Šesti susret Hrvatskoga društva za mehaniku

Rijeka, 29-30. svibnja 2014.

# POBOLJŠANJE MREŽE KONAČNIH ELEMENATA PRIMJENOM KONFIGURACIJSKIH SILA

**Lustig, N. & Bićanić, N.**

**Sažetak:** Standardna zadaća kod primjene metode konačnih elemenata u linearnoj elastičnosti predstavlja određivanje pomaka čvorova odabrane mreže, iz uvjeta minimiziranja ukupne potencijalne energije tako definiranog diskretiziranog sustava. Svaka promjena mreže, odnosno promjena koordinata čvorova rezultira novim rješenjem, odnosno novim odgovarajućim minimumom potencijalne energije. Koncept tzv. konfiguracijskih sila slijedi iz ovisnosti dobivenog minimuma potencijalne energije o odabiru lokacije čvorova mreže konačnih elemenata, pa se konfiguracijske sile mogu koristiti kao pokazatelj „kvalitete“ odabrane mreže konačnih elemenata. Budući da za točno rješenje konfiguracijske sile unutar homogenog tijela nestaju i ostaju samo konfiguracijske sile na rubu problema, postojanje konfiguracijskih sila je indikator odstupanja numeričkog od točnog rješenja.

Na jednostavnim jednodimenzionalnim štapnim primjerima prikazan je postupak određivanja konfiguracijskih sila direktnim izvodom iz ukupne potencijalne energije. Dobiveni rezultati su uspoređeni sa strogim analitičkim rješenjima za ovakve jednostavne jednodimenzionalne primjere. Počevši od inicijalne mreže, korištenjem konfiguracijskih sila kao indikatora za pomicanje čvorova dolazi se sukcesivno do značajnog poboljšanja mreže konačnih elemenata što se očituje približavanjem strogom analitičkom minimumu potencijalne energije promatranog problema.

**Ključne riječi:** Konfiguracijske sile, metoda konačnih elemenata, poboljšanje mreže

## 1 UVOD

Standardni problemi mehanike kontinuuma često se radi svoje složenosti ne mogu rješavati analitičkim metodama već je nužno pribjeći nekim numeričkim metodama koje zahtjevaju određene aproksimacije. Kod metode konačnih elemenata u linearnoj elastičnosti diskretizira se promatrani problem na konačne elemente i čvorove te se traže pomaci koji se javljaju u čvorovima uslijed vanjskog opterećenja. Vrijednosti pomaka se dobivaju minimiziranjem ukupne potencijalne energije $Π$ diskretiziranog sistema te rješavanjem tako dobivenog sustava jednadžbi, odnosno rješavanjem ravnoteže vanjskih i unutarnjih sila u problemu. Parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije sustava po pomacima čvorova dolazi se do unutarnjih sila u čvorovima

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{∂Π}{∂u\_{i}}=F\_{i}$$ | (1) |

koje trebaju nestati kako bi se minimizirala ukupna potencijalna energija. Za jednostavne primjere, pomaci se mogu dobiti u obliku zatvorenih izraza koje se može uvrstiti u izraz za ukupnu potencijalnu energiju kako bi ju se predstavilo u ovisnosti o položajima čvorova.

Konfiguracijske sile u mehanici kontinuuma se pojavljuju u kontekstu prisustva nehomogenosti materijala [4] dok su konfiguracijske sile u metodi konačnih elemenata prvi puta analizirane u [2]. Ukoliko se želi minimizirati ukupnu potencijalnu energiju sistema u ovisnosti o koordinatama čvorova, dobiju se konfiguracijske sile. Konfiguracijske sile kod linearne elastičnosti u metodi konačnih elemenata su prisutne i kod homogenih materijala jer se kontinuum preslikava u čvorove, koji su međusobno povezani interpolacijskim funkcijama. Tako se zapravo odabrana mreža gdje čvorovi nisu postavljeni u idealni položaj u ovisnosti o opterećenju i rubnim uvjetima zadanog problema, mogu interpretirati ekvivalentno kao prisutnost nehomogenosti. Konfiguracijske sile se mogu odrediti pomoću ukupne potencijalne energije sustava diskretiziranog metodom konačnih elemenata. Parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije po položajima čvorova dobivaju se konfiguracijske sile [5]

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{∂Π}{∂x}=G\_{i}$$ | (2) |

Promjenom početnog položaja čvorova dolazi se do novog riješenja i odgovarajućeg minimuma potencijalne energije. Konfiguracijske sile se mogu promatrati kao pokazatelj kvalitete mreže konačnih elemenata, s obzirom da u idealnoj konfiguraciji čvorova konfiguracijske sile na unutarnjim čvorovima nestaju i ostaju samo konfiguracijske sile na rubu problema.

## 2 NUMERIČKI PRIMJERI

**2.1 Ravni štap opterećen vlastitom težinom i koncentriranom silom na kraju**

Prvi analizirani primjer je slučaj ravnog štapa s površinom poprečnog presjeka $A$, modulom elastičnosti $E$, konačne duljine $L$ i gustoće $ρ$. Štap je diskretiziran pomoću $n-1$ konačna linijska elementa s ukupno $n$ čvorova u točkama $x\_{i},i=1,2,…,n$ gdje je $x\_{1}=0$ i $x\_{n}=L$. Duljine pojedinih elemenata su $h\_{k}=x\_{k+1}-x\_{k},k=1,2,…,n-1$. Štap je opterećen vlastitom težinom $mg$ po cijeloj dužini i koncentriranom silom $P$ na kraju (u čvoru $x\_{n}$) a pridržan je u početnom čvoru $x\_{1}$. Sličan problem razmatran je u [1].

