SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Geček Tuđen

Vjerojatnost propasti za generalizirane procese rizika

Disertacija

Voditelj rada: prof. dr. sc. Zoran Vondraček

Zagreb, 2014.

Ova disertacija je predana na ocjenu Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilista u Zagrebu u svrhu stjecanja znanstvenog stupnja doktora prirodnih znanosti iz područja matematike.

Život je kao vožnja biciklom, treba neprestano ići naprijed, bez zaustavljanja, da se ne izgubi ravnoteža.

A. Einstein

Zahvala

Hvala mom mentoru, prof. Z. Vondračeku, na velikom strpljenju i pomoći.
Hvala mojoj obitelji, posebno Tei i Tomiju, na razumijevanju i podršci.

Sažetak

U ovoj disertaciji pokazana je Pollaczek-Khinchinova formula za razne slučajeve generaliziranog procesa rizika, s posebnim osvrtom na to kako dobiveni rezultati utječu na distribuciju supremuma dualnog procesa rizika.

Prvo promatramo generalizirani proces rizika X modeliran spektralno negativnim Lévyjevim procesom, $X(t) = ct + Z(t) - C(t)$, $t \geq 0$, gdje je $c > 0$ drift, Z spektralno negativan Lévyjev proces s očekivanjem nula i C s njim nezavisan subordinator bez drifta i s konačnim očekivanjem. Uz pretpostavku uvjeta čistog profita, $EC(1) < c$, dokazujemo Pollaczek-Khinchinovu formulu za vjerojatnost propasti u slučaju kada proces gledamo na $[0, \tau]$, gdje je τ neko nezavisno eksponencijalno vrijeme. Također su prikazani rezultati koji se mogu dobiti za distribuciju supremuma dualnog procesa, $\widehat{X} := -X$, u slučaju kada problemu pristupamo preko Laplaceovih transformacija. Nadalje je taj model poopćen, u smislu ispuštanja pretpostavki o konačnosti očekivanja i uvjeta čistog profita, te je ponovno pokazana Pollaczek-Khinchinova formula za vjerojatnost propasti u takvom općenitijem slučaju. Dodatno su rezultati za taj općenitiji slučaj objašnjeni iz perspektive ljestvičastog procesa.

U diskretnom slučaju generalizirani proces rizika promatramo kao neprekidnu zdesna (*skip-free*) slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}_+$. U tom je okruženju također dokazana formula Pollaczek-Khinchinovog tipa za vjerojatnost propasti slijedeći dva pristupa - metodu dekompozicije supremuma kao u neprekidnom slučaju i kombinatornu metodu (koristeći Takácseve rezultate).

U posljednjem dijelu vraćamo se na generalizirani proces rizika $X(t) = ct + Z(t) - C(t) =: Y(t) - C(t)$, $t \geq 0$, za koji pretpostavljamo da vrijedi uvjet čistog profita te dajemo alternativni dokaz i objašnjenje zanimljive distribucijske jednakosti $\sup_{0 \leq t < \infty} \widehat{Y}(t) \stackrel{d}{=} \sup_{0 \leq t < \sigma} \widehat{X}(t)$, gdje je σ prvo vrijeme kada se postigne novi supremum procesa $\widehat{X}$ zbog skoka subordinatora C. U slučaju kada je Y složeni Poissonov proces, pokazujemo da je ova jednakost posljedica Takácsevog kombinatornog rezultata te jednog rezultata poznatog za spektralno negativne procese. Općeniti pak slučaj slijedi aproksimacijom spektralno negativnog procesa Y nizom složenih Poissonovih procesa u Skorohodovom prostoru $D = D[0, \infty)$ te prelaskom na pripadajući limes.

Abstract

In this thesis we prove the Pollaczek-Khinchine formula in various cases of the generalized risk process, with a special focus on its influence on the distribution of the supremum of the dual process.

First, we study a spectrally negative process $X(t) = ct + Z(t) - C(t)$, $t \geq 0$, where $c > 0$ is drift, Z is a spectrally negative Lévy process with zero expectation and C an independent subordinator without drift and with finite expectation. Under the assumption of the net profit condition, $EC(1) < c$, we prove the Pollaczek-Khinchine formula for the ruin probability on $[0, \tau]$, where τ is some independent exponential time. We also present some results on the distribution of the supremum of the dual process, $\widehat{X} := -X$, by using the Laplace transform approach. For weaker assumptions (on net profit condition and finite expectation), we again derive the same type of the Pollaczek-Khinchine results. Additionally, these results are explained from the perspective of the ladder process.

In the discrete case we consider X as a skip-free random walk on $\mathbb{Z}_+$. We again prove the Pollaczek-Khinchine type of results, using two approaches - decomposition of the supremum and combinatorial approach (relying on results obtained by Takács).

In the last part of this work we return to the generalized risk process $X(t) = ct + Z(t) - C(t) =: Y(t) - C(t)$, $t \geq 0$, satisfying the net profit condition, and give explanation and alternative proof of the curious distributional identity $\sup_{0 \leq t < \infty} \widehat{Y}(t) =^d \sup_{0 \leq t < \sigma} \widehat{X}(t)$, where σ denotes the first time when the new supremum of $\widehat{X}$ is obtained by a jump of the subordinator C. In case when Y is a compound Poisson process we show that this identity is a consequence of a combinatorial formula due to Takács and another fluctuation identity valid for spectrally negative processes. The general case follows by approximating a spectrally negative process Y by a sequence of compound Poisson processes in the Skorohod space $D = D[0, \infty)$ and passing to the limit.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Motivacija

Matematička teorija u osiguranju može se 'grubo' podijeliti na tri područja: životno osiguranje, neživotno osiguranje i teoriju rizika. Mi ćemo se ovdje fokusirati na neke zanimljive dijelove ove treće skupine, s posebnim naglaskom na vjerojatnost propasti. Pokušat ćemo u raznim okruženjima i uz više modifikacija dobiti formule Pollaczek-Khinchinovog tipa za vjerojatnost propasti i vidjeti koje dodatne zaključke o distribuciji supremuma procesa koje promatramo iz dobivenih formula možemo izvesti.

U kontekstu teorije rizika promatrat ćemo portfelj koji u sebi sadrži i determinističke i stohastičke sastojke - od prvih možemo spomenuti početnu poziciju s koje portfelj kreće (moguća interpretacija : s koliko kapitala mora osiguravatelj krenuti u početku kako bi pokrio inicijalne troškove u trenutku kada mu još ne pristižu premije od osiguranika) te vremenski period na kojem promatramo portfelj, a od stohastičkih komponenti spomenimo primjerice slučajna vremena pristizanja zahtjeva za odštetom osiguranika, visinu zahtjeva za odštetom (što se najčešće modelira kao niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli), broj zahtjeva pristiglih do nekog trenutka (u osnovnom se slučaju ovaj proces modelira Poissonovim procesom), itd.

Zašto nas uopće zanima vjerojatnost propasti u ovom kontekstu? Naime, računanje i aproksimacija vjerojatnosti propasti problem je koji se već niz godina promatra u aktuarskoj matematici. Jedan od razloga za to je činjenica da osiguravatelj ulaže neki kapital u određenu granu osiguranja i ukoliko mu razina zahtjeva za isplatom prijeđe taj uloženi nivo, on mora poduzeti nešto kako bi spriječio svoju propast - prije svega, mora odlučiti kako odrediti na najbolji način visinu uplata koje mu pristižu od osiguranika te koji tip reosiguranja uzeti. To može napraviti tako da minimizira vjerojatnost da ukupna visina zahtjeva za isplatom ikada prijeđe razinu uloženog kapitala. Stoga su vjerojatnost propasti i vjerojatnost preživljavanja ključne informacije za osiguravatelja.

Sa strogo matematičkog gledišta, pitanje vjerojatnosti propasti promatrano kroz razne matematičke modele otvara čitav niz pitanja vezanih uz teoriju stohastičkih procesa i njihovim 'lijepih' svojstava. Posljednjih godina vjerojatnost propasti proučava se u kontekstu posebne klase Lévyjevih procesa, što baca jedno novo svjetlo na čitav problem. Osnovna motivacija za ovu disertaciju bila je upravo produbiti, poopćiti i možda još malo rasvijetliti rezultate dobivene u tom području.

1.2 Vjerojatnost propasti i Pollaczek-Khinchinova formula kroz povijest

Osnovni model od kojeg sve započinje u teoriji rizika je klasični *Cramér-Lundbergov model*. Takav model, sa složenim Poissonovim procesom koji modelira pristigle zahtjeve za isplatom od strane osiguranika, uveo je prvi *Filip Lundberg*, 1903. Intenzivno ga je proučavao i *Harald Cramér* tridesetih godina pa je po njima model na koncu i dobio ime. Matematički gledano, funkcija propasti koju promatramo u tom modelu, ekvivalentna je repnoj funkciji stacionarne distribucije vremena čekanja (eng. *waiting time*) u M/GI/1 repu. Stoga su brojni rezultati, posebice Pollaczek-Khinchinovog tipa, razvijeni i u teoriji repova (vidjeti primjerice [Asm2] i [Pra]).

1.2.1 Cramér-Lundbergov model

Klasični *Cramér-Lundbergov model* u teoriji rizika podrazumijeva proces rizika $(R(t)\ :\ t \geq 0)$ takav da je

$$R(t) = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \ ,$$

gdje je $c > 0$ visina premija (koje pristižu od strane osiguranika), $(Y_i\ :\ i \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih nenegativnih slučajnih varijabli s distribucijom F (predstavljaju pojedinačne zahtjeve za isplatom zbog neke štete koji pristižu od osiguranika) i $(N(t)\ :\ t \geq 0)$ homogeni Poissonov proces intenziteta $\lambda > 0$ (nezavisan sa $(Y_i\ :\ i \in \mathbb{N})$). Ključno je pitanje odrediti vjerojatnost propasti uz dani inicijalni kapital $u > 0$, tj.

$$\vartheta(u) = \mathbb{P}(u + R(t) < 0\ , \quad \text{za neko } t > 0)\ ,$$

odnosno vjerojatnost preživljavanja (uglavnom je pogodnije računati ovu veličinu),

$$\theta(u) = 1 - \vartheta(u)\ .$$

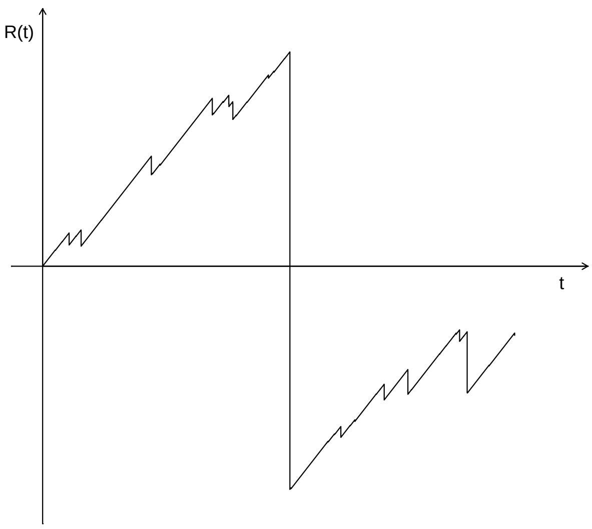
Obično se pretpostavlja (iako ćemo mi u ovom radu promatrati i što se događa kad ispustimo ovu pretpostavku) da je

$$c > \lambda \mathbb{E}\, Y_i\ ,$$

tj.

$$c > \lambda\mu\ ,$$

gdje je $\mu := \mathbb{E}\, Y_i$, što se standardno u literaturi zove uvjet čistog profita (eng. *net profit condition*). Naime, uz taj je uvjet $\mathbb{E}\, R(1) = c - \lambda\mu > 0$ pa je (po standardnoj teoriji) $\lim_{t\to\infty} R(t) = +\infty$, što znači da vjerojatnost propasti ne mora biti točno jednaka 1. Slučaj kada je $c \leq \lambda\mu$ povlači da je $ER(1) \leq 0$. Ukoliko je ovo očekivanje baš jednako



Slika 1.1: *Klasični proces rizika* $R(t) = ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\ ,\quad t \geq 0\ ,\quad c > \lambda \mathbb{E}\, Y_i$

nula, tada je $-\infty = \liminf R(t) < \limsup R(t) = +\infty$. Ako je pak $\mathbb{E}\, R(1) < 0$, onda je $\lim_{t\to\infty} R(t) = -\infty$ i stoga $\vartheta(u) = 1$, što nam nije zanimljivo za promatranje.

Jedna od ključnih eksplicitnih formula poznatih za vjerojatnost preživljavanja u ovom kontekstu je Pollaczek-Khinchinova formula

$$\theta(u) = (1-\rho) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n F_I^{n*}(u)\ ,$$

gdje je $\rho = \frac{\lambda\mu}{c} < 1$ parametar i $F_I(u) = \frac{1}{\mu} \cdot \int_0^u (1 - F(t))dt$ integrirani rep distribucije visina zahtjeva za isplatom. Kako se dobiva ova formula? Prvo uočimo da je

$$\theta(u) = \mathbb{P}(\sup_{0<t<\infty} (-R(t)) \leq u)\ .$$

Također, lako se vidi da je $\sup_{0\leq t<\infty}(-R(t))$ suma geometrijski mnogo nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli, no problem je odrediti njihovu distribuciju - za to se uobičajeno koriste rezultati iz teorije fluktuacije. Dakle, ključno je uočiti da su za složeni Poissonov proces, visine ljestvica u ljestvičastom procesu nezavisne jednako distribuirane, budući da se proces 'ponavlja' na isti način nakon što postigne novi relativni maksimum. Tako dobivamo da je apsolutni maksimum u ovom modelu suma tih visina ljestvica, a njihovu distribuciju za složeni Poissonov proces možemo odrediti koristeći analizu trajektorija složenog Poissonovog procesa (sličnu onoj klasičnoj analizi trajektorija slučajne šetnje), kao npr. činjenicu da mu je distribucija invarijantna obzirom na 'okretanje' vremena (time reversion). Za detalje vidjeti na primjer [Asm1, Teorem II.6.1], [Asm1, Teorem III.2.1.] ili, za dokaz koristeći prikaz preko slučajne šetnje, [Kyp1, Teorem 1.9.] i [Kyp1, Vježba 1.8.].

1.2.2 Generalizacija Cramér-Lundbergovog modela

U ovom nas radu zanima kako možemo poopćiti klasični Cramér-Lundbergov model tako da dobijemo ponovno formule Pollaczek-Khinchinovog tipa koje možemo objasniti na sličan način kao i u tom osnovnom modelu.

Jedna je od mogućih generalizacija ta da dopustimo dodatne nesigurnosti u zahtjevima za isplatom ili u premijama, dakle, da dodamo jednu perturbaciju u osnovni model sa složenim Poissonovim procesom. U posljednjih dvadesetak godina mnogi su autori proučavali složeni Poissonov proces koji je perturbiran nekom difuzijom. Međutim, razlikuju se pristupi autora u proučavanju takvih procesa rizika. Među najčešćim tehnikama koje su se upotrebljavale u pristupu ovom problemu su teorija obnavljanja, teorija Markovljevih procesa (po dijelovima determinističkim) te metoda martingala. Međutim, sa gledišta stohastičkih procesa, mnogi procesi rizika su specijalni slučajevi Lévyjevih procesa bez pozitivnih skokova pa je prirodno da se i neki općepoznati rezultati iz teorije spektralno negativnih Lévyjevih procesa iskoriste u proučavanju vjerojatnosti propasti i nekih drugih pitanja iz teorije rizika. *Dufresne* i *Gerber* (1991., za detalje vidjeti [DG]) koristili su za takav perturbirani proces metode iz teorije obnavljanja (eng. *renewal equation techniques*), međutim, kada se proces rizika proširio sa gama procesom, takve su metode izgubile na svojoj upotrebljivosti. S druge strane, teorija Lévyjevih procesa pokazala se vrlo jednostavnom za primjenu. *Furrer* (1998., vidjeti [Furr]) je među prvima upotrijebio teoriju spektralno negativnih Lévyjevih procesa, a onda su je razvili dalje *Yang* i *Zhang*, 2001. (vidi [YZ] te ostali autori kako ih dalje navodimo).

Dufresne i *Gerber* ([DG]) su promatrali standardan proces rizika $R(t)$ perturbiran standardnim Brownovim gibanjem, točnije $X(t) := R(t) + \varsigma W(t)$, $\varsigma > 0$, gdje je R kao gore. Dobili su formulu

$$\theta(u) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (G^{(n+1)*} * F_I^{n*})(u) \ , \tag{1.1}$$

gdje su ρ i F_I isti kao u neperturbiranom modelu, a G je eksponencijalna funkcija distribucije sa parametrom $\frac{2c}{\varsigma^2}$. Interpretacija formule slijedi onu u klasičnom modelu: ako sa $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ označimo vremena kad se postigne novi supremum dualnog procesa $\widehat{X} = -X$ zbog skoka procesa zahtjeva za isplatom $(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \ : \ t \geq 0)$, onda broj takvih trenutaka ima geometrijsku distribuciju s parametrom ρ. G je funkcija distribucije supremuma cijelog dualnog procesa $\widehat{X}(t)$ do trenutka prvog takvog skoka σ_1, a F_I je uvjetna distribucija visine preskoka prethodnog (dotadašnjeg) supremuma uz dano $\sigma_1 < \infty$.

Furrer (vidi [Furr]) je promatrao proces $X(t) = R(t) + Z_\alpha(t)$, gdje je Z_α α- stabilan Lévyjev proces za $1 < \alpha < 2$. Naime, iako su Gaussove distribucije i procesi dobro izučeni u literaturi i dobro prihvaćeni u modeliranju pitanja iz teorije rizika, oni ne dozvoljavaju velike fluktuacije pa nisu prikladni za modeliranje u slučaju prisutnosti velike varijabilnosti. Zato je prirodno osnovnom modelu, umjesto Brownove komponente, dodati α-stabilan Lévyjev proces. Njihovi repovi padaju kao funkcija potencije, a brzina tog opadanja ovisi o parametru α. Dodavanjem ovakve perturbacije, Furrer je dobio mnogo više fleksibilnosti kroz parametar α - mijenjanjem tog parametra može se kontrolirati varijabilnost procesa: što je manji α, repovi su teži i fluktuacije izraženije, a što je α bliži 2, ponašanje je ljepše. Parametar asimetrije β je postavio na -1 kako bi se izbjegli skokovi prema gore, a α je uzeo strogo veći od 1 kako bi osigurao konačno očekivanje. Tako je zapravo dobiven spektralno negativan proces za koji su rezultati teorije fluktuacije puno ljepši nego u općenitom slučaju. Furrer je u svom radu dobio formulu istog oblika kao Dufresne i Gerber, samo gdje je G Mittag-Lefflerova distribucija dana sa $1 - G(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-cx^{\alpha-1})^n/\Gamma(1+(\alpha-1)n)$. Koristio se rezultatom *Zolotareva* iz 1964. koji povezuje distribuciju infimuma α - stabilnog Lévyjevog procesa sa karakterističnim eksponentom tog procesa. Na specifičan je način rastavio Laplaceov eksponent spomenutog infimuma i odatle je slijedio, nakon invertiranja, navedeni osnovni rezultat njegova rada. Sličnu metodu pomoću Laplaceove transformacije slijede i *Huzak*, *Perman*, *Šikić* i *Vondraček* u [HPSV1].

Druga je moguća generalizacija u procesu zahtjeva za isplatom (u gore navedenim slučajevima on je uvijek bio modeliran kao složeni Poissonov proces). Naime, proces zahtjeva za isplatom modelira se uobičajeno kao proces sa nezavisnim, stacionarnim i nenegativnim prirastima. To nam za odabir ostavlja ili složeni Poissonov proces ili proces sa beskonačnim brojem zahtjeva za isplatom u svakom promatranom vremenskom intervalu, kao što je gama proces. *Dufresne*, *Gerber* i *Shiu* (vidi [DGS]) su modelirali ovaj proces upravo kao gama proces. Istražili su svojstva gama distibucije i potom gama proces zadali pomoću njegove Laplaceove transformacije. U svom su članku prvo zapisali formulu (1.1) za vjerojatnost propasti za složeni Poissonov proces u općenitom obliku, a potom ubacivali u provedeni račun izmijenjene podatke za općenitiji model.

Yang i *Zhang* (2001., za detalje vidi [YZ]) su takav model onda još perturbirali Brownovim gibanjem. Iskoristili su rezultat *Zolotareva* (1964., vidjeti [Zol] za detalje), sličan onome koji je koristio i *Furrer*.

Propozicija 1.2.1 *Neka je $(Y(t) \; : \; t \geq 0)$ spektralno negativan Lévyjev proces sa početkom u 0 te $\gamma = \mathbb{E}\,Y(1) \leq 0$. Označimo $\psi(x) = \mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} Y(t) < -x)$, za $x \geq 0$. Tada se funkcija $\psi(x)$ može odrediti iz Laplaceovog eksponenta $\xi(\lambda)$ preko jednadžbe*

$$s\int_0^{\infty} e^{-sx}\psi(x)dx = 1 - \frac{\gamma s}{\xi(s)} \ .$$

Yang i *Zhang* su prvo promatrali složeni Poissonov proces perturbiran sa Brownovim gibanjem,

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma W(t) \ ,$$

($u \geq 0$, $c = (1+\theta)\lambda\mu$ i N homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ) te, upotrebom Propozicije 1.4.1., dobili rezultat

$$1-\psi(u)=(1-\rho)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(P_I^{n*}*G^{(n+1)*}(u))\ ,\ u\geq 0\ ,$$

gdje je $P_I(x)=\frac{1}{\mu}\cdot\int_0^x(1-P(y))dy$ (P je funkcija distribucije slučajnih varijabli X_i, stoga joj je P_I integrirani rep), $\rho=\frac{1}{1+\theta}$, a G je eksponencijalna funkcija distribucije sa parametrom $2c/\sigma^2$. *Dufresne* i *Gerber* su isti rezultat dobili koristeći teoriju obnavljanja.

Zatim su gledali gama proces $S(t)$ perturbiran Brownovim gibanjem,

$$U(t)=u+ct-S(t)+\sigma W(t)\ .$$

Dobili su, korištenjem istog pristupa, da vrijedi

$$1-\psi(u)=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(P^{*n}*G^{*(n+1)}(u))\ ,$$

gdje je P eksponencijalna distribucija integralnog tipa, tj. $P(t)=\int_t^\infty e^{-u}u\,du$, $t\geq 0$. U rezultatu, koji se dobiva preko Laplaceove transformacije, dovoljno im je bilo vidjeti da je član koji su dobili Laplaceova transformacija neke funkcije distribucije, iako je dobivena distribucija koja se vrlo rijetko vidi u aktuarstvu.

Huzak, *Perman*, *Šikić* i *Vondraček* (2004., vidjeti [HPSV1]) su promatrali generalizirani proces rizika

$$X(t)=ct-C(t)+Z(t)\ ,$$

gdje je $(C(t)\ :\ t\geq 0)$ subordinator, a $(Z(t)\ :\ t\geq 0)$ Lévyjev proces bez pozitivnih skokova (spektralno negativan Lévyjev proces). Razlog ovakvog odabira pojasnit ćemo u poglavlju 3.1. Slijedeći metodu *Furrera*, dobili su rezultat

$$\theta(u)=(1-\rho)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(G^{(n+1)*}*H^{n*})(u)\ ,$$

gdje je G funkcija distribucije apsolutnog supremuma procesa $(-ct-Z(t)\ :\ t\geq 0)$, a H integrirani rep distribucije skokova koji se odnose samo na proces C. Objašnjenje je sljedeće: ako promatramo vremena kad se postigne novi supremum procesa $\widehat{X}$ zbog skoka subordinatora C, onda apsolutni supremum procesa $\widehat{X}$ možemo zapisati kao geometrijsku sumu dva tipa nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli, jedan sa distribucijom supremuma od $\widehat{X}$ prije prvog takvog vremena, a drugi sa distribucijom samog preskoka. Tu su drugu formulu, dakle, dobili koristeći metodu dekompozicije supremuma (opet u vremenima $\sigma_1,\sigma_2,\ldots$ kada proces C dovede do novog supremuma čitav proces $\widehat{X}$) , ali sa $\widetilde{G}$ u formuli umjesto G, gdje je $\widetilde{G}$ funkcija distribucije supremuma čitavog procesa $\widehat{X}$ do trenutka σ_1! Što dovodi do nevjerojatnog zaključka da je $G=\widetilde{G}$, odnosno da su distribucije supremuma čitavog procesa $\widehat{X}$ do trenutka σ_1 (kada proces C prvi puta svojim skokom dovede $\widehat{X}$ do novog supremuma) i apsolutnog supremuma procesa $(-ct-Z(t)\ :\ t\geq 0)$ - jednake!

Mi ćemo pokušati interpretirati ovaj zaključak, tako što ćemo promotriti u kojim još situacijma možemo, a u kojima ne, dobiti isti rezultat. Pritom ćemo nastojati uočiti koji su nam ključni koraci (rezultati, metode) za dobivanje, odnosno ne dobivanje, navedenog rezultata. Napomenimo odmah na početku da direktna metoda pokazivanja jednakosti distribucija ovih dvaju supremuma nije dala značajne rezultate, obzirom na prirodu rekurzivnih integrala koji se javljaju u takvom pristupu. Numeričke metode su dale neke rezultate, međutim nisu omogućile ono najvažnije - a, to je razumijevanje i interpretacija dobivenog rezultata. Stoga je naš cilj: prvo, vidjeti može li se ovaj rezultat dobiti i u slučaju kada ovaj generalizirani proces rizika promatramo na $[0, \tau]$, gdje je τ neko nezavisno eksponencijalno vrijeme s parametrom $q > 0$? Što znače i od koje su važnosti uvedene pretpostavke u model (mogu li se ispustiti, koja je od njih presudna da bi se mogao dobiti rezultat)? Što možemo reći u diskretnom slučaju - da li rezultat vrijedi i tada i mogu li se korisiti iste metode za njegovo dobivanje kao i u neprekidnom modelu? Koje su razlike između ta dva modela (neprekidnog i diskretnog)? I, konačno, što možemo reći o aproksimaciji, kada općeniti spektralno negativan Lévyjev proces aproksimiramo procesima tipa složenih Poissonovih subordinatora?

1.3 Pregled sadržaja i notacija

Na gore navedena pitanja pokušat ćemo odgovoriti u daljnjem tekstu, koji je organiziran kroz četiri poglavlja. U poglavlju 2. se podsjećamo osnovnih pojmova i već poznatih rezultata iz teorije Lévyjevih procesa te slučajnih šetnji koji su nam potrebni za izvođenje i razumijevanje dobivenih rezultata.

U poglavlju 3. razrađujemo neprekidan slučaj, točnije promatramo proces rizika u neprekidnom vremenu do nekog nezavisnog eksponencijalnog vremena τ koristeći razne pristupe. Prvo, u potpoglavlju 3.1., dekomponiramo proces supremuma čitavog procesa rizika u trenucima kada do novog supremuma dovede skok procesa koji modelira zahtjeve za isplatom. To nas dovodi do rezultata Pollaczek-Khinchinovog tipa. Kako bismo dobili isti tip rezultata, u potpoglavlju 3.2 pokušavamo našem procesu pristupiti drugom metodom - preko Laplaceovih transformacija. U potpoglavlju 3.3. promatramo što se događa kada oslabimo neke od početnih pretpostavki pa opet dobivamo rezultat Pollaczek-Khinchinovog tipa uz tako oslabljene početne uvjete. U potpoglavlju 3.4. promatramo isti problem, ali iz perspektive ljestvičastog procesa i također zaključujemo što se može reći u slučaju oslabljenja početnih pretpostavki.

Poglavlje 4. donosi diskretan analogon našeg procesa rizika i ovdje, opet metodom dekompozicije supremuma, izvodimo u potpoglavlju 4.1. Pollaczek-Khinchinov oblik rezultata. U potpoglavlju 4.3. za isti diskretan proces rizika koristimo drugu, kombinatornu, metodu kako bismo izveli rezultate vezane uz vjerojatnost propasti. Poglavlje 4.2. sadrži neke zanimljive rezultate o *skip-free* slučajnim šetnjama, koje smo dobili izvodeći rezultate poglavlja 4.1. i 4.3. U poglavlju 4. dodatno i poopćujemo naš proces rizika, dodajući još nezavisnih komponeneti u promatrani portfelj.

U poglavlju 5. promatramo aproksimaciju, tj. što i uz koji tip konvergencije možemo dobiti za općenite Lévyjeve procese iz rezultata koje poznajemo za složeni Poissonov proces.

Kroz sva poglavlja koristit ćemo sljedeće standardne oznake:

$=^d$ za jednakost u distribuciji (nekad ćemo reći i jednako distribuirano),

$\sim$ za oznaku pripadnosti slučajne varijable nekoj poznatoj klasi distribucija (npr. $X \sim Poi(\lambda)$ znači da slučajna varijabla X ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$),

μ^{n*}, gdje je μ distribucija neke slučajne varijable, za oznaku konvolucije n distribucija μ (n-ta konvolucija od μ),

$\langle u, x\rangle$ za skalarni produkt vektora u i x, tj. ako su $u = (u_1, \ldots, u_d)$, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, tada je $\langle u, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot x_i$,

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ za σ-algebru Borelovih skupova na $\mathbb{R}^d$,

$x^+ = \max\{x, 0\}$ i $x^- = \max\{-x, 0\}$ za pozitivni, odnosno negativni dio nekog realnog broja x,

log u 4. poglavlju za prirodni logaritam (logaritam po bazi e).

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju kratko prolazimo kroz osnovne definicije i rezultate vezane uz Lévyjeve procese te slučajne šetnje. Posebno se osvrćemo na potklase Lévyjevih procesa koje su zanimljive u našem kontekstu (generalizirani procesi rizika) i koje ćemo u poglavlju 3. direktno koristiti u modeliranju postavljenog problema, dakle, spektralno negativne Lévyjeve procese i subordinatore. U potpoglavlju 2.8. detaljnije promatramo Pollaczek-Khinchinovu formulu i pokazujemo kako se ona izvodi u osnovnom modelu, kako bismo kasnije mogli provesti usporedbu s metodama i rezultatima dobivenim u našem generaliziranom modelu. Potpoglavlja 2.9. i 2.10. pregled su poznatih pojmova potrebnih za diskretan slučaj, odnosno slučajne šetnje. Posebno gledamo potklasu *skip-free* slučajnih šetnji koje se pojavljuju u diskretnoj verziji našeg modela.

2.1 Lévyjevi procesi

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Neka je $T = [0, \infty)$. Ako je $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, izmjeriva funkcija za svako $t \in T$ (tj. $X_t^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \subset \mathcal{F}$), kažemo da je $X = \{X_t\}_{t \in T}$ **slučajni proces**. Ako je $T = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, tada je $X = \{X_t\}_{t \in T}$ slučajni proces u diskretnom vremenu.

Definicija 2.1.1 *Za slučajni proces $X = \{X_t\}_{t \in T}$ kažemo da je **Lévyjev proces** ako za njega vrijedi*

(L1) $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$,

(L2) $X_t - X_s$ *je nezavisno sa* $\{X_u \ : \ u \leq s\}$, *za svako* $0 \leq s \leq t$ *(**nezavisnost prirasta**),*

(L3) $X_t - X_s$ *je jednako distribuirano kao i* X_{t-s}, *za svako* $0 \leq s \leq t$ *(**stacionarnost prirasta**),*

(L4) X *ima* $\mathbb{P} - g.s.$ *trajektorije koje su neprekidne zdesna i imaju limese slijeva.*

Lévyjevi procesi nose ime po francuskom matematičaru P. Lévyju koji je jedna od najzaslužnijih osoba u proučavanju i opisivanju te vrste procesa. No, nisu se od samog početka tako zvali. I sam Lévy zvao ih je potklasom aditivnih procesa, tj. slučajnih procesa sa nezavisnim prirastima. Kasnije su ih zvali procesima sa nezavisnim i stacionarnim prirastima, dok se 90-tih nije ustalio naziv koji se koristi i danas. Lévyjevi procesi čine jednu vrlo bogatu klasu slučajnih procesa, koliko sličnih, toliko i različitih među sobom. Upravo te sličnosti, odnosno različitosti, igrat će ključnu ulogu u narednim poglavljima u kojima ćemo pokazati koje klase Lévyjevih procesa zadovoljavaju neka svojstva bitna za teoriju rizika, a koji ne, te zašto je to tako obzirom na njihovu strukturu. Svakako su najpoznatiji primjeri Lévyjevih procesa Brownovo gibanje i Poissonov proces, odnosno složeni Poissonov proces. Za nas će biti bitni još neki primjeri, no njih ćemo detaljnije promotriti kasnije, kada pobliže pogledamo strukturu Lévyjevih procesa.

Primjer 2.1.2 Za slučajni proces $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ koji poprima vrijednosti u $\mathbb{R}$ kažemo da je **Brownovo gibanje** ako je ono Lévyjev proces za koji još vrijedi da su mu trajektorije $\mathbb{P}$-g.s. neprekidne i da je, za svako $t > 0$, $B_t \sim N(0,t)$, odnosno $\mathbb{P}(B_t \in dx) = (2\pi t)^{-1/2} \cdot \exp\{-x^2/(2t)\}dx$.

Primjer 2.1.3 Za slučajni proces $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ koji poprima vrijednosti u $\mathbb{N}_0$ kažemo da je **Poissonov proces** intenziteta $\lambda > 0$ ako je N Lévyjev proces za koji još vrijedi da je $N_t \sim Poi(\lambda t)$.

Primjer 2.1.4 Za slučajni proces $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ za koji je $X_t = \sum_{i=0}^{N_t} \xi_i$, gdje je $N = \{N_t\}_{t\geq 0}$ Poissonov proces intenziteta $\lambda > 0$, te $\{\xi_i : i \geq 1\}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli koje su nezavisne sa N kažemo da je **složeni Poissonov proces**. Ova vrsta procesa predstavlja direktnu vezu Lévyjevih procesa sa slučajnim šetnjama jer je, očito, složeni Poissonov proces upravo slučajna šetnja čiji skokovi pristižu nakon nezavisnih eksponencijalno distribuiranih perioda vremena.

2.2 Beskonačno djeljive distribucije

Tek kada pogledamo vezu Lévyjevih procesa sa slučajnim varijablama koje imaju beskonačno djeljivu distribuciju, postaje jasno o koliko bogatoj klasi procesa govorimo. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ slučajna varijabla, $d \in \mathbb{N}$.

Definicija 2.2.1 *Za slučajnu varijablu X kažemo da ima **beskonačno djeljivu distribuciju** ako za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$ t.d.*

$$X =^d X_{1,n} + X_{2,n} + \cdots + X_{n,n} \ .$$

Svojstvo beskonačne djeljivosti distribucije znači da ukoliko slučajna varijabla X ima distribuciju μ na $\mathbb{R}^d$, onda za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje distribucije μ_n takve da je

$$\mu = \mu_n^{n*} \ .$$

Ako pak promotrimo karakterističnu funkciju pridruženu toj distribuciji, $\Theta\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<u,x>}\mu(dx)$, $u \in \mathbb{R}^d$, to znači da vrijedi

$$\Theta\mu = (\Theta\mu_n)^n \ ,$$

gdje su $\Theta\mu_n$ karakteristične funkcije pridružene distribucijama μ_n. Ako pak u $d = 1$ definiramo **karakteristični eksponent** kao

$$\Psi(u) = -\log \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\mu(dx) = -\log \mathbb{E}\,[e^{iux}], \quad u \in \mathbb{R}\ ,$$

tada za beskonačno djeljive distribucije vrijedi

$$\Psi(u) = n\Psi_n(u)\ ,$$

$u \in \mathbb{R}$, gdje su Ψ_n karakteristični eksponenti pridruženi distribucijama μ_n. Za $d > 1$ postupamo na sličan način te definiramo karakteristični eksponent kao funkciju $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ t.d. je $\Psi(0) = 0$ te $\Theta\mu(u) = e^{-\Psi(u)}$, $u \in \mathbb{R}^d$, pa svojstvo beskonačne djeljivosti slijedi analogno kao za $d = 1$.

Najjednostavniji primjeri beskonačno djeljivih slučajnih varijabli su Poissonova, gama, normalna i stabilne distribucije. No, rezultat koji u potpunosti opisuje klasu beskonačno djeljivih distribucija, preko njihovih karakterističnih funkcija, je poznata **Lévy-Khinchinova formula**.

Teorem 2.2.2 *Funkcija $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ je karakteristični eksponent beskonačno djeljive distribucije na $\mathbb{R}^d$ ako i samo kao postoji $a \in \mathbb{R}^d$, pozitivna semi-definitna kvadratna forma Q na $\mathbb{R}^d$ i mjera Π na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\int (1 \wedge |x|^2)\Pi(dx) < \infty$, takva da Ψ ima oblik*

$$\Psi(\lambda) = i < a, \lambda > + \frac{1}{2} \cdot Q(\lambda) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i<\lambda,x>} + i < \lambda, x > 1_{\{|x|<1\}})\Pi(dx)\ , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^d\ .$$

Kvadratnu formu Q zovemo **Gaussov koeficijent**, a mjeru Π sa svojstvima kao u gornjem teoremu **Lévyjeva mjera**.

Ako je X Lévyjev proces, onda je X_t, za svako $t > 0$, slučajna varijabla koja ima beskonačno djeljivu distribuciju. Naime, za svako $n \in \mathbb{N}$ možemo zapisati

$$X_t = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \cdots + (X_t - X_{(n-1)t/n})$$

pa beskonačna djeljivost slijedi zbog nezavisnosti i stacionarnosti prirasta Lévyjvih procesa. Ako sa Ψ_t označimo karakteristični eksponent od X_t te $\Psi := \Psi_1$, onda sličnim argumentom kao gore slijedi da za bilo koji racionalni $t \geq 0$ vrijedi $\mathbb{E}\,[e^{i<\lambda,X_t>}] = e^{-t\Psi(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$. No, kako je Lévyjev proces X neprekidan zdesna g.s., onda je preslikavanje $t \to \mathbb{E}\,[e^{i<\lambda,X_t>}]$ također neprekidno zdesna pa gornja jednakost vrijedi za svako $t \geq 0$. Funkciju $\Psi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ zovemo **karakteristični eksponent Lévyjevog procesa** X.

Iz gornjeg je prikaza jasno da se svakom Lévyjevom procesu može pridružiti beskonačno djeljiva distribucija, međutim ono što nije očito jest - može li se učiniti i obrnuto? No, odgovor na to pitanje je potvrdan i dan sljedećim teoremom.

Teorem 2.2.3 ***(Lévy-Khinchinova formula za Lévyjev proces)*** *Neka je $a \in \mathbb{R}^d$,*

Q pozitivna semi-definitivna forma na $\mathbb{R}^d$ te Π mjera na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ takav da vrijedi $\int (1 \wedge |x|^2)\Pi(dx) < \infty$. Neka je za svako $\lambda \in \mathbb{R}^d$

$$\Psi(\lambda) = i\langle a, \lambda\rangle + \frac{1}{2}Q(\lambda) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i\langle\lambda,x\rangle} + i\langle\lambda, x\rangle 1_{\{|x|<1\}})\Pi(dx)\ . \tag{2.1}$$

Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ na kojem je definiran Lévyjev proces X koji ima karakteristični eksponent Ψ.

Pogledajmo sada neke primjere.

Primjer 2.2.4 Budući da je $\sum_{k\geq 0} e^{iuk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda(1-e^{iu})} = (e^{-\frac{\lambda}{n}(1-e^{iu})})^n$, onda za Poissonov proces $\{N_t\}_{t\geq 0}$, s parametrom $\lambda > 0$, vrijedi $\mathbb{E}\left[e^{iuN_t}\right] = e^{-\lambda t(1-e^{iu})}$. Stoga je njegov karakteristični eksponent dan sa $\Psi(u) = \lambda(1 - e^{iu})$, $u \in \mathbb{R}$. U Lévy-Khinchinovoj formuli za proces $\{N_t\}$ iščezavaju a i Q, dok mu je Lévyjeva mjera Diracova mjera $\Pi = \lambda\delta_1$.

Primjer 2.2.5 Pogledajmo sada složeni Poissonov proces, $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$, $t \geq 0$, gdje je $\{N_t\}_{t\geq 0}$ Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ te $\{\xi_i\ :\ i \geq 1\}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije F, koje su nezavisne sa N. Kako je $\mathbb{E}\left[e^{iu\sum_{i=1}^{N_t}\xi_i}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{iu\sum_{i=1}^{n}\xi_i}\right]\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda\int_{\mathbb{R}}(1-e^{iux})F(dx)}$, slijedi da je karakteristični eksponent za složeni Poissonov proces oblika $\Psi(u) = \lambda\int_{\mathbb{R}}(1 - e^{iux})F(dx)$. U Lévy-Khinchinovoj formuli pak za ovaj proces imamo $a = -\lambda\int_{0<|x|<1} xF(dx)$, $Q = 0$ te $\Pi(dx) = \lambda F(dx)$. Za Lévyjevu mjeru složenog Poissonovog procesa vrijedi svojstvo koje ga izdvaja od ostalih Lévyjevih procesa - ona je konačna sa ukupnom masom jednakom intenzitetu λ. Štoviše, to je i jedini Lévyjev proces s tim svojstvom. Naime, ukoliko promatramo $X_t = dt + \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$, $d \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, tj. složeni Poissonov proces s driftom d, onda vrijedi sljedeći rezultat.

Lema 2.2.6 *([Kyp1, Lema 2.13.]) Lévyjev proces je složeni Poissonov proces s driftom ako i samo ako je $Q = 0$ i $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$.*

Primjer 2.2.7 Promotrimo li Brownovo gibanje s linearnim driftom, $X_t = \sigma B_t + \mu t$, $t \geq 0$, gdje je B standardno Brownovo gibanje definirano kao u Primjeru 2.1.2., onda u njegovoj Lévy-Khinchinovoj reprezentaciji imamo $a = -\mu$, $Q = \sigma$ te $\Pi = 0$. Kako je $\int_{\mathbb{R}} e^{iux}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2u^2+iu\mu}$, karakteristični eksponent Brownovog gibanja s driftom μ dan je pak sa $\Psi(u) = \frac{\sigma^2u^2}{2} - iu\mu$.

Primjer 2.2.8 Lévyjev proces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ čiji prirasti imaju gama distribuciju danu sa $\mu_{\Gamma(\alpha,\beta)}(dx) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}x^{\beta-1}e^{-\alpha x}dx$, zove se **gama proces**. Njegova Lévy-Khinchinova reprezentacija ima oblik $a = -\int_0^1 x\Pi(dx)$, $Q = 0$ i $\Pi(dx) = \beta x^{-1}e^{-\alpha x}dx$, dok iz jednakosti $\int_{(0,\infty)} e^{iux}\mu_{\Gamma(\alpha,\beta)}(dx) = (1 - iu/a)^{-\beta}$ slijedi da mu je karakteristični eksponent dan sa $\Psi(u) = \beta\log(1 - iu/\alpha)$. Ove činjenice ne slijede jednostavnim računom kao u prethodna tri primjera, već se za njih koristi rezultat o *Frullanijevom integralu*, prema kojem za svako α, $\beta > 0$ i $z \in \mathbb{C}$ t.d. $\Re z \leq 0$ vrijedi $(1 - z/\alpha)^{-\beta} = e^{-\int_0^\infty(1-e^{zx})\beta x^{-1}e^{-\alpha x}dx}$.

Primjer 2.2.9 Za slučajnu varijablu X kažemo da ima **stabilnu distribuciju s indeksom** α ako za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $X_1 + \cdots + X_n =^d n^{1/\alpha} X$, gdje su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne kopije od X, a $\alpha \in (0, 2]$. Iz definicije se odmah jasno vidi da je svaka stabilna distribucija i beskonačno djeljiva distribucija. Za klasu Lévyjevih procesa čiji karakteristični eksponent odgovara onome stabilnih distribucija kažemo da je **stabilan Lévyjev proces**. Stabilne distribucije spadaju u klasu distribucija s teškim repom te imaju momente samo reda strogo manjeg od α. Za karakteristične im eksponente vrijedi da je $\Psi(n\lambda) = n^\alpha \Psi(\lambda)$, za svako $n > 0$ i $\lambda \in \mathbb{R}^d$. U Lévy-Khinchinovoj reprezentaciji imamo pak za $\alpha \in (0, 2)$

$$Q = 0\ , \quad \pi(dx) = \begin{cases} c_1 x^{-1-\alpha} dx, & x \in (0, \infty); \\ c_2 |x|^{-1-\alpha} dx, & x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

a a se onda određuje jasno iz same reprezentacije. Iz definicije Lévyjeve mjere slijedi da mora vrijediti $\int_0^\infty (1 \wedge x^2) x^{-1-\alpha} < \infty$, što objašnjava restrikciju indeksa $\alpha \in (0, 2)$.

2.3 Svojstva Lévyjevih procesa

Kako bismo razumijeli svojstva koja posjeduju trajektorije Lévyjevih procesa i kako ta svojstva razlikuju i dijele čitavu klasu Lévyjevih procesa u potklase, prvo moramo pogledati rezultat poznat pod nazivom **Lévy-Itova dekompozicija**. On nam govori kako možemo bilo koji općeniti Lévyjev proces rastaviti kao sumu tri nezavisna Lévyjeva procesa koji se među sobom razlikuju upravo po svojstvima svojih trajektorija.

