-0,7 ovisno o konstrukcijskom sustavu te omjeru mase i krutosti konstrukcijskog sustava [13].

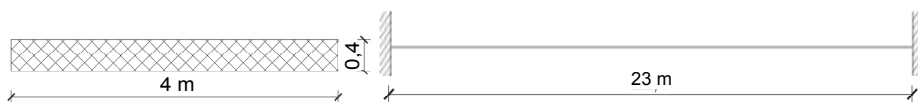
Smjernice za projektiranje mostova prema Eurokodovima [11] definiraju model opterećenja kao stacionarnu pulsirajuću silu intenziteta definiranog u izrazu (5) koja djeluje na najnepovoljnijem mjestu na konstrukciji. Amplituda pulsirajuće sile je određena kao umnožak  $G=700$  N,  $FK=0,4$  i bez uzimanja u obzir faktora redukcije  $R$ .

$$F_{stac}(t) = 280 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_v \cdot t) \quad [\text{N}] \quad (5)$$

Vrijeme djelovanja stacionarne pulsirajuće sile definirane jednadžbama (4 i 5) odgovara vremenu koje je potrebno da sila prijeđe konstrukciju brzinom  $0,9f_v$ .

### 3. OPIS MOSTA I NUMERIČKOG MODELA

Most je armiranobetonska pločasta konstrukcija (C30/37), presjeka prikazanog na slici 1 na oba kraja upeta u masivne upornjake. Raspon konstrukcije je  $L=23$  m. Nikakva dodatna hodna ploha nije predviđena projektom. Na obje strane poprečnog presjeka predviđena je drvena ograda težine  $0,4$  kN/m. Podatci o mostu su preuzeti iz idejnog projekta [15].



Slika 1. Poprečni presjek mosta i model mosta u uzdužnom smjeru

Most je modeliran u programu DARK [16] sa 50 štapnih konačnih elemenata dužine  $0,46$  m. Dinamički modul elastičnosti betona je  $E_d=3,36 \cdot 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>, moment inercije  $I=0,0213$  m<sup>4</sup>, težina betona  $\gamma=25$  kN/m<sup>3</sup>.

### 4. DINAMIČKI PRORAČUN

Proračun vlastitih frekvencija mosta potrebno provesti sa svim stalnim opterećenjima mosta (armiranobetonski presjek i ograde) i dinamičkim modulom

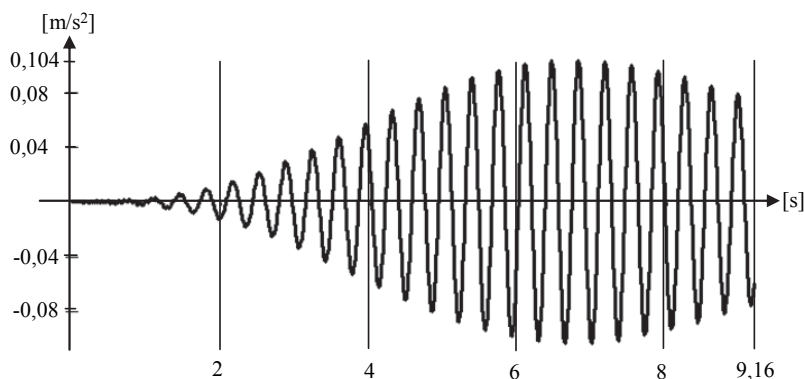
elastičnosti materijala. Osnovna vlastita frekvencija mosta u vertikalnom smjeru je 2,79 Hz što je manje od 5 Hz pa je prema [3] potrebno provesti kontrolu kriterija udobnosti, tj. odrediti najveće ubrzanje raponske konstrukcije uslijed pješačkog dinamičkog opterećenja.