Teorem 2.3.1 ***(Lévy-Itova dekompozicija)*** *Neka je X Lévyjev proces na $\mathbb{R}$ s trojkom (a, σ, Π) danom kao u Teoremu 2.2.3. Tada postoji vjerojatnosni prostor na kojem postoje tri nezavisna Lévyjeva procesa, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ i $X^{(3)}$, takvi da je $X^{(1)}$ Brownovo gibanje s driftom a, $X_t^{(1)} = \sigma B_t - at$, $t \geq 0$, i karakterističnim eksponentom*

$$\Psi^{(1)}(u) = -iau + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\ ;$$

$X^{(2)}$ složeni Poissonov proces, $X_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$ (gdje su N i ξ_i, $i \geq 1$, kao u definiciji složenog Poissonovog procesa), s karakterističnim eksponentom

$$\Psi^{(2)}(u) = \Pi(\mathbb{R} \setminus (-1, 1)) \int_{|x| \geq 1} (1 - e^{iux}) \frac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))}\ ;$$

$X^{(3)}$ kvadratno integrabilan martingal sa g.s. prebrojivo mnogo skokova manjih od 1 na svakom konačnom vremenskom intervalu i s karakterističnim eksponentom

$$\Psi^{(3)}(u) = \int_{0 < |x| < 1} (1 - e^{iux} + iux) \Pi(dx)\ .$$

Uočimo da ovaj teorem povlači rezultat Teorema 2.2.3., tj. Lévy-Khinchinovu formulu za Lévyjeve procese. Naime, ukoliko definiramo $X := X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$, onda iz gornjeg teorema slijedi da postoji vjerojatnosni prostor na kojem je definiran Lévyjev proces X sa karakterističnim eksponentom

$$
\begin{aligned}
\Psi_X(u) &= iau + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iux} + iux 1_{\{|x|<1\}} \Pi(dx) \\
&= iau + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \\
&+ \Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1)) \int_{|x|\geq 1} (1 - e^{iux}) \frac{\Pi(dx)}{\Pi(\mathbb{R} \setminus (-1,1))} \\
&+ \int_{0<|x|<1} (1 - e^{iux} + iux) \Pi(dx) \\
&= \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)} \; . \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Dakle, svaki se Lévyjev proces može prikazati kao suma Brownovog gibanja s driftom, složenog Poissonovog procesa koji ima samo skokove visine veće ili jednake 1 te čistog procesa skokova koji je martingal i čije su visine skokova strogo manje od 1.

Za cjelokupan dokaz gornjeg teorema vidjeti na primjer [Ber, Teorem I.1.] ili [Kyp1, poglavlje 2.5.]. Mi ćemo ovdje promotriti samo dio konstukcije koja se koristi u dokazu, a potrebna nam je za razumijevanje već spomenutih svojstava Lévyjevih procesa. Naime, posljednji proces u sumi, $X^{(3)}$, konstruira se kao proces kompenziranih parcijalnih suma (skokova), tako da se definira

$$
X_t^{(3,\varepsilon)} = \int_{[0,t]} \int_{\varepsilon \leq |x| < 1} x N(ds \times dx) - t \int_{\varepsilon \leq |x| < 1} x \Pi(dx) \; , \; t \geq 0 \; . \qquad (2.3)
$$

$X^{(3)}$ se onda dobiva kao (uniformni) limes od $X^{(3,\varepsilon)}$ po prikladno odabranom (determinističkom) podnizu u ε. Ovdje je N **Poissonova slučajna mjera** konstruirana na $([0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), dt \times \Pi(dx))$, a Π je, kao i prije, Lévyjeva mjera Lévyjevog procesa X.

Definicija 2.3.2 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $(S, \mathcal{S}, \mu)$ prostor sa σ-konačnom mjerom te $N : \mathcal{S} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ t.d. su $\{N(A) \; : \; A \in \mathcal{S}\}$ slučajne varijable definirane na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za N kažemo da je* ***Poissonova slučajna mjera*** *na $(S, \mathcal{S}, \mu)$ ako vrijedi*

(i) $N(A_1), N(A_2), \ldots, N(A_k)$ su nezavisne slučajne varijable, za sve $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \mathcal{S}$ koji su međusobno disjunktni,

(ii) $N(A) \sim Poi(\mu(A))$, $\forall A \in \mathcal{S}$,

(iii) N je $\mathbb{P}$-g.s. mjera.

Iz Lévy-Itove dekompozicije jasno je kako upravo Poissonova slučajna mjera N, koja je definirana preko Lévyjeve mjere Π procesa X, određuje kakvi će biti skokovi tog procesa. No, prije nego pogledamo što možemo na osnovu te mjere reći o svojstvima samog procesa, pogledajmo još jedan vrlo koristan rezultat koji vrijedi za sve Lévyjeve procese, a kojeg ćemo kasnije često koristiti u računu. Naime, često ćemo htjeti izračunati i izraziti svoje rezultate u terminima same mjere Π, što se najlakše može napraviti korištenjem **formule kompenzacije**.

Lema 2.3.3 *(**formula kompenzacije**, [Kyp1, Teorem 4.4.]) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i X Lévyjev proces definiran na njemu te Π njegova Lévyjeva mjera. Neka je N Poissonova slučajna mjera određena mjerom Π, intenziteta $ds \times d\Pi$ te neka je $\mathcal{H} : [0,\infty) \times \mathbb{R} \times \Omega \to [0,\infty)$ slučajna funkcija za koju vrijedi*

(i) $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t,x)(\omega)$ je izmjeriva po sve tri varijable,

(ii) za svako $t \geq 0$ je $\mathcal{H}(t,x)(\omega)$ $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-izmjeriva,

(iii) za svako $x \in \mathbb{R}$ je $\{\mathcal{H}(t,x)(\omega) \ : \ t \geq 0\}$ g.s. neprekidan slijeva.

Tada za svako $t \geq 0$ vrijedi

$$\mathbb{E}\Big(\int_{[0,t]}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(s,x)N(ds \times dx)\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(s,x)ds\Pi(dx)\Big) \ . \tag{2.4}$$

Vratimo se sada na Lévyjev proces X. Iz Lévy-Itove dekompozicije jasno je da, ukoliko X ima netrivijalnu komponentu $X^{(1)}$ (Brownovo gibanje s driftom), onda je on proces neomeđene varijacije. Nejasno je, međutim, što se događa ukoliko je ta komponenta trivijalna, tj. $Q = 0$. Komponenta $X^{(2)}$, koju čini složeni Poissonov proces, očito je omeđene varijacije pa varijacija ukupnog procesa X ovisi o komponenti $X^{(3)}$, tj. o procesu kompenziranih skokova. Vrijedi

Lema 2.3.4 *([Kyp1, Lema 2.12.]) Lévyjev proces X, koji ima karakterističnu trojku (a, Q, Π), ima trajektorije omeđene varijacije ako i samo ako je*

$$Q = 0 \quad i \quad \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|)\Pi(dx) < \infty \ .$$

Jasno je i da će karakteristični eksponent takvog Lévyjevog procesa sa trajektorijama omeđene varijacije biti oblika

$$\Psi(u) = iau + u\int_{\{|x|<1\}} x\Pi(dx) + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iux})\Pi(dx) \ .$$

Također uočimo da ako je X složeni Poissonov proces, onda je njegov karakteristični eksponent upravo ovog oblika uz dodatni uvjet da je $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$.

Još jedno iznimno važno i vrlo često korišteno svojstvo Lévyjevih procesa jest **jako Markovljevo svojstvo**. Sjetimo se, obično Markovljevo svojstvo intuitivno kaže da ponašanje procesa u budućnosti počevši od nekog proizvoljnog fiksnog vremena ovisi o prošlosti tog procesa samo preko vrijednosti procesa u tom fiksiranom vremenu. Da bismo precizno definirali 'prošlost' procesa, moramo promatrati proces X na filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, gdje je $\{\mathcal{F}_t \ : \ t \geq 0\}$ filtracija.

Definicija 2.3.5 ***Filtracija*** *na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *je rastuća familija podalgebri od* $\mathcal{F}$*, tj. familija* σ *- algebri* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *(gdje je* T *neki uređen skup) za koju je* $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ *za svako* $s < t \in T$*.*
Vjerojatnosni prostor opremljen filtracijom $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *zove se* ***filtrirani vjerojatnosni prostor****.*
Prirodna filtracija *pridružena stohastičkom procesu* X *je najmanja filtracija obzirom na koju je taj proces adaptiran, tj.* $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s \ : \ s \le t)$*.*
Za filtraciju kažemo da je ***neprekidna zdesna*** *ukoliko je* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$ *za svako* $t \in T$*.*
Filtracija $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *je* ***potpuna*** *ako je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *potpun vjerojatnosni prostor i te* $\mathcal{F}_0$ *sadrži sve* $\mathbb{P}$ *- nul skupove.*

Uočimo odmah da je inicijalna σ-algebra $\mathcal{F}_0$ trivijalna prema Blumenthalovom 0-1 zakonu. To znači da, kad X nije složeni Poissonov proces, on g.s. ili odmah postane strogo pozitivan ili odmah strogo negativan ili oboje istovremeno.

Neka je sada τ **vrijeme zaustavljanja**, tj. slučajna varijabla definirana na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}, \mathbb{P})$ za koju vrijedi da je $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$, za svako $t \ge 0$. Tom vremenu zaustavljanja možemo pridružiti σ-algebru $\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \ : \ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \ , \ \forall t \ge 0\}$.

Lema 2.3.6 ***(jako Markovljevo svojstvo Lévyjevih procesa)*** *Neka je* X *općeniti Lévyjev proces i* τ *vrijeme zaustavljanja. Tada je na* $\{\tau < \infty\}$ *proces* $\{X_{\tau+s} - X_\tau \ : \ s \ge 0\}$ *nezavisan sa* σ*-algebrom* $\mathcal{F}_\tau$ *te ima istu razdiobu kao originalni proces* X *(što specijalno povlači da je to opet Lévyjev proces).*

Nezavisnost i stacionarnost prirasta, koji su odgovorni za jako Markovljevo svojstvo Lévyjevih procesa, imaju kao posljedicu još jedan rezultat koji se pokazao vrlo korisnim u računima vezanim uz ovu klasu procesa, a to je

Lema 2.3.7 ***(princip dualnosti za Lévyjeve procese)*** *Za svako fiksno* $t > 0$

$$\{X_{(t-s)-} - X_t \ : \ 0 \le s \le t\} =^d_{(\mathbb{P})} \{-X_s \ : \ 0 \le s \le t\} \ . \tag{2.5}$$

Ova nam lema zapravo kaže da ako pogodno 'obrnemo' Lévyjev proces na nekom konačnom vremenskom intervalu, njegova će nova trajektorija biti jednaka u distribuciji originalnom procesu reflektiranom oko ishodišta. Slično svojstvo, kao što ćemo vidjeti, posjeduju i slučajne šetnje, također zbog svojstva stacionarnosti i nezavisnosti svojih prirasta. Korisna posljedica ove leme, koja će nam trebati kada budemo promatrali trenutne maksimume Lévyjevog procesa X, je sljedeća lema.

Lema 2.3.8 *Za svako fiksirano* $t > 0$ *vrijedi*

$$(S_X(t), S_X(t) - X(t)) =^d_{(\mathbb{P})} (X(t) - I_X(t), -I_X(t)) \ , \tag{2.6}$$

gdje je $S_X(t) = \sup_{0\le s\le t} X_s$*,* $t \ge 0$*,* ***proces trenutnog supremuma****, a* $I_X(t) = \inf_{0\le s\le t} X_s$*,* $t \ge 0$*,* ***proces trenutnog infimuma*** *od* X*.*

Za kraj pogledajmo još malo Lévy-Itovu dekompoziciju procesa X. Uočimo da ukoliko je $\Pi(-\infty, 0) = 0$, proces X neće imati negativne skokove. Ako dodamo još pretpostavke da je Gaussova komponenta nula te da je proces omeđene varijacije, postići ćemo da X bude proces s neopadajućim trajektorijama. Takvi se Lévyjevi procesi zovu **subordinatori**. Ako je pak $\Pi(-\infty, 0) = 0$, a X nije subordinator, dobit ćemo klasu **spektralno pozitivnih Lévyjevih procesa**. Dualni proces spektralno pozitivnog procesa zove se pak **spektralno negativan Lévyjev proces**. U iduće dvije točke promotrit ćemo pobliže te potklase Lévyjevih procesa. Njih ćemo direktno koristiti u našoj konstrukciji u 3. poglavlju zbog posebno lijepe teorije i rezultata koji, upravo zbog ovog svojstva jednostranih skokova, za njih vrijede.

2.4 Subordinatori

Za proces C kažemo da je **subordinator** ako je C Lévyjev proces koji poprima vrijednosti u $[0, \infty)$, otkud slijedi da ima neopadajuće trajektorije. Iz Lévy-Itove dekompozicije za subordinatore slijedi

Lema 2.4.1 *Lévyjev proces X je subordinator ako i samo kao je $\Pi(-\infty, 0) = 0$, $Q = 0$, $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge x)\Pi(dx) < \infty$, te $d := -(a + \int_{(0,1)} x\Pi(dx)) \geq 0$.*

Subordinatori predstavljaju važnu potklasu Lévyjevih procesa, a i od ključnog su značenja u teoriji Markovljevih procesa. Kod nekih se autora ovaj pojam odnosi na malo generalniju klasu procesa, koje ćemo ovdje zvati **ubijeni subordinatori**. Točnije, ako je X subordinator i $\tau = \tau(q)$ nezavisno eksponencijalno vrijeme s parametrom $q > 0$, onda proces $X^{(q)}$ koji poprima vrijednosti u $[0, \infty]$ i dan je sa $X_t^{(q)} = X_t$, za $t \in [0, \tau)$ i $X_t^{(q)} = \infty$ za $t \in [\tau, \infty)$, zovemo **subordinator ubijen intenzitetom** q. Napomenimo i da se svojstva ubijenih subordinatora lako izvode iz pripadajućih za subordinatore pa ćemo se na njih i koncentrirati.

Važan alat kojim možemo raditi sa subordinatorima je njihova Laplaceova transformacija i Laplaceov eksponent. Preciznije, beskonačna djeljivost koja je u osnovi Lévyjevih procesa, omogućava nam da Laplaceovu transformaciju subordinatora C izrazimo u obliku

$$\mathbb{E}\left[\exp\{-\beta C(t)\}\right] = \exp\{-t\psi_C(\beta)\} \ , \beta \geq 0 \ , \tag{2.7}$$

gdje $\psi_C : [0, \infty) \to [0, \infty)$ zovemo **Laplaceov eksponent** od C.

Subordinator C je očito proces čije su trajektorije omeđene varijacije i bez negativnih skokova pa ako sa ν označimo njegovu Lévyjevu mjeru, onda znamo da ona ima nosač na $[0, \infty)$ i zadovoljava taj dodatni uvjet $\int_{(0,\infty)}(1 \wedge x)\nu(dx) < \infty$ iz Leme 2.4.1. Karakteristični eksponent za C se pak može izraziti u obliku

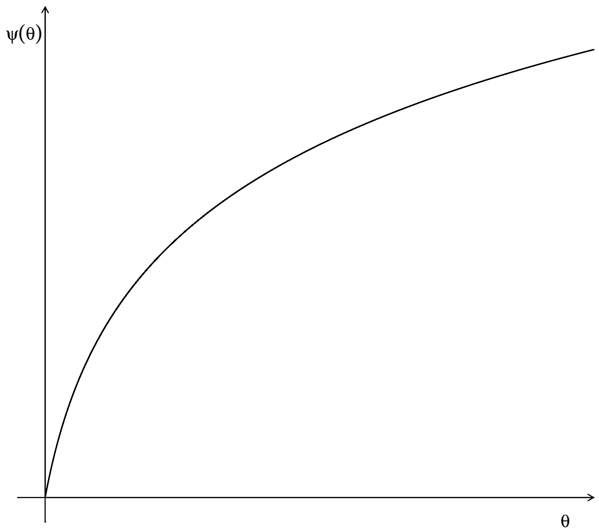
$$\Psi_C(\beta) = -id\beta + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{i\beta x})\nu(dx) \ ,$$

što znači da je

$$\psi_C(\beta) = \Psi_C(i\beta) = d\beta + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\beta x})\nu(dx) \ , \tag{2.8}$$

izraz koji ćemo zvati **Lévy-Khinchinovom formulom za subordinatore**.

Iz te formule odmah slijedi da je Laplaceov eksponent ψ_C od C konkavan i da mu je derivacija ψ_C' potpuno monotona. Također je $\psi_C'(0_+) = \mathbb{E}\, C(1) \in (0,\infty]$, $\lim_{\theta\to\infty} \frac{\psi_C(\theta)}{\theta} = d$ i $\psi_C(\infty) = -\log \mathbb{P}(X(1) = 0)$ i ta je posljednja vrijednost konačna ako i samo ako je C složeni Poissonov proces.



Slika 2.1: *Laplaceov eksponent subordinatora (ovdje: $\psi_C(\theta) = 3\log(1+\theta/5)$)*

Spomenimo još ovdje tri važne vrste Lévyjevih procesa koji pripadaju subordinatorima, a to su: Poissonov proces (s intenzitetom $\lambda > 0$), stabilni subordinatori (stabilni Lévyjevi procesi s indeksom $\alpha \in (0,1)$. Zbog gore navedenog dodatnog uvjeta na Lévyjevu mjeru subordinatora, ovdje je raspon indeksa α smanjen sa $(0,2]$ na $(0,1)$, dok slučaj $\alpha = 1$ daje deterministički proces $C(t) = t$ pa se obično isključuje iz promatranja) te gama proces.

2.5 Spektralno negativni Lévyjevi procesi

Perturbaciju Z u našoj konstrukciji modelirat ćemo spektralno negativnim Lévyjevim procesom. Lévyjevi procesi koji nemaju pozitivnih skokova ili **spektralno negativni** Lévyjevi procesi čine jednu izvanrednu klasu Lévyjevih procesa, a počeli su se proučavati po prvi puta upravo u teoriji rizika te u teoriji repova. Naime, to su procesi za koje teorija fluktuacije daje najljepše rezultate, u smislu da se mogu izraziti u potpunosti eksplicitno. **Teorija fluktuacije** je neprekidna verzija teorije (razvijene uglavnom u radovima *Spitzera*, 1964. (vidi [Spi]), *Borovkova*, 1976. (vidi [Bor]) i *Fellera*, 1971. (vidi [Fell])) koja daje mnoge lijepe rezultate vezane uz trajektorije slučajnih šetnji promatrajući ponašanje slučajne šetnje zajedno sa njenim ekstremima.

Preciznije, spektralno negativni procesi definiraju se kao Lévyjevi procesi čija Lévyjeva mjera ima nosač u $(-\infty, 0)$ i, uz standardni uvjet na Lévyjevu mjeru ($\int_{(-\infty,0)}(x^2 \wedge 1)\Pi_Z(dx) < \infty$), zadovoljava i dodatni uvjet:

$$\int_{(-\infty,-1)} |x|\Pi_Z(dx) < \infty \ .$$

Najjednostavniji primjeri su negativni subordinator s konačnim očekivanjem i deterministički drift. Mi ćemo iz razmatranja za Z obično isključiti složeni Poissonov proces (bez drifta) jer ćemo pretpostavljati da je $\mathbb{E}\, Z(1) = 0$ (a za složeni Poissonov proces bez drifta ne može vrijediti $\mathbb{E}\, Z(t) = 0$), no uočimo da je to samo zbog jednostavnosti jer, 'kompenziranjem' pomoću drifta, možemo obuhvatiti i takvu situaciju. Ovakve pretpostavke ipak omogućavaju dobar izbor procesa koji mogu predstavljati perturbaciju, uzmimo primjerice Brownovu perturbaciju te α-stabilan spektralno negativan Lévyjev proces za $\alpha \in (1, 2)$.

Iako spektralno negativan proces Z može poprimiti i pozitivne i negativne vrijednosti, njegovi su eksponencijalni momenti konačni, tj. $\mathbb{E}\left[\exp\{\beta Z(t)\}\right] < \infty$, za svako $\beta > 0$.

Laplaceov mu je pak eksponent, ψ_Z, dan sa

$$\psi_Z(\beta) = \frac{\varsigma^2}{2}\beta^2 + \int_{(-\infty,0)} (e^{\beta x} - 1 - \beta x)\Pi_Z(dx) \ , \tag{2.9}$$

$\varsigma \geq 0$. Uočimo ovdje da upravo dodatni uvjet na Lévyjevu mjeru od Z osigurava integrabilnost drugog dijela eksponenta. Sada imamo da je

$$\mathbb{E}\left[\exp\{\beta Z(t)\}\right] = \exp\{t\psi_Z(\beta)\} \ . \tag{2.10}$$

Preslikavanje $\psi_Z : [0, \infty) \to (-\infty, \infty)$ je beskonačno diferencijabilno na $[0, \infty)$, strogo konveksno te $\psi(0) = 0$ i $\lim_{\beta\to\infty} \psi_Z(\beta) = \infty$.

Sjetimo se sada još nekih osnovnih detalja o Laplaceovom eksponentu koji će nam kasnije biti od koristi.

Znamo da Brownovo gibanje u svakom fiksnom trenutku ima momente svih redova, međutim već pogled na složeni Poissonov proces sa prirastima iz na primjer α - stabilne distribucije sa $\alpha \in (0, 1)$, naznačava da nije za sve Lévyjeve procese tako. Preciznije, za općeniti Lévyjev proces X s Lévyjevom mjerom Π vrijedi (za dokaz vidi [Kyp1, Teorem

3.6.])

$$\mathbb{E}\,[e^{\beta X(t)}] < \infty \ , \ \forall t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{|x|\geq 1} e^{\beta x}\Pi(dx) < \infty.$$

Dakle je Laplaceov eksponent

$$\psi(\beta) = \psi_X(\beta) = \frac{1}{t}\log \mathbb{E}\,[e^{\beta X(t)}] = -\Psi(-i\beta)$$

konačan ako i samo ako je

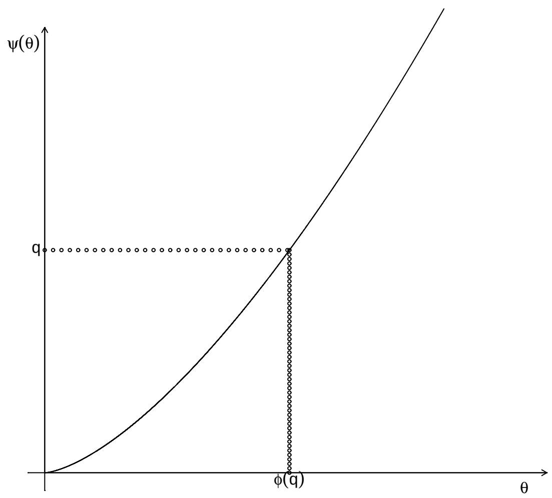
$$\int_{|x|\geq 1} e^{\beta x}\Pi(dx) < \infty \ .$$

Koristeći ovu karakterizaciju i definiciju spektralno negativnih Lévyjevih procesa, možemo vidjeti kako je za njih $\psi_Z(\beta) < \infty$ za svako $\beta \geq 0$.

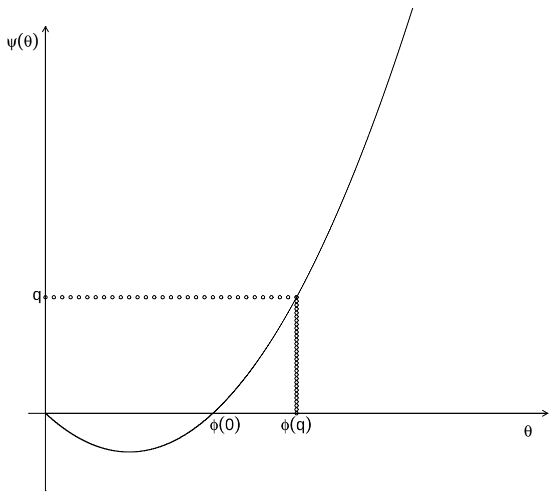
Ako za spektralno negativan Lévyjev proces Z (sa Laplaceovim eksponentom ψ_Z) označimo sa

$$\phi_Z(q) = \sup\{\theta \geq 0 \ : \ \psi_Z(\theta) = q\} \tag{2.11}$$

najveće rješenje jednadžbe $\psi_Z(\theta) = q$, onda $\phi_Z(q)$ zovemo **desni inverz** od ψ_Z. Ako je $\mathbb{E}\,X(1) \geq 0$, tada je $\phi_Z(q)$ jedinstveno rješenje od $\psi_Z(\theta) = q$, a ako je $\mathbb{E}\,X(1) < 0$ (što ćemo mi dobiti nakon ispuštanja uvjeta čistog profita u poglavlju 3), onda je $\phi_Z(q)$ jedinstveno rješnje od $\psi_Z(\theta) = q$ samo u slučaju kad je $q > 0$, tj. imamo dva rješenja od $\psi_Z(\theta) = 0$, 0 i $\phi_Z(0) > 0$.



Slika 2.2: *Laplaceov eksponent spektralno negativnog procesa za* $\psi_Z'(0+) \geq 0$ *(ovdje:* $\psi_Z(\theta) = \theta^{3/2}$*)*



Slika 2.3: *Laplaceov eksponent spektralno negativnog procesa za* $\psi_Z'(0+) < 0$ *(ovdje:* $\psi_Z(\theta) = \theta^2 - 2\theta$*)*

Osnovna je 'slabost' formula iz teorije fluktuacije za općenite Lévyjeve procese u tome što ih većina uključuje jednodimenzionalne distribucije procesa koji su rijetko kada eksplicitno poznati. No u slučaju spektralno negativnih procesa te se formule značajno pojednostavljuju i mogu se izraziti direktno u terminima originalnih podataka, Laplaceovog eksponenta ψ_Z i njegovog inverza, $\phi_Z = \psi_Z^{-1}$.

Ključan teorem koji omogućava pojednostavljenje brojnih rezultata iz teorije fluktuacije u ovom slučaju (primijenjen na naš proces Z i njegove oznake) je

Teorem 2.5.1 *([Ber, Teorem VII.1.])*
Neprekidan rastući proces $S_Z(t) := \sup\{Z(s) \ : \ 0 \leq s \leq t\}$ *je lokalno vrijeme u 0 za reflektirani proces* $S_Z - Z$*. Njegov neprekidan zdesna inverz,* $T(x) = \inf\{s \geq 0 \ : \ S_Z(s) > x\} = \inf\{s \geq 0 \ : \ Z(s) > x\}$ $(x \geq 0)$ *je subordinator, ubijen u nezavisnom eksponencijalnom vremenu ako* $Z \to -\infty$*, a Laplaceov mu je eksponent jednak* $\phi_Z = \psi_Z^{-1}$*.*

Odavde slijedi

Korolar 2.5.2 *([Ber, Korolar VII.2.])*
i) $S_Z(\tau(q)) \sim Exp(\phi_Z(q))$
ii) Z *ide u* $+\infty$*, oscilira ili ide u* $-\infty$ *ovisno o tome je li derivacija Laplaceovog eksponenta od* Z *oko 0,* $\psi_Z'(0_+)$*, pozitivna, jednaka 0 ili negativna. U posljednjem slučaju, apsolutni*

supremum, $S_Z(\infty)$, ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\phi_Z(0)$.

Lako se vidi da iz [Ber, Teorem VII.4. i Propozicija VI.3.] slijedi sljedeći rezultat.

Teorem 2.5.3

$$\mathbb{E}\left[exp\{\beta I_Z(\tau(q))\}\right] = \frac{q(\phi_Z(q) - \beta)}{\phi_Z(q)(q - \psi_Z(\beta))}\ ,\ \beta > 0\ . \tag{2.12}$$

Time smo dobili Laplaceovu transformaciju infimuma do nekog nezavisnog eksponencijalnog vremena spektralno negativnog procesa, a uočimo da puštanjem $q \to 0$ možemo dobiti istu i za apsolutni infimum. Ova osnovna formula teorije fluktuacije za spektralno negativne procese bit će i nama ključna za dobivanje jednog oblika Pollaczek-Khinchinove formule, pogotovo stoga što će naš cjelokupni proces rizika X imati strukturu spektralno negativnog procesa.

2.6 Lokalno vrijeme

Ideja lokalnog vremena potječe od *Lévyja* koji ju je razvio za slučaj Brownovog gibanja. Kasnije, ponajviše zahvaljujući *Blumenthalu* i *Getooru*, uočena je njihova veza sa klasom subordinatora pa se iz tih rezultata dalje razvila čitava teorija ekskurzija, koje ćemo se kratko dotaknuti i mi na kraju 3. poglavlja. Lokalno vrijeme može se konstruirati i za općenitiju klasu, Markovljeve procese, slijedeći konstrukciju sličnu *Lévyjevoj*. Za detalje vidi [Ber, Poglavlje IV.]. Naime, u jednom i u drugom slučaju zanima nas struktura uzastopnih ekskurzija procesa iz neke točke. Obično će ta točka od interesa biti trenutni maksimum procesa. Ideja je da se konstruira rastući proces (to će biti onda lokalno vrijeme) koji ostaje konstantan u tim intervalima kad je proces izvan promatrane točke (najčešće svog prethodnog maksimuma). Pokazuje se da je tada njegov inverzni proces subordinator čiji skokovi odgovaraju duljinama intervala ekskurzije.

Ideja Pollaczek-Khinchinove formule, koju za generalizirani slučaj želimo dobiti, također je direktno vezana uz ovu problematiku. Naime, ono što želimo je dekomponirati ťrajektoriju čitavog procesa u nezavisne i jednako distribuirane dijelove koji predstavljaju ekskurzije iz trenutnog maksimuma. No, to se pokazuje kao problematično u slučaju općenitog Lévyjevog procesa, obzirom da čak i na konačnom vremenskom intervalu Lévyjev proces može imati beskonačno mnogo ekskurzija iz svog trenutnog maksimuma. Lokalno vrijeme u maksimumu je upravo alat kojim se taj problem uspješno rješava. Ekskurzije originalnog Lévyjevog procesa iz trenutnog maksimuma zapravo su jednake ekskurzijama **reflektiranog procesa**, $S - X$ (gdje je $S_t = \sup_{0 \le s \le t} X_s$) iz 0. Kako je pak reflektirani proces Markovljev proces (vidi na primjer [Ber, Poglavlje VI.]), onda je prirodno njegov proces ekskurzija iz 0 promatrati kroz lokalno vrijeme definirano za Markovljeve procese.

Sa $(\mathbb{P}_x\ :\ x \in \mathbb{R}^d)$ označimo sad vjerojatnosne mjere koje odgovaraju razdiobi nekog slučajnog procesa na $\mathbb{R}^d$ koji kreće iz točke $x \in \mathbb{R}^d$.

Definicija 2.6.1 *Neka je $M = \{M_t \ : \ t \geq 0\}$ slučajni proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ koji je adaptiran obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ (tj. M_t je $\mathcal{F}_t$-izmjeriv za svako $t \geq 0$), poprima vrijednosti u $\mathbb{R}^d$ i ima neprekidne zdesna trajektorije te $\mathbb{P}(M_0 = 0) = 1$. Za M kažemo da je* ***Markovljev proces*** *ako je za svako vrijeme zaustavljanja $\tau < \infty$ proces $\{M_{\tau+s} \ : \ s \geq 0\}$, obzirom na $\mathbb{P}(\cdot | M_\tau = x)$, nezavisan sa $\mathcal{F}_\tau$ i također ima distribuciju $\mathbb{P}_x$.*

Označimo sa $T_0 := \inf\{t > 0 \ : \ M_t = 0\}$ prvo vrijeme kada se proces M ponovno vrati u 0. Događaj $\{T_0 = 0\}$ je $\mathcal{F}_0$ - izmjeriv budući da je T_0 vrijeme zaustavljanja. Stoga, opet prema Blumenthalovom 0-1 zakonu, imamo da je $\mathbb{P}(T_0 = 0) = 0$ ili 1. Ako je ova vjerojatnost jednaka 0, onda kažemo da je 0 **iregularna**, a ako je ta vjerojatnost jednaka 1, onda je 0 **regularna**. U slučaju da je 0 regularna, onda možemo definirati prvo vrijeme izlaska procesa iz stanja 0, tj. $S_1 := \inf\{t \geq 0 \ : \ M_t \neq 0\}$. To je opet $\mathcal{F}_0$ - izmjerivo vrijeme zaustavljanja pa je opet $\mathbb{P}(S_1 = 0) = 0$ ili 1. U prvom slučaju za 0 kažemo da je **točka zadržavanja**, a u drugom **trenutna točka**.

Nadalje pretpostavljamo da je za proces M 0 regularna i trenutna točka, u slučaju iregularnosti ili točke zadržavanja, konstrukcija će biti očitija i jednostavnija pa ćemo je promotriti kasnije.

Pogledajmo sada nul-skup za proces M (to će u slučaju Lévyjevog procesa odgovarati nul-skupu reflektiranog procesa),

$$Z := \{t \ : \ M_t = 0\} \ .$$

Za otvoreni interval (g, d) t.d. je $M_t \neq 0$ za sve $g < t < d$, $g \in \overline{Z}$, $d \in \overline{Z} \cup \{\infty\}$, gdje je $\overline{Z}$ zatvarač skupa Z, kažemo da je **interval ekskurzije**. Ako sa $l_n(a)$, $g_n(a)$ i $d_n(a)$ označimo duljinu ($l_n(a) = d_n(a) - g_n(a)$), lijevu krajnju točku i desnu krajnju točku n-tog intervala ekskurzije koji je duljine strogo veće od a (pokazuje se da s vjerojatnošću 1 postoji barem jedan takav interval ekskurzije), onda možemo definirati

$$\overline{\mu}(a) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}(l_1(a)>c)}, & a \leq c; \\ \mathbb{P}(l_1(c) > a), & a > c. \end{cases}$$

Ova je funkcija nerastuća i neprekidna zdesna i predstavlja distribuciju duljina intrevala ekskurzije. Sa $N_a(t) = \sup\{n \ : \ g_n(a) < t\}$ označimo pak broj ekskurzija duljine veće od a koje započnu prije vremena t. Tada vrijedi

Teorem 2.6.2 *([Ber, Poglavlje IV.2.])*

(i) za svako $t \geq 0$ $N_a(t)/\overline{\mu}(a)$ konvergira kada $a \to 0_+$ i taj limes označavamo sa $L(t)$,

(ii) preslikavanje $t \to L(t)$ je neprekidno i rastuće,

(iii) $\text{supp}\{dL\} = \overline{Z}$,

(iv) L je proces koji je adaptiran obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$,

(v) *za svako vrijeme zaustavljanja τ koje je g.s. konačno i $M_\tau = 0$ g.s. proces $\{(M_{\tau+s}, L(\tau+s) - L(\tau)) \ : \ t \geq 0\}$ je nezavisan sa $\mathcal{F}_\tau$ i ima istu razdiobu kao i (M, L) obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}$,*

(vi) *ako je $L^{'}$ neki drugi neprekidan rastući proces t.d. $\mathrm{supp}\{L^{'}\} \subseteq \overline{Z}$ i za koji vrijede svojstva u (iv) i (v), onda postoji konstanta $k \geq 0$ t.d. je $L^{'} \equiv k \cdot L$.*

Kao jedna od posljedica dokaza ovog teorema dobiva se i da je $L(d_1(a)) \sim Exp(\overline{\mu}(a))$ i nezavisno je sa $l_1(a)$. Također vrijedi

Korolar 2.6.3 *Postoji konstanta $c \geq 0$ t.d. g.s vrijedi*

$$\int_0^t 1_{\{M_s=0\}} ds = \int_0^t 1_{\{s \in \overline{Z}\}} ds = cL(t), \quad \forall t \geq 0 \ . \tag{2.13}$$

Proces L konstruiran i sa svojstvima kao gore zovemo **lokalno vrijeme u 0 Markovljevog procesa** M.

Ako pogledamo inverz tog procesa,

$$L^{-1}(t) = \inf\{s \geq 0 \ : \ L(s) > t\} \ , \tag{2.14}$$

tada je taj proces rastući i neprekidan zdesna te adaptiran obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_{L^{-1}(t)}\}_{t\geq 0}$. Za svako $t \geq 0$ su $L(t)$ i $L^{-1}(t)$ vremena zaustavljanja te je

$$L^{-1}(L(t)) = \inf\{L^{-1}(u) \ : \ L^{-1}(u) > t\} = \inf\{s > t \ : \ M_s = 0\}$$

i

$$L^{-1}(L(t)_-) = \sup(L^{-1}(u) \ : \ L^{-1}(u) < t\} = \sup\{s < t \ : \ M_s = 0\}$$

(što su zapravo lijeva i desna krajnja točka intervala ekskurzije koji sadrži vrijeme t). Taj proces zovemo **inverzno lokalno vrijeme**. Osim toga, vrijedi onaj ključan rezultat o kojem smo govorili na početku ovog potpoglavlja.

Teorem 2.6.4 *([Ber, Teorem IV.8.]) Inverzno lokalno vrijeme L^{-1} je subordinator sa Lévyjevom mjerom μ (gdje je $\mu(s,t] := \overline{\mu}(s) - \overline{\mu}(t)$, $0 < s < t < \infty$) i driftom c, ubijen intenzitetom $\overline{\mu}(\infty)$. Laplaceov eksponent od L^{-1} dan je sa*

$$\psi(u) = u(c + \int_0^\infty e^{-ux} \overline{\mu}(x)\, dx) \ .$$

U dokazu ovog teorema lijepo se vidi da skokovi od L^{-1} odgovaraju duljinama intervala ekskurzije, tako da je $L^{-1}(t)$ zapravo suma duljina intervala ekskurzije do lokalnog vremena od t zajedno s vremenom provedenim u 0, tj.

$$L^{-1}(t) = ct + \sum_{s \leq t} \Delta L^{-1}(s) \ .$$

Veza Lévjevih procesa, točnije subordinatora, i lokalnih vremena za Markovljeve procese tu ne prestaje. Može se također pokazati da je svaki subordinator zapravo inverzno lokalno vrijeme nekog Markovljevog procesa.

Pogledajmo još kratko što se događa u slučaju kad je 0 točka zadržavanja ili pak iregularna točka. U slučaju kada je 0 točka zadržavanja, onda je iz njene definicije jasno da ima smisla promatrati niz uzastopnih vremena izlaska, odnosno povratka procesa u 0. Ako sa R_i označimo i-ti izlazak, a sa S_i i-ti povratak u 0, $i \geq 1$, tada je $R_0 = 0$ i $R_0 < S_1 < R_1 < \ldots$ Uzastopnom primjenom Markovljevog svojstva procesa, slijedi da je nul-skup $Z = [R_0, S_1) \cup [R_1, S_2) \cup \ldots$ te da postoji neprekidno preslikavanje rastuće na skupu $\overline{Z}$, a to je $\int_0^t 1_{\{M_t=0\}} ds$, $t \geq 0$. Dakle se lokalno vrijeme u 0 definira kao bilo koji proces $L = \{L(t) \ : \ t \geq 0\}$ koji je do na konstantu jednak gornjem, tj.

$$c \cdot L(t) = \int_0^t 1_{\{M_t=0\}} ds \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Pokazuje se da je i u ovom slučaju inverzno lokalno vrijeme, L^{-1}, subordinator.

Ako je pak 0 iregularna, onda ima smisla promatrati niz $(R_n \ : \ n \geq 1)$ uzastopnih povrataka u 0. I ovdje uzastopnom primjenom Markovljevog svojstva dobivamo da je gornji niz zapravo rastuća slučajna šetnja pa bi prirodno bilo definirati lokalno vrijeme u nekom trenutku $t \geq 0$ kao kao broj povrataka procesa u 0 prije trenutka t. Međutim, tada bi inverz tog lokalnog vremena bio proces u diskretnom, a ne neprekidnom vremenu. Obzirom da promjena vremena slučajne šetnje pomoću Poissonovog procesa koji je s njom nezavisan pretvara slučajnu šetnju u složeni Poissonov proces (dakle, Lévyjev proces), onda uvodimo niz nezavisnih eksponencijalnih varijabli s istim parametrom i nezavisnih sa originalnim procesom, $E_1, E_2, \ldots$ Tada definiramo lokalno vrijeme u 0 kao proces $L = \{L(t) \ : \ t \geq 0\}$ takav da je $L(t) = \sum_{i=0}^{n(t)} E_i$, gdje je $n(t) = \max\{i \ : \ R_i < t\}$. Uz male tehničke dodatke, ovaj se proces može svesti na adaptirani proces, a činjenica da nije neprekidan, nego samo neprekidan zdesna, ne pravi problem. Promatramo njegov neprekidan zdesna inverz, L^{-1}, i za njega se opet može pokazati da je subordinator.

Vratimo se sada na Lévyjeve procese. Osim lokalnog vremena, još je jedna stvar u srži izvanredne teorije fluktuacije - radi se o ljestvičastim procesima. Takva vrsta teorije, koja dovodi i do Wiener-Hopfove faktorizacije, prvotno je razvijena opet za slučajne šetnje. No, upravo već spomenuta činjenica da vremena kada općeniti Lévyjev proces postigne novi maksimum ne tvore nužno diskretan skup te činjenica da su konstrukcije u diskretnom slučaju uglavnom kombinatorne prirode, onemogućila je da se analogna konstrukcija ljestvičastih procesa provede i za Lévyjeve procese u neprekidnom slučaju. U početku se taj problem pokušavao riješiti tako što se za neprekidan slučaj koristila aproksimacija diskretnog, međutim, upravo lokalno vrijeme omogućilo je elegantniji pristup. Pogledajmo stoga konačno kako se ono definira za Lévyjeve procese.

Definicija 2.6.5 *Za svako $t \geq 0$ i $x \in \mathbb{R}$ definiramo*

$$L(x,t) = \limsup_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{\{|X_s - x| < \varepsilon\}} ds$$

i zovemo ga ***lokalno vrijeme u točki*** *x* ***i vremenu*** *t.*

Za ovako definiran proces vrijedi da je, za svako $x \in \mathbb{R}$, $L(x, \cdot)$ rastući proces koji raste samo kada je Lévyjev proces X u točki x, tj. $X = x$. Osim toga, za svaku izmjerivu omeđenu funkciju f takvu da je $f \geq 0$ g.s., vrijedi

$$\int_0^t f(X_s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) L(x,t) dx \ .$$

Pokazuje se također da ovako definirano lokalno vrijeme za Lévyjeve procese zadovoljava sva svojstva koja, kao u Teoremu 2.6.2., vrijede za lokalno vrijeme Markovljevog procesa i stoga je do na konstantu jednako tako definiranom lokalnom vremenu. Ponovno vrijedi i da je inverzno lokalno vrijeme subordinator.

2.7 Ljestvičasti proces i funkcija obnavljanja

Sada za naš Lévyjev proces X promatramo njegov reflektirani proces u supremumu te reflektirani proces u infimumu, tj. $S - X$ i $X - I$. Kako je $X - I$ dualni proces od $S - X$, onda je dovoljno promatrati jedan od njih, a to će najčešće biti $S - X$. Za njega vrijedi da je Markovljev proces pa možemo gledati njegovo lokalno vrijeme u 0 koje se onda podudara sa lokalnim vremenom u maksimumu originalnog procesa X. Označimo sa $L = \{L(t) \ : \ t \geq 0\}$ to lokalno vrijeme, a sa L^{-1} njegov neprekidni zdesna inverz. To inverzno lokalno vrijeme zovemo **proces ljestvičastog vremena**. Koristimo ga kako bismo promijenili vrijeme procesa supremuma tako da definiramo

$$H(t) = \begin{cases} S_{L^{-1}(t)}, & L^{-1}(t) < \infty; \\ \infty, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.15}$$

Proces H zovemo **proces ljestvičastih visina**, a par (L^{-1}, H) **ljestvičasti proces**. Pokazuje se da je ljestvičasti proces ponovno Lévyjev proces, a njegov **bivarijantan Laplaceov eksponent** κ definira se kao

$$\exp\{-\kappa(\alpha, \beta)\} = \mathbb{E}\left[\exp\{-(\alpha L^{-1}(1) + \beta H(1))\}\right] \ . \tag{2.16}$$

Veza između ljestvičastog procesa i originalnog procesa X može se izraziti na više načina, no svi su neka verzija Wiener-Hopfove faktorizacije. Spomenimo jednu.

Teorem 2.7.1 *Neka je τ eksponencijalno vrijeme s parametrom $q > 0$, $\tau \sim Exp(q)$, nezavisno s originalnim procesom X. Neka je $S = \{S_t \ : \ t \geq 0\}$ proces supremuma kao i do sada, a $G_\tau = \sup\{t \leq \tau \ : \ X_t = S_t\}$ posljednje vrijeme povratka u 0 reflektiranog procesa prije trenutka τ. Tada vrijedi* *(i) parovi* (G_τ, S_τ) *i* $(\tau - G_\tau, S_\tau - X_\tau)$ *su nezavisni,*

(ii) za svako $\alpha, \beta > 0$

$$\mathbb{E}\left[\exp\{-\alpha G_\tau - \beta S_\tau\}\right] = \exp\{\int_0^\infty dt \int_{(0,\infty)} (e^{-\alpha t - \beta x} - 1)t^{-1}e^{-qt}\mathbb{P}(X_t \in dx)\}$$

i

$$\mathbb{E}\left[\exp\{-\alpha(\tau - G_\tau) - \beta(S_\tau - X\tau)\}\right] = \exp\{\int_0^\infty dt \int_{(-\infty,0)} (e^{-\alpha t - \beta x} - 1)t^{-1}e^{-qt}\mathbb{P}(X_t \in dx)\} .$$

Vezano uz ljestvičasti proces, definiramo **funkciju obnavljanja** pridruženu procesu H

$$\Upsilon(x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(H(t) \le x)\, dt = \mathbb{E} \int_0^\infty 1_{\{H(t) \le x\}}\, dt = \mathbb{E} \int_0^\infty 1_{\{S(t) \le x\}}\, dL(t) \ , \ x \ge 0 \ . \quad (2.17)$$

Υ je rastuća i neprekidna zdesna, a Laplaceov eksponent dan joj je, za $\lambda > 0$, sa

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x}\Upsilon(x)dx = \frac{1}{\kappa(0, \lambda)} \ , \quad (2.18)$$

gdje je κ bivarijantan Laplaceov eksponent ljestvičastog procesa. Funkcija obnavljanja usko je vezana uz prvi trenutak kada proces X prijeđe razinu 0. Naime, u slučaju kad X ide u $-\infty$ postoji konstanta $k > 0$ takva da, za svako $x \ge 0$, $\Upsilon(x) = k \cdot \mathbb{P}(S(\infty) \le x) = k \cdot \mathbb{P}(T_{(x,\infty)} = \infty)$, a kad X ide u $+\infty$, onda postoji također konstanta $k > 0$ t.d., za svako $x \ge 0$, $\Upsilon(x) = k \cdot \mathbb{E}\left(T_{(x,\infty)}\right)$ (u slučaju kad X oscilira je $\mathbb{P}(S(\infty) < \infty) = 0$ i $\mathbb{E}\left(T_{(x,\infty)}\right) = \infty$). Funkcija obnavljanja lijepo se pojavljuje i u vezi karakterizacije puzanja procesa X preko određene razine, a vezano uz proces supremuma, imamo i sljedeći koristan rezultat.

Lema 2.7.2 *Neka je* F *funkcija distribucije procesa supremuma od* X *u nezavisnom eksponencijalnom vremenu s parametrom 1, tj.* $F(x) = \mathbb{P}(S(\tau) \le x)$, $x \ge 0$, $\tau = \tau(1)$. *Funkcije* F *i* Υ *su neprekidne i postoji konstanta* $c > 0$ *t.d.* $c\Upsilon(x) \le F(x) \le c^{-1}\Upsilon(x)$ *za svako* $x > 0$ *dovoljno malo.*

Za detalje vezane uz ove rezultate vidjeti [Ber, poglavlje VI.5.].

2.8 Slučajne šetnje

Slučajne šetnje predstavljaju jedan od najjednostavnijih, a opet najvažnijih primjera slučajnih procesa. Sam naziv im potječe iz 1921. od *Pólyj*e, no kao model i ideja pojavile su se i mnogo ranije, u sklopu rješavanja poznatih kockarskih problema u vjerojatnosti koji datiraju još iz 17. stoljeća.

Definicija 2.8.1 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor te* $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli na njemu, sa zajedničkom distribucijom* F. *Niz*

$(S_n \ : \ n \in \mathbb{N})$ *takav da je*

$$S_0 = 0 \quad i \quad S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \ , \ n \geq 1 \ ,$$

zovemo ***slučajna šetnja****. Slučajne varijable* Y_i*,* $i \in \mathbb{N}$ *zovu se* ***prirasti slučajne šetnje****.*

Najjednostavniji primjer slučajne šetnje je svakako **jednostavna simetrična slučajna šetnja** na $\mathbb{Z}$, čiji se prirasti mogu interpretirati kao ishodi uzastopnih nezavisnih bacanja simetričnog novčića. Naime, ako pretpostavimo da se kladimo da će pri bacanju takvog novčića pasti glava i dobivamo $+1$ ako glava zaista padne, odnosno gubimo -1 ako padne pismo, onda S_n zapravo predstavlja ukupan dobitak (ili gubitak) nakon prvih n bacanja tog novčića. No, čak i ovako jednostavna slučajna šetnja donosi brojne velike rezultate sa sobom. Spomenimo samo nekoliko: ako pogledamo vjerojatnost da se ovakva šetnja u trenutku $2n$ vrati u poziciju iz koje je krenula, $u_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n}$, onda **Stirlingova formula** kaže da je $u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, $n \to \infty$. Nadalje, ako označimo $T = \inf\{n \ : \ S_n = +1\}$ prvo vrijeme dolaska u poziciju $+1$ te šetnje, onda je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, što znači da jednostavna slučajan šetnja g.s. posjeti u nekom trenutku svako stanje, tj. svaku poziciju. Također je $\mathbb{E}\,T = +\infty$, što pak znači da kockaru koji igra strategijom koju smo opisali, treba očekivano beskonačno vremena za igru prije nego ostvari profit. Poznata je distribucija vremena T, $\mathbb{P}(T = 2n-1) = (-1)^{n-1} \cdot \binom{1/2}{n}$. Također je poznato i da je broj putova te slučajne šetnje $(k, S_k)_{k \geq 1}$ od pozicije $(0, a)$ do pozicije (n, b) koji dodirnu ili prijeđu x - os jednak broju putova od pozicije $(0, -a)$ do pozicije (n, b), $a, b \in \mathbb{Z}$. Ovaj rezultat zove se **princip refleksije** i kao njegova posljedica može se dobiti glasački teorem, o kojem će detaljno biti riječi u četvrtom poglavlju.

Dakle, već ovaj osnovni primjer slučajne šetnje otvara brojna pitanja - o ponašanju slučajne šetnje nakon što prođe puno vremena (ponašanje u beskončnosti), o povratku u inicijalno stanje iz koje je krenula, o pozicijama koje posjeti do nekog fiksnog vremena, itd. Jedno od glavnih svojstava koje utječe na sva ta pitanja za slučajnu šetnju je svojstvo rekurentnosti, odnosno tranzijentnosti. Za slučajnu šetnju koja se s vjerojatnošću 1 vrati u početnu poziciju kažemo da je **rekurentna**, a u suprotnom kažemo da je **tranzijentna**. Rekurentna se slučajna šetnja s vjerojatnošću 1 onda vrati u početnu poziciju beskonačno mnogo puta, dok za tranzijentnu slučajnu šetnju taj događaj ima vjerojatnost 0. Ako promotrimo jednostavnu slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}^d$, može se pokazati (*Pólyja*, 1921.) da tranzijentnost, odnosno rekurentnost ovisi o toj dimenziji d.

Teorem 2.8.2 *Jednostavna simetrična slučajna šetnja u* $\mathbb{Z}^d$ *je rekurentna za* $d = 1, 2$ *te tranzijentna za* $d \geq 3$.

Vratimo se sada na općenitu slučajnu šetnju. Ako je, kao na početku, promatramo kao proces koji modelira profit kockara u igri koju smo opisali ili je pak pomatramo u osiguravajućem kontekstu kao proces pristiglih zahtjeva za isplatom ili proces uplata i slično, u svakom nam je slučaju od velike važnosti promatranje maksimuma te slučajne šetnje, tj. proces $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $M_n = \max\{0, S_1, S_2, \ldots, S_n\}$.

Problem sa procesom maksimuma M slučajne šetnje proizlazi ponajviše iz činjenice da on, za razliku od originalne slučajne šetnje (kao i procesa prirasta Y), nije Markovljev proces i stoga ga je mnogo teže analizirati. Jedan od osnovnih rezultata koji rješava taj problem je **Spitzerov identitet**.

Teorem 2.8.3 *([AChD]) Za* $0 < r < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathbb{E}\left[\exp\{\lambda M_n\}\right] = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \mathbb{E}\left[\exp\{\lambda S_n^+\}\right]\right\} ,$$

gdje je $S_n^+ = \max\{0, S_n\}$.

Od posebnog su nam interesa naravno one parcijalne sume u slučajnoj šetnji koje postižu maksimum, tj. oni članovi niza S koji ujedno pripadaju i nizu M. Označimo sa

$$\nu^+ = \min\{n > 0 \ : \ S_n > 0\}$$

prvo vrijeme kada slučajna šetnja S postane pozitivna, tj. uđe u $(0, \infty)$. Ako je $S_n \leq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, onda definiramo $\nu^+ = \infty$. ν^+ zovemo **prvo (strogo, jako) rastuće ljestvičasto vrijeme** od S. Tada definiramo pripadajuće **prvo (slabo) padajuće ljestvičasto vrijeme** od S, $\nu^- = \min\{n > 0 \ : \ S_n \leq 0\}$. Očito je da vrijedi

$$\{\nu^+ = k\} = \{S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \ldots, S_{k-1} \leq 0, S_k > 0\}$$

te

$$\{\nu^- = k\} = \{S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{k-1} > 0, S_k \leq 0\} .$$

Zapravo, vrijedi i više, tj. $\{\nu^+ = k\} \in \mathcal{F}_k$ te $\{\nu^- = k\} \in \mathcal{F}_k$, $k \in \mathbb{N}$, što znači da su vremena ν^+ i ν^- vremena zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ koja je generirana procesom S (definicija analogna onoj koju smo dali kod Lévyjevih procesa). Sada se dalje mogu definirati

$$\nu_{n+1}^+ = \min\{j > \nu_n^+ \ : \ S_j > S_{\nu_n^+}\} \ , \ \nu_0^+ = 0 \ \text{ i } \ \nu_1^+ = \nu^+ \ ,$$

n-to (strogo, jako) rastuće ljestvičasto vrijeme te, za gore definirano ν^-, **n-to (slabo) padajuće ljestvičasto vrijeme**,

$$\nu_{n+1}^- = \min\{j > \nu_n^- \ : \ S_j \leq S_{\nu_n^-}\} \ , \ \nu_0^- = 0 \ \text{ i } \ \nu_1^- = \nu^+ \ .$$

Kako bismo, koristeći ljestvičasta vremena, proučili dalje proces maksimuma slučajne šetnje S, ključno nam je znati kako se ona ponašaju u beskonačnosti, a to ovisi o očekivanju prirasta te slučajne šetnje. Označimo (zbog jednake distribuiranosti) $\mathbb{E}\,Y := \mathbb{E}\,Y_i$ za bilo koji $i \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 2.8.4 *([Res, Propozicija 7.2.3.])*

(i) Ako je $\mathbb{E}\,Y > 0$*, onda je* $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$*,*

(ii) ako je $\mathbb{E}\,Y < 0$*, onda je* $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ *i*

(iii) ako je $\mathbb{E}\,Y = 0$*, onda je* $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ *i* $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$.

Ukoliko za slučajnu šetnju vrijedi (i) iz teorema, kažemo da ona ima **pozitivan drift**, u slučaju (ii) **negativan drift**, a u slučaju (iii) da **oscilira**. Uočimo da ima smisla promatrati rastuća ljestvičasta vremena te, dalje uz njih, maksimum slučajne šetnje samo u slučaju (ii), tj. kada S ima negativan drift. Razlog tome je što je u slučaju negativnog drifta $M_\infty < \infty$ g.s., gdje je $M_\infty := \max\{S_n \ : \ n \geq 0\}$. U tom slučaju ima smisla definirati i

$$H^+ = \begin{cases} S_{\nu^+}, & \nu^+ < \infty; \\ \infty, & \text{inače,} \end{cases}$$

prebačaj preko 0, odnosno **prvu rastuću ljestvičastu visinu** procesa S.

Ako označimo distribuciju od H^+ sa G, tj. $G^+(x) = \mathbb{P}(H^+ \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, te $G^+(\infty) = \lim_{x\to\infty} G^+(x)$, onda vrijedi sljedeći rezultat. Za njegov dokaz, kao i detaljniji izvod svih narednih rezultata vidjeti [GS] (što slijedi pristup kao u [Asm1] i [Res]).

Teorem 2.8.5 *Ekvivalentno je*

(i) $\mathbb{E}\,Y < 0$*,*

(ii) $M_\infty < \infty$ *g.s.,*

(iii) $G^+(\infty) < 1$*.*

Ukoliko je $\nu^+ < \infty$, onda induktivno dalje možemo definirati ostala rastuća ljestvičasta vremena i pripadajuće visine. Uočimo da je, zbog nezavisnosti i stacionarnosti prirasta slučajne šetnje, nova slučajna šetnja $S_{\nu^++1} - S_{\nu^+}, S_{\nu^++2} - S_{\nu^+}, \ldots$ nezavisna sa $S_1, S_2, \ldots, S_{\nu^+}$ i jednako distribuirana kao originalna šetnja S. Stoga definiramo

$$H_n^+ = \begin{cases} S_{\nu^+} - S_{\nu^+-1}, & \nu_n^+ < \infty; \\ \infty, & \text{inače,} \end{cases}$$

n**-tu rastuću ljestvičastu visinu** od S. Sa $H^+ = \{H_n^+ \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ definiramo onda **proces rastućih ljestvičastih visina**, a par (ν^+, H^+) zovemo **rastući ljestvičasti proces**. Radi se o bivarijantnom procesu obnavljanja (slijedi iz Markovljevog svojstva) čija su druga koordinata uzastopni maksimumi slučajne šetnje S, a prva koordinata pripadajuća vremena u kojima se ti maksimumi postižu i taj proces predstavlja osnovni sastojak već spomenute teorije fluktuacije za slučajne šetnje. Naime, pokazuje se da vrijedi

$$M_\infty = \sum_{i=1}^{N} H_i^+ \quad , \quad N = \max\{n \ : \ \nu_n^+ < \infty\} \ .$$

Osim toga, uz notaciju $G_0(x) = G^+(x)/G^+(\infty)$, također vrijedi

Teorem 2.8.6 *Za svako* $x \geq 0$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(M_\infty \leq x) = (1-\rho) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (G^+)^{*k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^k G_0^{*k}(x) \ ,$$

gdje je $\rho = G^+(\infty)$.

Odavde, uz definiranu vjerojatnost propasti $\vartheta(u) = \mathbb{P}(M_\infty > u)$, slijedi Pollaczek-Khinchinov oblik rezultata.

Korolar 2.8.7 *Za svako* $u \geq 0$

$$\vartheta(u) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^k \overline{G_0^{*k}}(u) \ .$$

Ovaj rezultat ima posebno lijep zatvoren oblik ako ga provedemo, na sličan način kao gore, u slučaju složenog Poissonovog modela. Naime, u tom je slučaju

$$\overline{G^+}(x) = \frac{\lambda}{c}\int_x^\infty \overline{F}(u)\,du \ , \ x \geq 0 \ ,$$

gdje je λ intenzitet pozadinskog Poissonovog procesa, a c drift. Osim toga je

$$\rho = \frac{\lambda\mu}{c} \ ,$$

gdje je $\mu = \mathbb{E}\,Y$ te

$$\overline{G}_0(x) = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty \overline{F}(u)\,du \ , \ x \geq 0 \ .$$

Ako je još poznata i distribucija prirasta u složenom Poissonovom modelu i ona je na primjer eksponencijalna s nekim parametrom $\delta > 0$, tj. $F \sim \mathrm{Exp}(\delta)$, onda G_0 poprima još ljepši oblik - ima također eksponencijalnu distribuciju s istim parametrom δ, tj. $G_0 \sim \mathrm{Exp}(\delta)$.

Analogna konstrukcija kao gore provodi se za padajuće ljestvičaste visine.

Ako sa G^+ i G^- označimo ljestvičaste distribucije od H^+, odnosno H^-, onda pomoću njih možemo izraziti distribuciju F prirasta originalne slučajne šetnje. To je jedna od verzija Wiener-Hopfove faktorizacije od S.

Teorem 2.8.8 *Uz gornje oznake, vrijedi*

$$F = G^+ + G^- - G^+ * G^- \ .$$

Slične se varijante Wiener-Hopfove faktorizacije mogu dobiti i iz sljedeće poznate veze uspostavljene između slučajne šetnje S te upravo definiranog ljestvičastog procesa.

Teorem 2.8.9 *Za svako* $n \geq 1$ *i* $x > 0$

$$\frac{1}{n}\cdot \mathbb{P}(S_n \in dx) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\mathbb{P}(\nu_k^+ = n, H_k^+ \in dx) \ .$$

Iz ovog pak oblika rezultata možemo opet dobiti glasačke teoreme, o kojima će biti riječi kasnije.

2.9 'Skip-free' slučajne šetnje

Vratimo se sada opet malo na početno pitanje u vezi slučajnih šetnji i promatrajmo ponovno slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}$. Zanima nas kako se slučajna šetnja vraća u poziciju iz koje je krenula i što možemo reći o stanjima koje je posjetila do nekog vremena. Dakle, ono što nas zanima je prvo vrijeme kada šetnja dosegne neku razinu (poziciju) $m \in \mathbb{Z}$. Označimo ga sa

$$\tau(m) = \min\{n \geq 0 \ : \ S_n = m\} ,$$

specijalno je $\tau = \tau(1)$. Jasno je, koristeći Markovljevo svojstvo, da se $\tau(m)$ može dobiti kao suma m nezavisnih kopija od τ pa je dovoljno da se fokusiramo samo na njegovu distribuciju. U slučaju kada je S jednostavna slučajna šetnja, ovu distribuciju možemo relativno jednostavno odrediti koristeći na primjer generirajuće funkcije ili pak metodu refleksije. Dobivamo rezultat koji smo već spomenuli, tj. $\mathbb{P}(\tau = 2n-1) = (-1)^{n-1}\binom{1/2}{n}$.

Međutim, u općenitom slučaju analiziranje putova koje se provodi kod jednostavne slučajne šetnje da bi se dobio gornji rezultat, ne prolazi. Jedina su iznimka tzv. **skip-free slučajne šetnje**. Nazivi *neprekidna zdesna* ili *skip-free prema gore* slučajna šetnja dolaze od njenog ponašanja, tj. činjenice da se može pomaknuti udesno (ili prema gore) samo za jedan korak u jednoj jedinici vremena, dok ulijevo (ili prema dolje) može preskočiti nekoliko koraka. Ovakva se vrsta slučajne šetnje prirodno pojavljuje u mnogim područjima primjenjene vjerojatnosti, kao na primjer u teoriji repova i teoriji procesa grananja (*branching processes*). Ona je primjer tzv. Markovljevog lanca M/G/1 tipa u teoriji repova u situaciji u kojoj se 'mušterije' (*customers*) počinju razdvajati te također Markovljevog lanca koji modelira veličinu trenutne populacije u Galton-Watsonovom procesu grananja, a može se javiti i u raznim igrama na sreću u u kojima se u svakoj (nezavisnoj jednako distribuiranoj) igri riskira po jedna jedinica.

Dakle, **skip-free 'prema gore'** ili **neprekidne zdesna slučajne šetnje** su one slučajne šetnje čiji prirasti ne postižu vrijednosti veće ili jednake 2 (tj. $\mathbb{P}(Y_i \leq 1) = 1$), dok se one za čije priraste vrijedi $\mathbb{P}(Y_i \geq -1) = 1$ zovu **neprekidne slijeva** ili **skip-free 'prema dolje'**. Upravo zbog toga što se prema desno, odnosno lijevo mogu pomicati samo po jedan korak, omogućuje nam da ih držimo pod 'kontrolom', kao i kod spektralno negativnih Lévyjevih procesa u neprekidnom slučaju. Iz tog razloga vrijedi sljedeće.

Lema 2.9.1 *Neka je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konačan niz cijelih brojeva manjih ili jednakih 1 koji u sumi daju 1. Tada postoji jedinstvena ciklička permutacija π indeksa $1, 2, , \ldots, n$ takva da je*

$$\sum_{j=1}^{k} x_{\pi(j)} \leq 0 \ , \ \textit{za svako } k = 1, 2, \ldots, n-1 \ .$$

Odavde slijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 2.9.2 *Uz oznake kao gore, vrijedi*

$$\mathbb{P}(\tau = n) = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}(S_n = 1) \ .$$

To je **Kempermannova formula**, koja se može dobiti i kao posljedica glasačkih teorema, kao što ćemo vidjeti u četvrtom poglavlju, gdje ćemo se detaljnje baviti ovakvim slučajnim šetnjama.

Poglavlje 3

Neprekidan slučaj

3.1 Perturbirani proces rizika promatran do nezavisnog eksponencijalnog vremena

Neka je

- $\{C(t) \ : \ t \geq 0\}$ subordinator, za sada s konačnim očekivanjem ($\mathbb{E}[C(1)] < \infty$) i Levyjevom mjerom ν. On modelira proces zahtjeva za isplatom pa je jasan razlog ovakvog odabira u modelu - želimo ostati u okviru procesa sa stacionarnim i nezavisnim prirastima, a u danom kontekstu, mora se raditi o rastućem procesu;
- $\{Z(t) \ : \ t \geq 0\}$ Lévyjev proces bez pozitivnih skokova i, također za sada, s konačnim očekivanjem. Uzet ćemo bez smanjenja općenitosti da je to očekivanje jednako 0 ($\mathbb{E}[Z(1)] = 0$), no, jasno je da i ukoliko je ono različito od 0, uvijek to možemo kompenzirati sa visinom premije c. On modelira perturbaciju, a upravo izbor ovakvog procesa bez pozitivnih skokova omogućava primjenu 'jake mašinerije' dostupne iz teorije fluktuacije;
- $c > 0$ visina premije;
- $\tau \sim Exp(q)$, $q > 0$, neko nezavisno eksponencijalno vrijeme.

Promatrat ćemo generalizirani perturbirani proces rizika

$$X(t) = ct - C(t) + Z(t) \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

gdje su C i Z nezavisni procesi te, za sada, pretpostavljati uvjet čistog profita:

$$\mathbb{E}[C(1)] < c \ .$$

Uočimo da je zbog tog uvjeta $\mathbb{E}[X(1)] = c - \mathbb{E}\, C(1) > 0$ pa $X(t) \to +\infty$ kada $t \to \infty$. **Dualni proces** procesa X definira se kao $\widehat{X}(t) := -X(t)$, $t \geq 0$, dakle to je Lévyjev proces sa Lévyjevom mjerom $\widehat{\nu}(0, y) = \nu(-y, 0)$. Za njega pak, uz ove pretpostavke, vrijedi da $\widehat{X}(t) := -X(t) \to -\infty$ kada $t \to \infty$.

Označimo još supremume:

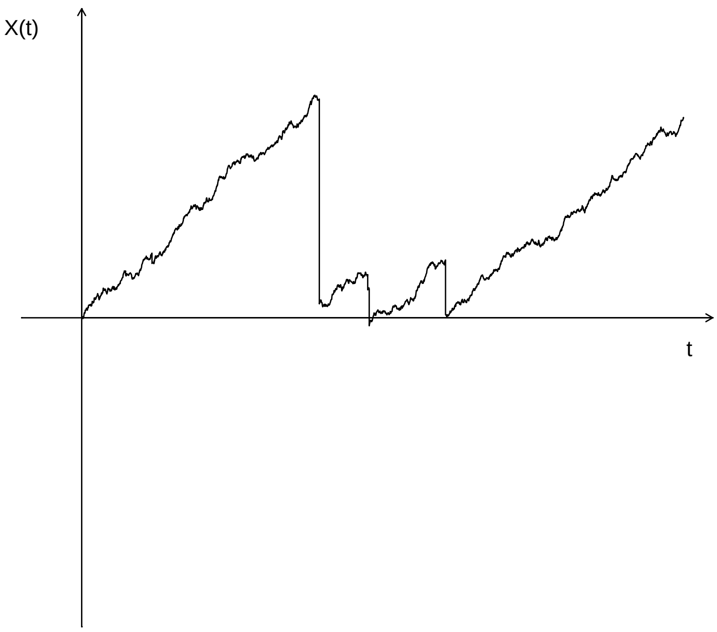
$$\widehat{S}(t) = \sup_{0 \le s \le t} \widehat{X}(s) \quad \text{i} \quad \widehat{S}(\infty) = \sup_{0 \le s < \infty} \widehat{X}(s)\ .$$

Analogne oznake, $S(t)$, $S(\tau)$ i $S(\infty)$, odnose se na proces X. Uočimo također da budući da $\widehat{X} \to -\infty$, onda je $\widehat{S}(\infty) < \infty$, g.s.

Za proces X ćemo pak promatrati

$$I(t) := \inf_{0 \le s \le t} X(s) \quad \text{te} \quad I(\infty) := \inf_{0 \le s < \infty} X(s)$$

(opet analogne oznake $\widehat{I}(\infty)$ i $\widehat{I}(t)$ možemo koristiti za proces $\widehat{X}$).



Slika 3.1: *Generalizirani proces rizika $X(t) = ct - C(t) + Z(t)$, gdje je C složeni Poissonov proces, a Z Brownovo gibanje*

Obzirom na strukturu Pollaczek-Khinchinove formule koju želimo dobiti, za subordinator

C ćemo definirati integrirani rep distribucije

$$H(x) := \frac{1}{\mathbb{E}\,C(1)} \int_0^x \nu(y,\infty)\,dy = \frac{1}{\int_0^\infty \nu(y,\infty)dy} \int_0^x \nu(y,\infty)\,dy \ ,$$

gdje posljednja jednakost slijedi koristeći Fubinijev teorem.

Uočimo da je X spektralno negativan Lévyjev proces (kao i Z), sa očekivanjem $\mathbb{E}\,X(1) = c - \mathbb{E}\,C(1) > 0$. Stoga je, kao i kod Z, Laplaceov eksponent od X, u oznaci ψ_X, definiran sa

$$\mathbb{E}\left[\exp\{\beta X(t)\}\right] = \exp\{t\psi_X(\beta)\} \ .$$

Zbog nezavisnosti od C i Z vrijedi

$$\psi_X(\beta) = c\beta - \psi_C(\beta) + \psi_Z(\beta) \ , \quad \beta \geq 0 \ .$$

U ovom je slučaju, zbog $\psi'_X(0+) = \mathbb{E}\,X(1) > 0$, ψ_X strogo rastuće pa je $\phi_X(0) = \psi_X^{-1}(0) = 0$.
Budući da je τ eksponencijalno vrijeme nezavisno sa X, iz Teorema 2.5.3. i ovdje slijedi da je

$$\mathbb{E}\left[\exp\{\beta I_X(\tau(q))\}\right] = \frac{q(\phi_X(q) - \beta)}{\phi_X(q)(q - \psi_X(\beta))} \ , \quad \beta > 0 \ .$$

Pustimo li $q \downarrow 0$, dobivamo da $I_X(\tau(q)) \to^{\mathbb{P}} I_X(\infty)$ pa iz gornje jednakosti slijedi

$$\mathbb{E}\left[\exp\{\beta I_X(\infty)\}\right] = \psi'_X(0+)\frac{\beta}{\psi_X(\beta)} \ , \quad \beta > 0 \ .$$

Ako označimo

$$Y(t) := ct + Z(t) \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

onda je Y također spektralno negativan Lévyjev proces sa očekivanjem $\mathbb{E}\,Y(1) = c > 0$ pa po istom argumentu kao i za proces X slijedi

$$\mathbb{E}\left[\exp\{\beta I_Y(\infty)\}\right] = \psi'_Y(0+)\frac{\beta}{\psi_Y(\beta)} \ , \quad \beta > 0 \ .$$

Cilj nam je dekomponirati dualni proces $\widehat{X}$ u određenim trenucima zaustavljanja koja ćemo, prema [Schm], zvati **modificirani ljestvičasti trenuci**. To će biti trenuci u kojima proces C svojim skokom dovede do novog supremuma čitavog procesa, tj. kada je $\Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)$.

1. korak:

Pogledajmo stoga prvo očekivani broj trenutaka kada se postigne novi supremum procesa $\widehat{X}$ zbog skoka subordinatora C. U slučaju kada su pretpostavke kao gore, imamo (kao u [HPSV1, Teorem 4.1.])

$$\mathbb{E}\,\Big(\sum_{0\le t<\infty} 1_{\{\Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\}} \Big) = \frac{\mathbb{E}\,C(1)}{c - \mathbb{E}\,C(1)} \ .$$

Za dobivanje ovog rezultata ključna je činjenica da za spektralno negativan proces vrijedi da njegov supremum do nekog nezavisnog eksponencijalnog vremena ima eksponencijalnu distribuciju (točnije, $S(\tau(q)) \sim Exp(\phi(q))$, gdje je $\phi = \psi_X^{-1}$. Za detalje vidi Korolar 2.5.2.), a rezultat onda slijedi primjenom formule kompenzacije, teorema o monotonoj konvergenciji i Fubinijevog teorema.
Da bi dobiveni rezultat dao da je broj vremena kada se postigne novi supremum zbog skoka subordinatora C diskretan (što onda i omogućava dekompoziciju koju ćemo provesti), koristili smo uvjete koje smo na početku pretpostavili. Osnovno je pitanje koji su nužni i dovoljni uvjeti da bi skup tih vremena bio diskretan. Ta je tema detaljno obrađena u radu [SV] i gornji je rezultat poopćen, tako da za općeniti Lévyjev proces $\{Y(t)\}$ i subordinator $\{C(t)\}$, bez pretpostavki na konačnost očekivanja, do nekog nezavisnog eksponencijalnog vremena $\tau \sim Exp(q)$ vrijedi:

$$\mathbb{E}\,\Big(\sum_{0\le t<\tau} 1_{\{\Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\}} \Big) = \frac{1}{q}\int_0^\infty \mathbb{P}(S(\tau) \le x)\,\nu(dx) \ .$$

2. korak:

Obzirom da, uz naše pretpostavke, iz *1. koraka* slijedi da su vremena kada se postiže novi supremum procesa $\widehat{X}$ zbog skoka subordinatora C diskretna, možemo definirati

$$\sigma_1 := \sigma = \inf\{t > 0 \ : \ \Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\}$$

i

$$\sigma_{n+1} = \inf\{t > \sigma_n \ : \ \Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\} \ ,$$

tako da vrijedi:

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots \ , g.s.$$

3. korak:

Za $y > 0$ definirajmo $\widehat{\tau}_y = \inf\{t > 0 \ : \ \widehat{X}(t) > y\}$, dakle, prvo vrijeme ulaska procesa $\widehat{X}$ u (y, ∞). Tada je očito

$$\widehat{S}(t-) \le y \ \text{ ako i samo ako } \ t \le \widehat{\tau}_y$$

(jer supremum procesa $\widehat{X}$ prije trenutka t je manji ili jednak y ako i samo ako proces $\widehat{X}$ do tog trenutka nije ušao u (y, ∞)).

Zanima nas $\mathbb{E}\int_0^{\sigma\wedge\widehat{\tau}_y\wedge\tau} 1_{\{\widehat{S}(t) - \widehat{X}(t) \le x\}} dt$, dakle, očekivano vrijeme provedeno u $(0, x)$ reflektiranog procesa $\widehat{S} - \widehat{X}$ do trenutka $\sigma \wedge \widehat{\tau}_y \wedge \tau$ (obzirom da gledamo što se događa sa procesom $\widehat{S} - \widehat{X}$, a i σ smo definirali preko tog procesa). Poopćujemo Propoziciju 4.3. iz [SV].

Prvo, dakle, za $x > 0$ i $y > 0$, pogledajmo koliko je očekivano vrijeme koje proces $\widehat{S} - \widehat{X}$ provede u $(0, x)$ sve do trenutka τ:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E} \int_0^\tau 1_{\{\widehat{S}(t) - \widehat{X}(t) \le x\}} \, dt \\
&= \mathbb{E} \int_0^\infty qe^{-qs} \left(\int_0^s 1_{\{\widehat{S}(t) - \widehat{X}(t) \le x\}} \, dt \right) ds = \int_0^\infty qe^{-qs} \left(\int_0^s \mathbb{P}(S(t) \le x) \, dt \right) ds \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(S(t) \le x) \left(\int_t^\infty qe^{-qs} ds \right) dt = \int_0^\infty e^{-tq} \mathbb{P}(S(t) \le x) \, dt \\
&= \frac{1}{q} \int_0^\infty qe^{-tq} \mathbb{P}(S(t) \le x) \, dt = \frac{1}{q} \mathbb{P}(S(\tau) \le x) \\
&= \frac{1}{q} (1 - e^{-\phi(q)x}) \ . \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

U gornjem smo računu koristili Fubinijev teorem, linearnost očekivanja, neprekidnost procesa $\widehat{X}$ u vjerojatnosti (kako bismo prešli na proces $\widehat{S}(t) - \widehat{X}(t)$) i potom da je $S(t) =^d \widehat{S}(t) - \widehat{X}(t)$. Također smo u zadnjoj jednakosti iskoristili da je $S(\tau) \sim Exp(\phi(q))$, gdje je ϕ (strogo rastući) inverz Laplaceovog eksponenta ψ procesa X.

Sada pogledajmo što se događa sa očekivanim vremenom boravka ispod razine x za proces $\widehat{S} - \widehat{X}$ do trenutka τ, ali nakon vremena $\sigma \vee \widehat{\tau}_y = \max\{\sigma, \widehat{\tau}_y\}$. Uočimo da nije potrebno ovdje koristiti uvjet $\sigma \vee \widehat{\tau}_y < \infty$ jer je gornja granica integrala τ, a ukoliko je $\sigma \vee \widehat{\tau}_y > \tau$, onda je integral i tako jednak nuli.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E} \int_0^\tau 1_{\{\widehat{S}(t) - \widehat{X}(t) \le x\}} 1_{\{t > \sigma\}} 1_{\{\widehat{S}(t) > y\}} \, dt \\
&= \mathbb{E} \big[\int_{\sigma \vee \widehat{\tau}_y}^\tau 1_{\{\widehat{S}(t) - \widehat{X}(t) \le x\}} \, dt | \sigma \vee \widehat{\tau}_y < \tau \big] \mathbb{P}(\sigma \vee \widehat{\tau}_y < \tau) \\
&= \mathbb{P}(\sigma \vee \widehat{\tau}_y < \tau) \mathbb{E} \int_0^\tau 1_{\{\widehat{S}(t) - \widehat{X}(t) \le x\}} \, dt \\
&= \mathbb{P}(\sigma < \tau, \widehat{\tau}_y < \tau) \frac{1}{q} (1 - e^{-\phi(q)x}) \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

U gornjem smo računu koristili da je proces $\widehat{S} - \widehat{X}$ jaki Markovljev proces pa ako definiramo

$$
Y(t) = \begin{cases} (\widehat{S} - \widehat{X})(t), & t < \tau; \\ \partial, & \text{inače,} \end{cases}
$$

tj. ubijemo proces $\widehat{S} - \widehat{X}$ u nezavisnom eksponencijalnom vremenu τ, onda opet dobivamo jaki Markovljev proces. Na njega možemo primijeniti jako Markovljevo svojstvo, iz čega onda slijedi posljednji redak.

Istim bismo postupkom dobili:

$$\mathbb{E}\int_0^\tau 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\leq x\}}1_{\{\widehat{S}(t)>y\}}\,dt=\mathbb{P}(\widehat{\tau}_y<\tau)\frac{1}{q}(1-e^{-\phi(q)x})\ . \tag{3.3}$$

Sada oduzmemo (3.3) od (3.2) pa dobivamo:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^\tau 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\leq x\}}1_{\{t\leq\sigma\}}1_{\{\widehat{S}(t)>y\}}\,dt\\&=\frac{1}{q}(1-e^{-\phi(q)x})(\mathbb{P}(\widehat{\tau}_y<\tau)-\mathbb{P}(\sigma<\tau,\widehat{\tau}_y<\tau))\\&=\frac{1}{q}(1-e^{-\phi(q)x})\mathbb{P}(\widehat{\tau}_y<\tau,\sigma\geq\tau)\end{aligned} \tag{3.4}$$

Analogno kao do sada, dobili bismo:

$$\mathbb{E}\int_0^\tau 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\leq x\}}1_{\{t\leq\sigma\}}\,dt=\mathbb{P}(\sigma\geq\tau)\frac{1}{q}(1-e^{-\phi(q)x})\ . \tag{3.5}$$

Mi želimo izračunati

$$\mathbb{E}\int_0^{(\sigma\wedge\widehat{\tau}_y)\wedge\tau} 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\leq x\}}\,dt=\mathbb{E}\int_0^\tau 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\leq x\}}1_{\{t\leq\sigma\}}1_{\{t\leq\widehat{\tau}_y\}}\,dt,$$

što dobivamo ako oduzmemo (3.4) od (3.5):

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^\tau 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\leq x\}}1_{\{t\leq\sigma\}}1_{\{\widehat{S}(t)\leq y\}}\,dt\\&=\frac{1}{q}(1-e^{-\phi(q)x})(\mathbb{P}(\sigma\geq\tau)-\mathbb{P}(\widehat{\tau}_y<\tau,\sigma\geq\tau))\\&=\frac{1}{q}(1-e^{-\phi(q)x})\mathbb{P}(\sigma\geq\tau,\widehat{\tau}_y\geq\tau)\ .\end{aligned}$$

Time smo dobili sljedeći rezultat.

Propozicija 3.1.1 *Za $x>0$ i $y>0$ vrijedi*

$$\mathbb{E}\int_0^{(\sigma\wedge\widehat{\tau}_y)\wedge\tau} 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\leq x\}}\,dt=\mathbb{P}(\sigma\geq\tau,\widehat{\tau}_y\geq\tau)\frac{1}{q}(1-e^{-\phi(q)x})\ . \tag{3.6}$$

Napomena 3.1.2 Uočimo da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^{(\sigma\wedge\widehat{\tau}_y)\wedge\tau} 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\le x\}}\,dt &= \mathbb{P}(\sigma\ge\tau,\widehat{\tau}_y\ge\tau)\frac{1}{q}(1-e^{-\phi(q)x}) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(\sigma\ge\tau,\widehat{\tau}_y\ge\tau)}{q}\int_0^x \phi(q)e^{-\phi(q)u}\,du \\
&= \int_0^\infty \frac{\mathbb{P}(\sigma\ge\tau,\widehat{\tau}_y\ge\tau)}{q}\phi(q)1_{\{u\le x\}}e^{-\phi(q)u}\,du \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

pa onda, standardnim postupkom, dobivamo da za bilo koju nenegativnu Borelovu funkciju f na $[0,\infty)$ vrijedi:

$$\mathbb{E}\int_0^{(\sigma\wedge\widehat{\tau}_y)\wedge\tau} f(\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t))\,dt = \frac{\mathbb{P}(\sigma\ge\tau,\widehat{\tau}_y\ge\tau)\phi(q)}{q}\int_0^\infty f(u)e^{-\phi(q)u}\,du\ . \qquad (3.8)$$

4. korak:

Sada želimo dobiti zajedničku distribuciju $(\widehat{S}(\sigma-),J_\tau,\widehat{S}(\sigma-)-\widehat{X}(\sigma-))$ na $\{\sigma\le\tau\}$, kako bismo iz nje odredili distribuciju preskoka u trenutku σ prije vremena τ, J_τ. Definirajmo

$$J_\tau := (\Delta C(\sigma)-(\widehat{S}(\sigma-)-\widehat{X}(\sigma-)))\cdot 1_{\{\sigma\le\tau\}}\ .$$

Prvo ćemo izračunati distribuciju vektora $(\widehat{S}(\sigma-),J_\tau,\widehat{S}(\sigma-)-\widehat{X}(\sigma-))$ na $\{\sigma\le\tau\}$.

Tražimo, dakle, $\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-)\le y,J_\tau>x,\widehat{S}(\sigma-)-\widehat{X}(\sigma-)>z,\sigma\le\tau)$ za neke $x,\ y,\ z>0$.

Koristit ćemo formulu kompenzacije i to za proces

$$\mathcal{H}(t,\omega,\epsilon) := 1_{\{\widehat{S}(t-,\omega)\le y\}}1_{\{\widehat{S}(t-,\omega)-\widehat{X}(t-,\omega)>z\}}1_{(x+\widehat{S}(t-,\omega)-\widehat{X}(t-,\omega),\infty)}(\epsilon)1_{\{t\le(\sigma\wedge\tau)(\omega)\}}\ . \qquad (3.9)$$

Lijeva strana formule kompenzacije daje

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sum_{0\le t<\infty}\mathcal{H}(t,\omega,\Delta C(t,\omega))\Big) \\
&= \mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma\wedge\tau)-)\le y,\widehat{S}((\sigma\wedge\tau)-)-\widehat{X}((\sigma\wedge\tau-))>z, \\
&\Delta C(\sigma\wedge\tau)-(\widehat{S}((\sigma\wedge\tau)-)-\widehat{X}((\sigma\wedge\tau)-))>x) \\
&= \mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma\wedge\tau)-)\le y,\widehat{S}((\sigma\wedge\tau)-)-\widehat{X}((\sigma\wedge\tau-))>z, \\
&\Delta C(\sigma\wedge\tau)-(\widehat{S}((\sigma\wedge\tau)-)-\widehat{X}((\sigma\wedge\tau)-))>x,\sigma\le\tau) \\
&+\mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma\wedge\tau)-)\le y,\widehat{S}((\sigma\wedge\tau)-)-\widehat{X}((\sigma\wedge\tau)-))>z, \\
&\Delta C(\sigma\wedge\tau)-(\widehat{S}((\sigma\wedge\tau-)-\widehat{X}((\sigma\wedge\tau)-))>x,\sigma>\tau) \\
&= \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-)\le y,\widehat{S}(\sigma-)-\widehat{X}(\sigma-)>z,J_\tau>x,\sigma\le\tau)
\end{aligned}$$

jer u drugom slučaju ($\{\sigma > \tau\}$), budući da se još nije dogodio σ, nije još došlo do novog supremuma zbog skoka subodinatora C, tj. $\Delta C(t) < \widehat{S}((t)-) - \widehat{X}((t)-)$, za svako $t < \sigma$. Stoga je $\mathbb{P}(\Delta C(\sigma \wedge \tau) - (\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-) - \widehat{X}((\sigma \wedge \tau)-)) > x) = \mathbb{P}(\Delta C(\tau) - (\widehat{S}((\tau)-) - \widehat{X}((\tau)-)) > x) = 0$, za svako $x > 0$.

Desna strana formule kompenzacije, uz $f(u) := 1_{(z,\infty)}(u) \cdot \nu(x + u, \infty)$ i primjenu Napomene 3.1.2., pak daje

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\int_0^\infty dt \int_{(0,\infty)} \nu(d\epsilon)\mathcal{H}(t,\omega,\epsilon)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\int_0^{\sigma\wedge\tau} dt 1_{\{\widehat{S}(t-)\le y\}} 1_{\{\widehat{S}(t-)-\widehat{X}(t-)>z\}} \int_{(0,\infty)} 1_{(x+\widehat{S}(t-)-\widehat{X}(t-),\infty)}(\epsilon)\nu(d\epsilon)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\int_0^{\sigma\wedge\widehat{\tau}_y\wedge\tau} dt 1_{\{\widehat{S}(t-)-\widehat{X}(t-)>z\}} \nu(x + \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-), \infty)\Big) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\sigma \ge \tau, \widehat{\tau}_y \ge \tau)\phi(q)}{q} \int_0^\infty 1_{(z,\infty)}(u)\nu(x + u, \infty)e^{-\phi(q)u}\, du \\
&= \frac{\mathbb{P}(\sigma \ge \tau, \widehat{\tau}_y \ge \tau)\phi(q)}{q} \int_z^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(x + u, \infty)\, du\ .
\end{aligned}
$$

Time smo dobili sljedeći rezultat.

Propozicija 3.1.3 *Za x, y, $z > 0$ vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \le y, \widehat{S}(\sigma-) - \widehat{X}(\sigma-) > z, J_\tau > x, \sigma \le \tau) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\sigma \ge \tau, \widehat{\tau}_y \ge \tau)\phi(q)}{q} \int_z^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(x + u, \infty) du\ . \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

5. korak:

Sada iz zajedničke distribucije koju smo dobili u *4. koraku* odredimo $\mathbb{P}(\sigma \le \tau)$, a potom i traženu distribuciju preskoka, $\mathbb{P}(J_\tau > x | \sigma \le \tau)$.

Stoga u gornjoj propoziciji pustimo $x \to 0$, $y \to \infty$ i $z \to 0$. Time (zbog neprekidnosti vjerojatnosti) s lijeve strane dobivamo

$$
\lim_{x\to 0, y\to\infty, z\to 0} P(\widehat{S}(\sigma-) \le y, \widehat{S}(\sigma-) - \widehat{X}(\sigma-) > z, J_\tau > x, \sigma \le \tau) = \mathbb{P}(\sigma \le \tau)\ ,
$$

što odmah slijedi iz definicije od $\widehat{S}(t)$, J_τ i $\widehat{X}(t) - \widehat{S}(t)$.

S desne strane pak imamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0, y\to\infty, z\to 0} \frac{\mathbb{P}(\sigma \geq \tau, \widehat{\tau}_y \geq \tau)\phi(q)}{q} \int_z^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(x+u,\infty)\,du \\
&= \frac{\mathbb{P}(\sigma \geq \tau)\phi(q)}{q} \lim_{x\to 0} \int_0^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(x+u,\infty)\,du \\
&= \frac{\mathbb{P}(\sigma \geq \tau)\phi(q)}{q} \int_0^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(u,\infty)\,du\ .
\end{aligned}$$

Probajmo sada zapisati ovu vjerojatnost, $\mathbb{P}(\sigma \leq \tau)$, u obliku koji ćemo moći usporediti s rezultatom iz Korolara 4.5. iz [HPSV1] za $\mathbb{P}(\sigma < \infty)$.

Dakle, prilikom računanja te vjerojatnosti dobili smo

$$\mathbb{P}(\sigma < \tau) = \frac{\mathbb{P}(\sigma \geq \tau)\phi(q)}{q} \int_0^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(u,\infty)\,du\ .$$

No, primjenom Fubinijevog teorema dobivamo

$$\int_0^\infty e^{-\phi(q)x}\nu(x,\infty)dx = \frac{1}{\phi(q)} \cdot \int_0^\infty (1-e^{-\phi(q)x})\nu(dx)$$

pa je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sigma < \tau) &= (1-\mathbb{P}(\sigma < \tau))\frac{1}{q}\int_0^\infty (1-e^{-\phi(q)x})\nu(dx) = \\
&= (1-\mathbb{P}(\sigma < \tau))b\ ,
\end{aligned}$$

gdje smo koristili oznaku

$$\begin{aligned}
b &:= \frac{1}{q}\int_0^\infty (1-e^{-\phi(q)x})\nu(dx) = \frac{1}{q}\int_0^\infty \mathbb{P}(S(\tau) \leq x)\nu(dx) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{0\leq t\leq\tau} 1_{\{\Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\}}\Big)\ .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Uočimo da pretposljednji redak slijedi iz činjenice da je $S(\tau) \sim Exp(\phi(q))$, a posljednji iz [HPSV1, Lema 3.1.]. Također uočimo da je b očekivani broj trenutaka kada se postigne novi supremum procesa $\widehat{X}$ zbog skoka subordinatora C do trenutka τ.