Programom DARK [16], koji je namijenjen za statički i dinamički proračun štapnih 2D konstrukcija, moguće je, uz osnovne statičke i dinamičke proračune, izračunati dinamičke pomake, brzine i ubrzanja bilo kojeg čvora mreže konačnih elemenata uslijed pokretne ili stacionarne pulsirajuće sile, te prikazati rezultate grafički ili numerički [17,18]. Za proračun ubrzanja uslijed pokretne ili stacionarne pulsirajuće sile potrebno je zadati: ukupno vrijeme proračuna  $T$  koje je umnožak trajanja vremenskog kraka  $\Delta m$  i broja vremenskih koraka  $m$ , relativno prigušenje  $\zeta$ , amplitudu pulsirajuće sile  $A$ , brzinu pokretne sile  $v=0,9f_v$ , broj čvora konačnih elemenata  $N_p$  u kojemu djeluje stacionarna pulsirajuća sila, početak djelovanja stacionarne pulsirajuće sile  $t_b$ , prestanak djelovanja stacionarne pulsirajuće sile  $t_e=L/v=L/(0,9f_v)$ .

#### 4.1. UBRZANJE PREMA HRN ENV 1992-2

Podatci potrebni za proračun:  $\Delta m=0,00916$  sekundi,  $m=1000$ ,  $\zeta=1,3\%$ ,  $v=2,5$  m/s  $\zeta=1,3\%$  i  $A=180$  N.

Najveće ubrzanje je izračunano u čvoru mreže konačnih elemenata broj 26 koji se nalazi u sredini raspona mosta i iznosi  $0,104$  m/s<sup>2</sup>. Na slici 2 je prikazano ubrzanje čvora 26 u vremenu uslijed prolaska pulsirajuće sile definirane jednačinom (2) koja se kreće po modelu brzinom 2,5 m/s.

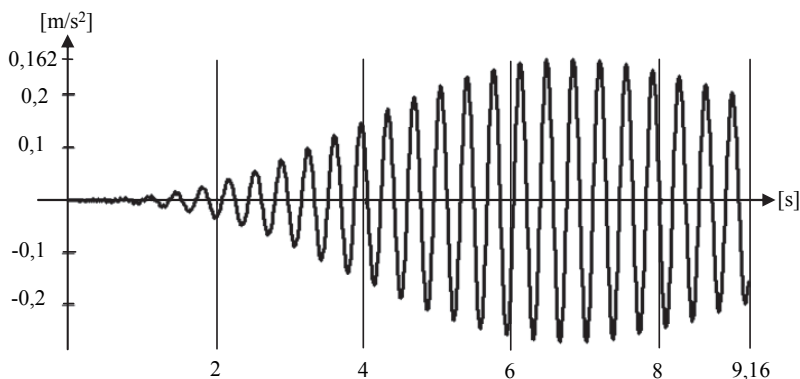


Slika 2. Ubrzanja čvora 26 uslijed pokretne pulsirajuće sile s amplitudom 180 N

#### 4.2. UBRZANJE PREMA HRN ENV 1995-2

Podatci potrebni za proračun:  $\Delta m=0,00916$  sekundi,  $m=1000$ ,  $\zeta=1,3\%$ ,  $v=2,5$  m/s  $\zeta=1,3\%$  i  $A=280$  N.

Najveće ubrzanje izračunano u čvoru mreže konačnih elemenata broj 26 iznosi  $0,162 \text{ m/s}^2$ . Na slici 3 je prikazano ubrzanje čvora 26 u vremenu uslijed prolaska pulsirajuće sile definirane jednačinom (3) koja se kreće po modelu brzinom  $2,5 \text{ m/s}$ .

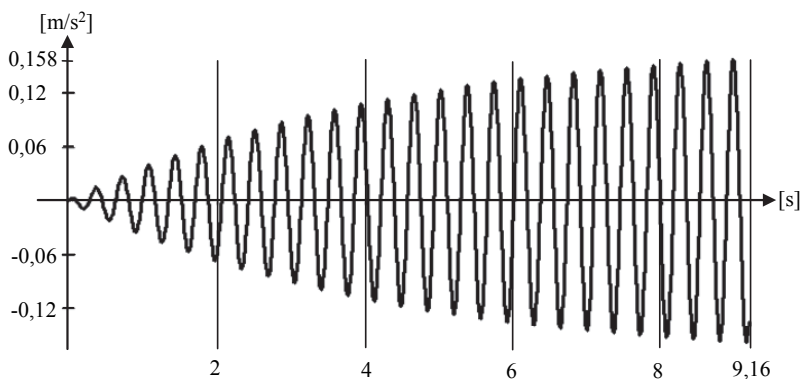


Slika 3. Ubrzanja čvora 26 uslijed pokretne pulsirajuće sile s amplitudom  $280 \text{ N}$

#### 4.3. UBRZANJE PREMA FIB SMJERNICAMA

Podatci potrebni za proračun:  $\Delta m = 0,00916$  sekundi,  $m = 1000$ ,  $t_b = 0$  sekundi,  $t_e = 9,16$  sekundi  $\zeta = 1,3\%$ ,  $A = 180 \text{ N}$  i  $N_p = 26$ .