Tada je

$$\mathbb{P}(\sigma < \tau) = (1-\mathbb{P}(\sigma < \tau)) \cdot b$$

pa je

$$\mathbb{P}(\sigma < \tau) = \frac{b}{b+1}\ ,$$

gdje je b definiran kao u (3.11).

S druge strane, ako označimo sa a očekivani broj trenutaka kada se postigne novi supremum procesa $\widehat{X}$ zbog skoka subordinatora C (na čitavoj vremenskoj skali), tj.

$$a := \mathbb{E}\,\Big(\sum_{0\le t<\infty} 1_{\{\Delta C(t)>\widehat{S}(t-)-\widehat{X}(t-)\}}\Big) = \frac{\mathbb{E}\,C(1)}{c-\mathbb{E}\,C(1)}\ ,$$

onda je, koristeći Korolar 4.5. iz [HPSV1],

$$\frac{a}{a+1} = \frac{\frac{\mathbb{E}\,C(1)}{c-\mathbb{E}\,C(1)}}{\frac{\mathbb{E}\,C(1)}{c-\mathbb{E}\,C(1)}+1} = \frac{\mathbb{E}\,C(1)}{c} = \mathbb{P}(\sigma<\infty)\ .$$

Dakle, dobili smo posve isti oblik odnosa vjerojatnosti da σ bude manji od nekog vremena sa očekivanim brojem trenutaka kada se postigne novi supremum zbog skoka subordinatora C do tog trenutka.

Sada možemo odrediti i distribuciju preskoka, također koristeći rezultat iz Propozicije 3.1.3., tako da pustimo $y\to\infty$ i $z\to 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J_\tau>x,\sigma\le\tau) &= \lim_{y\to\infty,z\to 0}\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-)\le y,\widehat{S}(\sigma-)-\widehat{X}(\sigma-)>z,J_\tau>x,\sigma\le\tau)\\ &= \frac{\mathbb{P}(\sigma\ge\tau)\phi(q)}{q}\int_0^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(x+u,\infty)\,du\ .\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J_\tau>x|\sigma\le\tau) &= \frac{\mathbb{P}(J_\tau>x,\sigma\le\tau)}{\mathbb{P}(\sigma\le\tau)}\\ &= \frac{\frac{\mathbb{P}(\sigma\ge\tau)\phi(q)}{q}\int_0^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(x+u,\infty)\,du}{\frac{\mathbb{P}(\sigma\ge\tau)\phi(q)}{q}\int_0^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(u,\infty)\,du}\\ &= \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(u,\infty)du}\int_0^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(x+u,\infty)\,du\end{aligned}$$

Time smo dobili sljedeći rezultat.

Korolar 3.1.4 *Vrijedi*

$$\mathbb{P}(\sigma\le\tau) = \mathbb{P}(\sigma>\tau)\frac{\phi(q)}{q}\int_0^\infty e^{-\phi(q)u}\nu(u,\infty)du\ , \tag{3.12}$$

tj.

$$\mathbb{P}(\sigma\le\tau) = \frac{\mathbb{E}\,\big(\sum_{0\le t\le\tau}1_{\{\Delta C(t)>\widehat{S}(t-)-\widehat{X}(t-)\}}\big)}{\mathbb{E}\,\big(\sum_{0\le t\le\tau}1_{\{\Delta C(t)>\widehat{S}(t-)-\widehat{X}(t-)\}}\big)+1}\ . \tag{3.13}$$

Također, uvjetna distribucija preskoka J_τ, uz uvjet da je $\{\sigma \le \tau\}$, dana je sa

$$\mathbb{P}(J_\tau > x | \sigma \le \tau) = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\phi(q)u} \nu(u,\infty)\, du} \int_x^\infty e^{-\phi(q)(u-x)} \nu(u,\infty)\, du \ . \tag{3.14}$$

Ovaj rezultat možemo usporediti sa rezultatom dobivenim u [HPSV1, Korolar 4.5.], tj.

$$\mathbb{P}(\sigma < \infty) = \mathbb{P}(\sigma = \infty) \frac{1}{d} \int_0^\infty \nu(u,\infty)\, du \ ,$$

tj.

$$\mathbb{P}(\sigma < \infty) = \frac{\mathbb{E}\left(\sum_{0 \le t < \infty} 1_{\{\Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\}} \right)}{\mathbb{E}\left(\sum_{0 \le t < \infty} 1_{\{\Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\}} \right) + 1}$$

i

$$\mathbb{P}(J > x | \sigma < \infty) = \frac{1}{\int_0^\infty \nu(u,\infty)\, du} \int_x^\infty \nu(u,\infty)\, du = 1 - H(x) \ .$$

Također uočimo da kada u Korolaru 3.1.4. pustimo $q \to 0$ (budući da je $\tau \sim Exp(q)$, tada $\tau \to \infty$), onda dobivamo upravo gornji rezultat, budući da je $\lim_{q \to 0} e^{-\phi(q)u} = e^{\phi(0)u} = e^{0 \cdot u} = 1$, a $\lim_{q \to 0} \frac{\phi(q)}{q} = \phi'(0) = \frac{1}{\psi'(0)} =: \frac{1}{d}$.

6. korak:

Pogledajmo možemo li, kao u [HPSV1, Korolar 4.6.], iz dobivenog zaključiti nezavisnost događaja $\{\sigma < \tau\}$ i slučajne varijable $\widehat{S}(\sigma-)$?

Što bi značila nezavisnost događaja $\{\sigma < \infty\}$ i slučajne varijable $\widehat{S}(\sigma-)$ dobivena u Korolaru 4.6. u našem slučaju? Da distribucija supremuma do trenutka σ ne ovisi o tome je li se σ dogodio prije ili poslije nekog eksponencijalnog vremena τ.

Pogledajmo prvo zajedničku distribuciju $\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \le y, \sigma \le \tau)$, tako da pustimo $x \to 0$ i $z \to 0$ u Propoziciji 3.1.3.:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \le y, \sigma \le \tau) &= \mathbb{P}(\sigma \ge \tau, \widehat{\tau}_y \ge \tau) \frac{\phi(q)}{q} \int_0^\infty e^{-\phi(q)u} \nu(u,\infty)\, du \\ &= \frac{\mathbb{P}(\sigma > \tau, \widehat{\tau}_y \ge \tau)\phi(q)}{q} I = \frac{\mathbb{P}(\sigma > \tau, \widehat{S}(\tau-) \le y)\phi(q)}{q} I \ , \end{aligned}$$

gdje smo označili

$$I := \int_0^\infty e^{-\phi(q)u} \nu(u,\infty)\, du \ .$$

Nadalje, ako tražimo distribuciju od $\widehat{S}(\sigma-)$, onda gledamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \leq y) &= \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \leq y, \sigma \leq \tau) + \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \leq y, \sigma > \tau) = \\ &= \frac{\mathbb{P}(\sigma > \tau, \widehat{S}(\tau-) \leq y)\phi(q)}{q} I + \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \leq y, \sigma > \tau) \ ,\end{aligned}$$

što ne možemo grupirati kao u navedenom [HPSV1, Korolar 4.6.] (obzirom da ovdje imamo dvije različite slučajne varijable, $\widehat{S}(\sigma-)$ i $\widehat{S}(\tau-)$), jedino bismo mogli zaspisati drugi dio kao

$$\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \leq y, \sigma > \tau) = \mathbb{P}(\widehat{S}(\tau-) \leq y, \widehat{S}(\tau, \sigma-) \leq y, \sigma > \tau) \ ,$$

gdje koristimo oznaku $\widehat{S}(\tau, \sigma-) = \sup_{\tau \leq t < \sigma} \widehat{X}(t)$. To pak možemo raspisati uvjetno na poziciju $\widehat{S}(\tau)$, međutim, time si nećemo olakšati račun.

No, kako je τ krajnje vrijeme, tj. proces promatramo do tog vremena i poslije ga jednostavno 'odrežemo', nama zapravo treba $\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-)$. Pa pokušajmo sa $\{\sigma \leq \tau\}$ i slučajnom varijablom $\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-)$ (upravo onam je taj dio na $[\tau, \sigma]$ bio problematičan u slučaju $\sigma > \tau$).

Dakle,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-) \leq y, \sigma \leq \tau) &= \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \leq y, \sigma \leq \tau) \\ &= \mathbb{P}(\sigma > \tau, \widehat{S}(\tau) \leq y) \frac{\phi(q)}{q} I \ ,\end{aligned}$$

a s druge strane je

$$\mathbb{P}(\sigma \leq \tau) = \frac{\frac{\phi(q)}{q} I}{1 + \frac{\phi(q)}{q} I}$$

i

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-) \leq y) &= \mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-) \leq y, \sigma \leq \tau) + \mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-) \leq y, \sigma > \tau) \\ &= \mathbb{P}(\sigma > \tau, \widehat{S}(\tau-) \leq y) \frac{\phi(q)}{q} I + \mathbb{P}(\widehat{S}(\tau-) \leq y, \sigma > \tau) \\ &= (1 + \frac{\phi(q)}{q} I) \mathbb{P}(\widehat{S}(\tau-) \leq y, \sigma > \tau) \ .\end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-) \leq y) \cdot \mathbb{P}(\sigma \leq \tau) &= (1 + \frac{\phi(q)}{q} I) \mathbb{P}(\widehat{S}(\tau-) \leq y, \sigma > \tau) \frac{\frac{\phi(q)}{q} I}{1 + \frac{\phi(q)}{q} I} \\ &= \mathbb{P}(\widehat{S}(\tau-) \leq y, \sigma > \tau) \frac{\phi(q)}{q} I \\ &= \mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-) \leq y, \sigma \leq \tau) \ ,\end{aligned}$$

tj. dobili smo nezavisnost događaja $\{\sigma \leq \tau\}$ i slučajne varijable $\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-)$.

7. korak:

Uočimo također da sad možemo provesti konstrukciju supremuma procesa $\widehat{X}$ do trenutka τ preko modificiranih ljestvičastih visina,

$$\begin{aligned}
{L_0}^\tau &:= \widehat{S}((\sigma_1 \wedge \tau)-) \ , \\
{J_1}^\tau &:= \widehat{S}(\sigma_1 \wedge \tau) - \widehat{S}((\sigma_1 \wedge \tau)-) \ , \\
{L_1}^\tau &:= \widehat{S}((\sigma_2 \wedge \tau)-) - \widehat{S}(\sigma_1 \wedge \tau) \ \text{ na } \ \{\sigma_1 \leq \tau\} \ ,
\end{aligned}$$

sve do $J^\tau_{N_\tau}$ i $L^\tau_{N_\tau}$, gdje je

$$N_\tau := \max\{n \in \mathbb{N} \ : \ \sigma_n \leq \tau\} \ .$$

Tada, koristeći jako Markovljevo svojstvo i zaboravljivost eksponencijalne distribucije, dobivamo da je $\mathbb{P}(\sigma_n \leq \tau) = {p_\tau}^n$ (gdje je $p_\tau := \mathbb{P}(\sigma < \tau)$, a ta nam je vjerojatnost poznata iz Korolara 3.1.4.) te da N_τ ima geometrijsku distribuciju sa parametrom $q_\tau := 1 - p_\tau$.

Također je jasno da možemo zapisati

$$\widehat{S}(\tau) = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \widehat{X}(t) = {L_0}^\tau + {J_1}^\tau + {L_1}^\tau + \cdots + {J_{N_\tau}}^\tau + {L_{N_\tau}}^\tau \tag{3.15}$$

pa je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widehat{S}(\tau) \leq x) &= \mathbb{P}({L_0}^\tau + {J_1}^\tau + {L_1}^\tau + \cdots + {J_{N_\tau}}^\tau + {L_{N_\tau}}^\tau \leq x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}({L_0}^\tau + {J_1}^\tau + {L_1}^\tau + \cdots + {J_{N_\tau}}^\tau + {L_n}^\tau \leq x, N_\tau = n) \ .
\end{aligned}$$

Također dobivamo, koristeći nezavisnost pokazanu u *6. koraku*, da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}({L_0}^\tau \leq x, N_\tau = 0) &= \mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-) \leq x, \sigma \geq \tau) \\
&= \mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-) \leq x) \cdot \mathbb{P}(\sigma \geq \tau) = \widetilde{G}_\tau \cdot (1 - p_\tau) \ ,
\end{aligned}$$

gdje smo sa $\widetilde{G}_\tau$ označili funkciju distribucije od $\widehat{S}(\sigma \wedge \tau-)$, a $p_\tau = \mathbb{P}(\sigma < \tau)$ je kao prije.

Osim toga je, ponovno zbog pokazane nezavisnosti,

$$\begin{aligned}
P({J_1}^\tau \leq x, {L_0}^\tau \leq y | \sigma < \tau) &= P({J_1}^\tau \leq x | \sigma < \tau) \cdot \mathbb{P}({L_0}^\tau \leq y | \sigma < \tau) \\
&= G_\tau(y) \cdot H_\tau(x) \ ,
\end{aligned}$$

gdje je H_τ definiran kao

$$H_\tau(x) = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\phi(q)u} \nu(u, \infty) du} \int_0^x e^{-\phi(q)u} \nu(u, \infty) \, du \ .$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J_1{}^\tau \le x, L_0{}^\tau \le y, \sigma < \tau) &= P(J_1{}^\tau \le x, L_0{}^\tau \le y | \sigma < \tau)\mathbb{P}(\sigma < \tau) \\ &= G_\tau(y)(1 - H_\tau(x))p_\tau\end{aligned}$$

pa, koristeći jako Markovljevo svojstvo u σ_n, dobivamo

$$\mathbb{P}(L_0{}^\tau + J_1{}^\tau + L_1{}^\tau + \dots J_{N_\tau}{}^\tau + L_{N_\tau}{}^\tau \le x, N_\tau = n) = (1 - p_\tau)p_\tau{}^n(\widetilde{G}_\tau^{(n+1)*} * H_\tau{}^{n*})(x) \ , \tag{3.16}$$

odnosno sljedeći rezultat.

Teorem 3.1.5 *Za* $x \ge 0$

$$\mathbb{P}(\widehat{S}(\tau) \le x) = (1 - p_\tau) \sum_{n=0}^{\infty} p_\tau{}^n(\widetilde{G}_\tau^{(n+1)*} * H_\tau{}^{n*})(x) \ . \tag{3.17}$$

3.2 Metoda Laplaceove transformacije

Ideja dobivanja Pollaczek-Khinchinove formule preko metode Laplaceove transformacije potječe od *Furrera* (za detalje vidjeti [Furr]). Podsjetimo se, on je promatrao proces rizika

$$Q(t) = x + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k + \eta Z_\alpha(t) \ , \quad t \ge 0 \ ,$$

gdje je $\eta > 0$ i Z_α α-stabilan Lévyjev proces sa $1 < \alpha < 2$, nezavisan od procesa ukupnih zahtjeva za isplatom. Kako je proces $(Q(t) - x \ : \ t \ge 0)$ homogen proces sa nezavisnim prirastima i bez pozitivnih skokova, možemo ga okarakterizirati sa

$$\mathbb{E}\,[e^{sY(t)}] = e^{t\xi(s)} \ , \quad \mathrm{Re}\{s\} \ge 0 \ ,$$

gdje je, prema Lévy-Khinchinovoj reprezentaciji

$$\xi(s) = cs + \frac{\sigma^2 s^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} (e^{su} - 1)\Pi_1(du) + \int_{-\infty}^{0} (e^{su} - 1 - su)\Pi_2(du) \ ,$$

$c \in \mathbb{R}$, $\sigma \ge 0$, Π_1 i Π_2 mjere na $(-\infty, 0)$ takve da je $\int_{-1}^0 |u|\Pi_1(du) < \infty$ i $\int_{-1}^0 u^2\Pi_2(du) < \infty$.

Koristio je rezultat *Zolotareva*(1964.) naveden u Propoziciji 1.1.1. Označimo redom integrale u gornjoj Lévy-Khinchinovoj reprezentaciji sa I_1 i I_2. Za ovaj proces koji je Furrer promatrao je $\sigma = 0$, $\Pi_1(u, 0) = \lambda(1 - F(-u))$, $u \le 0$ i $\Pi_2(du) = \frac{q}{|u|^{1+\alpha}} 1_{(-\infty,0)}(u)\, du$, $q = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)}$. Integrirani rep distribucije visina skokova je definiran standardno, označimo ga sa F_I, a sa $\widehat{f_I}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, dF_I(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-su} \overline{F}(u)\, du$ njegovu Laplaceovu transformaciju. Sada integrale I_1 i I_2 možemo zapisati kao

$$I_1 = -\lambda\mu s \widehat{f_I}(s) \quad \text{i} \quad I_2 = s^\alpha \ ,$$

tako da smo u ukupnom Laplaceovom eksponentu od Q dobili razdvojene dijelove koji se tiču procesa ukupnih zahtjeva za isplatom i procesa perturbacije (što je posljedica nezavisnosti). Tada je

$$\xi(s) = cs + I_1 + I_2 = s \cdot (c - \lambda\mu \widehat{f}_I(s) + s^{\widehat{\alpha}}) \ , \ \widehat{\alpha} = \alpha - 1$$

pa, prema gornjoj propoziciji, imamo

$$\frac{\gamma s}{\xi(s)} = \frac{\gamma}{c - \lambda\mu \widehat{f}_I(s) + s^{\widehat{\alpha}}} = (1-\rho)\frac{\frac{c}{c+s^{\widehat{\alpha}}}}{1 - \rho \widehat{f}_I(s)\frac{c}{c+s^{\widehat{\alpha}}}} \ .$$

Sada u $\widehat{f}_I$ prepoznamo Laplaceovu transformaciju integriranog repa distribucije visina zahtjeva za isplatom, no postavlja se pitanje - može li se član $\frac{c}{c+s^{\widehat{\alpha}}}$ prikazati kao Laplaceova transformacija neke vjerojatnosne distribucije? Ta funkcija je potpuno monotona pa je Laplaceova transformacija neke distribucije U na $\mathbb{R}$ i pokazuje se da je ona u vezi sa Mittag-Lefflerovom funkcijom.

Slično, u našem modelu, ali na $(0, \infty)$, imamo sljedeće:

$$\mathbb{E}\left[\exp\{\beta I_X(\infty)\}\right] = \psi_X'(0+)\frac{\beta}{\psi_X(\beta)} = d\frac{\beta}{\psi_X(\beta)}$$

te analogno za Y

$$\mathbb{E}\left[\exp\{\beta I_Y(\infty)\}\right] = \psi_Y'(0+)\frac{\beta}{\psi_Y(\beta)} = c\frac{\beta}{\psi_Y(\beta)} \ .$$

Ako sa G označimo funkciju distribucije od $\sup_{0\le t<\infty}(-ct - Z(t)) = \sup_{0\le t<\infty} Y(t)$ i sa H integrirani rep $H(x) = \frac{1}{\mathbb{E}\,C(1)}\int_0^x \nu(y,\infty)\,dy$, onda su im Laplaceove transformacije dane sa

$$\mathcal{L}G(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x} G(dx) = c\frac{\beta}{\psi_Y(\beta)} \quad \text{i} \quad \mathcal{L}H(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x} H(dx) = \frac{1}{\mathbb{E}\,C(1)}\psi_C(\beta) \ .$$

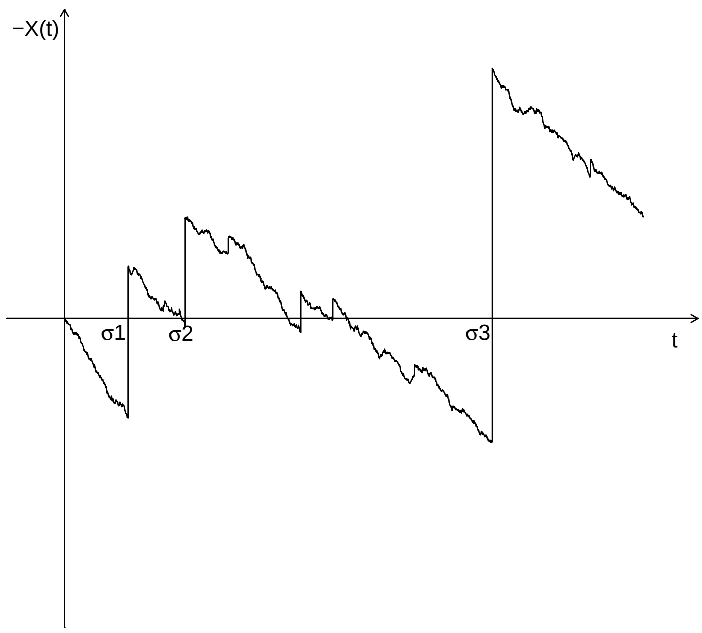
Sada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\{\beta I_X(\infty)\}\right] &= d\frac{\beta}{\psi_X(\beta)} = d\frac{1}{\psi_Y(\beta)/\beta - \psi_C(\beta)/\beta} \\
&= d\frac{1}{c/\mathcal{L}G(\beta) - \mathbb{E}\,C(1)\mathcal{L}H(\beta)} = \frac{d}{c}\frac{\mathcal{L}G(\beta)}{1 - \rho\mathcal{L}G(\beta)\mathcal{L}H(\beta)} \\
&= (1-\rho)\mathcal{L}G(\beta)\sum_{n=0}^{\infty}(\rho\mathcal{L}G(\beta)\mathcal{L}H(\beta))^n \ ,
\end{aligned}$$

što, nakon invertiranja Laplaceove transformacije, daje Pollaczek-Khinchinov oblik rezultata

$$\theta(x) = \mathbb{P}(I(\infty) \ge -x) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(G^{(n+1)*} * H^{n*})(x) \ . \tag{3.18}$$

U [HPSV1, Korolar 4.10.] pomoću ovog računa uspostavljena je jednakost $G = \widetilde{G}$, a mi ćemo pogledati vrijedi li ona i na $[0, \tau]$.



Slika 3.2: *Dualni generalizirani proces rizika* $\widehat{X}(t) = -ct + C(t) - Z(t)$*, gdje je* C *složeni Poissonov proces, a* Z *Brownovo gibanje, s označenim trenucima* σ_i

U našem je slučaju na $[0, \tau]$ Laplaceova transformacija negativnog infimuma čitavog procesa X do trenutka τ (odnosno, supremuma dualnog procesa $\widehat{X}$ do trenutka τ) jednaka

$$\mathbb{E}\left[e^{\beta I(\tau)}\right] = \frac{q(\phi_X(q) - \beta)}{\phi_X(q)(q - \psi_X(\beta))} = \frac{q}{\phi_X(q)} \cdot \frac{1}{\frac{\psi_Y(\beta) - q}{\beta - \phi_X(q)} - \frac{\psi_C(\beta)}{\beta - \phi_X(q)}} .$$

Ako sa G_τ označimo funkciju distribucije od $\sup_{0 \le t \le \tau}(-ct - Z(t)) = \sup_{0 \le t \le \tau}(-Y(t))$, onda (obzirom da je i to spektralno negativan Lévyjev proces) znamo i njenu Laplaceovu transformaciju

$$\mathcal{L}G_\tau(\beta) = \frac{q(\phi_Y(q) - \beta)}{\phi_Y(q)(q - \psi_Y(\beta))} .$$

Sjetimo se kako je H_τ definiran:

$$\begin{aligned} H_\tau(x) &= \mathbb{P}(J_\tau \le x | \sigma \le \tau) = 1 - \mathbb{P}(J_\tau > x | \sigma \le \tau) \\ &= 1 - \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\phi(q)u} \nu(u,\infty)} \int_x^\infty e^{-\phi(q)(u-x)} \nu(u,\infty)\, du \ . \end{aligned}$$

Stoga je gustoća $h_\tau(x)$ od $H_\tau(dx)$ dana sa

$$\begin{aligned} h_\tau(x) &= -\frac{1}{k} \cdot \frac{d}{dx} \big(e^{\phi(q)x} \int_x^\infty e^{-\phi(q)u} \nu(u,\infty)\, du \big) \\ &= -\frac{1}{k} \cdot \big(e^{\phi(q)x} \phi(q) \int_x^\infty e^{-\phi(q)u} \nu(u,\infty)\, du - \nu(x,\infty) \big) \end{aligned}$$

gdje za k, koristeći Fubinijev teorem, dobivamo

$$k := \int_0^\infty e^{-\phi(q)u} \nu(u,\infty)\, du = \frac{1}{\phi(q)} \int_0^\infty (1 - e^{-\phi(q)y})\, \nu(dy) = \frac{1}{\phi(q)} \psi_C(\phi(q)) \ .$$

Lako se provjeri da je h_τ dobro definirana vjerojatnosna funkcija gustoće, a Laplaceova transformacija mjere pridružene H_τ dana je sa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}H_\tau(\beta) &= \int_0^\infty e^{-\beta x} H_\tau(dx) \\ &= \frac{1}{k} \int_0^\infty e^{-\beta x} \nu(x,\infty)\, dx - \frac{1}{k} \int_0^\infty e^{(\phi(q)-\beta)x} \phi(q) \int_x^\infty e^{-\phi(q)u} \nu(u,\infty)\, du\, dx \\ &= \frac{1}{k} \frac{\psi_C(\beta)}{\beta} - \frac{1}{k} \int_0^\infty e^{-\phi(q)u} \nu(u,\infty) \frac{\phi(q)}{\phi(q)-\beta} (e^{(\phi(q)-\beta)u} - 1)\, du \\ &= \frac{1}{k} \frac{\psi_C(\beta)}{\beta} - \frac{1}{k} \frac{\phi(q)}{\phi(q)-\beta} \Big(\frac{\psi_C(\beta)}{\beta} - \frac{\psi_C(\phi(q))}{\phi(q)} \Big) \\ &= \frac{\phi(q)}{\psi_C(\phi(q))} \cdot \frac{\psi_C(\phi(q)) - \psi_C(\beta)}{\phi(q) - \beta} \ . \end{aligned}$$

Uočimo da u gornjem računu drugi redak slijedi direktno uvrštavanjem h_τ, treći primjenom Fubinijevog teorema te računa analognog kao u pojednostavljenju konstante k, a posljednji uvrštavanjem k te prikladnim kraćenjem.

Pustimo li $q \to 0$, lako se vidi da se ovaj račun slaže sa onim za $(0,\infty)$, budući da je

$$\lim_{q\to 0} \frac{\phi(q)}{\psi_C(\phi(q))} \cdot \frac{\psi_C(\phi(q)) - \psi_C(\beta)}{\phi(q) - \beta} = \frac{1}{\mathbb{E}\, C(1)} \cdot \frac{\psi_C(\beta)}{\beta} = \mathcal{L}H(\beta) \ ,$$

gdje smo koristili da je

$$\lim_{q\to 0} \frac{\phi(q)}{\psi_C(\phi(q))} = \lim_{q\to 0} \frac{\phi'(q)}{\psi_C'(\phi(q)) \cdot \phi'(q)} = \lim_{q\to 0} \frac{1}{\psi_C'(\phi(q))} = \frac{1}{\psi_C'(0)} = \frac{1}{\mathbb{E}\, C(1)} \ .$$

Isto je tako za $\mathcal{L}G_\tau$

$$\lim_{q\to 0} \frac{q}{\phi_Y(q)} \cdot \frac{(\phi_Y(q)-\beta)}{(q-\psi_Y(\beta))} = c\cdot \frac{\beta}{\psi_Y(\beta)} = \mathcal{L}G(\beta)\ ,$$

budući da je

$$\lim_{q\to 0} \frac{q}{\phi_Y(q)} = \lim_{q\to 0} \frac{1}{\phi_Y'(q)} = \psi_Y'(0) = \mathbb{E}\, Y(1) = c$$

(gdje smo koristili $\phi'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{\psi(\phi(x))} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\psi(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\psi(y)}{y}} = \frac{1}{\psi'(0)}$).

Sada želimo rastaviti

$$\mathbb{E}\,[e^{\beta I(\tau)}] = \frac{q}{\phi_X(q)} \cdot \frac{1}{\frac{\psi_Y(\beta)-q}{\beta-\phi_X(q)} - \frac{\psi_C(\beta)}{\beta-\phi_X(q)}}$$

kako bi u sebi sadržavao

$$\mathcal{L}G_\tau(\beta) = \frac{q(\phi_Y(q)-\beta)}{\phi_Y(q)(q-\psi_Y(\beta))}$$

i

$$\mathcal{L}H_\tau(\beta) = \frac{\phi(q)}{\psi_C(\phi(q))} \cdot \frac{\psi_C(\phi(q)) - \psi_C(\beta)}{\phi(q)-\beta}\ .$$

Možemo lijevu stranu ($\mathbb{E}\,[e^{\beta I(\tau)}]$) pokušati rastaviti kao

$$\frac{q}{\phi_X(q)} \cdot \frac{1}{\frac{\psi_Y(\beta)-q}{\beta-\phi_X(q)} - \frac{\psi_C(\beta)}{\beta-\phi_X(q)}} = \frac{q}{\phi_X(q)} \cdot \frac{1}{\frac{\psi_Y(\beta)-q}{\beta-\phi(q)} - \frac{\psi_C(\beta)}{\beta-\phi(q)}} = \frac{q}{\phi_X(q)} \cdot \frac{1}{\frac{\psi_Y(\beta)-q-\psi_C(\phi(q))}{\beta-\phi(q)} - \frac{\psi_C(\phi(q))-\psi_C(\beta)}{\beta-\phi(q)}}\ ,$$

tako da je drugi član u nazivniku upravo

$$\frac{\psi_C(\phi(q))}{\phi(q)} \cdot \mathcal{L}H_\tau(\beta) = \text{konst} \cdot \mathcal{L}H_\tau(\beta)\ ,$$

a prvi pokušamo zapisati kao $a \cdot \frac{1}{\mathcal{L}G_\tau}$ tako da bi dobili oblik

$$\begin{aligned}\frac{1}{a\cdot \frac{1}{\mathcal{L}G_\tau(\beta)} - \mathcal{L}H_\tau(\beta)} &= \frac{\mathcal{L}G_\tau(\beta)/a}{1-(1/a)\mathcal{L}G_\tau(\beta)\cdot \mathcal{L}H_\tau(\beta)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1/a)^{n+1} \cdot (\mathcal{L}G_\tau(\beta))^{n+1} \cdot (\mathcal{L}H_\tau(\beta))^n\ .\end{aligned}$$

No, za a dobivamo složen izraz, koji nije konstantan, već ovisi o β, dakle, $a = a_\beta$. To znači da ovako ne možemo dobiti željenu Pollaczek-Khinchinovu formulu. Možemo lijevu stranu pokušati rastaviti i kao

$$\frac{q}{\phi_X(q)} \cdot \frac{1}{\frac{\psi_Y(\beta)-q}{\beta-\phi_X(q)} - \frac{\psi_C(\beta)}{\beta-\phi_X(q)}} = \frac{q}{\phi_X(q)} \cdot \frac{1}{\frac{\psi_Y(\beta)-q}{\beta-\phi(q)} - \frac{\psi_C(\beta)}{\beta-\phi(q)}}\ ,$$

tako da je prvi član u nazivniku oblika $a \cdot \frac{1}{\mathcal{L}G_\tau(\beta)}$, a drugi član $b \cdot \mathcal{L}H_\tau(\beta)$, no i u tom ćemo slučaju dobiti da je $a = a(\beta)$ i $b = b(\beta)$. To nam sugerira da ne možemo dobiti rezultat $G_\tau = \widetilde{G}_\tau$, gdje je, sjetimo se, G_τ funkcija distribucije od $\sup_{0\le t\le\tau}(-ct - Z(t))$, a $\widetilde{G}_\tau$ funkcija distribucije od $\sup_{0\le t<\sigma\wedge\tau}(-ct + C(t) - Z(t))$. To se direktno vidi i na kontraprimjeru koji dobijemo kad pokušamo uvrstiti konkretne procese - Brownovo gibanje za perturbaciju i gamma proces kao subordinator.

Primjer 3.2.1 Neka je Y Brownovo gibanje, a subordinator C gamma proces. Tada su njihovi Laplaceovi eksponenti dani sa

$$\begin{aligned}
&\psi_Y(\beta) = \beta^2 \ , \\
&\psi_C(\beta) = a\log(1+\beta/b) \ , a\, b > 0 \ \text{ i} \\
&\psi_X(\beta) = c\beta - a\log(1+\beta/b) + \beta^2 \ .
\end{aligned}$$

Pogledamo li kvocijent lijeve i desne strane (koju želimo dobiti), rezultat nije konstanta, nego neka funkcija ovisna o β. Naime, trebali bismo dobiti nekakvu konstantu k_1 takvu da vrijedi

$$\frac{\mathbb{E}\,[e^{\beta I_X(\tau)}]}{\mathcal{L}G_\tau/(1-k_2\mathcal{L}G_\tau\mathcal{L}H_\tau)} = \frac{q(p-x)\cdot(1-k_2\mathcal{L}G_\tau\mathcal{L}H_\tau)}{p(q-\psi_X)\cdot\mathcal{L}G_\tau} = k_1 \ ,$$

gdje je k_2 neka druga konstanta koju koristimo samo radi jednostavnosti zapisa, kao i oznake $p := \phi_X(q)$ i $py := \phi_Y(q)$ te $k := k_2$. No, kada uvrstimo konkretne vrijednosti za $\psi_Y(x) = x^2$, $\psi_C(x) = 3\log(1+x/5)$ i $\psi_X = 7x - 3\log(1+x/5) + x^2$ kao gore, najjednostavniji oblik koji dobivamo je

$$\begin{aligned}
(p-x)\cdot(1 &- 1/3\cdot k\cdot q/py\cdot(py-x)/(q-x^2)\cdot p/\log(1+1/5\cdot p) \\
&\cdot(3\cdot\log(1+1/5\cdot py) - 3\cdot\log(1+1/5\cdot x)) \\
&/(p-x))/p/(q-7\cdot x-3\cdot\log(1+1/5\cdot x)+x^2)\cdot py/(py-x)\cdot(q-x^2) \\
&=: k_1(x) \ ,
\end{aligned}$$

dakle, ne radi se o konstanti, već o funkciji ovisnoj o x. Za razne oblike pokušaja pojednostavljenja ovog izraza vidi priložene rezultate u Matlabu. Ovo nam, dakle, pokazuje da rezultat $G = \widetilde{G}$ ne vrijedi na $[0,\tau]$!

3.3 Oslabljenje početnih pretpostavki

Promatrajmo sada (općeniti) Lévyjev proces Y i nezavisan s njime subordinator C (označimo mu opet Lévyjevu mjeru sa ν) i definirajmo $X = Y - C$. Opet ćemo gledati vremena kada se postigne novi supremum dualnog procesa $\widehat{X}$ zbog skoka subordinatora C. Stoga opet definiramo

$$\sigma = \inf\{t > 0 \ : \ \Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\}$$

i analogno sukcesivna vremena postizanja novog supremuma zbog skoka subordinatora C, označimo ih opet sa σ_i, $i \in \mathbb{N}$. Ukoliko izostavimo pretpostavke koje smo imali do sada, a to je uvjet čistog profita te uvjeti o konačnosti očekivanja procesa X, postavlja se pitanje: može li se i kako napraviti dekompozicija u trenucima σ_i kako bi se dobio rezultat Pollaczek-Khinchinovog tipa? Naime, obzirom da skup vremena $\{\sigma_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ ne mora biti diskretan, bitno je pitanje odrediti nužne i dovoljne uvjete za to u ovakvom općenitom modelu.

Prvo što znamo, koristeći Blumenthalov 0-1 zakon, jest da je $\mathbb{P}(\sigma = 0) = 0$ ili 1. Ako je $\sigma > 0$ g.s., onda je σ zaista prvo vrijeme kada se postigne novi supremum od $\widehat{X}$ zbog skoka subordinatora C, a ako je $\sigma = 0$ g.s., tada je broj trenutaka kada se postigne novi supremum od $\widehat{X}$ zbog skoka od C beskonačan i 0 je zapravo gomilišna točka takvih vremena. U ovakvom su okruženju *Song* i *Vondraček* dali nužne i dovoljne uvjete da je $\sigma > 0$ g.s. Neka je, dakle, ν Levyjeva mjera subordinatora C, a Υ funkcija obnavljanja definirana kao u (2.18). Tada vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 3.3.1 *([SV, Teorem 2.1.]) Pretpostavimo da je 0 regularna za* $(0,\infty)$ *obzirom na proces* X*. Tada je ekvivalentno:*

(a) $\sigma > 0$ *g.s.,*

(b) $\int_0^1 \Upsilon^X(x)\nu(dx) < \infty$,

(c) $\int_0^1 \Upsilon^Y(x)\nu(dx) < \infty$.

Uočimo da uvjet (b) nije zapravo od velike pomoći jer ga je općenito teško provjeriti, međutim, on je prijelazni korak prema uvjetu (c) koji je puno praktičniji obzirom da su u njemu razdvojeni procesi Y i C. Što se regularnosti tiče, za 0 kažemo da je **regularna** za $(0,\infty)$ obzirom na proces X ako je $\mathbb{P}(\tau_0 = 0) = 1$, gdje je $\tau_0 = \inf\{t > 0 \ : \ X(t) > 0\}$, tj. prvo vrijeme kad proces X prijeđe razinu 0. To znači zapravo da proces X 'posjeti' $(0,\infty)$ g.s. u proizvoljno malim vremenima (također, uočimo da je svejedno uzmemo li u definiciji $(0,\infty)$ ili $[0,\infty)$, osim u slučaju složenog Poissonovog procesa). U suprotnom kažemo da je 0 **iregularna** za $(0,\infty)$ obzirom na proces X. To je moguće samo u slučaju kada su X, pa onda i Y omeđene varijacije. U tom je slučaju $\sigma = 0$ g.s. (za dokaz vidjeti [SV, Propozicija 3.4.])

Stoga, bez ikakvih dodatnih pretpostavki na procese u modelu (uvjet čistog profita i konačnost očekivanja), uzmimo samo dvije pretpostavke koje su nužne da bi uopće dekompozicija u trenucima σ_i imala smisla, a to su : $\mathbb{P}(\sigma > 0) = 1$ i $\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$ g.s. Vratimo se sada na proces

$$X = Y - C \ ,$$

na $[0,\tau]$, gdje je Y općeniti Lévyjev proces, a C (općeniti) subordinator. Tada dobivamo sljedeće: u (3.1) smo pokazali da za ukupno vrijeme koje proces $\widehat{S} - \widehat{X}$ provede ispod razine x $(x > 0)$ na $[0,\tau]$ vrijedi:

$$\mathbb{E}\int_0^\tau 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\le x\}}\, dt = \frac{1}{q}\mathbb{P}(S(\tau) \le x) = \frac{1}{q}\mathbb{P}(T(x) > \tau) \ .$$

No, za $q > 0$ možemo definirati funkciju

$$\Upsilon^q(x) = \int_0^\infty \exp\{-qL^{-1}(t)\}\mathbb{P}(H(t) \le x)\, dt \ , \quad x \ge 0 \ . \tag{3.19}$$

Tada očito $\Upsilon^q(x)$ raste prema $\Upsilon(x)$ kada $q \to 0+$ za svako $x > 0$. Laplaceova transformacija od Υ^q dana je sa (vidi [Ber, str.163. i 172.-174.])

$$\lambda \int_0^\infty e^{-qx}\Upsilon^q(x)\, dx = \frac{1}{\kappa(q,\lambda)} \ , \quad \lambda > 0$$

te vrijedi

$$q\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{P}(T(x) > t)\, dt = \kappa(q,0)\Upsilon^q(x) \ .$$

To znači da je

$$\mathbb{E}\int_0^\tau 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\le x\}}\, dt = \frac{1}{q}\kappa(q,0)\Upsilon^q(x) \ .$$

Uočimo da kada pustimo $q \to 0$, onda lijeva strana ove jednakosti prelazi u $\mathbb{E}\int_0^\infty 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\le x\}}\, dt$, a desna strana u $\lim_{q\to 0}\frac{\kappa(q,0)}{q}\Upsilon^q(x) = k\Upsilon(x)$ (za neku konstantu $k > 0$, opet koristeći rezultat iz [Ber, str.173.]), što daje rezultat kao kod [SV, dokaz Propozicije 4.2.]:

$$\mathbb{E}\int_0^\infty 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\le x\}}\, dt = k\Upsilon(x) \ . \tag{3.20}$$

Sada, slijedeći isti postupak kao i u 3.1., imamo

$$\mathbb{E}\int_0^{\sigma\wedge\widehat{\tau}_y\wedge\tau} 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\le x\}}\, dt = \frac{1}{q}\kappa(q,0)\mathbb{P}(\sigma \ge \tau, \widehat{\tau}_y \ge \tau)\Upsilon^q(x) \ ,$$

tj.

$$\mathbb{E}\int_0^{\sigma\wedge\widehat{\tau}_y\wedge\tau} 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)\le x\}}\, dt = \frac{\kappa(q,0)}{q}\mathbb{P}(\sigma \ge \tau, \widehat{\tau}_y \ge \tau)\int_0^\infty 1_{\{u\le x\}}\Upsilon^q(dx) \ ,$$

što standardnim postupkom za neku nenegativnu Borelovu funkciju f daje

$$\mathbb{E}\int_0^{\sigma\wedge\widehat{\tau}_y\wedge\tau} f(\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t))\, dt = \frac{\kappa(q,0)}{q}\mathbb{P}(\sigma \ge \tau, \widehat{\tau}_y \ge \tau)\int_0^\infty f(u)\Upsilon^q(du) \ . \tag{3.21}$$

Sada prikladno definiramo funkciju $f(u) := 1_{(z,\infty)}(u)\nu(x+u,\infty)$. Tada, koristeći formulu kompenzacije i rezultat (3.21), dobivamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma_-) \le y, \widehat{S}(\sigma_-) - \widehat{X}(\sigma_-) > z, J_\tau > x, \sigma < \tau) \\
&= \mathbb{E}\int_0^{\sigma\wedge\widehat{\tau}_y\wedge\tau} 1_{\{\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t)>z\}}\nu(x+\widehat{S}(t)-\widehat{X}(t),\infty)\,dt \\
&= \frac{\kappa(q,0)}{q}\mathbb{P}(\sigma \ge \tau, \widehat{\tau}_y \ge \tau)\int_0^\infty 1_{(z,\infty)}(u)\nu(x+u,\infty)\Upsilon^q(du) \\
&= \frac{\kappa(q,0)}{q}\mathbb{P}(\sigma \ge \tau, \widehat{\tau}_y \ge \tau)\int_{z+x}^\infty \nu(u,\infty)\Upsilon^q(du)\ .
\end{aligned}$$

Pustimo li u gornjoj jednakosti $x \to 0$, $z \to 0$ i $y \to \infty$, dobivamo

$$\mathbb{P}(\sigma < \tau) = \frac{\kappa(q,0)}{q}\mathbb{P}(\sigma \ge \tau)\int_0^\infty \nu(u,\infty)\Upsilon^q(du)\ .$$

Kada pustimo pak $z \to 0$ i $y \to \infty$, dobivamo

$$\mathbb{P}(J_\tau > x, \sigma \le \tau) = \frac{\kappa(q,0)}{q}\mathbb{P}(\sigma \ge \tau)\int_x^\infty \nu(u,\infty)\Upsilon^q(du)$$

pa je

$$\mathbb{P}(J_\tau > x|\sigma < \tau) = \frac{\int_x^\infty \nu(u,\infty)\Upsilon^q(du)}{\int_0^\infty \nu(u,\infty)\Upsilon^q(du)}\ .$$

Opet možemo definirati nešto kao integrirani rep distribucije visine skokova

$$H_\tau(x) := \frac{\int_0^x \nu(u,\infty)\Upsilon^q(du)}{\int_0^\infty \nu(u,\infty)\Upsilon^q(du)} \tag{3.22}$$

Puštanjem $z \to 0$ i $x \to 0$, opet ćemo dobiti, kao u 3.1., da su $1_{\{\sigma<\tau\}}$ i $\widehat{S}((\sigma\wedge\tau)-)$ nezavisni. Možemo također ponovno definirati funkciju distribucije $G_\tau(x) := \mathbb{P}(\widehat{S}((\sigma \wedge \tau)-) \le x)$ i modificirane ljestvičaste visine kao i prije.

Tako dobivamo na $[0,\tau]$ i u ovom općenitom slučaju formulu Pollaczek-Khinchinovog tipa.

Teorem 3.3.2 *Uz gornje pretpostavke za Lévyjev proces $X = Y - C$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(\widehat{S}(\tau) \le x) = (1-\rho)\sum_{n=0}^\infty \rho^n (G_\tau^{(n+1)*} * H_\tau^{n*})(x)\ , \tag{3.23}$$

gdje je

$$1-\rho = \mathbb{P}(\sigma < \tau) = \frac{\kappa(q,0)}{q}\mathbb{P}(\sigma \ge \tau)\int_0^\infty \nu(u,\infty)\Upsilon^q(du)$$

i

$$H_\tau(x) = \frac{\int_0^x \nu(u,\infty)\Upsilon^q(du)}{\int_0^\infty \nu(u,\infty)\Upsilon^q(du)} \ .$$

3.4 Dekompozicija ljestvičastog procesa

Vratimo se sada na ljestvičasti proces. Obzirom da nam je eksplicitna formula za Laplaceov eksponent $\widehat{\kappa}(\alpha,\beta)$ poznata samo u spektralno negativnom slučaju, vratit ćemo se opet na taj model. Neka je, dakle, Y sad spektralno negativan Lévyjev proces, a C subordinator, tj. opet promatramo proces

$$X(t) = Y(t) - C(t) = ct - C(t) + Z(t) \ , \ t \geq 0 \ .$$

Sjetimo se da nam je u tom slučaju poznata formula za κ i ona je dana s

$$\widehat{\kappa}(\alpha,\beta) = k \cdot \frac{\alpha - \psi(\beta)}{\phi(\alpha) - \beta} \ , \quad \alpha,\beta > 0 \ .$$

Za konstantu k bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $k = 1$.

Pretpostavimo sada da je C subordinator čije je očekivanje konačno, ali je $\mathbb{E}\, C(1) > c$ - dakle, ne pretpostavljamo uvjet čistog profita. Tada za cijeli proces X vrijedi: $\mathbb{E}\, X(1) = c - \mathbb{E}\, C(1) + \mathbb{E}\, Z(1) = c - \mathbb{E}\, C(1) + 0 < 0$ pa $\widehat{X} \to +\infty$. Drugim riječima, ako promatramo ljestvičasti proces $\widehat{H}$ od $\widehat{X}$, on će biti subordinator, ali ubijen intenzitetom 0, tj. bez ubijanja.

No, uz gornje pretpostavke, mijenja se Laplaceov eksponent od $\widehat{H}$, $\widehat{\kappa}$, jer je $\psi_X'(0_+) = \mathbb{E}\, X(1) < 0$ pa Laplaceov eksponent od X, ψ_X, nema jedinstvenu nultočku. To znači da je $\psi_X(0) = 0$ i $\psi_X(b) = 0$ za neko $b > 0$ pa Laplaceov eksponent od X definiramo zapravo kao funkciju $\psi_X : [b, +\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$ i sa ϕ_X označavamo njen inverz.

Za Laplaceov eksponent ljestvičastog procesa u našem slučaju (kad ispustimo uvjet čistog profita), koristeći rezultat [HPSV1, Lema 5.1], dobivamo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\kappa}(\beta) &= \lim_{\alpha\to 0} \widehat{\kappa}(\alpha,\beta) = \frac{\psi_X(\beta)}{\beta - \phi_X(0)} \\
&= \frac{c\beta - \psi_C(\beta) + \psi_Z(\beta)}{\beta - \phi_X(0)} = (1 + \frac{\phi_X(0)}{\beta - \phi_X(0)})(c - \frac{\psi_C(\beta)}{\beta} + \frac{\psi_Z(\beta)}{\beta}) \\
&= (1 + \frac{\phi_X(0)}{\beta - \phi_X(0)})(d + \mathbb{E}\, C(1) \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\beta x}) H(dx) + \frac{\psi_Z(\beta)}{\beta})
\end{aligned}$$

Pogledajmo što možemo reći o Laplaceovom eksponentu $\widehat{\kappa}$ od $\widehat{H}$.

Uzmimo prvo, zbog jednostavnosti, da je perturbacija Z Brownovo gibanje. Dakle, Laplaceov eksponent od Z je $\psi_Z(\beta) = \beta^2$, $\beta > 0$.

Za subordinator C možemo promotriti tri klase procesa: Poissonov proces, odnosno složeni Poissonov proces, gama proces i stabilni subordinator (za $\alpha \in (0,1)$), pa onda i općeniti subordinator.

1. slučaj: neka je C Poissonov proces.

Tada je Laplaceov eksponent od C

$$\psi_C(\beta) = \lambda \cdot (1 - e^{-\beta}) \ ,$$

gdje je $\lambda > 0$ intenzitet skokova Poissonovog procesa.

Laplaceov eksponent od X je pak

$$\psi_X(\beta) = c\beta - \lambda \cdot (1 - e^{-\beta}) + \beta^2$$

pa ako oduzmemo drift od $\widehat{\kappa}$, što je u našem slučaju $\frac{\psi_Z(\beta)}{\beta} = \frac{\beta^2}{\beta} = \beta$, dobivamo:

$$\begin{aligned}\widehat{\kappa}(\beta) - \beta &= \frac{c\beta - \lambda(1 - e^{-\beta}) + \beta^2}{\beta - \phi(0)} - \beta \\ &= \frac{(c + \phi_X(0))\beta - \lambda(1 - e^{-\beta})}{\beta - \phi(0)} =: \varphi(\beta)\end{aligned}$$

Pogledajmo sada što se događa sa φ kada $\beta \to \infty$:

$$\lim_{\beta\to\infty} \varphi(\beta) = \lim_{\beta\to\infty} \frac{(c + \phi_X(0))\beta - \lambda(1 - e^{-\beta})}{\beta - \phi_X(0)} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{c + \phi_X(0) - \lambda\frac{1-e^{-\beta}}{\beta}}{1 - \frac{\phi_X(0)}{\beta}} = c + \phi_X(0) \ ,$$

što je očito konačno. No konačnost Laplaceovog eksponenta u beskonačnost iznači da je konačna i Lévyjeva mjera, a to je jedino u slučaju složenog Poissonovog procesa. To pak znači da ovaj 'modificirani' Laplaceov eksponent $\varphi(\beta)$ odgovara onom složenog Poissonovog procesa pa je

$$\varphi(\beta) = \widetilde{\lambda} \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\beta x})\, \widetilde{F}(dx)$$

gdje je $\widetilde{\lambda}$ intenzitet skokova, a $\widetilde{F}$ funkcija distribucije visine skokova složenog Poissonovog procesa.

No,

$$\lim_{\beta\to\infty} \varphi(\beta) = \lim_{\beta\to\infty} \widetilde{\lambda} \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\beta x})\widetilde{F}(dx) = \widetilde{\lambda} \ .$$

Dakle, skokovi subordinatora $\widehat{H}$ ponašaju se kao složeni Poissonov proces s intenzitetom skokova $c + \phi_X(0)$.

No, ovo je slučaj i kada promijenimo proces C u neki drugi subordinator (sa svim pretpostavkama koje smo uzeli).

2. slučaj: pogledajmo odmah općeniti slučaj (ostali navedeni primjeri vrlo su slični 1. slučaju pa ih nećemo ovdje posebno razmatrati). Tada je

$$\psi_C(\beta) = \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\beta x})\,\nu(dx)$$

jer smo u našem modelu uzeli subordinator bez drifta.

Tada je

$$\begin{aligned}
\varphi(\beta) = \widehat{\kappa}(\beta) - \beta &= \frac{c\beta - \int_{(0,\infty)}(1 - e^{-\beta x})\nu(dx) + \beta^2 - \beta^2 + \beta\phi_X(0)}{\beta - \phi_X(0)} \\
&= \frac{(c + \phi_X(0))\beta - \int_{(0,\infty)}(1 - e^{-\beta x})\nu(dx)}{\beta - \phi_X(0)}
\end{aligned}$$

pa je

$$\lim_{\beta\to\infty} \varphi(\beta) = \lim_{\beta\to\infty} \frac{c + \phi_X(0) - \int_{(0,\infty)} \frac{1-e^{-\beta x}}{\beta}}{1 - \frac{\phi_X(0)}{\beta}} = c + \phi_X(0)\ ,$$

budući da su podintegralne funkcije omeđene sa $1 - e^{-x} \le x$, a $\int_{(0,\infty)} x\nu(dx) = \mathbb{E}\, C(1) < \infty$ prema pretpostavci.

Sada možemo pokušati zamijeniti komponentu Brownovog gibanja u Laplaceovom eksponentu od X (β^2) sa nekom drugom perturbacijom, na primjer α -stabilnim spektralno negativnim Levyjevim procesom, dakle, $\alpha \in (1,2)$.

Za takav je proces Laplaceov eksponent

$$\psi_Z(\beta) = \int_{(-\infty,0)} (e^{\beta x} - 1 - \beta x)\frac{a}{|x|^{\alpha+1}} 1_{(-\infty,0)}\, dx\ , \quad \alpha \in (1,2)\ .$$

No, ako malo bolje promotrimo $\widehat{\kappa}$, vidjet ćemo zašto uvijek dobivamo isti rezultat, bez obzira na promjenu subordinatora, a i zašto ćemo dobiti isto kad promijenimo i perturbaciju iz Brownovog gibanja u primjerice α -stabilan spektralno negativan Lévyjev proces sa $\alpha \in (1,2)$.

Označimo sada sa X' generalizirani proces rizika

$$X' = Y - D\ ,$$

gdje je D subordinator sa konačnim očekivanjem i takav da je $\mathbb{E}\, D(1) < c$, dakle X' je generalizirani proces rizika za koji vrijedi uvjet čistog profita. X i C neka označavaju procese kao na početku ovog odjeljka (dakle, vrijedi $\mathbb{E}\,C(1) > c$ i X je proces koji ne zadovoljava uvjet čistog profita). Nadalje, označimo sa $\widehat{\kappa'}$ Laplaceov eksponent ljestvičastog procesa $\widehat{H'}$ pridruženog procesu X' te, analogno, sa $\widehat{\kappa}$ Laplaceov eksponent ljestvičastog procesa $\widehat{H}$ pridruženog procesu X.

Ranije smo već zapisali oblik

$$\widehat{\kappa}(\beta) = (1 + \frac{\phi(0)}{\beta - \phi(0)}) \cdot \widehat{\kappa'}(\beta)$$

pa je očito

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to\infty} \widehat{\kappa}(\beta) &= \lim_{\beta\to\infty} (1 + \frac{\phi(0)}{\beta - \phi(0)}) \cdot (c - \frac{\psi_C(\beta)}{\beta} + \frac{\psi_Z(\beta)}{\beta}) \\
&= 1 \cdot \lim_{\beta\to\infty} (c - \frac{\psi_C(\beta)}{\beta} + \frac{\psi_Z(\beta)}{\beta}) \\
&= c - \lim_{\beta\to\infty} \frac{\psi_Z(\beta)}{\beta} \\
&= \lim_{\beta\to\infty} (c - \frac{\psi_D(\beta)}{\beta} + \frac{\psi_Z(\beta)}{\beta}) \\
&= \lim_{\beta\to\infty} \widehat{\kappa'}(\beta) \ ,
\end{aligned}$$

budući da smo pokazali da je

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to\infty} \frac{\psi_C(\beta)}{\beta} &= \lim_{\beta\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{1 - e^{-\beta x}}{\beta} \nu(dx) \\
&= 0 = \lim_{\beta\to\infty} \frac{\psi_D(\beta)}{\beta}
\end{aligned}$$

(gdje smo u posljednjoj jednakosti koristili da je $\mathbb{E}\,C(1) < \infty$).

Ovo smo također mogli vidjeti ukoliko raščlanimo $\widehat{\kappa}$:

$$\widehat{\kappa}(\beta) = c - \frac{\psi_C(\beta)}{\beta} + \frac{\psi_Z(\beta)}{\beta}$$

pa je

$$\widehat{\kappa}(\beta) - \frac{\psi_Z(\beta)}{\beta} = c - \frac{\psi_C(\beta)}{\beta} = c - \int_0^\infty e^{-\beta x} \nu(x, \infty)\, dx$$

i stoga vrijedi:

(i) $\widehat{\kappa}(0+) \geq 0$ ako i samo ako $c - \mathbb{E}\,C(1) = c - \int_0^\infty \nu(x, \infty)\, dx \geq 0$ ako i samo ako $\mathbb{E}\,C(1) \leq c$ i

(ii) $\lim_{\beta\to\infty}(c - \int_0^\infty e^{-\beta x} \nu(x, \infty)\, dx)$ je uvijek c.

Dakle, zaključimo: na nivou ljestvičastog procesa bitna nam je samo pretpostavka o konačnosti očekivanja, bez obzira je li $\mathbb{E}\, C(1) > c$ ili $\mathbb{E}\, C(1) < c$. Oslabljenje početne pretpostavke, tj. izuzimanje uvjeta čistog profita, uz i dalje zadržanu pretpostavku o konačnosti očekivanja, na razini ljestvičastog procesa ne donosi nikakve promjene na supremum promatranog procesa.

Poglavlje 4

Diskretan slučaj

Neka je

- $c \in \mathbb{N}$;

- $\{C(n)\}_{n\geq 0}$ slučajna šetnja sa skokovima u $\mathbb{N}_0$,

  $$C(n) = U(1) + \cdots + U(n) \ ,$$

  gdje su prirasti

  $$U(i) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

  takvi da je $\mathbb{E}\, C(1) < \infty$, što je ekvivalentno sa $\mathbb{E}\, U(1) < \infty$ (tj. vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ i $\sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n < \infty$) i

- $\{Z(n)\}_{n\geq 0}$ neprekidna zdesna slučajna šetnja, tj.

  $$Z(n) = W(1) + \cdots + W(n) \ ,$$

  gdje su prirasti

  $$W(i) \sim \begin{pmatrix} \dots & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \dots & q_2 & q_1 & q_0 & \rho \end{pmatrix} \ .$$

  Pretpostavimo da je $\sum_{n=0}^{\infty} q_n + \rho = 1$ te također $\mathbb{E}\, W(1) = \sum_{n=0}^{\infty} -n \cdot q_n + \rho = 0$.

Neka su C i Z nezavisne slučajne šetnje te

$$X(n) := cn - C(n) + Z(n) \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Pretpostavimo još da je $\mathbb{E}\, X(1) > 0$ (u ovakvom modelu to znači da je $c < \mathbb{E}\, C(1)$) pa $X \to +\infty$.

Ovakvim modelom u diskretnom slučaju dobivamo analogon spektralno negativnog procesa. Naime, X je, kao i Z, neprekidna zdesna slučajna šetnja. Kako smo već objasnili u 2.10., slučajnim šetnjama koje su neprekidne zdesna ili slijeva možemo kontrolirati skokove s jedne strane, budući da znamo da u jednom smjeru prolaze samo jediničnim korakom. Isto tako, u neprekidnom slučaju za spektralno negativne Lévyjeve procese znamo da nemaju pozitivnih skokova pa im također možemo taj jedan smjer držati pod kontrolom.

Željeli bismo ispitati vrijedi li i u diskretnom modelu rezultat analogan onome koji su *Huzak*, *Perman*, *Šikić* i *Vondraček* dobili u [HPSV1], dakle,

$$\max_{0\le n<\infty}(-cn - Z(n)) =^d \max_{0\le n<\sigma}(-cn + C(n) - Z(n)) \ .$$

Opet, σ je prvo vrijeme kada se dogodi novi supremum zbog skoka slučajne šetnje C (ona ovdje 'igra ulogu' subordinatora), tj.

$$\sigma = \inf\{n > 0 : \Delta C(n) > \widehat{S}(n-1) - \widehat{X}(n-1) \text{ i } \widehat{S}(n) > \widehat{S}(n-1)\} \ .$$

Ponovno koristimo slične oznake:

$$Y(n) := cn + Z(n),\ \widehat{X} := -X,\ \widehat{Y} := -Y \ \text{ i}$$
$$\widehat{S}(n) := \max_{0\le m\le n}\widehat{X}(m),\ \widehat{S}(\infty) = \max_{0\le m<\infty}\widehat{X}(m)$$

4.1 Metoda dekompozicije supremuma

Prvo ćemo opet pokušati dekomponirati supremum dualne slučajne šetnje $\widehat{X}$ u definiranim vremenima σ_i, $i \in \mathbb{N}$. Cilj nam je opet dobiti formulu Pollaczek-Khincinovog tipa. Dakle, zanimat će nas, vezano uz σ, distribucija preskoka pa definiramo

$$J^C := (\Delta C(\sigma) - (\widehat{S}(\sigma-1) - \widehat{X}(\sigma-1)))1_{(\sigma<\infty)} \ ,$$

dakle, visine preskoka dotadašnjeg supremuma procesom (slučajnom šetnjom) C. Uočimo da, za razliku od neprekidnog slučaja, ovdje razlikujemo veličine J^C i

$$J := (\widehat{S}(\sigma) - \widehat{S}(\sigma-1))1_{(\sigma<\infty)} = (\widehat{X}(\sigma) - \widehat{S}(\sigma-1))1_{(\sigma<\infty)} \ .$$

Naime, u diskretnom slučaju imamo slučajnu šetnju $\{Z(n)\}$ koja može skakati istovremeno kad i C i svojim skokom pridonijeti novom supremumu. U neprekidnom smo slučaju pak imali spektralno negativan proces $\{Z(t)\}$ koji nije imao pozitivnih skokova pa, zbog nezavisnosti procesa C i Z, nije mogao skočiti istovremeno sa subordinatorom C do novog supremuma. No, obzirom da nas zanima samo preskok procesa C, mi ćemo kao analogon neprekidnom slučaju promatrati veličinu J^C, tj. za koliko je svojim skokom slučajna šetnja C preskočila dotadašnji supremum.

Uočimo prvo da u diskretnom slučaju trivijalno imamo diskretan broj trenutaka kada se postigne novi supremum procesa $\widehat{X}$ zbog skoka slučajne šetnje C. Dakle, ukoliko uzmemo da su $\sigma_1 = \sigma$, σ_2, σ_3, ... definirani kao prije, tj.

$$\sigma_1 := \sigma := \inf\{n > 0 \; : \; \Delta C(n) > \widehat{S}(n-1) - \widehat{X}(n-1) \text{ i } \widehat{S}(n) > \widehat{S}(n-1)\} \; ,$$

$$\sigma_{n+1} := \inf\{m > \sigma_n \; : \; \Delta C(m) > \widehat{S}(m-1) - \widehat{X}(m-1) \text{ i } \widehat{S}(m) > \widehat{S}(m-1)\}$$

na $\{\sigma_n < \infty\}$, imamo da je

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots \quad \text{g.s.}$$

Probajmo sada odrediti distribuciju preskoka kako bismo, opet koristeći ljestvičasti proces, dobili Pollaczek-Khinchinovu formulu za $\widehat{S}(\infty)$ preko distribucije od $\widehat{S}(\sigma)$ (maksimum cijelog procesa $\widehat{X}$ do trenutka σ) i distribucije preskoka J^C uzrokovanog samo skokom slučajne šetnje C. Naime, ako označimo

$$L_0 := \widehat{S}(\sigma_1 -) = \widehat{S}(\sigma_1 - 1) \; ,$$

$$\begin{aligned} J_1 &:= \widehat{S}(\sigma_1) - \widehat{S}(\sigma_1 - 1) = \widehat{X}(\sigma_1) - (\widehat{S}(\sigma_1 - 1) - \widehat{X}(\sigma_1 - 1) + \widehat{X}(\sigma_1 - 1)) \\ &= \widehat{X}(\sigma_1 - 1) + \Delta C(\sigma_1) - \Delta Z(\sigma_1) - c - (\widehat{S}(\sigma_1 - 1) - \widehat{X}(\sigma_1 - 1)) - \widehat{X}(\sigma_1 - 1) \\ &= \Delta C(\sigma_1) - (\widehat{S}(\sigma_1 - 1) - \widehat{X}(\sigma_1 - 1)) - \Delta Z(\sigma_1) - c \\ &= J_1^C - W(\sigma_1) - c \; , \end{aligned}$$

$$L_1 := \widehat{S}(\sigma_2 - 1) - \widehat{S}(\sigma_1)$$

na $\{\sigma_1 < \infty\}$ i tako redom dalje, očito je i ovdje

$$\widehat{S}(\infty) = \max_{0 \le n < \infty} \widehat{X}(n) = L_0 + J_1 + L_1 + \dots + J_N + L_N \; ,$$

gdje je

$$N := \max\{n \; : \; \sigma_n < \infty\} \; .$$

Budući da smo u diskretnom slučaju, uvedimo ovdje još konvenciju $\widehat{S}(\infty - 1) := \widehat{S}(\infty)$. Također ćemo i ovdje, koristeći jako Markovljevo svojstvo, imati geometrijsku distribuciju $N \sim G(p)$, gdje je $p := \mathbb{P}(\sigma_1 < \infty)$ pa nam za Pollaczek-Khinchinovu formulu zapravo treba rezultat nezavisnosti za $\widehat{S}(\sigma - 1)$ i $\{\sigma < \infty\}$ te distribucija preskoka $J_1 = J$ na $\{\sigma_1 < \infty\}$. Naime,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\widehat{S}(\infty) \le x) &= \mathbb{P}(L_0 + J_1 + L_1 + \dots + J_N + L_N \le x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(L_0 + J_1 + L_1 + \dots + J_n + L_n \le x, N = n) \end{aligned}$$

pa nam očito treba

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \leq y, J > x|\sigma < \infty) &= \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \leq y|\sigma < \infty) \cdot \mathbb{P}(J > x|\sigma < \infty) \\ &= \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \leq y) \cdot \mathbb{P}(J > x|\sigma < \infty) \\ &= \widetilde{G}(y) \cdot \mathbb{P}(J > x|\sigma < \infty) \ ,\end{aligned}$$

ukoliko pokažemo uvjetnu nezavisnost od $\hat{S}(\sigma-)$ i J uz dano $\{\sigma < \infty\}$ i opet koristimo oznaku $\widetilde{G}(y) := \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-) \leq y)$. Također vidimo da nam onda treba i već spomenuta uvjetna distribucija preskoka $J = J_1$. Uočimo da taj preskok J u diskretnom slučaju nije ekvivalentan preskoku samo slučajne šetnje C, nego je složen od preskoka subordinatora C, J^C, te od prirasta $W(\sigma_1)$ koji dolazi od perturbacije Z. No taj dio možemo razriješiti naknadno, obzirom da su J^C i $W(\sigma_1)$ nezavisni (jer smo pretpostavili nezavisnost slučajnih šetnji Z i C). Također, distribuciju od $W(\sigma_1)$ na $\{\sigma_1 < \infty\}$ znamo (jer je W zadan na početku), tako da nam zapravo opet treba samo uvjetna distribucija od J^C na $\{\sigma_1 < \infty\}$.

Pokušajmo stoga prvo poopćiti Propoziciju 4.3. iz [HPSV1].

Ako, za $y > 0$, označimo

$$\widehat{\tau_y} := \inf\{n > 0 \ : \ \widehat{X}(n) > y\} \ ,$$

onda je $\mathbb{E}\,(\sum_{n=0}^{\sigma\wedge\widehat{\tau_y}} 1_{(\widehat{S}(n)-\widehat{X}(n)\leq x)})$ očekivani broj trenutaka kada je proces $\widehat{S}-\widehat{X}$ ispod razine x do trenutka $\sigma \wedge \widehat{\tau_y}$. Da bismo to izračunali, gledamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{(\widehat{S}(n)-\widehat{X}(n)\leq x)}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{S}(n) - \widehat{X}(n) \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S(n) \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_x > n) = \mathbb{E}\,\tau_x \ ,\end{aligned}$$

gdje smo u posljeednjem retku značili $\tau_x := \min\{n > 0 \ : \ X(n) > x\}$, a u pretposljednjem koristili **princip dualnosti** za slučajne šetnje. Naime, označimo sa R slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}$ sa prirastima $\{\xi_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$, tj. $R(n) := \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ i $R(0) = 0$. Tada iz činjenice da je prvih n prirasta $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ jednako distribuirano kao i $(\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots, \xi_1)$, vrlo lagano slijedi da je veličina za koju šetnja R u trenutku n premaši svoj minimum do trenutka n jednako distribuirana kao maksimum do trenutka n njoj dualne šetnje, tj.

$$R(n) - \min_{k\leq n} R(n) =^d \max_{l\leq n} R(l) \ .$$

Za detalje vezane uz princip dualnosti i njegove posljedice na rezultate vezane uz trajektorije slučajnih šetnji pogledaj [Fell].

Sad pogledajmo

$$\mathbb{E}\,(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{(\widehat{S}(n)-\widehat{X}(n)\leq x)} 1_{(n<\sigma)} 1_{(\widehat{S}(n)>y)})\ .$$

Možemo opet primijeniti jako Markovljevo svojstvo, tako da dobivamo

$$\mathbb{E}\,(\sum_{n=0}^{\widehat{\tau_y}\wedge\sigma} 1_{(\widehat{S}(n)-\widehat{X}(n)\leq x)}) = \mathbb{P}(\sigma=\infty,\widehat{\tau_y}=\infty)\mathbb{E}\,\tau_x\ . \tag{4.1}$$

No, zbog nezavisnosti i stacionarnosti prirasta, kao i kod Lévyjevog procesa, imamo: $\mathbb{E}\,\tau_x = x\cdot\mathbb{E}\,\tau_1 = x\cdot\mathbb{E}\,\tau$, gdje je $\tau := \tau_1 = \inf\{n>0 : X(n)>0\} = \inf\{n>0 : X(n)\geq 1\}$.

Stoga je

$$\mathbb{E}\,(\sum_{n=0}^{\widehat{\tau_y}\wedge\sigma} 1_{(\widehat{S}(n)-\widehat{X}(n)\leq x)}) = \mathbb{P}(\sigma=\infty,\widehat{\tau_y}=\infty)x\mathbb{E}\,\tau\ . \tag{4.2}$$

No, tada je

$$\mathbb{E}\,(\sum_{n=0}^{\widehat{\tau_y}\wedge\sigma} 1_{(\widehat{S}(n)-\widehat{X}(n)\leq x)}) = \mathbb{P}(\sigma=\infty,\widehat{\tau_y}=\infty)\mathbb{E}\,\tau\sum_{m=1}^{\infty} 1_{\{m\leq x\}} \tag{4.3}$$

pa za bilo koju nenegativnu funkciju f imamo:

$$\mathbb{E}\,\big(\sum_{n=0}^{\widehat{\tau_y}\wedge\sigma} f(\widehat{S}(n)-\widehat{X}(n))\big) = \mathbb{P}(\sigma=\infty,\widehat{\tau_y}=\infty)\mathbb{E}\,\tau\sum_{m=1}^{\infty} f(m)\ . \tag{4.4}$$

Definirajmo sada

$$\mathcal{H}(n,\omega,\varepsilon) := 1_{(\widehat{S}(n-1,\omega)\leq y)}\cdot 1_{(\widehat{S}(n-1,\omega)-\widehat{X}(n-1,\omega)>z)}\cdot 1_{(n\leq\sigma(\omega))}\cdot 1_{(x+\widehat{S}(n-1,\omega)-\widehat{X}(n-1,\omega),\infty)}(\varepsilon)\ .$$

Tada je

$$\mathbb{E}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}(n,\omega,\Delta C(n,\omega)) = \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-1)\leq y,\widehat{S}(\sigma-1)-\widehat{X}(\sigma-1)>z, J^C>x,\sigma<\infty)\ .$$

Označimo sada, zbog jednostavnosti zapisa, $U := U(1)$ visinu skokova slučajne šetnje C te sa F njenu funkciju distribucije. Sada, za $N\in\mathbb{N}$, koristeći linearnost očekivanja u prvoj, činjenicu da su $U(i)$-ovi nezavisni jednako distribuirani u drugoj jednakosti, standardni postupak indukcije u trećoj te ponovno linearnost očekivanja u posljednjoj jednakosti, dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{N}\mathcal{H}(n,\omega,U_n(\omega))\right)=\sum_{n=0}^{N}\mathbb{E}\left(\mathcal{H}(n,\omega,U_n(\omega))\right)\\
&=\sum_{n=0}^{N}\mathbb{E}\left(\mathcal{H}(n,\omega,U(\omega))\right)=\sum_{n=0}^{N}\mathbb{E}\,(\int_{(0,\infty)}\mathcal{H}(n,\omega,\varepsilon)dF(\varepsilon))\\
&=\mathbb{E}\,(\sum_{n=0}^{N}\int_{(0,\infty)}\mathcal{H}(n,\omega,\varepsilon)dF(\varepsilon))\ .
\end{aligned}
$$

Sada primijenimo Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji za dobro definiranu $\mathcal{H}$ (u našem slučaju će to biti u redu jer će se raditi o karakterističnoj funkciji) pa dobivamo:

$$
\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}(n,\omega,U_n(\omega))\right)=\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(0,\infty)}\mathcal{H}(n,\omega,\varepsilon)dF(\varepsilon)\right)\ . \tag{4.5}
$$

No, uz našu definiciju od $\mathcal{H}$ i oznaku $F(y,\infty) := \int_y^{+\infty} F(d\varepsilon) := \mathbb{P}(U \geq y)$, $y > 0$, desna strana od (4.5) je onda

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,(\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(0,\infty)}F(d\varepsilon)\mathcal{H}(n,\omega,\varepsilon))\\
&=\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(0,\infty)}F(d\varepsilon)1_{(\widehat{S}(n-1,\omega)\leq y)}1_{(\widehat{S}(n-1,\omega)-\widehat{X}(n-1,\omega)>z)}1_{(n\leq\sigma(\omega))}1_{(x+\widehat{S}(n-1,\omega)-\widehat{X}(n-1,\omega),\infty)}(\varepsilon)\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\sigma\wedge\widehat{\tau}_y}1_{(\widehat{S}(n-1)-\widehat{X}(n-1)>z)}F(x+\widehat{S}(n-1)-\widehat{X}(n-1),\infty)\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\sigma\wedge\widehat{\tau}_y}1_{(\widehat{S}(n-1)-\widehat{X}(n-1)>z)}\mathbb{P}(U\geq x+\widehat{S}(n-1)-\widehat{X}(n-1))\right)\\
&=\mathbb{P}(\sigma=\infty,\widehat{\tau}_y=\infty)\mathbb{E}\,\tau\cdot\sum_{m=1}^{\infty}1_{(z,\infty)}(m)\cdot\mathbb{P}(U\geq x+m)\ ,
\end{aligned}
$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti definirali $f(u) := 1_{(z,\infty)}(u) \cdot \mathbb{P}(U \geq x + u)$ i primijenili (4.4).

Sada dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-1)\leq y,\widehat{S}(\sigma-1)-\widehat{X}(\sigma-1)>z,J^C>x,\sigma<\infty)\\
&=\mathbb{P}(\sigma=\infty,\widehat{\tau}_y=\infty)\cdot\mathbb{E}\,\tau\cdot\sum_{m=z+1}^{\infty}\mathbb{P}(U\geq x+m)\ .
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Odredimo sad distribuciju od J^C. Pustimo $\lim_{y\to\infty}$ i uzmimo $x = 0$ i $z = 0$ u (4.6):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sigma < \infty) &= \mathbb{P}(\sigma = \infty)\mathbb{E}\,\tau \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(U \geq m)\\ &= \mathbb{P}(\sigma = \infty)\mathbb{E}\,\tau\mathbb{E}\,U\end{aligned}$$

pa slijedi

$$\mathbb{P}(\sigma < \infty) = \frac{\mathbb{E}\,\tau\mathbb{E}\,U}{1 + \mathbb{E}\,\tau\mathbb{E}\,U}\ . \tag{4.7}$$

Također imamo, kada pustimo $\lim_{y\to\infty}$ i uzmemo $z = 0$ u (4.6):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J^C \geq x|\sigma < \infty) &= \frac{\mathbb{P}(J^C \geq x, \sigma < \infty)}{\mathbb{P}(\sigma < \infty)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(\sigma = \infty)\mathbb{E}\,\tau \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(U \geq x + m)}{\mathbb{P}(\sigma < \infty)}\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\,U} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(U \geq x + m)\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\,C(1)} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(U \geq x + m)\\ &=: 1 - H^C(x)\ . \end{aligned}\tag{4.8}$$

Pogledajmo sada nezavisnost slučajne varijable $\widehat{S}(\sigma - 1)$ i događaja $\{\sigma < \infty\}$. Uzmemo $z = 0$ i $x = 0$ u (4.6):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq y, \sigma < \infty) &= \mathbb{P}(\sigma = \infty, \widehat{\tau}_y = \infty)\mathbb{E}\,\tau \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(U \geq m)\\ &= \mathbb{P}(\sigma = \infty, \widehat{\tau}_y = \infty)\mathbb{E}\,\tau\mathbb{E}\,U\ .\end{aligned}$$

Kako je

$$\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq y, \sigma = \infty) = \mathbb{P}(\widehat{S}(\infty) \leq y, \sigma = \infty)\ ,$$

onda imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq y) &= \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq y, \sigma < \infty) + \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq y, \sigma = \infty)\\ &= (1 + \mathbb{E}\,\tau\mathbb{E}\,U)\mathbb{P}(\widehat{S}(\infty) \leq y, \sigma = \infty)\ .\end{aligned}$$

No, tada je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq y) \cdot \mathbb{P}(\sigma < \infty) &= (1 + \mathbb{E}\,\tau\mathbb{E}\,U) \cdot \mathbb{P}(\widehat{S}(\infty) \leq y, \sigma = \infty)\frac{\mathbb{E}\,\tau\mathbb{E}\,U}{1 + \mathbb{E}\,\tau\mathbb{E}\,U}\\ &= \mathbb{E}\,\tau \cdot \mathbb{E}\,U \cdot \mathbb{P}(\widehat{S}(\infty) \leq y, \sigma = \infty)\\ &= \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq y, \sigma < \infty)\ ,\end{aligned}$$

što znači da su $\widehat{S}(\sigma-1)$ i $\{\sigma<\infty\}$ nezavisni.

Označimo

$$\widetilde{G}(y) := \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-1)\le y)\ ,\quad y\in[0,\infty)\ .$$

Tada, koristeći rezultate (4.6), (4.7) i (4.8), pokazanu nezavisnost $\widehat{S}(\sigma-1)$ i $\{\sigma<\infty\}$ te oznaku $\widehat{S}(\sigma-1) := \widehat{S}(\infty)$ ako je $\sigma=\infty$, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-1)\le y, J^C\ge x|\sigma<\infty) &= \frac{\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-1)\le y, J^C\ge x, \sigma<\infty)}{\mathbb{P}(\sigma<\infty)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(\sigma=\infty, \widehat{\tau}_y=\infty)\mathbb{E}\,\tau\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}(U\ge x+m)}{\mathbb{P}(\sigma=\infty)\mathbb{E}\,\tau\mathbb{E}\,U}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\,U}\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}(U\ge x+m)\cdot\mathbb{P}(\widehat{\tau}_y=\infty|\sigma=\infty)\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\,U}\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}(U\ge x+m)\cdot\mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma-1)\le y)\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\,U}\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}(U\ge x+m)\cdot\widetilde{G}(y)\ . \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Nama zapravo treba preskok J, a ne samo J^C - no, zbog nezavisnosti procesa C i Z, njega možemo izraziti kao

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(J>x|\sigma<\infty) &= \mathbb{P}(J^C-W(\sigma)-c>x|\sigma<\infty)\\
&= \mathbb{P}(J^C-W(\sigma)>x+c|\sigma<\infty)\\
&= \sum_{l=1}^{\infty} q_l\mathbb{P}(J^C>x+c-l|\sigma<\infty)\ .
\end{aligned}$$

Iz ovog je prikaza također jasno kako drift c ulazi u čitavu formulu. No, kako bismo konačan rezultat usporedili s onima koji slijede kasnije, pokušajmo sada pogledati malo jednostavniji slučaju, dakle, kada nemamo drifta c, a ostale su pretpostavke iste. Sada je

$$X := Z-C$$

pa imamo

$$J = J_1 = \widehat{S}(\sigma_1)-\widehat{S}(\sigma_1-1) = J^C + (-W(\sigma_1))\ ,$$

$$\widehat{S}(\infty) = L_0+J_1+L_1+\ldots+J_N+L_N\ ,$$

gdje je

$$N\sim G(p)\ ,\quad p=\mathbb{P}(\sigma_1<\infty)\ .$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widehat{S}(\infty) \leq x) &= \mathbb{P}(L_0 + J_1 + L_1 + \ldots + J_N + L_N \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(L_0 + J_1 + L_1 + \ldots + J_n + L_n \leq x, N = n) \ .\end{aligned}$$

Za to nam je potrebno (uz oznaku $\sigma := \sigma_1$):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_0 \leq x, N = 0) &= \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq x, N = 0) \\ &= \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq x, \sigma = \infty) \\ &= \widetilde{G}(x) \cdot \mathbb{P}(\sigma = \infty) = \widetilde{G}(x) \frac{1}{\mathbb{E}\,\tau \mathbb{E}\,U + 1} \ ,\end{aligned}$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti koristili pokazanu nezavisnost.

Stoga je, koristeći (4.9):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_0 \leq x \ , \ J_1 \leq y | \sigma < \infty) &= \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq y \ , \ J \leq x \mid \sigma < \infty) \\ &= \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq x \ , \ J^C + (-W(\sigma)) \leq y \mid \sigma < \infty) \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq x \ , \ J^C + n \leq y \ , \ W = n \mid \sigma < \infty) \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq x \ , \ J^C \leq y - n \mid \sigma < \infty) \cdot q_n \\ &= \widetilde{G}(x) \cdot \sum_{n=-1}^{\infty} q_n (1 - \frac{1}{\mathbb{E}\,\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(U \geq y - n + m)) \\ &= \widetilde{G}(x) \cdot \sum_{n=-1}^{\infty} q_n H^C(y - n) \ .\end{aligned}$$

Odnosno,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_0 \leq x \ , \ J_1 \leq y \ , \ \sigma < \infty) &= \mathbb{P}(L_0 \leq x \ , \ J_1 \leq y \mid \sigma < \infty) \mathbb{P}(\sigma < \infty) \\ &= \widetilde{G}(x) \frac{\mathbb{E}\,\tau \mathbb{E}\,U}{1 + \mathbb{E}\,\tau \mathbb{E}\,U} \sum_{n=-1}^{\infty} q_n H^C(y - n) \ .\end{aligned}$$

Dakle, imamo:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(L_0 + J_1 + L_1 \ldots + J_n + L_n \leq x, N = n) \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\,\tau \mathbb{E}\,U + 1} \big(\frac{\mathbb{E}\,\tau \mathbb{E}\,U}{\mathbb{E}\,\tau \mathbb{E}\,U + 1}\big)^n (\widetilde{G}^{(n+1)*} * (\sum_{n=-1}^{\infty} q_n H^C(y - n))^{n*})(x) \ ,\end{aligned}$$

odnosno, ponovno rezultat Pollaczek-Khincinovog tipa.

Teorem 4.1.1 *Neka je $X = C - Z$, gdje su C i Z slučajne šetnje definirane kao na početku poglavlja. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}\, X(1) > 0$ i označimo*

$$H^C(u) := \frac{1}{\mathbb{E}\, U} \sum_{m=0}^{u} \mathbb{P}(U \geq m) \quad i \quad \widetilde{G}(v) := \mathbb{P}(\widehat{S}(\sigma - 1) \leq v) \ , \quad u, v \in [0, \infty) \ .$$

Tada za $x \geq 0$ i $\tau := \inf\{n > 0 : X(n) > 0\} = \inf\{n > 0 : X(n) \geq 1\}$, vrijedi

$$\mathbb{P}(\widehat{S}(\infty) \leq x) = \frac{1}{\mathbb{E}\, \tau \mathbb{E}\, U + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \big(\frac{\mathbb{E}\, \tau \mathbb{E}\, U}{\mathbb{E}\, \tau \mathbb{E}\, U + 1}\big)^n \big(\widetilde{G}^{(n+1)*} * \big(\sum_{m=0}^{\infty} q_m H^C(\cdot - m)\big)^{n*}\big)(x) \ .$$

4.2 Neki rezultati teorije fluktuacije za skip-free slučajne šetnje

Pogledajmo sada kako nam za bilo kakve daljnje rezultate, koje bismo željeli dobiti kao analogon onih u neprekidnom slučaju, struktura skip-free slučajne šetnje postaje uvjet koji ne možemo izostaviti. Preciznije, u ovom potpoglavlju pokazat ćemo kako za upravo tu klasu slučajnih šetnji možemo dobiti analogone rezultata za spektralno negativne Lévyjeve procese. Iz konstrukcije će biti jasno zašto oni vrijede samo za ovu klasu slučajnih šetnji.

1. korak:

Promatrat ćemo analogon spektralno negativnog procesa u diskretnom slučaju, tj. slučajnu šetnju $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ koja ima priraste $W(1) \sim \begin{pmatrix} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \cdots & q_2 & q_1 & q_0 & \rho \end{pmatrix}$.

Analogon subordinatora, C, ima pak priraste $U(1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$.

To znači da je ukupan proces,

$$X(n) := Z(n) - C(n) \ , \quad n \geq 0 \ ,$$

također diskretan analogon spektralno negativnog procesa i ima skokove prema gore najviše visine 1. Iz toga slijedi da proces X, kada 'ide prema gore', mora pogoditi svaku razinu $x > 0$ preko koje prijeđe.

Također, i dalje pretpostavljamo da je $\mathbb{E}\, X(1) > 0$. Ispostavit će se pak da bi uvođenje drifta c u model donijelo formalne komplikacije u račun. Naime, drift u diskretnom slučaju uzrokuje da ovakva slučajna šetnje može preskočiti neki nivo $x > 0$ bez da ga točno pogodi - a to bi predstavljalo problem u *3.* i *4. koraku* našeg računa, kao što ćemo detaljno vidjeti.

Napomenimo još da koristimo opet iste oznake kao u početku poglavlja, tako da nam primjerice S opet označava proces supremuma od X, I proces infimuma, itd.

2.korak:

Uzmimo neko nezavisno geometrijsko vrijeme na $\mathbb{Z}_+$, $\tau(q) \sim G(q)$, $q \in (0,1)$. Dakle,

$$\mathbb{P}(\tau(q) = k) = p(1-p)^k = pq^k \ , \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

Sa $T(x)$ označimo prvo vrijeme kada proces X prijeđe razinu $x \geq 0$, tj.

$$T(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ X(n) > x\} \ .$$

Tada, koristeći Fubinijev teorem, imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{\tau(q)} > x) = \mathbb{P}(T(x) \leq \tau(q)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T(x) \leq n)\mathbb{P}(\tau(q) = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T(x) \leq n) pq^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(T(x) = m) pq^n \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T(x) = m) \sum_{n=m}^{\infty} pq^n = p \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T(x) = m) \sum_{n=m}^{\infty} q^n \\
&= p \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T(x) = m) q^m \frac{1}{1-q} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T(x) = m) q^m \\
&= \mathbb{E}\left[q^{T(x)}\right] ,
\end{aligned}$$

gdje smo u 2. retku iskoristili činjenicu da je $\mathbb{P}(T(x) = 0) = 0$ pa stoga krećemo od $n = 1$ u sumaciji. Ovo nas upućuje da, umjesto funkcija generatora momenata, promatramo funkcije izvodnice, koje su i prirodnije za diskretan slučaj. One su dobro definirane ako ih promatramo u varijabli s, $|s| < 1$.

3. korak:

Pogledajmo sada pobliže svojstva procesa $\{T(x)\}_{x \geq 0}$. Uočimo da x ovdje poprima diskretne vrijednosti, tj. $x = 0,1,2,3,\ldots$

Promatrajmo proces $\{e^{\phi(\lambda)X(n) - \lambda n}\}_{n \geq 0}$, gdje je

$$\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}\left[e^{\lambda X(1)}\right] ,$$

ψ je strogo rastuća na $[0,\infty)$ budući da je $\mathbb{E}\, X_1 > 0$ i

$$\phi = \psi^{-1}$$

je njen inverz (dakle, ϕ je inverz eksponenta funkcije izvodnice momenata za X). Uočimo da je tada

$$\mathbb{E}\left[e^{\phi(\lambda)X(n)}\right] = e^{\lambda n} \ .$$

Zbog nezavisnosti i stacionarnosti prirasta, proces $\{e^{\phi(\lambda)X(n)-\lambda n}\}_{n\geq 0}$ je martingal pa prema teoremu o opcionalnom zaustavljanju imamo

$$\mathbb{E}\,[e^{\phi(\lambda)X(T(x)\wedge n)-\lambda(T(x)\wedge n)}] = 1\ .$$

Kako je

$$\phi(\lambda)X(T(x)\wedge n) - \lambda(T(x)\wedge n) \leq \phi(\lambda)X(T(x)) = \phi(\lambda)(x+1)$$

i

$$\phi(\lambda)X(T(x)\wedge n) - \lambda(T(x)\wedge n) \to \phi(\lambda)(x+1) - \lambda T(x) \ \text{ na } \ \{T(x)<\infty\}\ ,$$

onda prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji imamo

$$\mathbb{E}\,[e^{-\lambda T(x)}\ ;\ T(x)<\infty] = e^{-(x+1)\phi(\lambda)}\ .$$

Uočimo ovdje da je $\mathbb{P}(T(x)<\infty)=1$, budući da je $\mathbb{E}\,X(1)>0$ (i stoga $X\to+\infty$). Također, uočimo da smo u gornjem računu direktno koristili našu pretpostavku da je X skip-free slučajna šetnja, obzirom da je jedino u tom slučaju moguće zaključiti da nužno

$$\lim_{n\to\infty} X(T(x)\wedge n) = x+1\ .$$

Uz druge pretpostavke, ovakav zaključak ne bi bio moguć.

Gornji račun nam daje da je eksponent funkcije izvodnice momenata za proces $\{T(x)\}$ jednak $\phi(=\psi^{-1})$.

Sada imamo, koristeći rezultat iz *2. koraka*, da je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{\tau(q)}>x) &= \mathbb{E}\,[q^{T(x)}] = \mathbb{E}\,[e^{-(-\log q)\cdot T(x)}]\\ &= e^{-(x+1)\phi(-\log q)} = (q^{\frac{-\phi(-\log q)}{\log q}})^{x+1}\ ,\end{aligned}$$

tj.

$$S_{\tau(q)} \sim G(q^{\frac{-\phi(-\log q)}{\log q}})$$

je geometrijska slučajna varijabla na $\mathbb{Z}_+$ s parametrom $q^{\frac{-\phi(-\log q)}{\log q}}$.