Najveće ubrzanje je izračunano u čvoru mreže konačnih elemenata broj 26 i iznosi  $0,158 \text{ m/s}^2$ . Na slici 4 je prikazano ubrzanje čvora 26 u vremenu uslijed stacionarne pulsirajuće sile definirane jednačinom (4) koja djeluje  $9,16$  sekundi u čvoru 26.

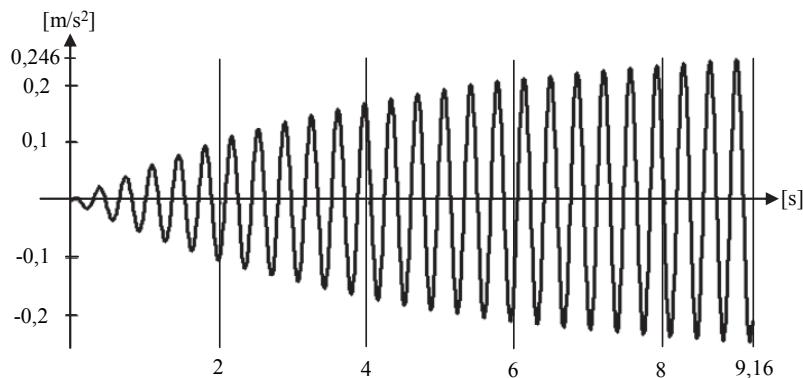


Slika 4. Ubrzanja čvora 26 uslijed stacionarne pulsirajuće sile s amplitudom  $180 \text{ N}$

#### 4.4. UBRZANJE PREMA SMJERNICAMA ZA PROJEKTIRANJE MOSTOVA PREMA EUROKODOVIMA

Podatci potrebni za proračun:  $\Delta m = 0,00916$  sekundi,  $m = 1000$ ,  $t_b = 0$  sekundi,  $t_e = 9,16$  sekundi  $\zeta = 1,3\%$ ,  $A = 280$  N i  $N_p = 26$ .

Najveće ubrzanje izračunano u čvoru mreže konačnih elemenata broj 26 iznosi  $0,246 \text{ m/s}^2$ . Na slici 5 je prikazano ubrzanje čvora 26 u vremenu uslijed stacionarne pulsirajuće sile definirane jednadžbom (5) koja djeluje 9,16 sekundi u čvoru 26.



Slika 5. Ubrzanje čvora 26 uslijed stacionarne pulsirajuće sile s amplitudom 280 N

#### 5. USPOREDBA REZULTATA

U primjeru proračuna vertikalnih ubrzanja na pješačkom mostu u parku Maksimir vidljiva je velika razlika vrijednosti ubrzanja prema raznim prijedlozima dinamičkog modela opterećenja jednim pješakom.

Vrlo slične vrijednosti ubrzanja su izračunane za model pokretne sile prema ENV 1995-2 [2] i model stacionarne sile prema FIB smjernicama [10]. Amplituda stacionarne sile prema FIB smjernicama je određena na način da proizvede isti dinamički učinak kao pokretna sila prema modelu iz norme ENV 1995-2 (amplituda je korigirana faktorom redukcije). Razlika od 2,5% između izračunanih veličina najvećih ubrzanja potvrđuje pretpostavku o istovjetnom dinamičkom učinku sila definiranih prema ENV 1995-2 i FIB smjernicama. Najmanja vrijednost ubrzanja izračunana je za model prema HRN ENV 1992-2 [1] koji se oslanja na Blanchar-ovu preporuku  $FK = 0,275$  i na isti model definiran u raznim drugim propisima (kao što je navedeno u polgavlju 2.1) premda je kasnijim istraživanjima utvrđeno da ovako definirani model ima mnoštvo nedostataka [9]. Najveće ubrzanje prema modelu definiranom u prednormi [1] približno je 50 % manje od ubrzanja izračunanih prema normi [2] odnosno smjernici [10] te potvrđuje evidentne nedostatke spomenute u literaturi [9]. Najveće ubrzanje izračunano je za model pulsirajuće stacionarne sile prema Smjernicama za projektiranje mostova prema Eurokodovima [11] čija amplituda nije pomnožena s faktorom redukcije. Vrijednost ovog ubrzanja je veća približno 50% od ubrzanja izračunanih prema normi [2] odnosno smjernici [10], te se ovakav model može smatrati konzervativnim.