4. korak:

Definirajmo prvo lokalno vrijeme u maksimumu za slučajnu šetnju. Neka je $L_0=0$ i

$$L_k = card\{j\in\{1,2,\ldots,k\}\ :\ X(j-1)<X(j)\ ,\ X(j)=\max_{i\leq j} X(i)\}\ ,$$

tj. L_k je broj trenutaka do trenutka k kada je slučajna šetnja bila u svom (strogo novom) maksimumu.

Strogo rastući proces V ljestvičastog vremena od X je onda definiran sa $V_0 = 0$ i

$$V_{k+1} = \min\{j > V_k \; : \; X(j) > X(V_k)\} \; ,$$

dok je, također strogo rastući, proces ljestvičastih visina dan sa

$$H_k = X(V_k) \;\text{ za }\; V_k < \infty \;\text{ i }\; H_k = \infty \;\text{ za }\; V_k = \infty \; .$$

Očito je onda inverz lokalnog vremena, L^{-1}, jednak promatranom procesu $\{T(x)\}_{x\geq 0}$, preciznije

$$L^{-1}(n) = T(n-1) \; , \quad n \geq 1 \; .$$

Sa $\kappa(\alpha, \beta)$ označimo dvodimenzionalni Laplaceov eksponent procesa (L^{-1}, H). Obzirom da proces ima prema gore skok najviše visine 1, očito mora pogoditi sve pozitivne vrijednosti koje preskoči. Stoga je

$$H(n) = X(T(n-1)) = n \; , \quad n \in \mathbb{N}$$

i uočimo da je ovo mjesto na kojem opet direktno koristimo strukturu skip-free slučajne šetnje, tj. činjenicu da joj možemo kontrolirati skokove s jedne strane. Koristeći ovo opažanje, dobivamo

$$\begin{aligned} e^{-\kappa(\alpha,\beta)} &= \mathbb{E}\left[e^{-(\alpha L^{-1}(1)+\beta H(1))}\right] = e^{-\beta} \cdot \mathbb{E}\left[e^{-\alpha L^{-1}(1)}\right] = \\ &= e^{-\beta} \cdot e^{-\phi(\alpha)} \; , \end{aligned}$$

što je posljedica računa iz *3. koraka*.

Stoga je

$$\kappa(\alpha, \beta) = \phi(\alpha) + \beta \; .$$

5. korak:

Definirajmo

$$G := \min\{k = 0, 1, \ldots, \tau(q) \; : \; X(k) = \max_{0\leq k\leq \tau(q)} X(j)\} \quad \text{i}$$

$$D := \max\{k = 0, 1, \ldots, \tau(q) \; : \; X(k) = \min_{0\leq k\leq \tau(q)} X(j)\} \; .$$

Dakle, G je prvi trenutak na $[0, \tau(q)]$ kad je slučajna šetnja X u svom maksimumu, a D posljednji trenutak na $[0, \tau(q)]$ kad je u svom minimumu. Tada vrijedi sljedeći rezultat.

Lema 4.2.1 *Uz oznake kao gore, (G, X_G) je nezavisno sa $(\tau(q) - G, X_{\tau(q)} - X_G)$ i oba para su beskonačno djeljiva. Osim toga, $(\tau(q) - G, X_{\tau(q)} - X_G)$ ima jednaku distribuciju kao i (D, X_D).*

Za detalje (dokaz gornje leme i općenito o Wiener-Hopfovoj faktorizaciji za slučajne šetnje) vidjeti npr. [Kyp2, Teorem 1.1.].

No, iz ove leme je odmah vidljiva 'faktorizacija' (uz oznaku $\tau = \tau(q)$ zbog jednostavnijeg zapisa):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{i\alpha\tau+i\beta X_\tau}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{i\alpha G+i\beta S_\tau}\right]\cdot\mathbb{E}\left[e^{i\alpha D+i\beta I_\tau}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[e^{i\alpha G+i\beta S_\tau}\right]\cdot\mathbb{E}\left[e^{i\alpha(\tau-G)+i\beta(X-S_\tau)}\right] ,\end{aligned}$$

za $\alpha\,,\beta\in\mathbb{R}$.
Sada možemo formulirati analogon Teorema 2.5.3. za skip-free slučajne šetnje, na način kako je to napravljeno u [Vid, Teorem 3.9.]. Mogli bismo, također, pokušati provesti račun kao u neprekidnom slučaju, u poglavlju 3.2., no metoda Laplaceove transformacije se pokazala neučinkovitom u ovom slučaju. Naime, potrebno je, kao u [Vid], 'uklopiti' neprekidnu zdesna slučajnu šetnju u skip-free Lévyjev lanac čiji je lanac skokova upravo ta neprekidna zdesna (skip-free) slučajna šetnja. No, to nam onemogućava direktnu faktorizaciju Laplaceovog eksponenta baš za samu slučajnu šetnju, nego nas vraća u specijalan slučaj Teorema 2.5.3. Razlog za to je možda i jasan, obzirom da je gornja metoda prilagođena upravo neprekidnom, a ne diskretnom okruženju. Stoga ćemo u idućem odjeljku pokušati ovom diskretnom modelu pristupiti na njemu malo prirodniji - kombinatorni način.

4.3 Pristup preko Tákacseve formule

Promatrajmo ponovno slučajnu šetnju

$$(cn - C(n) + Z(n)\ :\ n\geq 0)\ ,$$

gdje su C i Z opet slučajne šetnje kao na početku ovog poglavlja (dakle, C je diskretni analogon subordinatora, a Z je neprekidna zdesna slučajna šetnja).

Pokušat ćemo ponovno dobiti rezultate Pollaczek-Khinchinovog tipa (ili barem slične vezane uz vjerojatnost propasti i distribuciju supremuma ovog generaliziranog procesa rizika u diskretnom slučaju), ali koristeći malo drugačiji pristup. Naime, u poglavljima 4.1. i 4.2. slijedili smo pristup koji je bio diskretizacija računa dobivenog u neprekidnom modelu. Ovdje ćemo pokušati pristupiti problemu koristeći kombinatorni pristup.

Prije nego što započnemo s računom, uvedimo još jednu generalizaciju procesa rizika u naše promatranje. Naime, slijedeći [HPSV2], promatrajmo što se događa kada još malo poopćimo proces C, tj. kada uzmemo da je

$$C(n) = C^1(n) + \cdots + C^m(n)\ ,\quad n\geq 0\ ,\quad m\in\mathbb{N}\ ,$$

gdje su sve C^i neopadajuće slučajne šetnje (kao C u definiciji s početka ovog poglavlja). Na ove komponente od C možemo gledati kao na nezavisne rizične portfelje koji se natječu u uzrokovanju propasti. Zbog jednostavnosti notacije, mi ćemo promatrati samo slučaj kada je

$$C(n) = C^1(n) + C^2(n)\ ,\quad n\geq 0$$

jer je jasno da se on vrlo lako poopći na slučaj kada imamo $m>2$ komponenti u C.

Dakle, neka su C^1 i C^2 dvije nezavisne slučajne šetnje koje imaju neopadajuće priraste i za koje je $\mathbb{E}\, C^i < \infty$, $i = 1, 2$.

Krenimo prvo od

$$X(n) = cn - C(n)\ , \quad n \geq 0\ .$$

Koristit ćemo opet standardne oznake: $\widehat{X} = -X$, $\widehat{\tau}_x = \inf\{n \geq 0 \ : \ \widehat{X}(n) \geq x\}$ za prvo vrijeme prelaska slučajne šetnje $\widehat{X}$ preko razine $x \in \mathbb{N}_0$ te

$$\Delta C^i(n) = C^i(n) - C^i(n-1) \ \text{ za } \ i = 1, 2$$

i

$$\Delta C(n) = C(n) - C(n-1)$$

za skokove šetnja C^1, C^2 te C, $n \geq 0$.

Za $x > 0$ i $y \leq 0$ možemo gledati vjerojatnost događaja da slučajna šetnja $\widehat{X}$ u nekom trenutku $n \geq 1$ prvi puta prijeđe preko razine nula, s time da se u trenutku prije nalazila u stanju $y \leq 0$, a prvo stanje u koje je skočila pri prelasku barijere nula je neko stanje $x > 0$. Uočimo da tako nešto ima smisla jer $\widehat{X}(n) = C^1(n) + C^2(n) - cn$ 'prema gore' (zbog toga kako su definirani prirasti slučajnih šetnji C^1 i C^2) može skočiti bilo kakvim pozitivnim koracima. Dakle, kad npr. prelazi razinu nula, $\widehat{X}$ može skočiti u bilo koje x veće ili jednako 1.

Za to nam je prvo potrebno nekoliko pomoćnih rezultata iz teorije skip-free slučajnih šetnji.

4.3.1 Pomoćni rezultati

Prvi koji ćemo promotriti je Takácsev rezultat, a zapisat ćemo ga u obliku dviju lema. On zapravo daje da za *skip-free* slučajnu šetnju, ukoliko znamo njenu poziciju u nekom trenutku n i ona je jednaka nekom k, možemo točno odrediti vjerojatnost da se ta šetnja do trenutka n nalazila ispod nule (odnosno iznad, ovisno o tome gledamo li slučajnu šetnju koja je neprekidna slijeva ili zdesna) i ta vjerojatnost iznosi točno $\frac{k}{n}$.

Tákacsevi rezultati spadaju u vrlo općenitu klasu glasačkih (*ballot*) teorema. Prvi rezultat tog tipa potječe još od *Bertranda* (1887.)

Teorem 4.3.1 *Pretpostavimo da postoje dva kandidata u nekom procesu glasovanja u kojem ima ukupno n glasača. Kandidat A dobiva a glasova i pobjeđuje kandidata B koji je dobio b glasova. Tada je vjerojatnost da tijekom prebrojavanja glasova kandidat A bude uvijek u prednosti pred kandidatom B jednaka* $\frac{a-b}{a+b} = \frac{a-b}{n}$.

Bertrandov dokaz sastojao se samo u opažanju sljedeće činjenice: ako sa $P_{a,b}$ označimo broj 'povoljnih' ishoda, tj. onih u kojima A dobiva a glasova, a B b glasova i A uvijek vodi tijekom prebrojavanja, tada je $P_{a+1,b+1} = P_{a+1,b} + P_{a,b+1}$. To je induktivna vrsta dokaza, a Bertrand je uz njega postavio i pitanje za direktnim dokazom svoje tvrdnje. Još iste godine *Emile Barbier* je postavio (ali, ne i dokazao) i općenitiju tvrdnju.

Teorem 4.3.2 *Ako je $a > km$ za neki $k \in \mathbb{N}$, onda je vjerojatnost da A uvijek tijekom prebrojavanja ima k puta više glasova nego B jednaka $\frac{a-kb}{a+b}$.*

Prvi formalni dokaz Bertrandove tvrdnje (dakle, slučaja kad je $k = 1$) dao je *Désiré André* 1923. Koristio je drugačiju tehniku od one Bertrandove induktivne, a u grubo bismo je mogli (zajedno s ostalim varijacijama koje su se kasnije pojavile) svrstati u kategoriju dokaza glasačkog teorema metodom prebrojavanja loših ishoda. André je postavio bijekciju između nepovoljnih ishoda koji počinju glasom za A i nepovoljnih ishoda koji počinju glasom za B. Naime, ako promatramo a glasova koji su označeni sa A i b glasova koji su označeni sa B, onda svaka permutacija glasova koja započinje sa B je loša (jer već u prvom koraku prebrojavanja A ne vodi), a znamo da takvih ima $\binom{a+b-1}{a}$. Sada se može uspostaviti bijekcija između loših permutacija koje započinju sa A i svih permutacija a A-ova i $b-1$ B-ova. Kako je i tih $\binom{a+b-1}{a}$, onda zaključujemo da je ukupno $2 \cdot \binom{a+b-1}{a}$ loših permutacija glasova, odnosno $\binom{a+b}{a} - \binom{a+b-1}{a}$ povoljnih ishoda (dobrih permutacija). Kad se taj izraz pak pojednostavi, dobiva se upravo željena formula. Kasnije su se javile brojne varijacije ovog tipa dokaza, od koje je možda najelegantnija ona koja koristi metodu refleksije. Međutim, ta se metoda pokazala kao nekorisna u slučaju kad je $k > 1$, tj. Teorema 4.3.2.

Aeplli je dokazao i općeniti glasački teorem (rezultat za $k \geq 1$, Teorem 4.3.2. kod nas), argumentom sličnim onom Andréovom. Kasnije se pokazalo da se i taj općenitiji rezultat može pokazati postavljanjem slične rekurzije kao što je Bertrandova.

Uskoro se pojavilo još novih tehnika dokazivanja tog rezultata, od njih spomenimo možda pristup *Dvoretzkyja* i *Motzkina* (1947.). Oni su dokazali glasački teorem uvođenjem tzv. *cikličke leme*: za bilo koji niz od a glasova za A i b glasova za B točno je $a - kb$ od ukupno $a + b$ cikličkih permutacija tog niza dobro, tj. povoljno. Ova lema zapravo predstavlja kombinatorni analogon *Lagrangeove formule inverzije*, koja se može naći na iznimno mnogo mjesta. Pogledajmo pobliže ovaj dokaz, obzirom da će nam slična tehnika biti važna u dokazivanju još jednog pomoćnog rezultata.

Dakle, pretpostavimo da glasove promatramo kao niz od $a + b$ članova od kojih je svaki jednak $+1$ (ovo odgovara glasu za A) ili $-k$ (ovo odgovara glasovima za B). Za niz kažemo da je *dobar* ako mu je svaka parcijalna suma pozitivna, a *loš* inače. Suma ovakvog niza očito je jednaka $a - kb$ i ona je veća ili jednaka od nula jer smo pretpostavili da A pobjeđuje za više od kb glasova. Neka je C bilo koja ciklička permutacija tih a jedinica i b $(-k)$-ova. Želimo pokazati da od $a + b$ članova u C, točno njih $a - kb$ započinje dobar niz.

Postupimo na sljedeći način: iz C izbacimo sve podnizove oblika $1, 1, \ldots, 1, -k$ u kojima ima k uzastopnih jedinica. Uočimo da niti jedan član takvog podniza ne može započinjati dobar niz jer kad dođemo do $-k$, dobili bismo parcijalnu sumu ≤ 0. Označimo sa C' novi niz glasova koji dobijemo kad iz C izbacimo sve podnizove gornjeg oblika. Kako takvi podnizovi imaju sumu nula, onda njihovim izbacivanjem nismo umanjili broj dobrih nizova. Dakle, član u C' započinje dobar niz ako i samo ako taj član započinje dobar niz u C, tj. C i C' imaju isti broj članova koji započinju dobar niz. Tako nastavimo izbacivati podnizove gornjeg oblika, dok nam ne ostane samo niz jedinica. U tom trenutku imamo

$a - kb$ jedinica (a ih je bilo ukupno na početku, a kb smo ih izbacili ovakvim načinom izbacivanja jer smo izbacivali po k uzastopnih jedinica sa svakim $-k$) pa, kako je ukupan broj cikličkih permutacija ovakvog niza jednak $a + b$, dokazali smo tvrdnju leme.

Ova posljednja navedena tehnika dokazivanja glasačkog teorema vrlo je značajna i zato što ona prvi puta uvodi ideju cikličke permutacije u dokazivanje rezultata tipa glasačkih teorema, a pozadina te priče bliska je onome što znamo kao jako Markovljevo svojstvo slučajne šetnje. Naime, sva gornja opažanja mogu se izraziti u terminima slučajne šetnje koja poprima vrijednosti u skupu $\mathbb{Z}$. Teorem 4.3.1. tada samo kaže da ako znamo poziciju slučajne šetnje R (kojoj priraste gledamo kao +1 = glas za A i -1=glas za B) u nekom trenutku t, $R(t) = h > 0$, onda je vjerojatnost da je $S(i) > 0$ za svako $i = 1, 2, \ldots, t$ (tj. A vodi u svakom prebrojavanju glasova) upravo $\frac{h}{t}$.

1962. *Lajos Takács* dokazao je niz vrlo općenitih teorema glasačkog tipa, spomenut ćemo samo onaj koji ćemo direktno koristiti, za detalje vidjeti [Tak].

Lema 4.3.3 *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ ciklički izmjenjive slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}$ i koje ne poprimaju vrijednost veću od 1. Neka je $R(i) = \xi(1) + \ldots + \xi(i)$, $1 \leq i \leq n$. Tada za svako $0 \leq k \leq n$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(R(i) > 0 \textit{ za svako } 1 \leq i \leq n \mid R(n) = k) = \frac{k}{n} .$$

Napomenimo da za slučajne varijable $\xi_1, \ldots, \xi_n$ kažemo da su **izmjenjive** ako za svako $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ i sve permutacije σ od $\{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(\xi_i \leq r_i \text{ za svako } 1 \leq i \leq n\ ) = \mathbb{P}(\xi_i \leq r_{\sigma(i)} \text{ za svako } 1 \leq i \leq n\ ) .$$

Za $\xi_1, \ldots, \xi_n$ kažemo da su **ciklički izmjenjive** ako gornja jednakost vrijedi za svaku cikličku permutaciju σ od $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Očito, ako su varijable $\xi_1, \ldots, \xi_n$ izmjenjive, onda su i ciklički izmjenjive, dok obrat ne mora vrijediti. Ova lema, zajedno sa navedenom cikličkom lemom, pokazuje da ciklička izmjenjivost ili nešto slično možda predstavlja bit ovih glasačkih teorema. Napomenimo još da je Takacs svoje rezultate originalno izrazio u terminima slučajnih varijabli $(1 - \xi_1), (1 - \xi_2), \ldots, (1 - \xi_n)$ i pripadajuće slučajne šetnje.

Prije nego dokažemo gornju lemu, napomenimo važnu činjenicu da svi navedeni rezultati imaju dvije ključne pretpostavke koje se ne mogu ispustiti, a to je da: se odnose samo na slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}$ i da te slučajne varijable moraju biti omeđene sa jedne (ili obiju) strane (strana). Ukoliko ovaj drugi uvjet nije ispunjen, lako se konstruira kontraprimjer za rezultat gornje leme. Recimo, ako uzmemo da prirasti naše slučajne šetnje mogu poprimiti vrijednosti -4, -1, 1 i 4 i znamo da je $S_3 = 2$, onda se to jedino može dogoditi u slučaju kada je $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \{4, -1, -1\}$. Da bi vrijedilo $R_i > 0$ za svako $i = 1, 2, 3$, mora očito ova 4 biti baš na prvom mjestu. Vjerojatnost da se to desi je 1/3, a prema Lemi 4.3.3. ona bi trebala biti jednaka $R_3(\omega)/n = 2/3$. Ipak, neka oslabljenja su moguća, za detalje vidi [BR].

Da bismo dokazali Lemu 4.3.3. na način kako je to napravio Takács, treba nam prvo sljedeći rezultat.

Lema 4.3.4 *Neka je $\varphi(u)$, $u = 0, 1, 2, \ldots$ neopadajuća funkcija za koju vrijedi $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(t+u) = \varphi(t) + \varphi(u)$, za $u = 0, 1, 2, \ldots$, gdje je $t \in \mathbb{N}$. Definirajmo*

$$\delta(u) = \begin{cases} 1, & v - \varphi(v) > u - \varphi(u) \text{ za } v > u; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je

$$\sum_{u=1}^{t} \delta(u) = \begin{cases} t - \varphi(t), & 0 \leq \varphi(t) \leq t; \\ 0, & \varphi(t) \geq t. \end{cases}$$

Dokaz.

1. slučaj: $\varphi(t) > t$

Uočimo da je $\delta(0) = 0$ jer ne može vrijediti da je $v - \varphi(v) > 0 - \varphi(0) = 0$ za svako $v > u = 0$ kada je za $t > 0$ $t - \varphi(t) < 0$ po pretpostavci ovog slučaja. Nadalje, da bi $\delta(1)$ bilo jednako 1, moralo bi biti $v - \varphi(v) > 1 - \varphi(1)$ za svako $v > 1$. No, $t + 1 > 1$ jer je $t > 0$ pa bi to značilo i da je $(t+1) - \varphi(t+1) > 1 - \varphi(1)$, što korištenjem svojstva funkcije φ ($\varphi(t+u) = \varphi(t) + \varphi(u)$, za svako $u \geq 0$) daje $(t+1) - \varphi(t) - \varphi(1) > 1 - \varphi(1)$, tj. $\varphi(t) < t$, a to bi bilo u kontradikciji s pretpostavkom ovog slučaja. Dakle je $\delta(1) = 0$ i analogno se dobiva da je $\delta(u) = 0$ za svako $0 \leq u \leq t$ pa je i tražena suma jednaka 0.

2. slučaj: $0 \leq \varphi(t) \leq t$

Definiramo $\psi(u) = \inf\{v - \varphi(v)\ ,\ v \geq u\}$, $u = 0, 1, 2 \ldots$.

Prvo uočimo da je (opet koristeći da je $\varphi(u+t) = \varphi(u) + \varphi(t)$)

$$\begin{aligned} \psi(u+t) &= \inf\{v - \varphi(v)\ :\ v \geq u+t\} \\ &= \inf\{u + t - \varphi(u+t), u + t + 1 - \varphi(u+t+1), u + t + 2 - \varphi(u+t+2), \ldots\} \\ &= \inf\{u + t - \varphi(u) - \varphi(t), u + 1 + t - \varphi(u+1) - \varphi(t), u + 2 + t - \varphi(u+2) - \varphi(t), \ldots\} \\ &= \inf\{t - \varphi(t) + u - \varphi(u), t - \varphi(t) + (u+1) - \varphi(u+1), \ldots\} \\ &= t - \varphi(t) + \inf\{v - \varphi(v)\ :\ v \geq u\} \\ &= t - \varphi(t) + \psi(u)\ . \end{aligned}$$

Osim toga je

$$\psi(u+1) - \psi(u) = \inf\{v - \varphi(v)\ :\ v \geq u+1\} - \inf\{v - \varphi(v)\ :\ v \geq u\}\ ,$$

a ukoliko razlučimo da li se infimum funkcije $v - \varphi(v)$ postigao prije ili poslije trenutka u, onda u drugom slučaju dobivamo da su oba ova infimuma jednaka, tj. gornja je razlika 0, a to je pak jednako $\delta(u)$ jer je i ona u ovom slučaju jednaka 0. Isto se razloži i prvi slučaj pa dobivamo da je

$$\psi(u+1) - \psi(u) = \delta(u) \ .$$

Sad je

$$\begin{aligned}\sum_{u=1}^{t} \delta(u) &= \sum_{u=1}^{t} (\psi(u+1) - \psi(u)) = \\ &= \psi(t+1) - \psi(1) = t - \varphi(t)\end{aligned}$$

i time je tvrdnja leme dokazana i za ovaj slučaj. ■

Dokažimo sada i Lemu 4.3.3. Izreći ćemo je i dokazati u originalnom obliku kako je to napravio Takacs, dakle, gledat ćemo zapravo slučajne varijable $\gamma_1 := 1 - \xi_1$, $\gamma_2 := 1 - \xi_2$, ... i pripadajuću slučajnu šetnju R koja je sada neopadajuća, a njeni prirasti γ_i poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}$ i ciklički su izmjenjive slučajne varijable. Pokazujemo da je tada

$$\mathbb{P}(R(u) \leq u \ : \ 0 \leq u \leq n | R(n)) = \begin{cases} 1 - \frac{R(n)}{n}, & 0 \leq R(n) \leq n; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dokaz Leme 4.3.3.

Pridružimo procesu $(R(u) \ : \ 0 \leq u \leq n)$ proces na $(0, \infty)$, $(R^*(u) \ : \ 0 \leq u < \infty)$ t.d. je $R^*(u) = R(u)$, za $0 \leq u \leq n$ i $R^*(n+u) = R^*(n) + R^*(u)$, za $u \geq 0$. Definiramo

$$\delta(u) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } v - R^*(v) \geq u - R^*(u) \text{ za svako } v \geq u; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je $\delta(u)$ slučajna varijabla i ima jednaku distribuciju za svako $u \geq 0$. Sada je

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(R(u) \leq u \ , \ 0 \leq u \leq n | R(n)) = \mathbb{P}(R^*(u) \leq u \ , \ u \geq 0 | R(n)) \\ &= \mathbb{E}\,[1_{\{v - R^*(v) \geq 0 \ , \ \forall v \geq 0\}} | R(n)] = \mathbb{E}\,[\delta^*(0) | R(n)] = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{u=1}^{n} \mathbb{E}\,[\delta^*(u) | R(n)] = \mathbb{E}\,[\frac{1}{n} \cdot \sum_{u=1}^{n} \delta^*(u) | R(n)] \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{R(n)}{n}, & 0 \leq R(n) \leq n; \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}\end{aligned}$$

gdje smo koristili činjenicu da je $\delta^*(u)$ za $u \geq 0$ uvjetno da znamo poziciju $R(n)$ jednako distribuirano kao $\delta(u)$, $0 \leq u \leq n$ te rezultat Leme 4.3.4. ■

Ranije smo već pokazali da vrijedi sljedeći rezultat (za detalje vidi (4.5) i račun koji prethodi).

Lema 4.3.5 *(formula kompenzacije za diskretan slučaj)*

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}(n,\omega,\Delta C_n^i(\omega))\Big)=\mathbb{E}\Big(\int_{(0,\infty)}\mathcal{H}(n,\omega,\varepsilon)dF_i(\varepsilon)\Big)\ ,$$

gdje je $\mathcal{H}$ nenegativna funkcija, a F_i funkcija distribucije prirasta slučajne šetnje C^i, $i = 1,2$.

Osim formule kompenzacije, trebat će nam i formula za jednakost mjera za diskretan slučaj. Dakle, ako sa

$$\tau(k)=\min\{n\geq 0\ :\ R(n)>k\}\ ,$$

$k>0$, označimo prvo vrijeme kada neprekidna zdesna slučajna šetnja R prijeđe neku razinu $k>0$, željeli bismo dobiti rezultat oblika

$$n\cdot\mathbb{P}(\tau(k)=n)=k\cdot\mathbb{P}(R(n)=k)\ ,\ n\geq 1\ .$$

I ova formula se dobiva se kao posljedica glasačkih teorema o kojima smo govorili, a u originalu se zove *hitting time teorem* i još *Kempermanova formula.* Ona zapravo kaže da ako znamo da se slučajna šetnja R u trenutku n nalazi u nuli (tj. $R(n)=0$), bez obzira na to kako su distribuirani prirasti te slučajne šetnje, ali uz uvjet da poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}$ i da su g.s. veći ili jednaki od -1, vjerojatnost da je ta šetnja u trenutku n prvi puta pogodila 0 jednaka je $\frac{k}{n}$, gdje je $k>0$ neka pozicija iz koje je šetnja R krenula. Direktna veza sa glasačkim teoremom je očita. Dokaz se onda može provesti, kao i kod glasačkog teorema, indukcijom ili, na primjer, koristeći varijantu kombinatorne formule (cikličke leme).

Pokušajmo sada pokazati željeni rezultat koristeći ovaj drugi pristup.

Lema 4.3.6 *(**Kombinatorna formula**) Neka je $(x_1,\ldots,x_n)$ konačan niz cijelih brojeva koji poprimaju vrijednosti veće ili jednake od -1 i pretpostavimo da je njihova ukupna suma jednaka $\sum_{i=1}^n x_i=-k$. Sa $\sigma_i(x)$ označimo opet cikličku permutaciju od x koja započinje sa x_i, tj. $\sigma_i(x)=(x_i,x_{i+1},\ldots,x_n,x_1,\ldots x_{i-1})$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Tada postoji točno k različitih indeksa $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ takvih da vrijedi*

$$\sum_{l=1}^{j}(\sigma_i(x))_l>-k\ ,\quad \textit{za svako } j=1,\ldots,n-1$$

i

$$\sum_{l=1}^{n}(\sigma_i(x))_l=-k\ ,$$

tj. postoji točno k različitih permutacija $\sigma_i(x)$ niza x takvih da je prvi puta tek suma svih n članova tog permutiranog konačnog niza $\sigma_i(x)$ jednaka $-k$.

Dokaz.

Naime, pogledajmo parcijalne sume s_j, $1\leq j\leq n$ i pronađimo najmanju od njih. Neka je s_m prva najmanja takva (tj. m najmanji indeks takav da je $s_m = \min_{1\le j\le n} s_j$). Sada uzmemo cikličku permutaciju $\sigma_m(x)$, dakle, onu koja započinje članom x_{m+1}, $\sigma_m(x) = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_m)$. Obzirom da je ukupna suma niza $-k$, onda ovakav niz $\sigma_m(x)$ pogodi $-k$ tek u trenutku n. Za $j = 1, 2, \dots, k$ označimo prva vremena udaranja razine $-j$ sa t_j, tj. $t_j := \min\{i \ge 1 \ :\ s_i = -j\}$. Uz isto rezoniranje kao malo prije, jasno je da šetnja $\sigma_i(x)$ prvi puta udari u $-k$ u trenutku n ako i samo ako je i jedan od t_j-ova, $j = 1, 2, \dots, k$, što dokazuje formulu. ■

Sada pogledajmo niz slučajnih varijabli $(\xi(1), \dots, \xi(n))$ i slučajnu šetnju $R(j) = \sum_{i=1}^{j} \xi(i)$, $R(0) = 0$ čiji su prirasti ciklički izmjenjivi. Sa T_{-k} označimo prvo vrijeme kada R dođe do razine $-k$, a sa $T_{-k}^{(i)}$ prvo vrijeme kad šetnja sa koracima $\sigma_i(\xi)$ pogodi prvi puta $-k$. Primjenom kombinatorne formule, tada vrijedi

$$\begin{aligned} n \cdot \mathbb{P}(T_{-k} = n | R(n) = -k) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[1_{\{T_{-k}=n\}} | R(n) = -k\right] \\ &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} 1_{\{T_{-k}=n\}} | R(n) = -k\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} 1_{\{T_{-k}^{(i)}=n\}} | R(n) = -k\Big) \\ &= k\ , \end{aligned}$$

gdje smo u pretposljednoj jednakosti koristili cikličku izmjenjivost prirasta slučajne šetnje R, a u posljednjoj jednakosti kombinatornu formulu (tj. činjenicu da postoji točno k permutacija koraka slučajne šetnje R sa svojstvom da tek u trenutku n prvi puta pogode razinu $-k$). Time smo pokazali *Kempermanovu formulu*, uz napomenu da ju je on u originalu pokazao za nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable pa ćemo je tako izreći, iako vidimo da je moguće i njeno poopćenje kao gore.

Lema 4.3.7 *Neka je R skip-free slučajna šetnja čiji su prirasti manji ili jednaki od jedan te $\tau(k)$ prvo vrijeme prijelaza preko razine $k > 0$ za tu slučajnu šetnju. Tada vrijedi:*

$$n \cdot \mathbb{P}(\tau(k) = n) = k \cdot \mathbb{P}(R(n) = k)\ ,\ n \ge 1\ .$$

4.3.2 Model s jediničnim driftom

Vratimo se sada na slučajnu šetnju X iz našeg modela, uz dodatnu pretpostavku da je drift $c = 1$. Dakle, promatramo

$$X(n) = n - C(n)\ ,\quad n \ge 0\ ,$$

skip-free slučajnu šetnju s prirastima koji su manji ili jednaki 1.

Ako označimo $\mu := \mathbb{E}\, C(1)$, $\mu_i := \mathbb{E}\, C^i(1)$, $i = 1, 2$, također pretpostavimo da je $\mathbb{E}\, X(1) = 1 - \mathbb{E}\, C(1) = 1 - \mu = 1 - (\mu_1 + \mu_2) > 0$, tj. $\mu < 1$. Pogledat ćemo kasnije što možemo reći o općenitom slučaju za $c > 1$.

Označimo sada

$$\widehat{S}(n) := \max_{0 \le s \le n} \widehat{X}(s)$$

i

$$\widehat{S}(\infty) := \max_{s \ge 0} \widehat{X}(s)$$

te

$$\sigma^{(1)} := \min\{n > 0 \ : \ \widehat{S}(n) > 0\} \ ,$$
$$\sigma^{(k)} := \min\{n > \sigma^{(k-1)} \ : \ \widehat{S}(n) > \widehat{S}(\sigma^{(k-1)})\} \ .$$

Tada je jasno

$$0 < \sigma^{(1)} < \sigma^{(2)} < \dots \ .$$

Definirajmo za $y \le 0$ i $x > 0$

$$\mathcal{H}(n, \omega, \varepsilon_i) = 1_{\{\widehat{X}(n-1)=y, \widehat{S}(n-1) \le 0\}} \cdot 1_{\{\varepsilon_i = x+1-y\}} \ .$$

U Lemi 4.3.5. imamo sad

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}(n, \omega, \Delta C^i(n)(\omega))\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y, \widehat{S}(n-1) \le 0, \Delta C^i(n) = x+1-y) \\
&= \mathbb{P}(\widehat{\tau}_0 < \infty, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0 - 1) = y, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0) \ge x, \Delta C^i(\widehat{\tau}_0) = x+1-y) \ .
\end{aligned}$$

U posljednjem retku imamo nejednakost $\widehat{X}(\widehat{\tau}_0) \ge x$, a ne jednakost jer u diskretnom slučaju komponente od C mogu istovremeno skakati - međutim, sve su rastuće pa jedino mogu još uvećati novi supremum, dok ga drift pak spušta za po jedan korak 'prema dolje' (stoga $\Delta C^i(\widehat{\tau}_0) = (x-y)+1$).

S druge strane, koristeći Lemu 4.3.3. i Lemu 4.3.6., imamo

$$\mathbb{E}\big(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,\infty)} \mathcal{H}(n,\omega) dF_i(\varepsilon_i)\big)$$

$$= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\big(\int_{(0,\infty)} 1_{\{\widehat{X}(n-1)=y, \widehat{S}(n-1) \le 0\}} \cdot 1_{\{\varepsilon_i = x+1-y\}} dF_i(\varepsilon_i)\big)$$

$$= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y, \widehat{S}(n-1) \le 0) \cdot \mathbb{P}(C^i(1) = x+1-y)$$

$$= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{S}(n-1) \le 0 | \widehat{X}(n-1) = y) \cdot \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y) \cdot \mathbb{P}(C^i(1) = x+1-y)$$

$$= \mathbb{P}(C^i(1) = x+1-y) \cdot \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\max_{0 \le m \le n-1} \widehat{X}(m) \le 0 | \widehat{X}(n-1) = y) \cdot \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y)$$

$$= \mathbb{P}(C^i(1) = x+1-y) \cdot \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{X}(m) \le 0 \ , \ \forall 0 \le m \le n-1 | \widehat{X}(n-1) = y) \cdot \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y)$$

$= \mathbb{P}(C^i(1) = x+1-y) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C(m) \leq m \ : \ \forall 0 \leq m \leq n-1 | \widehat{X}(n-1) = y) \cdot \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y)$

$= \mathbb{P}(C^i(1) = x + 1 - y) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C(m) \leq m \ : \ \forall 0 \leq m \leq n - 1 | C(n-1) = y + (n-1)) \cdot \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y)$

$= \mathbb{P}(C^i(1) = x + 1 - y) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{y+(n-1)}{n-1}) \cdot \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y)$

$= \mathbb{P}(C^i(1) = x + 1 - y) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1} \cdot (-y) \cdot \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y)$

$= \mathbb{P}(C^i(1) = x + 1 - y) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1} \cdot (n-1) \cdot \mathbb{P}(\widehat{\tau}(y) = n-1)$

$= \mathbb{P}(C^i(1) = x + 1 - y)$.

U posljednjoj smo jednakosti koristili da je $\mathbb{P}(\widehat{\tau}(y) < \infty) = 1$ za $y \leq 0$ opet zbog činjenice da je $\widehat{X}$ skip-free šetnja s prirastima većim ili jednakim -1 pa može samo jediničnim koracima prema dolje, tj. pogodi svaku razinu $y = -k < 0$.

Uočimo da u slučaju kad drift c nije jediničan, tj. imamo $c > 1$ i $X(n) = cn - C^1(n) - C^2(n)$, $n \geq 1$, možemo definirati $\widetilde{C}(n) := (c-1)n - C^1(n) - C^2(n)$, $n \geq 1$, međutim ne možemo primijeniti niti Lemu 4.3.3., niti Lemu 4.3.6. Točnije, uvjet da su prirasti dualne šetnje veći ili jednaki od -1 (tj. manji ili jednaki 1 u slučaju originalne šetnje) nužan je kako bi se mogla primijeniti neka verzija glasačkog teorema u diskretnom slučaju. Uočimo također da ta restrikcija nije potrebna u neprekidnom slučaju. Zašto? U neprekidnom slučaju glasački teoremi koji zapravo leže u pozadini neprekidne verzije Leme 4.3.3. obuhvaćaju u sebi klasu spektralno negativnih Levyjevih procesa (što je u skladu sa neprekidnim analogonom skip-free slučajne šetnje). Za takve procese, ukoliko im nadodamo drift, on neće poremetiti ključno svojstvo tog procesa, a to je da on nema pozitivnih skokova pa svaku razinu 'prema gore' prelazi svojim neprekidnim dijelom. Ta činjenica leži u osnovi svih dokaza rezultata vezanih uz spektralno negativne Levyjeve procese. S druge strane, u diskretnom slučaju imamo slučajne šetnje koje su sastavljene samo od skokova i njima je nužna restrikcija da skok prema gore ne smije biti veći ili jednak od jedan kako bismo osigurali da se prema gore prelazi točno svaka razina. Stoga u diskretnom slučaju i ovom metodom, a i ostalima kojima smo se služili, možemo nešto reći samo kada je drift jediničan, tj. $c = 1$. Uočimo na ovom mjestu također da nas ovakvo rezoniranje upućuje na to da bismo mogli pogledati što se događa sa složenim Poissonovim procesima kada ih promatramo metodom koju smo upravo koristili. Naime, oni čine klasu neprekidnih procesa koja je vrlo bliska slučajnoj šetnji, a opet vrijedi da dva složena Poissonova procesa ne mogu istovremeno skakati, što je očiti nedostatak diskretnog slučaja. Vidjet ćemo to uskoro opet kad pogledamo što se događa kada ubacimo perturbaciju u naš diskretan model.

Uočimo također da smo bez smanjenja općenitosti u gornjim računima mogli gledati i konačno mnogo takvih šetnji s neopadajućim prirastima, $C^1, C^2, \ldots, C^m$, za neko $m \in \mathbb{N}$.

Stoga smo dobili

Teorem 4.3.8 *Neka su $C^1, C^2, \dots, C^m$ slučajne šetnje sa neopadajućim prirastima i*

$$X(n) = 1 \cdot n - (C^1 + \cdots + C^m)(n) \ , \ n \geq 0 \ .$$

Označimo $\widehat{X}(0) = 0$ i $\widehat{X} = -X$ te pretpostavimo da je $1 > \mathbb{E}\, C(1) = \mu = \mu_1 + \cdots + \mu_m$. Tada za $y \leq 0$ i $x > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(\widehat{\tau}_0 < \infty, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0 - 1) = y, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0) \geq x, \Delta C^i(\widehat{\tau}_0) = x + 1 - y) = \mathbb{P}(C^i(1) = x + 1 - y) \ .$$

Sumiranjem po svim mogućim y, dobivamo i sljedeći rezultat.

Korolar 4.3.9 *Uz pretpostavke kao u prethodnom Teoremu 4.3.7., vrijedi*

$$\mathbb{P}(\widehat{\tau}_0 < \infty, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0) \geq x, \Delta C^i(\widehat{\tau}_0) \geq x + 1) = \mathbb{P}(C^i(1) \geq x + 1) \ .$$

4.3.3 Model s perturbacijom

Pokušajmo sada u osnovni model ubaciti perturbaciju, kako bismo i u takvom poopćenom modelu dobili rezultate slične onima u prethodnom teoremu i korolaru. Uočimo da ovdje, iz razloga koje smo navodili u prethodnim računima, moramo izbaciti drift kako bismo dobili opet strukturu skip-free slučajne šetnje. Dakle, dodajmo u osnovni model perturbaciju, tj. skip-free slučajnu šetnju Z, tako da je sada

$$X(n) = -C(n) + Z(n) \ , \ n \geq 1 \ ,$$

gdje je opet $C(n) = C^1(n) + \cdots + C^m(n)$ slučajna šetnja sastavljena od m komponenti slučajnih šetnji s neopadajućim prirastima. Dakle,

$$Z(1) = \xi_Z(i) \sim \begin{pmatrix} \dots & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \dots & q_2 & q_1 & q_0 & \rho \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C(1) = \xi_C(i) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix} \ ,$$

$$X(1) = \xi_X(i) \sim \begin{pmatrix} \dots & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \dots & . & . & . & . \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \widehat{X}(1) = \xi_{\widehat{X}}(i) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix} \ .$$

Slučajna šetnja X sada je skip-free sa prirastima manjim ili jednakim od jedan, a $\widehat{X}$ također skip-free, ali sa prirastima većim ili jednakim od -1. Kako bi $\widehat{X} \to -\infty$, moramo pretpostaviti da je $\mathbb{E}\, \widehat{X}(1) < 0$, tj.

$$\mathbb{E}\, C(1) < \mathbb{E}\, Z(1) \ .$$

Kako bismo iskoristili ponovno Lemu 4.3.3. u ovom slučaju, uočimo da se slučajna šetnja $\widehat{X}$ može zapisati na sljedeći način

$$\widehat{X}(n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{\widehat{X}}(i) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_W(i) - 1) = \sum_{i=1}^{n} \xi_W(i) - n = W(n) - n \ ,$$

gdje je $\xi_W(i) := \xi_{\hat{X}}(i) + 1$ i vrijedi da je $\mathbb{P}(W(1) = k) = \mathbb{P}(\widehat{X}(1) = k - 1)$, $k \geq 0$.

Pogledajmo događaj $\{C$ je doveo do prelaska procesa $\widehat{X}$ preko $0\}$. Ako skiciramo što se događa u ovom slučaju, jasno je da skok od Z također određuje hoće li i kako u tom trenutku doći do prelaska. Stoga ovaj događaj možemo rastaviti na uniju dva disjunktna događaja. Naime, ako je $y \leq 0$ i $x > 0$ te $\widehat{X}$ u trenutku neposredno prije preskoka razine nula u položaju y, a onda skoči u neki položaj $x > 0$ ($\widehat{X}(\widehat{\tau}_0 - 1) = y, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0) \geq x$), gornji se događaj može zapisati kao

$$\{\Delta C(\widehat{\tau}_0) \geq -y + 1 + x, \Delta Z(\widehat{\tau}_0) = -1\} \cup \{\Delta C(\widehat{\tau}_0) \geq -y + x, \Delta Z(\widehat{\tau}_0) \geq 0\} \ .$$

Dakle, za $y \leq 0$ i $x > 0$ imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\widehat{\tau}_0 < \infty, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0 - 1) = y, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0) \geq x, C \text{ je uzrokovao supremum}) \\
&= \mathbb{P}(\widehat{\tau}_0 < \infty, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0 - 1) = y, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0) \geq x, \Delta C(\widehat{\tau}_0) \geq -y + 1 + x, \Delta Z(\widehat{\tau}_0) = -1) \\
&+ \mathbb{P}(\widehat{\tau}_0 < \infty, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0 - 1) = y, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0) \geq x, \Delta C(\widehat{\tau}_0) \geq -y + x, \Delta Z(\widehat{\tau}_0) \geq 0) \ .
\end{aligned}$$

Definiramo

$$\mathcal{H}(n, \omega, \varepsilon, \eta) = 1_{\{\widehat{X}(n-1)=y, \widehat{S}(n-1) \leq 0\}} \cdot 1_{\{\varepsilon = x+1-y\}} \cdot 1_{\{\eta=-1\}} \ .$$

Lema 4.3.5. (formula kompenzacije) nam tada za prvi sumand u gornjoj jednakosti daje

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\widehat{\tau}_0 < \infty, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0 - 1) = y, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0) \geq x, \Delta C(\widehat{\tau}_0) \geq -y + 1 + x, \Delta Z(\widehat{\tau}_0) = -1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y, \widehat{S}(n-1) \leq 0) \cdot \mathbb{P}(C(1) \geq x + 1 - y) \cdot \mathbb{P}(Z(1) = -1) \\
&= \mathbb{P}(C(1) \geq x + 1 - y) \cdot \mathbb{P}(Z(1) = -1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{S}(n-1) \leq 0 | \widehat{X}(n-1) = y) \cdot \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y) \\
&= \mathbb{P}(C(1) \geq x + 1 - y) \cdot \mathbb{P}(Z(1) = -1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(W(t) \leq t \ , \ 0 \leq t \leq n - 1 | \widehat{X}(n-1) = y) \\
&\cdot \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y) \\
&= \mathbb{P}(C(1) \geq x + 1 - y) \cdot \mathbb{P}(Z(1) = -1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{y + (n-1)}{n-1}) \cdot \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y) = \\
&= \mathbb{P}(C(1) \geq x + 1 - y) \cdot \mathbb{P}(Z(1) = -1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1} \cdot (-y) \cdot \mathbb{P}(\widehat{X}(n-1) = y) = \\
&= \mathbb{P}(C(1) \geq x + 1 - y) \cdot \mathbb{P}(Z(1) = -1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\widehat{\tau}_y = n - 1) = \\
&= \mathbb{P}(C(1) \geq x + 1 - y) \cdot \mathbb{P}(Z(1) = -1) \ .
\end{aligned}$$

U gornjem smo računu opet koristili argument da je $\widehat{X}$ skip-free slučajna šetnja sa prirastima većim ili jednakim od -1 pa samo jediničnim korakom može prema dolje, što znači da posjeti sve razine $y \leq 0$ obzirom da $\widehat{X} \to \infty$ po pretpostavci.

Posve analogni račun može se primijeniti na drugi sumand, $P(\widehat{\tau}_0 < \infty, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0 - 1) = y, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0) \geq x, \Delta C(\widehat{\tau}_0) \geq -y + x, \Delta Z(\widehat{\tau}_0) \geq 0)$, tako da dobivamo sljedeći rezultat.

Teorem 4.3.10 *Uz gornje pretpostavke na slučajne šetnje, vrijedi*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widehat{\tau}_0 < \infty, &\widehat{X}(\widehat{\tau}_0 - 1) = y, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0) \geq x, C \textit{ je uzrokovao supremum}) \\ &= \mathbb{P}(C(1) \geq x + 1 - y) \cdot \mathbb{P}(Z(1) = -1) + \mathbb{P}(C(1) \geq x - y) \cdot \mathbb{P}(Z(1) \geq 0)\ .\end{aligned}$$

Sada očito sličan račun možemo provesti i ako želimo gledati vjerojatnost da i-ta komponenta od C uzrokuje prelazak preko razine nula za čitav proces, obzirom da su komponente C^i sve neopadajuće pa ako neka od njih dovede do tog prelaska, ove ostale ga eventualno mogu uvećati.

Poglavlje 5

Aproksimacija

U diskretnom smo slučaju uočili problem istovremenog skakanja dviju šetnji, C i Z, koji nam je onemogućio kontrolu nad cjelokupnim procesom i time i lijepe rezultate koji su poznati za neprekidni slučaj. Stoga se sad okrećemo ka procesu koji predstavlja svojevrsnu vezu između diskretnog i neprekidnog slučaja i za koji su nam poznati već neki rezultati (zahvaljujući Takácsu, a detaljnije o tome ćemo vidjeti u 5.3.), tj. složenom Poissonovom procesu. Pokušat ćemo rezultate koje znamo za taj proces proširiti po limesu do općenitijeg neprekidnog slučaja.

Uzmimo, dakle, sljedeće sastavnice u razmatranje:

- $c > 0$ drift,
- C, proces ukupnih zahtjeva za isplatom. Uzmimo za početak da je on jednostavnog oblika, primjerice neka je to složeni Poissonov subordinator,
- Z, perturbacija u modelu, a modelirana je spektralno negativnim Lévyjevim procesom za koji pretpostavljamo da ima očekivanje nula, tj. da je $\mathbb{E}\,Z(1) = 0$. Proces Z želimo aproksimirati nizom
- $(Z^{(n)})_{n\geq 1}$ spektralno negativnih Lévyjevih procesa konačne Lévyjeve mjere za koje je

  $$Z^{(n)}(t) = \gamma^{(n)}t - D^{(n)}(t)\ ,\quad t \geq 0\ ,$$

  gdje je $(D^{(n)})_{n\geq 1}$ niz subordinatora za koje vrijedi da je $\gamma^{(n)} = \mathbb{E}\,D^{(n)}(1)$, tako da je $\mathbb{E}\,Z^{(n)}(1) = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Tako ćemo (u poglavlju 5.2.) dobiti da

$$Z^{(n)} \Rightarrow Z\ ,\quad n \to \infty\ ,$$

gdje $\Rightarrow$ označava slabu konvergenciju procesa. Prije no što damo preciznu definiciju ove konvergencije, uvedemo sve pojmove koji su uz nju vezani te formaliziramo račun, pogledajmo što želimo dobiti ovakvim modelom.

Prvo definirajmo

Uz oznaku $\widetilde{c}^{(n)} := c + \gamma^{(n)}$, za svako $n \in \mathbb{N}$, na sličan način definiramo i

$$Y^{(n)}(t) = ct + Z^{(n)}(t) = \widetilde{c}^{(n)}t - D^{(n)}(t) \ , \quad t \geq 0 \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

i

$$X^{(n)}(t) = ct + Z^{(n)}(t) - C(t) = \widetilde{c}^{(n)}t - D^{(n)}(t) - C(t) = Y^{(n)}(t) - C(t) \ , \quad t \geq 0 \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Tada će vrijediti da

$$Y^{(n)} \Rightarrow Y \ \text{ i } \ X^{(n)} \Rightarrow X \ .$$

Kada pokažemo da dolje navedeni rezultati (u propozicijama) vrijede u tom okruženju, napravit ćemo odmah i drugi korak. Fiksirat ćemo spektralno negativan Lévyjev proces Y, a proces C ćemo poopćiti - uzet ćemo da je to subordinator bez drifta s konačnim očekivanjem i aproksimirati ga nizom složenih Poissonovih subordinatora. Dakle, uzet ćemo da je

- ► C u procesu X subordinator bez drifta s konačnim očekivanjem te konstruirati niz $(C^{(n)})_{n\geq 1}$ složenih Poissonovih procesa koji slabo konvergiraju ka C, tj.

$$C^{(n)} \Rightarrow C \ .$$

Sada ćemo pretpostaviti da je Y neki fiksiran spektralno negativan Lévyjev proces te definirati

$$X^{(n)}(t) = Y(t) - C^{(n)}(t) \ , \quad t \geq 0 \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

te

$$X(t) = Y(t) - C(t) \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Ovdje također vrijedi da

$$C^{(n)} \Rightarrow C \ \text{ što povlači } \ X^{(n)} \Rightarrow X \ .$$

I u ovom općenitijem slučaju, kada nemamo samo jedan složeni Poissonov proces koji se javlja kao proces zahtjeva za isplatom jednak i u svakom procesu $X^{(n)}$ i u X, pokazat ćemo da vrijedi sljedeće.

Naime, željeli bismo i ovdje, ali koristeći aproksimacijski pristup, pokazati da ako je

$$\sigma = \inf\{t > 0 \ : \ \text{novi sup od } \widehat{X} \text{ se postigne zbog skoka procesa } C\}$$

prvo vrijeme kada proces C svojim skokom dovede do novog supremuma proces $\widehat{X}$, onda vrijedi

$$\sup_{0\leq t<\infty} \widehat{Y}_t =^d \sup_{0\leq t<\sigma} \widehat{X}_t \ .$$

No, mi znamo da (budući da po pretpostavci $Z^{(n)} \Rightarrow Z$ u prvom slučaju i $C^{(n)} \Rightarrow C$ u drugom promatranom slučaju):

$$Y^{(n)} \Rightarrow Y \ , \quad n \to \infty$$

te

$$X^{(n)} \Rightarrow X \ , \quad n \to \infty \ ,$$

koristeći teorem o neprekidnom preslikavanju (također će biti preciziran kasnije, u 5.1.). Stoga, ako pokažemo da vrijedi

$$\sup_{0\leq t<\infty} \widehat{Y}_t^{(n)} =^d \sup_{0\leq t<\sigma} \widehat{X}_t^{(n)} \ , \quad \text{za svako } n \in \mathbb{N}$$

(ovu ćemo jednakost u distribuciji pokazati koristeći Takácsev rezultat, slično kao i u diskretnom slučaju, tj. u poglavlju 4.3.)

te da

$$Y^{(n)} \Rightarrow Y \quad \text{povlači da} \quad \mathbb{P}(\sup_{0\leq t<\infty} \widehat{Y}_t^{(n)} \leq a) \to \mathbb{P}(\sup_{0\leq t<\infty} \widehat{Y}_t \leq a) \ , \quad n \to \infty \ , \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(ovaj nam dio zapravo nije potreban u drugom slučaju, obzirom da se u njemu pojavljuje samo jedan proces Y)

i

$$X^{(n)} \Rightarrow X \quad \text{povlači da} \quad \mathbb{P}(\sup_{0\leq t<\sigma^{(n)}} \widehat{X}_t^{(n)} \leq a) \to \mathbb{P}(\sup_{0\leq t<\sigma} \widehat{X}_t \leq a) \ , \quad n \to \infty \ , \quad \forall a \in \mathbb{R} \ ,$$

onda će odmah slijediti tražena jednakost u distribuciji, tj.

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq t<\infty} \widehat{Y}_t \leq a) = \mathbb{P}(\sup_{0\leq t<\sigma} \widehat{X}_t \leq a) \ , \quad \forall a \in \mathbb{R} \ .$$

Formalizirajmo sada ove ciljane rezultate u obliku propozicija.

Propozicija 5.0.11 *Neka je $k > 0$ drift te C i Z nezavisni subordinatori s Lévyjevim mjerama Λ_C i Λ_Z takvi da je $\mu_C := \mathbb{E}\, C(1) = \int_0^\infty x\Lambda_C(dx) < \infty$ te $\mu_Z := \mathbb{E}\, Z(1) = \int_0^\infty x\Lambda_Z(dx) < \infty$. Definiramo*

$$X(t) = kt - Z(t) - C(t) \ , \quad t \geq 0$$

i

$$Y(t) = kt - Z(t) \ , \quad t \geq 0$$

te pretpostavimo da je $k > \mu_C + \mu_Z =: \mu$. Označimo sa $\widehat{X}$ i $\widehat{Y}$, redom, dualne procese od X i Y te sa $\widehat{S}$ proces trenutnog supremuma od $\widehat{X}$ (oznake kao i prije). Tada vrijedi

$$\sup_{0\leq t<\infty} \widehat{Y}(t) =^d \sup_{0\leq t<\sigma} \widehat{X}(t) \ , \tag{5.1}$$

gdje je

$$\sigma = \inf\{t \geq 0 \; : \; \Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\}$$

prvo vrijeme kada dualni proces $\widehat{X}$ postigne novi supremum zbog skoka subordinatora C.

Propozicija 5.0.12 *Neka je $(Z^{(n)})_{n\geq 1}$ niz spektralno negativnih Lévyjevih procesa sa konačnom Lévyjevom mjerom i $\mathbb{E}\, Z^{(n)}(1) = 0$, za svako $n \in \mathbb{N}$, koji slabo konvergiraju ka spektralno negativnom Lévyjevom procesu Z za koji vrijedi da je $\mathbb{E}\, Z(1) = 0$, tj.*

$$Z^{(n)} \Rightarrow Z \; .$$

Definirajmo

$$Y^{(n)}(t) = ct + Z^{(n)}(t) \; , \quad t \geq 0 \; , \quad n \in \mathbb{N}$$

te

$$Y(t) = ct + Z(t) \; , \quad t \geq 0 \; ,$$

gdje je $c > 0$ drift. Tada $Y^{(n)} \Rightarrow Y$ i vrijedi

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq t<\infty} \widehat{Y}^{(n)}_t \leq a) \to \mathbb{P}(\sup_{0\leq t<\infty} \widehat{Y}_t \leq a) \; , \quad n \to \infty \; , \quad \forall a \in \mathbb{R} \; . \tag{5.2}$$

Propozicija 5.0.13 *(i) Neka su procesi $Y^{(n)}$ te Y definirani kao u prethodnoj propoziciji, tako da*

$$Y^{(n)} \Rightarrow Y \; .$$

Definirajmo

$$X^{(n)}(t) = Y^{(n)}(t) - C(t) \; , \quad t \geq 0 \; , \quad n \in \mathbb{N}$$

i

$$X(t) = Y(t) - C(t) \; , \quad t \geq 0 \; ,$$

gdje je C neki proizvoljni fiksiran nezavisan složeni Poissonov subordinator. Tada

$$X^{(n)} \Rightarrow X$$

i vrijedi

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq t<\sigma^{(n)}} \widehat{X}^{(n)}_t \leq a) \to \mathbb{P}(\sup_{0\leq t<\sigma} \widehat{X}_t \leq a) \; , \quad n \to \infty \; , \quad \forall a \in \mathbb{R} \; , \tag{5.3}$$

gdje su

$$\sigma = \inf\{t \geq 0 \; : \; \Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\}$$

i

$$\sigma^{(n)} = \inf\{t \geq 0 \; : \; \Delta C(t) > \widehat{S}^{(n)}(t-) - \widehat{X}^{(n)}(t-)\} \; , \quad n \in \mathbb{N} \; ,$$

prvo vrijeme kada dualni proces $\widehat{X}$ postigne novi supremum zbog skoka subordinatora C, odnosno, prvo vrijeme kad svaki proces $\widehat{X}^{(n)}$ postigne novi supremum zbog skoka subordinatora C, za svako $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Neka je Y proizvoljan fiksiran spektralno negativan Lévyjev proces te $(C^{(n)})_{n\geq 1}$ s njim

nezavisan niz složenih Poissonovih subordinatora koji slabo konvergira ka subordinatoru C bez drifta i s konačnim očekivanjem, tj.

$$C^{(n)} \Rightarrow C \ .$$

Definirajmo

$$X^{(n)}(t) = Y(t) - C^{(n)}(t) \ , \quad t \geq 0 \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

i

$$X(t) = Y(t) - C(t) \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Tada

$$X^{(n)} \Rightarrow X$$

i vrijedi

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq t < \sigma^{(n)}} \widehat{X}_t^{(n)} \leq a) \to \mathbb{P}(\sup_{0 \leq t < \sigma} \widehat{X}_t \leq a) \ , \quad n \to \infty \ , \quad \forall a \in \mathbb{R} \ , \tag{5.4}$$

gdje su

$$\sigma = \inf\{t \geq 0 \ : \ \Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\}$$

i

$$\sigma^{(n)} = \inf\{t \geq 0 \ : \ \Delta C^{(n)}(t) > \widehat{S}^{(n)}(t-) - \widehat{X}^{(n)}(t-)\} \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

prvo vrijeme kada dualni proces $\widehat{X}$ postigne novi supremum zbog skoka subordinatora C, odnosno, prvo vrijeme kad svaki proces $\widehat{X}^{(n)}$ postigne novi supremum zbog skoka subordinatora $C^{(n)}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Objedinjavanjem rezultata ovih triju propozicija, dobit ćemo najavljeni rezultat.

Teorem 5.0.14 *Neka je $c > 0$ drift, Z spektralno negativan Lévyjev proces s očekivanjem nula, tj. $\mathbb{E}\, Z(1) = 0$ te*

$$Y(t) = ct + Z(t) \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Neka je C s njime nezavisan subordinator bez drifta sa $\mathbb{E}\, C(1) < \infty$ te

$$X(t) = ct + Z(t) - C(t) \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

tako da je X također spektralno negativan Lévyjev proces. Također, pretpostavimo da vrijedi uvjet čistog profita, tj. $\mathbb{E}\, X(1) > 0$. Tada vrijedi

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \widehat{Y}(t) =^d \sup_{0 \leq t < \sigma} \widehat{X}(t) \ ,$$

gdje je

$$\sigma = \inf\{t \geq 0 \ : \ \Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\} \ .$$

Kako bismo dokazali gore navedene tvrdnje, uvedimo prvo potrebne definicije i pomoćne rezultate.

5.1 Prostor D i slaba konvergencija stohastičkih procesa

Prisjetimo se prvo što podrazumijevamo pod standardnim pojmom slabe konvergencije, koji se pojavljuje u brojnim graničnim teoremima u vjerojatnosti. Naime, za niz funkcija distribucije $(F_n)_{n\geq 1}$ kažemo da **slabo konvergira** ka funkciji distribucije F ako vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \ , \quad \text{za svaku točku neprekidnosti } x \text{ od } F \ . \tag{5.5}$$

Oznaka za ovakvu vrstu konvergencije je standardno

$$F_n \Rightarrow F \ .$$

Ovakva se vrsta konvergencije javlja primjerice u poznatom De Moivre-Laplaceovom teoremu te Glivenko-Cantellijevom teoremu, a ponekad je još nazivamo **konvergencijom po distribuciji**. Na neki su način slaba konvergencija i konvergencija po distribuciji dva istovjetna pojma, s razlikom u tome što svaki stavlja naglasak na drugačiju pozadinu. Naime, ukoliko imamo niz slučajnih vektora $(X_n = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_k^{(n)}))_{n\geq 1}$ i slučajni vektor $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$, $k \in \mathbb{N}$, kažemo da $(X_n)_{n\geq 1}$ *konvergira po distribuciji* ka X ako vrijedi

$$G_n(x) := \mathbb{P}(X_1^{(n)} \leq x_1, \ldots, X_k^{(n)} \leq x_k) \to \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_k \leq x_k) =: G(x) \ , \quad n \to \infty \ , \tag{5.6}$$

u svakoj točki neprekidnosti $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ od G. Ekvivalentno, možemo reći da $(X_n)_{n\geq 1}$ *konvergira slabo* ka X ako za pripadajuće funkcije distribucije $(G_n)_{n\geq 1}$ i G vrijedi (5.5), u oznaci $G_n \Rightarrow G$.

U slučaju kad govorimo o slaboj konvergenciji, naglasak stavljamo na vjerojatnosne mjere koje su u pozadini, bez da vodimo brigu o tome postoje li stohastički procesi čije bi distribucije bile dane pomoću tih vjerojatnosnih mjera. A, kada govorimo o konvergenciji po distribuciji, onda ipak pretpostavljamo da imamo definirane stohastičke procese sa svojim pripadajućim distribucijama i onda promatramo konveregnciju tih distribucija u smislu definicije (5.5). I dok se koncept konvergencije funkcija distribucije više veže uz nekakvu vrstu euklidskog prostora, kada prijeđemo na vjerojatnosne mjere, definiciju je moguće proširiti i na općeniti metrički prostor. Stoga ćemo ponovno dati formalnu definiciju slabe konvergencije, ali u općenitijem okruženju.

Definicija 5.1.1 *Neka je S proizvoljan metrički prostor, $\mathcal{S}$ familija Borelovih skupova na S te $(P_n)_{n\geq 1}$ i P vjerojatnosne mjere definirane na $\mathcal{S}$. Tada kažemo da $(P_n)_{n\geq 1}$ **slabo konvergira** ka P ako za svaki Borelov skup $A \in \mathcal{S}$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A) \ , \quad \textit{ako je} \ \ P(\partial A) = 0 \ ,$$

gdje je ∂A standardna oznaka za rub skupa A.

Portmanteau teorem daje još nekoliko karakterizacija ove konvergencije na $(S, \mathcal{S})$.

Teorem 5.1.2 *([Bill, Teorem 2.1.]) Neka su $(P_n)_{n\geq 1}$ i P vjerojatnosne mjere na $(S,\mathcal{S})$. Ekvivalentno je*

(i) $P_n \Rightarrow P$,

(ii) $\int_S f\,dP_n \to \int_S f\,dP$ *za svaku omeđenu neprekidnu realnu funkciju f na S,*

(iii) $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$ *za svaki zatvoreni $F \in \mathcal{S}$,*

(iv) $\liminf P_n(G) \geq P(G)$ *za svaki otvoreni $G \in \mathcal{S}$.*

Također će nam od koristi biti teorem koji govori u kojim se uvjetima čuva slaba konvergencija pod djelovanjem određene funkcije.

Teorem 5.1.3 *(**Teorem o neprekidnom preslikavanju**, [Bill, Teorem 2.7.]) Neka je h preslikavanje sa metričkog prostora S u metrički prostor $S^{'}$ (koji ima pripadajuću Borelovu σ-algebru $\mathcal{S}^{'}$ te metriku $\rho^{'}$), neka je h izmjerivo u paru $(\mathcal{S},\mathcal{S}^{'})$ i označimo sa D_h skup svih prekida preslikavanja h. Tada vrijedi:*

$$\textit{ako} \quad P_n \Rightarrow P \quad \textit{i} \quad P(D_h) = 0 \ , \ \textit{tada} \quad P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1} \ ,$$

gdje su $P_n h^{-1}$ te Ph^{-1} vjerojatnosne mjere na $(S^{'},\mathcal{S}^{'})$ inducirane mjerama P_n i P na način da za svako $A \in \mathcal{S}^{'}$ vrijedi $P_n h^{-1}(A) = P_n(h^{-1}(A))$, $n \in \mathbb{N}$ te $Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}(A))$.

Mi ćemo, konkretno, promotriti ovaj koncept u prirodnom prostoru za promatranje Poissonovog procesa, složenog Poissonovog procesa i ostalih procesa koji imaju prekidne trajektorije, a koji smo već najavili u uvodu ovog poglavlja. To je prostor $D = D[0,1]$ realnih funkcija na $[0,1]$ koje su neprekidne zdesna i imaju limese slijeva, tzv. *càdlàg* funkcije.

Definicija 5.1.4 $D := \big\{x : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ \forall t \in [0,1) \ \exists\, x(t+) := \lim_{s\downarrow t} x(s) \ \textit{i} \ x(t+) = x(t) \ \ \textit{te} \ \ \forall t \in (0,1] \ \exists\, x(t-) := \lim_{s\uparrow t} x(s)\big\}$

Za funkcije iz D vrijedi da

(i) mogu imati diskontinuitete samo prve vrste, u smislu da za svako t postoje $x(t-)$ i $x(t+)$ i $x(t-) \neq x(t+)$ ako je t točka prekida, i to najviše prebrojivo mnogo njih,

(ii) $\sup_t |x(t)| < \infty$,

(iii) su Borel izmjerive (što slijedi iz činjenice da ih je moguće aproksimirati step funkcijama).

Da bismo mogli odrediti koliko su uopće 'bliska' dva elementa iz prostora D, a potom i uvesti pojam konvergencije u taj prostor, u njega je potrebno uvesti topologiju i metriku. Definiramo

$$\Lambda = \{\lambda : [0,1] \to [0,1] \ : \ \lambda \ \text{ je strogo rastuća, neprekidna i } \ \lambda([0,1]) = [0,1]\} \ .$$

Uočimo da za svako $\lambda \in \Lambda$ mora uvijek vrijediti $\lambda(0) = 0$ i $\lambda(1) = 1$. Za $x, y \in D$ potom definiramo

$$d(x,y) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \max\Big\{ \sup_{t\in[0,1)} |\lambda(t) - t|, \ \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(\lambda(t))|\Big\} \ .$$

Tada je (D,d) metrički prostor, a topologija na D inducirana metrikom d zove se **Skorohodova (J_1) topologija**.

Elementi x_n u D konvergiraju limesu x u Skorohodovoj topologiji ako i samo ako postoji niz $(\lambda_n) \subset \Lambda$ takav da

$$\sup_t |\lambda_n(t) - t| \ , \quad \sup_t |x_n(\lambda_n(t)) - x(t)| \to 0 \ , \quad n \to \infty \ .$$

Vrijedi (za detalje vidi [Bill, Poglavlje 3.]):

(i) ako $x_n \to x$ u Skorohodovoj topologiji, tada $x_n(t) \to x(t)$ za svako $t \in [0,1]$,

(ii) uniformna konvergencija povlači konvergenciju u Skorohodovoj topologiji,

(iii) (D,d) nije potpun metrički prostor. No, ako za $x,y \in D$ definiramo

$$d_0(x,y) := \sup_{\lambda\in\Lambda} \max\left\{||\lambda||, \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(\lambda(t))|\right\} \ ,$$

gdje je $||\lambda|| := \sup_{s\neq t} |\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}|$, $\lambda \in \Lambda$, tada je (D,d_0) potpun metrički prostor. Osim toga su metrike d i d_0 ekvivalentne pa je i topologija inducirana metrikom d_0 na D Skorohodova topologija,

(iv) prostor D je separabilan i obzirom na d i obzirom na d_0.

Pogledajmo sada što znači slaba konvergencija u D. Označimo sa $\mathcal{D}$ σ-algebru Borelovih skupova na D, obzirom na Skorohodovu topologiju. Možemo definirati preslikavanje $\pi_{t_1,\ldots,t_k} : D \to \mathbb{R}^k$, $t_1,\ldots,t_k \in [0,1]$ sa

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}(x) = (x(t_1),\ldots,x(t_k)) \ , \quad x \in D$$

koje zovemo **prirodna projekcija**. Tada vrijedi (vidi [Bill, 3.13]):

$$\pi_t \text{ je neprekidno u } x \text{ ako i samo ako je } x \text{ neprekidno u } t \ .$$

Provjera slabe konvergencije u prostoru funkcija D problematična je upravo zbog činjenice da ove prirodne projekcije nisu neprekidne, kao primjerice u prostoru C. No, iz gornje tvrdnje možemo lako pokazati da su π_0 i π_1 uvijek neprekidne (koristeći još činjenicu da je $\lambda(0) = 0$ i $\lambda(1) = 1$ za svako $\lambda \in \Lambda$). Ono što također možemo pokazati je

$$\pi_t \text{ je izmjerivo u paru } (\mathcal{D}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)), \text{ za svako } t \in [0,1] \ .$$

Uzmimo sada vjerojatnosnu mjeru P na $(D,\mathcal{D})$ i označimo sa

$$T_P := \{t \in [0,1] \ : \ P(x \in D \ : \ \pi_t \text{ nije neprekidno u } x) = 0\}$$

skup svih onih točaka $t \in [0,1]$ za koje je projekcija π_t neprekidna osim u točkama P mjere 0. Ako definiramo

$$J_t := \{x \in D \ : \ x(t) \neq x(t-)\} \ ,$$

tada vrijedi

$$t \in T_P \quad \text{ako i samo ako} \quad P(J_t) = 0 \ .$$

Osim toga je

$$0,\ 1 \in T_P \text{ i skup } [0,1] \setminus T_P \text{ je najviše prebrojiv} \ .$$

Odavde također slijedi

$$\text{za } t_1, \ldots, t_k \in T_P \text{ je projekcija } \pi_{t_1,\ldots,t_k} \text{ neprekidna osim na skupu } P \text{ mjere } 0 \ .$$

Neka su sad P_n i P vjerojatnosne mjere na $(D, \mathcal{D})$ i pretpostavimo da

$$P_n \Rightarrow P \ ,$$

tj.

$$\int_D f\, dP_n \to \int_D f\, dP$$

za svaku omeđenu i neprekidnu funkciju $f : D \to \mathbb{R}$. Neka je nadalje $h : D \to S$ (S je neki metrički prostor) izmjeriva funkcija i označimo sa D_h skup diskontinuiteta te funkcije. Tada vrijedi

$$\text{ako } P_n \Rightarrow P \text{ i } P(D_h) = 0, \text{ tada } P_n \circ h^{-1} \Rightarrow P \circ h^{-1} \ .$$

Uz još neke pretpostavke možemo pokazati i više. Naime, za niz vjerojatnosnih mjera (P_n) na $(D, \mathcal{D})$ kažemo da je **napet** ako

$$\text{za svako } \varepsilon > 0 \text{ postoji kompaktan } K \subset D \text{ takav da je } P_n(K) \geq 1 - \varepsilon \text{ za svako } n \in \mathbb{N} \ .$$

Tada se može pokazati (vidjeti [Bill, Teorem 13.1.])

Lema 5.1.5 *Ako je niz vjerojatnosnih mjera (P_n) na $(D, \mathcal{D})$ napet i ako*

$$P_n \circ \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} \Rightarrow P \circ \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}$$

za svako $t_1, \ldots, t_k \in T_P$, tada

$$P_n \Rightarrow P \ .$$

5.2 Aproksimacija perturbacije Z nizom $(Z^{(n)})_{n\geq 1}$

Fiksiramo C kao složeni Poissonov subordinator. Imamo općeniti spektralno negativan Lévyjev proces Z za koji je $\mathbb{E}\, Z(1) = 0$. Želimo ga aproksimirati nizom $(Z^{(n)})_{n\geq 1}$ spektralno negativnih Lévyjevih procesa konačne Lévyjeve mjere koji su oblika

$$Z^{(n)}(t) = \gamma^{(n)} t - B^{(n)}(t) \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

gdje su $B^{(n)}$ subordinatori i $\gamma^{(n)} = \mathbb{E}\, B^{(n)}(1)$.

Koristit ćemo kriterij za konvergenciju iz [Kall, Teorem 13.14.] (odnosno, općenitija verzija može se naći u [JS, Teorem VII.3.4.]). Naime, ako su X i $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ Lévyjev proces, odnosno, niz Lévyjevih procesa sa karakterističnim trojkama (a, b, ν), odnosno $(a^{(n)}, b^{(n)}, \nu^{(n)})$ te $\mu =^d X(1)$ i $\mu^{(n)} =^d X^{(n)}(1)$, onda za proizvoljni $h > 0$, definiramo

$$a_h := a + \int_{|x|<h} x^2 \nu(dx) \ \text{ i } \ b_h := b - \int_{h<|x|<1} x\nu(dx)$$

te

$$a_h^{(n)} := a^{(n)} + \int_{|x|<h} x^2 \nu^{(n)}(dx) \ \text{ i } \ b_h^{(n)} := b^{(n)} - \int_{h<|x|<1} x\nu^{(n)}(dx) \ .$$

Također, podsjetimo se, za niz mjera $(\mu^{(n)})_{n\geq 1}$ kažemo da konvergira *vaguely* ka mjeri μ, u oznaci $\mu^{(n)} \to^v \mu$, ako $\int f d\,\mu^{(n)} \to \int f d\,\mu$ za svako $f \in C_K^+$, gdje je C_K^+ familija neprekidnih funkcija $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ sa kompaktnim nosačem. Tada vrijedi sljedeći rezultat.

Lema 5.2.1 *([Kall, Teorem 13.14.(i)]) Uz gornje oznake,*

$$\mu^{(n)} \to^w \mu \ \ \textit{ako i samo ako} \ \ a_h^{(n)} \to a_h \ , \ \ b_h^{(n)} \to b_h \ \textit{i} \ \nu^{(n)} \to^v \nu \ .$$

Napomenimo, također, da su obje tvrdnje gornje leme ekvivalentne točkovnoj konvergenciji karakterističnih eksponenata procesa $X^{(n)}$, odnosno X. Preciznije, ako sa $\Psi^{(n)}$ označimo karakteristični eksponent pridružen procesu $X^{(n)}$ za svako $n \geq 1$ te sa Ψ karakteristični eksponent pridružen procesu X, onda tvrdnju gornje leme možemo ekvivalentno zapisati i u obliku

$$\Psi^{(n)} \to \Psi \ , \quad n \to \infty \ .$$

Ovo je, pak, ekvivalentno slaboj konvergenciji slučajnih varijabli $X^{(n)}(1) \Rightarrow X(1)$, $n \to \infty$. No, korištenjem [JS, Korolar VII.3.6.], onda slijedi i slaba konvergencija procesa $X^{(n)} \Rightarrow X$.

5.2.1 Slučaj bez Gaussovske komponente

Uzmimo sad da je Z spektralno negativan Lévyjev proces bez Gaussovske komponente i sa $\mathbb{E}\, Z(1) = 0$. Karakteristični eksponent mu možemo zapisati kao

$$\Psi_Z(z) = izb + \int_{(-\infty,0)} (e^{izx} - 1 - izx1_{\{|x|<1\}})\nu(dx) \ ,$$

gdje je

$$b = -\int_{(-\infty,0)} x1_{\{x\leq -1\}}\nu(dx) \ .$$

Uzmimo $h = 1$ u Lemi 5.2.1. te definirajmo

$$\nu^{(n)} := \nu|_{(-\infty,-1/n)} \ , \ \ a^{(n)} := 0 \ \text{ i } \ b^{(n)} := -\int_{(-\infty,0)} x1_{\{x\leq -1\}}\nu^{(n)}(dx) = -\int_{(-\infty,-1/n)} x1_{\{x\leq -1\}}\nu(dx) \ .$$

Tada je

$$a_1^{(n)} = \int_{\{|x|<1\}} x^2\nu^{(n)}(dx) = \int_{\{-1<x<-1/n\}} x^2\nu(dx) \to \int_{\{-1<x<0\}} x^2\nu(dx) = a_1 \ ,$$

$$b_1^{(n)} = b^{(n)} = -\int_{(-\infty,-1/n)} x1_{\{x\leq -1\}}\nu(dx) \to -\int_{(-\infty,0)} x1_{\{x\leq -1\}}\nu(dx) = b = b_1$$

te

$$\nu^{(n)} \to^v \nu \ .$$

Time smo dobili rezultat kao u Lemi 5.2.1., što znači da za niz spektralno negativnih Lévyjevih procesa $(Z^{(n)})_{n\geq 1}$ definiranih karakterističnim trojkama $(a^{(n)}, b^{(n)}, \nu^{(n)})$ i sa karakterističnim eksponentima $\Psi_{Z^{(n)}}$, $n \geq 1$, (Ψ_Z je karakteristični eksponent od Z, kao i inače), vrijedi

$$\Psi_{Z^{(n)}} \to \Psi_Z \ , \quad n \to \infty \ ,$$

odnosno

$$Z^{(n)} \Rightarrow Z \ , \quad n \to \infty \ ,$$

gdje ova posljednja tvrdnja slijedi kao u napomeni nakon Leme 5.2.1.

5.2.2 Slučaj sa Gaussovskom komponentom

Pogledajmo sada slučaj kada je Z čisto Gaussovskog oblika, tj. neka je Z Brownovo gibanje sa karakterističnom trojkom $(a, 0, 0)$. Tada definiramo niz trojki $(0, 0, a\nu^{(n)})_{n\geq 1}$ tako da je

$$\nu^{(n)}(dx) := \frac{1}{x_n^2}\delta_{x_n}(dx) \ , \quad -1 < x_n < 0 \ , \quad x_n \to 0 \ .$$

Tada je

$$\Psi_{Z^{(n)}}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} - i\theta x1_{\{|x|<1\}})a\nu^{(n)}(dx) = i\theta\frac{a}{x_n} + \frac{a}{x_n^2}(1 - e^{i\theta x_n}) \ ,$$

tj. pripadajući Lévyjev proces $Z^{(n)}$ je zbroj spektralno negativnog složenog Poissonovog procesa s intenzitetom a/x_n^2 te skokovima veličine $1/x_n$ i pozitivnog drifta $-a/x_n$.

Uzmimo opet $h = 1$ u Lemi 5.2.1. pa imamo

$$a_1^{(n)} = \int_{\{|x|<1\}} x^2 a\nu^{(n)}(dx) = a = a_1$$

pa očito

$$a_1^{(n)} \to a_1 \ .$$

Osim toga,

$$b_1^{(n)} \to b_1 = 0$$

te

$$a\nu^{(n)} \to^v 0 = \nu \ .$$

Opet primijenimo rezultat navedene leme pa, kao i u prvom slučaju, dobivamo traženu konvergenciju.

Uočimo da općeniti slučaj slijedi jednostavnim sumiranjem slučajeva iz 5.2.1. i 5.2.2.

5.3 Dokaz Propozicije 5.0.11.

Slično kao i u diskretnom slučaju (ovdje poglavlje 4.3.), vrijedi sljedeći Takácsev rezultat i u neprekidnom slučaju (za dokaz vidi [Tak, Teorem 3.]).

Teorem 5.3.1 *Neka je X slučajni proces sa nezavisnim i jednako distribuiranim prirastima čije su gotovo sve trajektorije neopadajuće funkcije s diskretnim skokovima koje iščezavaju u $u = 0$. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}(X(u) \leq u \ , \ 0 \leq u \leq t \mid X(t)) = \begin{cases} 1 - \frac{X(t)}{t}, & 0 \leq X(t) \leq t; \\ 0, & X(t) \geq t. \end{cases} .$$

Odavde zapravo za dualni proces $\widehat{X}$ slijedi (ako uvrstimo i komponentu drifta c iz našeg, gore opisanog, modela)

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} \widehat{X}(s) > 0 \mid \widehat{X}(t)) = 1 - \big(- \frac{\widehat{X}(t)}{ct} \big)^+ .$$

Uočimo da nam ovdje komponenta drifta c ne predstavlja problem, kao u diskretnom slučaju u 4.3., jer nakon dodavanja drifta spektralno negativan Lévyjev proces ostaje ponovno spektralno negativan, dok dodavanje drifta skip-free slučajnoj šetnji može narušiti njenu specifičnu strukturu ukoliko taj drift nije jediničan (razlog tome je što u slučaju nejediničnog drifta više ne možemo kontrolirati skokove sa jedne strane, kao što smo vidjeli u poglavlju 4.3.).

Uzmimo sada nezavisne subordinatore C i Z te drift $k > 0$ kao u Propoziciji 5.0.11. te definirajmo

$$X(t) = kt - Z(t) - C(t) \ , \quad t \geq 0$$

i

$$Y(t) = kt - Z(t) \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Promatrajmo prvo proces $\widehat{Y}$ i definirajmo

$$\widehat{\tau}_0^Y := \inf\{t > 0 \ : \ \widehat{Y}(t) > 0\} \ ,$$

prvo vrijeme kada dualni proces $\widehat{Y}$ prijeđe razinu 0. Također, definirajmo

$$\mathcal{H}(t, \varepsilon) := 1_{\{\widehat{S}(t-) \leq 0, \widehat{Y}(t-) \in dy\}} 1_{\{\varepsilon \in -y + dx\}} \ ,$$

za $y \leq 0$ i $x > 0$. Sada slijedimo račun kao u [HPSV2]. Dakle, primjenom formule kompenzacije, dobivamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widehat{\tau}_0^Y < \infty, \widehat{Y}(\widehat{\tau}_0^Y -) \in dy, \widehat{Y}(\widehat{\tau}_0^Y) \in dx) &= \mathbb{E}\,\Big(\int_0^\infty dt \int_{[0,\infty)} \mathcal{H}(t,\varepsilon)\Lambda_Z(d\varepsilon) \\
&= \int_0^\infty dt \mathbb{P}(\widehat{S}^Y(t-) \le 0, \widehat{Y}(t-) \in dy)\Lambda_Z(-y+dx) \\
&= \int_0^\infty dt \mathbb{P}(\widehat{Y}(t-) \in dy)\frac{-y}{kt}\Lambda_Z(-y+dx) \\
&= \frac{1}{k}\Lambda_Z(-y+dx)dy \ ,
\end{aligned}
$$

gdje smo u pretposljednjoj jednakosti koristili Teorem 5.3.1., a u posljednjoj jednakost mjera $t\mathbb{P}(\widehat{T}_y \in dt)dy$ i $-y\mathbb{P}(\widehat{Y}(t) \in dy)dt$ za $\widehat{T}_y = \inf\{t \ge 0 \ : \ \widehat{Y}(t) = y\}$ i činjenicu da $\widehat{Y}$ nema negativnih skokova pa je $\mathbb{P}(\widehat{T}_y < \infty) = 1$ za svako $y \le 0$ jer $\widehat{Y}$ neprekidno prelazi svaku razinu prema dolje.

Integriranjem dobivene jednakosti po svim mogućim y, dobivamo

$$
\mathbb{P}(\widehat{\tau}_0^Y < \infty, \widehat{Y}(\widehat{\tau}_0^Y) \in dx) = \frac{1}{k}\Lambda_Z(x,\infty)dx \ .
$$

Također, ako integriramo po svim mogućim x, dobivamo

$$
\mathbb{P}(\widehat{\tau}_0^Y < \infty) = \frac{\mu_Z}{k} \ .
$$

Stoga je

$$
\mathbb{P}(\widehat{Y}(\widehat{\tau}_0^Y) \in dx | \widehat{\tau}_0^Y < \infty) = \frac{\Lambda_Z(x,\infty)dx}{\mu_Z} \ .
$$

Pogledajmo sada što se događa kada procesu Y oduzmemo još jedan subordinator - proces C, tj. gledajmo

$$
\widehat{X}(t) = -kt + Z(t) + C(t) \ , \quad t \ge 0 \ .
$$

Definiramo

$$
\sigma = \inf\{t \ge 0 \ : \ \Delta C(t) > \widehat{S}(t-) - \widehat{X}(t-)\} \ ,
$$

dakle, prvo vrijeme kad se postigne novi supremum procesa $\widehat{X}$ zbog skoka drugog subordinatora, C.

Tada je, sličnim računom kao i gore,

$$
\mathbb{P}(\widehat{X}(\widehat{\tau}_0^X) \in dx, \widehat{\tau}_0^X < \infty, \widehat{X}(\widehat{\tau}_0^X -) \in dy, \Delta X(\widehat{\tau}_0^X) = \Delta Z(\widehat{\tau}_0^X)) = \frac{1}{k}\Lambda_Z(-y+dx)dy
$$

pa opet integracija po y daje

$$
\mathbb{P}(\widehat{X}(\widehat{\tau}_0^X) \in dx, \widehat{\tau}_0^X < \infty, \Delta X(\widehat{\tau}_0^X) = \Delta Z(\widehat{\tau}_0^X)) = \frac{1}{k}\Lambda_Z(x,\infty)dx \ .
$$

Integriranjem po x pak dobivamo

$$\mathbb{P}(\widehat{\tau}_0^X < \infty, \Delta X(\widehat{\tau}_0^X) = \Delta Z(\widehat{\tau}_0^X)) = \frac{\mu_Z}{k} = \mathbb{P}(\widehat{\tau}_0^Y < \infty) \ .$$

Naime, na lijevoj strani gornje jednakosti računamo vjerojatnost da se prvi prelazak cijelog procesa $\widehat{X}$ preko razine 0 desi zbog skoka prvog subordinatora, Z, no to znači da drugi subordinator, C, svojim skokovima do trenutka $\widehat{\tau}_0^X$ nije uopće pridonio postizanju novog supremuma procesa $\widehat{X}$ (eventualno je mijenjao vrijednosti samog procesa $\widehat{X}$). To znači da je vjerojatnost koju računamo s lijeve strane gornje jednakosti zapravo jednaka vjerojatnosti da proces $\widehat{Y}$ prijeđe razinu 0 u konačnom vremenu (a, on, zbog svoje definicije, to može napraviti samo skokom subordinatora Z), a to je upravo vjerojatnost koju računamo na desnoj strani gornje jednakosti.

Također dobivamo i da je

$$\mathbb{P}(\widehat{X}(\widehat{\tau}_0^X) \in dx | \widehat{\tau}_0^X < \infty, \Delta X(\widehat{\tau}_0^X) = \Delta Z(\widehat{\tau}_0^X)) = \frac{1}{\mu_Z} \Lambda_Z(x, \infty) dx \ .$$

Dakle je

$$\mathbb{P}(\widehat{X}(\widehat{\tau}_0^X) \in dx | \widehat{\tau}_0^X < \infty, \Delta X(\widehat{\tau}_0^X) = \Delta Z(\widehat{\tau}_0^X)) = \mathbb{P}(\widehat{Y}(\widehat{\tau}_0^Y) \in dx | \widehat{\tau}_0^Y < \infty)$$

i stoga

$$\widehat{S}^X(\sigma-) =^d \widehat{S}^Y(\infty) \ ,$$

gdje smo sa $\widehat{S}^X := \widehat{S}$, odnosno $\widehat{S}^Y$, sada označili procese trenutnog supremuma od $\widehat{X}$, odnosno $\widehat{Y}$.

Naime, koristeći jako Markovljevo svojstvo, $\widehat{S}^X(\sigma-)$ je zapravo suma geometrijski mnogo ovakvih preskoka (*overshootova)* $\mathbb{P}(\widehat{X}(\widehat{\tau}_0^X) \in dx | \widehat{\tau}_0^X < \infty, \Delta X(\widehat{\tau}_0^X) = \Delta Z(\widehat{\tau}_0^X))$, sve dok se ne desi σ, a na isti je način $\widehat{S}^Y(\infty)$ geometrijska suma preskoka $\mathbb{P}(\widehat{Y}(\widehat{\tau}_0^Y) \in dx | \widehat{\tau}_0^Y < \infty)$ (također koristeći jako Markovljevo svojstvo).

Dakle, oba supremuma su geometrijske sume s istim distribucijama sumanada ($\mathbb{P}(\widehat{X}(\widehat{\tau}_0^X) \in dx | \widehat{\tau}_0^X < \infty, \Delta X(\widehat{\tau}_0^X) = \Delta Z(\widehat{\tau}_0^X)) = \mathbb{P}(\widehat{Y}(\widehat{\tau}_0^Y) \in dx | \widehat{\tau}_0^Y < \infty)$) te istim parametrima geometrijske distribucije ($1 - \mathbb{P}(\widehat{\tau}_0^X < \infty, \Delta X(\widehat{\tau}_0^X) = \Delta Z(\widehat{\tau}_0^X)) = 1 - \mathbb{P}(\widehat{\tau}_0^Y < \infty)$).

Ovim računom smo pokazali Propoziciju 5.0.11.

5.4 Dokaz Propozicije 5.0.12.

Za mnoge probleme, a tako i naš, puno prirodnije okruženje od $D[0,1]$ je prostor càdlàg funkcija na $[0, \infty)$ pa ćemo stoga sada uzimati u obzir proširenu Skorohodovu teoriju, onu na $D[0, \infty)$. $\Omega = D[0, \infty)$ nam je, dakle, prostor funkcija $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ koje su neprekidne zdesna i imaju limese slijeva. Ako je x rastuća, sa $x(\infty)$ ćemo označavati

$x(\infty) := \lim_{t\to\infty} x(t) \in [0,\infty]$.

Sve definicije i svojstva na očit se način mogu proširiti sa $D[0,1]$ na $D[0,t]$ za svako $t > 0$, no problem je ovdje u konvergenciji zbog mogućih prekida funkcija u 1. Stoga, da bismo definirali uopće metriku na $D[0,\infty)$, prvo definiramo transformaciju

$$g_m(t) = \begin{cases} 1, & t \le m-1; \\ m-t, & m-1 \le t \le m; \\ 0, & t \ge m, \end{cases} \quad , \quad m \in \mathbb{N} .$$

Osim toga, za $x \in D[0,\infty)$ definiramo

$$x^m(t) = g_m(t)x(t) \ , \quad t \ge 0 \ .$$

Uz očite definicije $||x||_m$, λ_m i d_0^m, za $m \in \mathbb{N}$, kada prijeđemo sa $D[0,1]$ na $D[0,m]$, sada je

$$d_0^\infty(x,y) = \sum_{m=1}^\infty 2^{-m}(1 \wedge d_0^m(x^m,y^m))$$

metrika koja definira Skorohodovu topologiju na $D[0,\infty)$.