## 6. ZAKLJUČAK

U radu su izračunana najveća vertikalna ubrzanja rasponske konstrukcije mosta usljed opterećenja jednim pješakom prema modelima definiranim u Eurokod prednormama i smjernicama baziranim na Eurokod normama. Premda su sva ubrzanja manja od  $0,7 \text{ m/s}^2$  i zadovoljen je uvjet udobnosti korisnika mosta iz provedene analize se može zaključiti da je za dokaz graničnog stanja uproabljivosti vezanog uz vibriranje pješačkih mostova uputno koristiti model pokretne pulsirajuće sile definiran eurposkom prednormom ENV 1995-2 ili model stacionarne pulsirajuće sile definiran FIB smjernicama.

## LITERATURA

- [1] HRN ENV 1992-2:1996, Eurokod 2: Projektiranje betonskih konstrukcija – 2. dio: Betonski mostovi, Državni zavod za normizaciju i mjeriteljstvo, Zagreb, 2004, 50 str.
- [2] ENV 1995-2: 1997, Eurocode 5: Design of Timber Structures–Part 2: Bridges, European Committee for Standardization, Brussels, 1997, 48p
- [3] HRN EN 1990:2011, Eurokod: Osnove projektiranja konstrukcija, Hrvatski zavod za norme, Zagreb, 2011, 102 str.
- [4] SIA Standard 260: “Basis of structural design”, Swiss Society of Engineers and Architects, Zurich, 2004, 44p
- [5] Model Code 2010, First complete draft, Volume 2, Document Competence Center Siegmund Kästl e.K., 2010, 370p
- [6] Design Manual for Road and Bridges: Loads for Highway Bridges: BD 37/01. Highway Agency, London, February, 2002, 106p
- [7] Guide Specifications For Design of FRP Pedestrian Bridges, American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), 2008, 14p
- [8] Modifications for AASHTO LRFD Bridge Design Specifications to Incorporate or Update the Guide Specifications for Design of Pedestrian Bridges, American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO), 2009, 19p
- [9] HRN EN 1991-2:2012, Eurokod 1: Djelovanja na konstrukcije – 2. dio: Prometna opterećenja mostova, Hrvatski zavod za norme, Zagreb, 2012, 23 str.
- [10] FIB Bulletin 32: Guidelines for the design of footbridges. CEB, Stuttgart, 2005, 154p
- [11] Guide to basis of bridge design related to Eurocodes supplemented by practical design - Handbook 4. Edited by Luca Sanpaulesi and Pietro Croce, Leonardo da Vinci pilot project, Pisa, 2004, 171p
- [12] Bachmann, H. et al. “Vibration problems in structures: practical guidelines”, Birkhauser Verlag Basel, Basel, 1995, 229p
- [13] S. Živanović, A. Pavić, P. Reynolds: „Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review“, Journal of Sound and Vibration, Vol. 279, 2005, pp. 1–74.
- [14] Footbridges: Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading. SETRA, Association Française de Génie Civil, 2006, 127p
- [15] Idejni projekt: Građevinski projekt – Projekt konstrukcije, Pješački most 1 na k.č. k.č.br. 4927, 4928, 4929 k.o. Maksimir, Zagreb, Palijan d.o.o. Zagreb, 2010.
- [16] I. Kožar: „Program DARK“ Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, 2010.
- [17] I. Štimac, D. Meštrović, I. Kožar: „Analiza mostovnih konstrukcija pobuđenih pokretnim opterećenjem“ Građevinar, 56(06), 2004, str. 347-353
- [18] I. Štimac Grandić, D. Grandić, R. Mužić: „Određivanje dinamičkog koeficijenta na mostovima“, e-GFOS, 4(6), 2013, str. 23-33