Prostor $D[0,\infty)$ je separabilan i potpun prostor. Također, za vjerojatnosne mjere P_n i P na $D[0,\infty)$ vrijedi

$$P_n \Rightarrow P \ \text{ ako i samo ako } \ P_n\psi_m^{-1} \to P\psi_m^{-1} \text{ za svako } m \ ,$$

gdje je $\psi_m x$ restrikcija od x^m na $[0,m]$. Za ostale detalje vidi [Bill, poglavlje 16.].

Neka je sad $(Y^{(n)})_{n\ge 1}$ niz spektralno negativnih složenih Poissonovih procesa sa driftom koji slabo konvergiraju ka (tada nužno) spektralno negativnom Lévyjevom procesu Y,

$$Y^{(n)} \Rightarrow Y \ .$$

Pretpostavimo također da $Y^{(n)}(t) \to +\infty$ kada $t \to \infty$, tj. $\widehat{Y}^{(n)}(t) := -Y^{(n)}(t) \to -\infty$ kada $t \to \infty$, tako da ima smisla gledati supremume procesa $\widehat{Y}^{(n)}$.

Označimo sa W_n, odnosno W, skalirajuće funkcije pridružene procesima $Y^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, odnosno Y. Podsjetimo se, to su jedinstvene neprekidne rastuće funkcije čija je Laplaceova transformacija dana sa

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W_n(x)\,dx = \frac{1}{\psi_n(\lambda)} \ , \quad \lambda > \psi_n^{-1}(0) =: \phi_n(0)$$

te analogno za W, gdje su ψ_n, odnosno ψ Laplaceovi eksponenti pridruženi $Y^{(n)}$, odnosno Y. Tada vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 5.4.1 *([Ber, Teorem VII.8]) Neka je Y spektralno negativan Lévyjev proces. Sa*

$T_Y(y) = \inf\{t > 0 \ : \ Y(t) > y\}$ označimo prvo vrijeme ulaska procesa Y u (y, ∞), $y > 0$. Tada za $x, y > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(I_{T(y)} \geq -x) = \frac{W(x)}{W(x+y)} \ , \tag{5.7}$$

gdje je W jedinstvena neprekidna rastuća funkcija sa Laplaceovom transformacijom

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x)\, dx = \frac{1}{\psi(\lambda)} \ , \quad \lambda > \psi^{-1}(0) =: \phi(0) \ ,$$

za ψ Laplaceov eksponent od Y (dakle, W je skalirajuća funkcija pridružena Y).

Ako u gornjem teoremu pustimo $y \to \infty$ i primijenimo ga na procese $Y^{(n)}$, odnosno Y, dobivamo

$$\mathbb{P}(\sup \widehat{Y}^{(n)} < a) = \frac{W_n(a)}{W_n(\infty)}$$

i

$$\mathbb{P}(\sup \widehat{Y} < a) = \frac{W(a)}{W(\infty)} \ .$$

No, vrijedi sljedeći rezultat.

Lema 5.4.2 *Za svako $a \geq 0$, ako $Y^{(n)} \Rightarrow Y$, onda i $W_n(a) \to W(a)$ te $W_n(\infty) \to W(\infty)$, gdje su W_n i W skalirajuće funkcije pridružene $Y^{(n)}$ i Y.*

Ova činjenica slijedi iz razloga što $1/\psi_n \to 1/\psi$ (ovo pak slijedi analognom argumentacijom kao u napomeni nakon Leme 5.2.1), a to su Laplacove transformacije od W_n, odnosno W. Stoga zbog neprekidnosti od W, slijedi i da transformacije konvergiraju, tj. $W_n(a) \to W(a)$ za svako $a \geq 0$. Ova posljednja tvrdnja slijedi iz [Fell, Teorem XIII.1.2.], a detaljniji dokaz gornje leme može se naći u [LS, Lema 3.4.].

Sada imamo da

$$\mathbb{P}(\sup \widehat{Y}^{(n)} < a) = \frac{W_n(a)}{W_n(\infty)} \to \frac{W(a)}{W(\infty)} = \mathbb{P}(\sup \widehat{Y} < a) \ , \quad \text{za svako } a \geq 0 \ , \quad n \to \infty \ ,$$

što dokazuje Propoziciju 5.0.12.

5.5 Dokaz Propozicije 5.0.13.

Uočimo odmah da ovdje ne možemo primijeniti isti postupak kao u prethodnom odjeljku. Naime, u ovom se slučaju radi o supremumu također spektralno negativnog procesa, ali ne na $(0, \infty)$, već na $(0, \sigma)$. Stoga se bilo kakav pokušaj uvođenja skalirajućih funkcija koje bi jednostavno dovele do rezultata pokazao neuspješnim jer u konačnici zahtijeva nekakav oblik poznavanja distribucije od σ, a to nam nije poznato - sličan problem je onemogućio dublje rezultate u 3.4. Stoga ćemo ovu relaciju pokazati direktno, koristeći slabu konvergenciju procesa.

Dakle, sada imamo niz spektralno negativnih Lévyjevih procesa s konačnom Lévyjevom mjerom, $(Y^{(n)})_{n\geq 1}$, koji slabo konvergiraju ka spektralno negativnom Lévyjevom procesu Y te složeni Poissonov proces C koji se oduzima u oba slučaja, tj.

$$Y^{(n)}(t) = ct + Z^{(n)}(t) \;\text{ i }\; X^{(n)}(t) = Y^{(n)}(t) - C(t) \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

$$Y(t) = ct + Z(t) \;\text{ i }\; X(t) = Y(t) - C(t) \ , \quad t \geq 0$$

te

$$Y^{(n)} \Rightarrow Y \;\text{ i }\; X^{(n)} \Rightarrow X \ .$$

Da bismo mogli provesti bilo kakav daljnji račun, nužno nam je odrediti na kojem prostoru radimo i kakvu vrstu konvergencije na njemu imamo. Za to nam je prvo potreban sljedeći rezultat.

Teorem 5.5.1 *(**Skorohodov teorem reprezentacije**, [Bill, Teorem 6.7.]) Neka su P_n i P vjerojatnosne mjere na $(S, \mathcal{S})$, gdje je S metrički prostor, a $\mathcal{S}$ pripadajuća σ-algebra. Pretpostavimo da $P_n \Rightarrow P$ i da P ima separabilan nosač. Tada postoje slučajni elementi R_n i R definirani na zajedničkom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takvi da je $P_n = R_n^{-1}(\mathbb{P})$, $P = R^{-1}(\mathbb{P})$ te $R_n(\omega) \to R(\omega)$, $n \to \infty$, za svako $\omega \in \Omega$.*

Iz ovog teorema sada jasno slijedi da ako imamo vjerojatnosne mjere koje slabo konvergiraju, $P_n \Rightarrow P$ i P ima separabilan nosač te uzmemo, kao prije, neprekidnu funkciju $h : S \to S'$ i konstruiramo R_n i R kao u teoremu, onda $h(R_n(\omega)) \to h(R(\omega))$, $n \to \infty$, za svako $\omega \in \Omega$.

Kako je $D[0,\infty)$ separabilan, uz $Y^{(n)}$, Y, $X^{(n)}$ i X definirane kao prije, možemo konstruirati vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i niz $\mathcal{Y}^{(n)}$ te $\mathcal{Y}$ takve da $(\mathcal{Y}^{(n)})^{-1}(\mathbb{P}) = \mathbb{P}_{Y^{(n)}}$, $\mathcal{Y}^{-1}(\mathbb{P}) = \mathbb{P}_Y$ te

$$\mathcal{Y}^{(n)}(\omega) \to \mathcal{Y}(\omega) \ , \quad n \to \infty \ , \quad \text{za svako } \omega \in \Omega \ .$$

Ovdje mislimo na konvergenciju u J_1-topologiji na $(D[0,\infty), \mathbb{R})$.

Neka je sada $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ drugi vjerojatnosni prostor na kojem je definiran proces $C : \Omega' \to D[0,\infty)$ tako da je $C^{-1}(\mathbb{P}')$ vjerojatnosna mjera Poissonovog procesa.

Sada definiramo $\widetilde{\Omega} := \Omega \times \Omega'$, $\widetilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \times \mathcal{F}'$ i $\widetilde{\mathbb{P}} := \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}'$ te

$$\mathcal{X}^{(n)}(\widetilde{\omega}) = \mathcal{X}^{(n)}(\omega, \omega') = \mathcal{Y}^{(n)}(\omega) - C(\omega')$$

i

$$\mathcal{X}(\widetilde{\omega}) = \mathcal{X}(\omega, \omega') = \mathcal{Y}(\omega) - C(\omega') \ .$$

Iz ove je definicije jasno da su $\mathcal{Y}^{(n)}$ i C te $\mathcal{Y}$ i C nezavisni te da

$$\mathcal{X}^{(n)}(\widetilde{\omega}) \to \mathcal{X}(\widetilde{\omega}) \ , \quad \text{za svako } \widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega} \ ,$$

opet obzirom na J_1-topologiju u $(D[0,\infty), \mathbb{R})$.

Radi jednostavnosti zapisa, ipak zanemarimo nadalje notaciju, točnije: pišimo nadalje X, $X^{(n)}$, Y te $Y^{(n)}$ umjesto $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}^{(n)}$, $\mathcal{Y}$ te $\mathcal{Y}^{(n)}$, ali imajući na umu na kojem su prostoru oni definirani i kakvu vrstu konveregencije na njima imamo.

Osim Skorohodovog teorema reprezentacije, koristit ćemo još jedan rezultat vezan uz neprekidnost funkcija obzirom na Skorohodovu topologiju. Naime, pitanje neprekidnosti funkcija obzirom na Skorohodovu topologiju nije nimalo trivijalno i često je vrlo važno odrediti na kojem slupu točaka se tražena neprekidnost postiže. Na koncu, to je i pitanje koje promatramo za naš funkcional σ.

Lema 5.5.2 *([JS, Propozicija VI.2.4.]) Funkcija $x \mapsto \sup_{t \le a} |x(t)|$ je neprekidna za svako x za koje $a \notin J(x)$, gdje je $J(x) = \{t > 0 \ : \ \Delta x(t) \neq 0\}$ skup svih prekida funkcije x.*

Pokažimo sada neprekidnost funkcionala σ, kako bismo iz te činjenice potom dobili konvergenciju supremuma do trenutka σ.

5.5.1 Slučaj samo jednog složenog Poissonovog subordinatora

Ovdje ćemo prvo promotriti situaciju kada u našem modelu imamo samo jedan složeni Poissonov subordinator C koji se pojavljuje kao isti proces zahtjeva za isplatom i u X i u svakom $X^{(n)}$.

Dakle, uzmimo niz funkcija $(g_n)_{n\ge 1} \subset D([0,\infty)) =: D$ takav da

$$g_n \to g \text{ u } D \text{ (u } J_1\text{-topologiji)} \ .$$

Specijalno, to znači da je

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = g(t) \ , \text{ za svako } t \in C(g) \ ,$$

gdje je $C(g)$ skup svih točaka neprekidnosti funkcije g.

Potom uzmimo rastuću funkciju $h \in D$ koja je sastavljena samo od prebrojivo mnogo skokova, tj.

$$h(t) = \sum_{k\ge 1} \Delta h(s_k) 1_{\{s_k \le t\}} \ ,$$

gdje je

$$0 < s_1 < s_2 < \dots \ , \quad \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \text{ i } \Delta h(s_k) > 0 \ .$$

Pretpostavimo da funkcije g_n i g te h ne skaču u istim točkama, tj. neka vrijedi

$$\Delta g_n(s_k) = \Delta g(s_k) = 0, \text{ za svako } n \in \mathbb{N} \text{ i } k \in \mathbb{N} \ . \tag{5.8}$$

Sada definirajmo

$$f_n = g_n + h \quad \text{i} \quad f = g + h \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Tada vrijedi

$$f_n \to f \text{ u } D \text{ (u } J_1\text{-topologiji)} .$$

Naime, vrijedi sljedeći rezultat.

Lema 5.5.3 *([JS, Propozicija VI.2.1., Propozicija VI.2.2.] Neka je $(x_n)_{n\geq 1} \subset D$ niz u D takav da $x_n \to x$ u D (u J_1-topologiji) i neka je $t \geq 0$. Tada postoji niz $t_n \to t$ takav da $x(t_n) \to x(t)$ i $x(t_n-) \to x(t-)$, dakle i $\Delta x(t_n) \to \Delta x(t)$. Ako uzmemo i niz $(y_n)_{n\geq 1} \subset D$ takav da $y_n \to y$ u D (u J_1-topologiji) te za svako $t > 0$ postoji niz $t_n \to t$ takav da $\Delta x_n(t_n) \to \Delta x(t)$ i $\Delta y_n(t_n) \to \Delta y(t)$, onda $x_n + y_n \to x + y$ u D (u J_1-topologiji).*

Sada označimo

$$\sigma_n := \sigma(f^{(n)}) := \inf\{t > 0 \ : \ \Delta h(t) > \overline{f}_n(t-) - f_n(t-)\} ,$$

$$\sigma := \sigma(f) := \inf\{t > 0 \ : \ \Delta h(t) > \overline{f}(t-) - f(t-)\} ,$$

gdje je $\overline{f}(t) := \sup_{0\leq s<t} f(s)$, a analogno se definira i $\overline{f}_n$. Tada je jasno da se σ, a isto tako svaki σ_n, može desiti samo u trenucima s_k, $k \geq 1$, ili se ne dese uopće, tj.

$$\sigma, \sigma_n \in \{s_1, s_2, \ldots\} \cup \{+\infty\} .$$

Pretpostavimo također da

$$\Delta h(s_k) \neq \overline{f}(s_k-) - f(s_k-) \ , \quad k \in \mathbb{N} \ , \tag{5.9}$$

dakle, da kad funkcija h dovede do novog supremuma, da je on strogo veći od prethodnog supremuma, tj. da ona ne 'naskoči' svojim skokom baš na prethodni supremum. Analogno možemo ovaj uvjet zapisati samo preko funkcije g, tj.

$$\Delta h(s_k) \neq \overline{g}(s_k-) - g(s_k-) \ , \quad k \in \mathbb{N} \ . \tag{5.10}$$

Uočimo da je i ova pretpostavka opravdana ukoliko pogledamo originalne procese na koje ćemo primijeniti (u Propoziciji 5.0.13.) rezultat ovog potpoglavlja (5.5.1). Naime, iz [Ber, Propozicija VI.4.] slijedi da svi Lévyjevi procesi osim složenog Poissonovog procesa imaju sve lokalne ekstreme različite. Taj rezultat možemo primijeniti na naš proces X (jer on sadrži u sebi proces Z koji je spektralno negativan s beskonačnom Levyjevom mjerom) pa će stoga vjerojatnost svih trajektorija za koje pretpostavka (5.9) ne vrijedi biti jednaka nula.

Uz ove pretpostavke vrijedi sljedeći rezultat.

Lema 5.5.4 *Neka su oznake sve kao gore i neka vrijede pretpostavka* (5.8) *i pretpostavka* (5.9). *Tada*

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \quad i \quad \overline{f}(\sigma-) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(\sigma_n-) \ .$$

Dokaz.

Pogledajmo interval $[0, s_1)$. Na njemu je $f_n 1_{[0,s_1)} = g_n 1_{[0,s_1)}$ i $f 1_{[0,s_1)} = g 1_{[0,s_1)}$ jer funkcija h prvi puta skoči tek u trenutku s_1. Stoga imamo

$$\overline{f}(s_1-) = \overline{g}(s_1-) \ \text{ i } \ f(s_1-) = g(s_1-) = g(s_1) \ ,$$

gdje posljednja jednakost slijedi zbog pretpostavke (5.8), te

$$\overline{f}_n(s_1-) = \overline{g}_n(s_1-) \ , \quad f_n(s_1-) = g_n(s_1-) = g_n(s_1) \ \text{ i } \ g_n(s_1) \to g(s_1) \ ,$$

pri čemu ovdje posljednja tvrdnja slijedi iz činjenice da su funkcije g i g_n neprekidne u s_1 (ovo pak slijedi po svojstvima funkcija iz D).

Odavde odmah dobivamo

$$f(s_1-) = g(s_1) = \lim_{n\to\infty} g_n(s_1) = \lim_{n\to\infty} f_n(s_1-) \ . \tag{5.11}$$

Osim toga, kako je funkcija g neprekidna u s_1, možemo primijeniti Lemu 5.5.2. pa imamo

$$\overline{g}(s_1) = \lim_n \overline{g}_n(s_1) \ .$$

Budući da su i g_n neprekidne u s_1, vrijedi i

$$\overline{g}(s_1-) = \overline{g}(s_1) \ \text{ i } \ \overline{g}_n(s_1-) = \overline{g}_n(s_1) \ .$$

Stoga vrijedi

$$\overline{f}(s_1-) = \overline{g}(s_1-) = \overline{g}(s_1) = \lim_{n\to\infty} \overline{g}_n(s_1) = \lim_{n\to\infty} \overline{g}_n(s_1-) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(s_1-) \tag{5.12}$$

Iz (5.11) i (5.12) onda slijedi

$$\overline{f}(s_1-) - f(s_1-) = \lim_{n\to\infty} (\overline{f}_n(s_1-) - f_n(s_1-)) \ .$$

Ukoliko je

$$\sigma = s_1 \ , \quad \text{tj.} \ \ \Delta h(s_1) > \overline{f}(s_1-) - f(s_1-) \ ,$$

tada postoji neki $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Delta h(s_1) > \overline{f}_n(s_1-) - f_n(s_1-) \ , \quad \text{za svako } n \geq n_1 \ .$$

Stoga je

$$\sigma_n = s_1 \ , \quad \text{za svako } n \geq n_1$$

pa je zaista

$$\sigma = \lim_n \sigma_n$$

i, osim toga, vrijedi

$$\overline{f}_n(\sigma_n-) = \overline{f}_n(s_1-) \to \overline{f}(s_1-) = f(\sigma-) \ .$$

U suprotnom, ukoliko je

$$\sigma \neq s_1 \ , \quad \text{tj.} \ \ \Delta h(s_1) < \overline{f}(s_1-) - f(s_1-)$$

(uočimo da smo slučaj $\Delta h(s_1) = \overline{f}(s_1-) - f(s_1-)$ izostavili zbog pretpostavke (5.9)), onda postoji neki $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\Delta h(s_1) < \overline{f}_n(s_1-) - f_n(s_1-) \ , \quad \text{za svako } n \geq n_2 \ .$$

Dakle je

$$\sigma_n \neq s_1 \ .$$

No, možemo također pretpostaviti da je tada i

$$\sigma \neq s_1$$

jer u suprotnom smo pokazali da tražena tvrdnja vrijedi. Promatrajmo onda interval $[0, s_2]$. Definiramo funkcije

$$g^{(1)} = g \ , \quad g_n^{(1)} = g_n \quad \text{i} \quad h^{(1)} = h$$

te funkcije $g^{(2)}$, $g_n^{(2)}$ i $h^{(2)}$ tako da je

$$g^{(2)}(t) = g^{(1)}(t) + \Delta h(s_1) 1_{\{s_1 \leq t\}} \ ,$$

$$g_n^{(2)}(t) = g_n^{(1)}(t) + \Delta h(s_1) 1_{\{s_1 \leq t\}}$$

i

$$h^{(2)}(t) = h^{(1)}(t) - \Delta h(s_1) 1_{\{s_1 \leq t\}} = \sum_{j \geq 2} \Delta h(s_j) 1_{\{s_j \leq t\}} \ ,$$

dakle, iz funkcije h smo izdvojili njen skok u trenutku $t = s_1$ i sad možemo primijeniti sličan postupak kao i prije.

Naime, $g^{(2)}$ i $g_n^{(2)}$ su ponovno funkcije iz D te, opet koristeći Lemu 5.3.3., vrijedi da $g_n^{(2)} \to g$ u D (u J_1-topologiji). Također, funkcija $h^{(2)}$ je opet istog oblika kao i $h^{(1)}$ (odnosno h), dakle, rastuća funkcija sa prebrojivo mnogo skokova, jer smo joj samo oduzeli prvi skok od funkcije $h^{(1)} = h$. Kako smo taj skok dodali u funkciju $g^{(2)}$, onda je jasno da možemo zapisati

$$f = g^{(2)} + h^{(2)} \quad \text{i} \quad f_n = g_n^{(2)} + h^{(2)} \ .$$

Također je jasno da funkcije $g^{(2)}$, $g_n^{(2)}$ i $h^{(2)}$ zadovoljavaju pretpostavke (5.8) i (5.9) pa sad na njih možemo primijeniti posve isti postupak kao i gore za $g^{(1)} = g$, $g_n^{(1)} = g_n$ i $h^{(1)} = h$.

Stoga ćemo opet dobiti

$$\overline{f}(s_2-) - f(s_2-) = \lim_{n \to \infty} (\overline{f}_n(s_2-) - f_n(s_2-))$$

pa, ako je $\sigma = s_2$, tada je

$$\Delta h(s_2) > \overline{f}_n(s_1-) - f_n(s_1-) \ , \quad \text{za svako } n \geq n_2 \ .$$

Stoga je

$$\sigma_n = s_2 \ , \quad \text{za svako } n \geq n_2$$

pa je zaista

$$\sigma = \lim_n \sigma_n$$

i, osim toga, vrijedi

$$\overline{f}_n(\sigma_n-) = \overline{f}_n(s_2-) \to \overline{f}(s_2-) = f(\sigma-) \ .$$

Ukoliko je $\sigma \neq s_2$, nastavimo dalje istim postupkom.

Ukoliko se desi da σ nije niti jedan od trenutaka s_k, tj.

$$\sigma \neq s_k \ , \quad \text{za svako } k \geq 1 \ ,$$

onda je i

$$\sigma_n \neq s_k \ , \quad \text{za svako } k \geq 1 \ ,$$

tj.

$$\sigma = +\infty = \lim_n \sigma^{(n)} \ . \qquad \blacksquare$$

Sada primijenimo Lemu 5.5.4. na trajektorije procesa $\widehat{X}$ te $\widehat{X}^{(n)}$. Naime, prema Teoremu 5.5.1,

$$\hat{X}^{(n)}(\omega) \to \hat{X}(\omega) \ \text{ u } D \text{ za sve } \omega \ .$$

Osim toga, kako smo obrazložili nakon pretpostavki (5.8), odnosno (5.9), skup svih ω za koje $\widehat{X}(\omega)$ zadovoljava (5.8) i (5.9) je vjerojatnosti 1 (slijedi iz [Ber, Propozicija VI.4] te činjenice da nezavisni Lévyjevi procesi ne skaču istovremeno). Stoga, po Lemi 5.5.4, slijedi

$$\sup_{0 \leq t < \sigma^{(n)}} \widehat{X}_t^{(n)} \to \sup_{0 \leq t < \sigma} \widehat{X}_t \ \text{ g.s. za } n \to \infty$$

te stoga slijedi i konvergencija po distribuciji

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq t < \sigma^{(n)}} \widehat{X}_t^{(n)} \leq a) \to \mathbb{P}(\sup_{0 \leq t < \sigma} \widehat{X}_t \leq a) \ , \quad n \to \infty \ , \quad \forall a \in \mathbb{R} \ ,$$

tj. vrijedi tvrdnja (5.3).

Dakle, pokazali smo da vrijedi i tvrdnja naše posljednje Propozicije 5.0.13. u slučaju kada imamo složeni Poissonov subordinator C kao proces zahtjeva za isplatom u procesu rizika X.

5.5.2 Slučaj niza složenih Poissonovih subordinatora

Ovdje ćemo promatrati općenitiju situaciju u našem modelu, tj. slučaj kad imamo niz složenih Poissonovih subordinatora $C^{(n)}$ koji konvergiraju ka C, tj. $C^{(n)} \Rightarrow C$. Stoga u ovom slučaju nećemo imati samo jednu funkciju h, već za svako $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$h_n(t) := \sum_{0<s\leq t} \Delta h(s) 1_{\{\Delta h(s) > 1/n\}} \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

gdje je $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ neka neopadajuća funkcija bez neprekidnih dijelova oblika

$$h(t) = \sum_{0<s\leq t} \Delta h(s) \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Tada

$$h_n \uparrow h \ , \quad n \to \infty$$

i ta je konvergencija uniformna na svakom $[0, t]$.

Naime, uzmemo li $t > 0$ i $\varepsilon > 0$, tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n \geq n_0$ je $0 < h(t) - h_n(t) < \varepsilon$. No, tada je za svako $0 \leq u \leq t$

$$h(u) - h_n(u) = \sum_{0\leq s\leq u} \Delta h(s) 1_{\{\Delta h(s) \leq 1/n\}} \leq \sum_{0\leq s\leq t} \Delta h(s) 1_{\{\Delta h(s) \leq 1/n\}} = h(t) - h_n(t) < \varepsilon \ .$$

No, to znači da

$$h_n \to h \ \text{ u } D \text{ (u } J_1\text{-topologiji)}$$

jer uniformna konvergencija povlači konvergenciju u Skorohodovoj topologiji (samo uzmemo $\lambda_n(t) = t$ u definiciji Skorohodove topologije u 5.1.).

Također, ponovno uzmemo proizvoljnu funkciju $g \in D$ i definiramo

$$f_n = g + h_n \ \text{ i } \ f = g + h \ .$$

Ponovno pretpostavljamo da

$$\Delta g(s) \cdot \Delta h(s) = 0 \ , \quad \text{za svako } s > 0 \ , \tag{5.13}$$

dakle, da funkcije g i h ne skaču istovremeno te

$$\Delta h(t) \neq \overline{f}(t-) - f(t-) \ , \quad \text{za svako } t > 0 \ , \tag{5.14}$$

odnosno, da funkcija h nikad ne naskoči točno na prethodni supremum. Uočimo da je i ovdje opravdano pretpostaviti (5.14). Naime, kada pogledamo originalne procese na koje ćemo primijeniti rezultate sljedeće leme, i za njih vrijedi slična argumentacija kao i ona nakon prepostavke (5.9) - dakle, vjerojatnost svih trajektorija za koje ne vrijedi pretpostavka (5.14) je jednaka nula.

Lema 5.5.5 *Neka su oznake sve kao gore i neka vrijede pretpostavka* (5.13) *i pretpostavka* (5.14)*. Tada je*

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \quad i \quad \overline{f}(\sigma-) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(\sigma_n-) \ .$$

Dokaz.

1. slučaj: pretpostavimo da je $\sigma > 0$.

Pretpostavimo, također, da je $\sigma < \infty$ i sa η označimo visinu preskoka dotadašnjeg supremuma od f pomoću funkcije h u trenutku σ, tj.

$$\eta = \Delta h(\sigma) - (\overline{f}(\sigma-) - f(\sigma-)) > 0 \ .$$

Uzmemo proizvoljan $0 < \varepsilon < \eta$ (specijalno je tada $\Delta h(\sigma) > \eta > \varepsilon$) i odaberemo $n_0 \in \mathbb{N}$ kao u dokazu uniformne konvergencije gore, takav da je $1/n_0 < \varepsilon$. Tada za svako $n \geq n_0$ vrijedi

$$h(\sigma) - h_n(\sigma) = \sum_{0<s\leq\sigma} \Delta h(s) 1_{\{\Delta h(s)<1/n\}} < \varepsilon/4 \ .$$

Uočimo također da za svako $n \geq n_0$ vrijedi

$$\Delta h_n(\sigma) = \Delta h(\sigma) \ .$$

Sada za $t \in [0, \sigma]$ imamo

$$f(t) - \varepsilon/4 = g(t) + h(t) - \varepsilon/4 < g(t) + h_n(t) = f_n(t) \leq f(t) \ .$$

Ako je $t \in [0, \sigma)$ takav da je $f(t) > \overline{f}(\sigma-) - \varepsilon/4$, onda je

$$f_n(t) > f(t) - \varepsilon/4 > \overline{f}(\sigma-) - \varepsilon/2$$

pa je

$$\overline{f}(\sigma-) - \varepsilon/2 \leq \overline{f}_n(\sigma-) \leq \overline{f}(\sigma-) \ .$$

Također,

$$f(\sigma-) - \varepsilon/4 \leq f_n(\sigma-) \leq f(\sigma-) \ .$$

Dakle, imamo

$$\overline{f}(\sigma-) - f(\sigma-) - \varepsilon/2 < \overline{f}_n(\sigma-) - f_n(\sigma-) < \overline{f}(\sigma-) - f(\sigma-) + \varepsilon/2 \ .$$

Stoga je za svako $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\Delta h_n(\sigma) - (\overline{f}_n(\sigma-) - f_n(\sigma-)) &= \Delta h(\sigma) - (\overline{f}_n(\sigma-) - f_n(\sigma-)) \\ &> \Delta h(\sigma) - (\overline{f}(\sigma-) - f(\sigma-) + \varepsilon/2) \\ &> \varepsilon/2 \ .\end{aligned}$$

To povlači da je
$$\sigma_n \leq \sigma \quad \text{za svako } n \geq n_0 \ .$$
Ako pak uzmemo bilo koje $0 < t < \sigma$, onda imamo
$$\Delta h(t) - (\overline{f}(t-) - f(t-)) < 0 \ .$$
Ako uzmemo
$$\varepsilon := -(\Delta h(t) - (\overline{f}(t-) - f(t-))) > 0 \ ,$$
onda istim argumentom kao i gore slijedi da je
$$\Delta h(t) - (\overline{f}_n(t-) - f_n(t-)) < -\varepsilon/2$$
za dovoljno velike n. Stoga je
$$\sigma_n > t \quad \text{za bilo koje izabrano } 0 < t < \sigma \ .$$
Stoga je jedino moguće da je
$$\sigma_n = \sigma \quad \text{za dovoljno velike } n$$
pa je
$$\sigma = \lim_n \sigma_n \quad \text{i} \quad \overline{f}(\sigma-) = \lim_n \overline{f}_n(\sigma-) \ .$$
Ukoliko je pak $\sigma = +\infty$, onda primijenimo isti princip kao u prethodnoj lemi pa dobivamo
$$\lim_n \sigma_n = +\infty = \sigma \quad \text{i} \quad \overline{f}(\infty) = \lim_n \overline{f}_n(\infty) \ .$$
2. slučaj: $\sigma = 0$.

Pokazat ćemo da je u ovom slučaju $\limsup_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. Pa, pretpostavimo suprotno, tj. da je
$$\delta := \limsup_{n\to\infty} \sigma_n > 0 \ .$$
Kako je $\sigma = 0$, onda postoji $t \in (0, \delta/2)$ takav da je
$$\eta := \Delta h(t) - (\overline{f}(t-) - f(t-)) > 0 \ .$$
Uzmimo proizvoljni $0 < \varepsilon < \eta$. Slijedimo prvi dio dokaza (samo zamijenimo σ sa t) pa dobivamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za svako $n \geq n_0$ vrijedi
$$\Delta h(t) - (\overline{f}_n(t-) - f_n(t-)) > \varepsilon/2 \ .$$
No, to znači da je $\sigma_n \leq t < \delta/2$ za svako $n \geq n_0$, a to je u kontradikciji s činjenicom da je $\limsup_{n\to\infty} \sigma_n = \delta$.

Također, kao i u prvom dijelu dokaza, imamo da je $\overline{f}_n(\sigma_n-) \leq \overline{f}(\sigma_n-)$ pa je i

$$\limsup_{n\to\infty} \overline{f}_n(\sigma_n-) \leq \limsup_{n\to\infty} \overline{f}(\sigma_n-) = 0 \ . \qquad \blacksquare$$

Sada, uz sličnu argumentaciju kao i u 5.5.1. primijenimo Teorem 5.5.1, Lemu 5.5.4 i Lemu 5.5.5 na trajektorije procesa $\widehat{X}$ te $\widehat{X}^{(n)}$ i time smo u potpunosti dokazali tvrdnje Propozicije 5.0.13.

5.6 Dokaz Teorema 5.0.14.

Sumiranjem rezultata iz 5.2., 5.3., 5.4. i 5.5. slijedi tvrdnja teorema.

Naime, prvo spektralno negativan Lévyjev proces Z aproksimiramo nizom $(Z^{(n)})_{n\geq 1}$ spektralno negativnih Lévyjevih procesa s konačnom Lévyjevom mjerom, na način kako je to pokazano u 5.2. Tako dobijemo niz $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ koji slabo konvergira ka procesu X. Potom na naše procese primijenimo Propoziciju 5.0.11. (kako bismo dobili jednakost supremuma u slučaju kada promatramo procese $(Y^{(n)})_{n\geq 1}$ i $(X^{(n)})_{n\geq 1}$), 5.0.12. (kako bismo dobili jednakost supremuma za $(Y^{(n)})_{n\geq 1}$ i Y) te 5.0.13.(i) (kako bismo dobili jednakost supremuma za $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ i X), kako je to redom obrazloženo u poglavljima 5.3, 5.4 i 5.5.1.

Nakon toga fiksiramo proces Y, kako je to ranije objašnjeno, te uzmemo niz složenih Poissonovih procesa koji aproksimiraju subordinator (bez drifta) C u procesu X. Tako opet dobijemo niz $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ koji slabo konvergira ka procesu X. Na dobivene procese sada primijenimo Propoziciju 5.0.11. te 5.0.13.(ii), kako je to napravljeno u 5.3. i 5.5.2.

Primjenom oba rezultata, dobivamo tvrdnju teorema 5.0.14.

Poglavlje 6

Zaključak

U ovom radu promatrali smo generalizirani proces rizika

$$X(t) = ct - C(t) + Z(t)\ , \quad t \geq 0\ ,$$

gdje je $c > 0$ drift, C proces zahtjeva za isplatom, kojeg smo (u skladu sa njegovom interpretacijom u teoriji rizika i osiguranju) modelirali subordinatorom bez drifta za koji je $\mathbb{E}\, C(1) < \infty$ te Z perturbacija u modelu, koju smo modelirali spektralno negativnim Lévyjevim procesom za koji je $\mathbb{E}\, Z(1) = 0$. Također, u početku smo pretpostavili da vrijedi uvjet čistog profita, tj. da je $\mathbb{E}\, X(1) > 0$. Nastavljajući se na radove *Dufresnea* i *Gerbera*, *Furrera*, *Yanga* i *Zhanga* te *Huzaka*, *Permana*, *Šikića* i *Vondračeka*, pokazali smo da možemo dobiti formulu Pollaczek-Khinchinovog tipa za vjerojatnost propasti,

$$\vartheta(u) = \mathbb{P}(u + X(t) < 0\ , \quad \text{za neko } t > 0)\ , \quad u \geq 0\ ,$$

na $[0, \tau]$, gdje je $\tau \sim Exp(q)$, $q > 0$, neko nezavisno eksponencijalno vrijeme. Rezultat je dan u Teoremu 3.1.5. Pokazali smo, također, da poopćenu formulu Pollaczek-Khinchinovog tipa možemo dobiti i ako ispustimo uvjete na konačnost očekivanja i uvjet čistog profita, kao što se vidi u Teoremu 3.3.2. Dobivene rezultate objasnili smo i analizirali i s aspekta pripadajućih ljestvičastih procesa (za detalje vidi poglavlje 3.4.).

Svoj model postavili smo i u diskretno okruženje pa smo promatrali slučajnu šetnju

$$X(n) = cn - C(n) + Z(n)\ , \quad n \in \mathbb{N}\ ,$$

gdje je $c > 0$ opet drift, C slučajna šetnja koja predstavlja analogon neopadajućeg procesa C iz neprekidnog slučaja te Z perturbacija koja je ovdje modelirana diskretnim analogonom spektralno negativnih Lévyjevih procesa, tj. neprekidnom zdesna (skip-free) slučajnom šetnjom. Također uz pretpostavku uvjeta čistog profita, dobiven je rezultat Pollaczek-Khinchinovog tipa u diskretnom slučaju, što je dano u Teoremu 4.1.1. Strukturu same skip-free slučajne šetnje i njenu povezanost sa neprekidnim slučajem (uz obrazloženje i analizu činjenice da dobiveni rezultati vrijede samo uz pretposatvku ovakve vrste procesa u modelu, kako u neprekidnom, tako i u diskretnom slučaju) analizirali smo u poglavlju 4.2.

Obzirom na prirodnu usku povezanost vjerojatnosti propasti i distribucije supremuma dualnog procesa od X, $\widehat{X} = -X$, promatrali smo u svim gore navedenim okruženjima i distribucijsku jednakost dobivenu u [HPSV1],

$$\sup_{0\le t<\sigma} \widehat{X}(t) =^d \sup_{0\le t<\infty} \widehat{Y}(t) \ ,$$

gdje je

$$Y(t) := ct + Z(t) \ , \quad t \ge 0 \ ,$$

a σ prvo vrijeme kada se postigne novi supremum procesa $\widehat{X}$ zbog skoka subordinatora C. U poglavlju 3.2. pokazali smo kontraprimjerom da ona ne vrijedi kada naš proces rizika promatramo na $[0, \tau]$, a u 4.3. smo pokazali zašto je analiza takve jednakosti problematična u diskretnom slučaju te dali rezultate i smjernice za njeno daljnje proučavanje (vidi Teorem 4.3.10. i rezultate koji mu prethode).

Stoga smo u 5. poglavlju aproksimirali originalni proces nizom složenih Poissonovih procesa, na kojima smo (koristeći analogone rezultata iz 4.3. za složeni Poissonov proces) pokazli da vrijedi gornja distribucijska jednakost (vidi poglavlje 5.3., odnosno Propoziciju 5.0.11.). Prebacivanjem problema u prostor càdlàg funkcija opremljen opremljen Skorohodovom topologijom, dokazali smo (u poglavlju 5.5.) aproksimirajuće rezultate koji su nam omogućili da željenu distribucijsku jednakost pokažemo i u općenitom slučaju (vidi Propoziciju 5.0.13. te Teorem 5.0.14.). Ovim smo pristupom dali još jedan drugačiji dokaz navedene distribucijske jednakosti, ali, što je još bitnije, u potpunosti objasnili rezultate dobivene u poglavlju 3. i 4., tj. pokazali zašto i u kojim slučajevima ovakva jednakost može vrijediti.

Bibliografija

[AChD] L. Alili, L. Chaumont, R.A. Doney *On fluctuation identity for random walks and Lévy processes*, B. Lond. Math. Soc. **37**, (2005), 141-148.

[Asm1] S. Asmussen, *Ruin probabilities*, World Scientific, 2000.

[Asm2] S. Asmussen, *Applied probability and queues*, Springer-Verlag, 2003.

[Bill] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, 1999.

[Bor] A.A. Borokov, *Stochastic processes in queueing theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[BR] L. Addario-Berry, B.A. Reed, *Ballot Theorems, Old and New*, Horizons of Combinatorics Bolyai Society Mathematical Studies **17**, (2008), 9-35.

[Ber] J. Bertoin, *Lévy processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[DG] F. Dufresne, H.U. Gerber, *Risk theory for a compound Poisson process that is perturbed by diffusion*, Insurance Math. Econom., **10**, (1991), 51-59.

[DGS] F. Dufresne, H.U. Gerber, E. Shiu, *Risk theory with Gamma process*, Astin. Bull. **21**, (1991), 177-192.

[Fell] W. Feller, *An introduction to probability theory nad its applications*, Vol II, 2nd edition, Wiley, 1971.

[Furr] H. Furrer, *Risk process perturbed by alpha- stable Lévy motion*, Scand. Actuar. J. (1998), 59-74.

[GS] I. Geček, H. Šikić, *Vjerojatnost propasti*, Poučak **7**, (2006), 27; 5-23.

[HPSV1] M. Huzak, M. Perman, H. Šikić, Z. Vondraček, *Ruin probabilities and decompositions for general perturbed risk processes*, Ann. Appl. Probab. **14**, (2004), 1378-1397.

[HPSV2] M. Huzak, M. Perman, H. Šikić, Z. Vondraček, *Ruin probabilities for competing claim processes*, J. Appl. Probab. **41**, (2004), 679-690.

[JS] J. Jacod, A.N. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes*, Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2003.

[Kall] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2002.

[Kyp1] A. Kyprianou, *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Kyp2] A. Kyprianou, *Lévy processes, the Wiener-Hopf factorisation and applications*, lecture notes

[LS] A. Lambert, F. Simatos *Asymptotic behaviour of local times of compound Poisson processes with drift in the infinite variance case*, arXiv:1206.3800, 2012.

[Pra] N.U. Prabhu, *Stochastic processes: Basic theory and its applications*, Macmillan, New York, 1965.

[Res] S. Resnick, *Adventures in Stochastic processes*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[Schm] H. Schmidli, *Distribution of the first ladder height of a stacionary risk process perturbed by α-stable Lévy motion*, Insurance Math. Econom. **28**, (2001), 13-20.

[Spi] F. Spitzer, *Principles of random walk*, Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2001. (1st edition 1964.)

[SV] R. Song, Z. Vondraček *On suprema of Lévy processes and application in risk theory*, Ann. Inst. H. Poincaré - Probab. Statist. **44**, (2008), 977-986.

[Tak] L. Takács, *On combinatorial methods in the theory of stochastic processes*, Krieger, Huntington, NY, 1977.

[Vid] M. Vidmar, *Fluctuation theory for upwards skip-free Lévy chains*, arXiv:1309.5328

[YZ] H. Yang, L. Zhang, *Spectrally negative Lévy processes with applications in risk theory*, Adv. in Appl. Probab. **33**, (2001), 281-291.

[Zol] V.M. Zolotarev, *The first passage time of a level and behavior at infinity for a class of processes with independent increments*, Theor. Probab. Appl. **9**, (1964.), 653661.

Dodatak

Primjer 3.2.1

```
psi_y=inline('x^2','x')

psi_y =
Inline function:
psi_y(x) = x^2


psi_c=inline('3*log(1+x/5)','x')

psi_c =
Inline function:
psi_c(x) = 3*log(1+x/5)


psi_x=inline('7*x-3*log(1+x/5)+x^2','x')

psi_x =
Inline function:
psi_x(x) = 7*x-3*log(1+x/5)+x^2


lg=inline('(q/py)*((py-x)/(q-psi_y(x)))','x')

lg =
Inline function:
lg(x) = (q/py)*((py-x)/(q-psi_y(x)))

lh=inline('(p/psi_c(p))*((psi_c(py)-psi_c(x))/(p-x))','x')

lh =
Inline function:
lh(x) = (p/psi_c(p))*((psi_c(py)-psi_c(x))/(p-x))
```

Kvocijent koji bi trebao biti konstanta:

```
(q*(p-x)*(1-k*lg*lh))/(p*(q-psi_x)*lg)
```

```
ans =
(p-x)*(1-k*q/py*(py-x)/(q-psi_y(x))*p/psi_c(p)*(psi_c(py)-
psi_c(x))/(p-x))/p/(q-7*x+3*log(1+1/5*x)-x^2)*py/(py-x)*(q-psi_y(x))
```

```
simple((q*(p-x)*(1-k*lg*lh))/(p*(q-psi_x)*lg))
```

```
combine:

(p-x)*(1-k*q/py*(py-x)/(q-psi_y(x))*p/psi_c(p)*(psi_c(py)-
psi_c(x))/(p-x))/p/(q-7*x+3*log(1+1/5*x)-x^2)*py/(py-x)*(q-psi_y(x))

collect(x):

(p-x)*(1-k*q/py*(py-x)/(q-psi_y(x))*p/psi_c(p)*(psi_c(py)-
psi_c(x))/(p-x))/p/(q-7*x+3*log(1+1/5*x)-x^2)*py/(py-x)*(q-psi_y(x))

simplify:

(py*psi_c(p)*q*p-py*psi_c(p)*q*x-
py*psi_c(p)*psi_y(x)*p+py*psi_c(p)*psi_y(x)*x-
k*q*p*py*psi_c(py)+k*q*p*py*psi_c(x)+k*q*p*x*psi_c(py)-
k*q*p*x*psi_c(x))/(-py+x)/(-q+7*x+3*log(5)-3*log(5+x)+x^2)/psi_c(p)/p
```

Životopis

Osobni podaci

- rođena 18. travnja 1983. godine u Zagrebu
- udana, majka jedne kćeri

Školovanje

- **studeni 2006. –** studentica doktorskog studija na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematičkom odsjeku u Zagrebu
- **rujan 2001. – veljača 2006.** dodiplomski studij na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematičkom odsjeku u Zagrebu, diplomski rad *Martingali u teoriji rizika* pod vodstvom prof. dr. sc. Hrvoja Šikića
- **rujan 1997. – lipanj 2001.** učenica Ženske opće gimnazije Sestara milosrdnica u Zagrebu
- **rujan 1989. – lipanj 1997.** učenica Osnovne škole Konjščina

Profesionalno iskustvo

- **2006 –** asistentica i znanstveni novak na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematičkom odsjeku u Zagrebu

Radovi

1. Geček, Ivana; Šikić, Hrvoje. *Vjerojatnost propasti*, Poučak, 7 (2006) , 27; 5-23 (članak, stručni),
2. Geček, Ivana; Jakšetić, Julije; Mimica, Ante. *Vjerojatnost, (http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/uuv/files/vjezbe0708.pdf)*, Zagreb : PMF-Matematiki odjel, 2008. (skripta)

Projekti

- **2006–** : Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske, projekt br. 037-0372790-2801 *Slučajni procesi sa skokovima*

Konferencije, radionice i ljetne škole

- 7th International Conference on Lévy Processes: Theory and Applications, Wroclaw, Poljska, 15.-19. srpnja 2013.,
- 5. hrvatski matematički kongres, Rijeka, 18.-21. lipnja 2012.,
- Spring School in Probability, IUC, Dubrovnik, 23.-27. travnja 2012.,
- Satellite Summer School on Lévy Processes: Theory and Applications, Braunschweig, Njemačka, 22.-24. srpnja 2010.,
- 4. hrvatski matematički kongres, Osijek, 17.-20. lipnja 2008.

Javna izlaganja i posteri

- *On distibution of the supremum of upwards skip-free random walk*, 5. hrvatski matematički kongres, Rijeka, 18-21. lipnja 2012. (poster)