Ukupna potencijalna energija sistema koja ovisi o polju pomaka, odnosno o čvornim pomacima $u\_{i}$, sastoji se od energije deformiranja štapa, gravitacijskog potencijala i potencijala koncentrirane sile. Sumiranjem utjecaja svih elemenata dobivamo,

|  |  |
| --- | --- |
| $$Π=\frac{1}{2}\sum\_{k=1}^{n-1}\left[\frac{EA}{h\_{k}}\left(u\_{k+1}-u\_{k}\right)^{2}-ρgh\_{k}\left(u\_{k+1}+u\_{k}\right)\right]-Pu\_{n}$$ | (3) |

U početnom čvoru vrijedi rubni uvjet, $u\_{1}=0$. Parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije sistema po pomacima te rješavanjem tako dobivenog sustava jednadžbi minimizira se ukupna potencijalna energija. Tako se iz,

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{∂Π}{∂u\_{i}}=0, i=1,2,…,n$$ | (4) |

dolazi do sustava linearnih jednadžbi koje trebaju zadovoljiti pomaci kako bi se minimiziralo ukupnu potencijalnu energiju. Rješavanjem sustava jednadžbi dolazi se do pomaka

|  |  |
| --- | --- |
| $$u\_{i}=\frac{ρg}{2E}\left(x\_{i}-x\_{1}\right)\left(2x\_{n}-x\_{1}-x\_{i}\right)+\frac{P}{EA}\left(x\_{i}-x\_{1}\right),i=2,3,…,n-1$$ | (5) |

i

|  |  |
| --- | --- |
| $$u\_{n}=\frac{ρg}{2E}\left(x\_{n}-x\_{1}\right)^{2}+\frac{P}{EA}\left(x\_{n}-x\_{1}\right)$$ | (6) |

Uvrštavanjem zatvorenih izraza za pomake čvorova (5) i (6) u ukupnu potencijalnu energiju sustava (3) dolazi se do izraza koji predstavlja ukupnu potencijalnu energiju sustava u ovisnosti o položaju čvorova u diskretizaciji konačnim elementima. Parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije sustava po koordinatama položaja čvorova dobivaju se konfiguracijske sile. Za primjer ravnog štapa slijedi

|  |  |
| --- | --- |
| $$G\_{1}=\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E}\left[4L^{2}-h\_{1}^{2}\right]+\frac{ρg}{E}PL+\frac{P^{2}}{2EA}$$ | (7) |
| $$G\_{i}=\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E}\left[h\_{i-1}^{2}-h\_{i}^{2}\right],i=2,3,…,n-1$$ | (8) |
| $$G\_{n}=-\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E}\left[4L^{2}-h\_{n-1}^{2}\right]-\frac{ρg}{E}PL-\frac{P^{2}}{2EA}$$ | (9) |

Iz gornjih izraza je vidljivo da koncentrirana sila utječe isključivo na konfiguracijske sile u rubnim čvorovima dok gravitacijsko opterećenje uzrokuje pojavu konfiguracijskih sila u svim čvorovima problema. Također se vidi da kod konfiguracijskih sila ne vrijedi princip superpozicije opterećenja kao kod određivanja Newtonovskih sila, nego u rubnim čvorovima postoji član koji predstavlja umnožak dva opterećenja.

Iz izraza (8) je vidljivo kako konfiguracijske sile u unutarnjim čvorovima nestaju ukoliko su duljine konačnih elemenata jednake, odnosno ako je štap podijeljen na jednake konačne elemente. Iz izraza (7) i (9) se vidi da konfiguracijske sile na rubovima ostaju prisutne neovisno o položaju unutarnjih čvorova u sustavu. Može se reći da konfiguracijske sile na rubu problema predstavljaju djelovanje okoline na štap, jer je štap svojevrsna nehomogenost u svome okruženju. Generalno, ako se ponište konfiguracijske sile na unutarnjim čvorovima, dobiva se položaj čvorova koji daje minimalnu ukupnu potencijalnu energiju za zadani problem. Isto tako, sumiranjem izraza (7) – (9) dolazi se do ravnoteže konfiguracijskih sila, odnosno, vrijedi

|  |  |
| --- | --- |
| $$\sum\_{i=1}^{n}G\_{i}=0$$ | (10) |

**2.2 Štap s linearnom promjenom poprečnog presjeka opterećen koncentriranom silom na kraju**

Promatramo štap konačne duljine $L$, kod kojeg se površina poprečnog presjeka linijski mijenja s početne površine $A\_{0}$ na krajnju površinu $A\_{n}$. Štap ima modul elastičnosti $E$, pridržan je u prvom čvoru $x\_{1}$i opterećen je koncentriranom silom $P$ u krajnjem čvoru $x\_{n}$. Štap je diskretiziran pomoću $n $točaka i $n-1$ linijskih konačnih elemenata konstantnog poprečnog presjeka. Površina poprečnog presjeka konačnog elementa je definirana izrazom

|  |  |
| --- | --- |
| $$A\_{k}=\frac{x\_{k}+x\_{k+1}}{2}\frac{\left(A\_{n}-A\_{0}\right)}{L}+A\_{0},k=1,2,…,n-1$$ | (11) |

odnosno, površina poprečnog presjeka se usrednjuje između vrijednosti koju bi poprimila u čvorovima elementa. Takvom aproksimacijom se dobije skokovita promjena poprečnog presjeka između čvorova. Ukupna potencijalna energija tako definiranog problema iznosi

|  |  |
| --- | --- |
| $$Π=\frac{1}{2}\sum\_{k=1}^{n-1}\frac{EA\_{k}}{h\_{k}}\left(u\_{k+1}-u\_{k}\right)^{2}-Pu\_{n}$$ | (12) |

Traži se minimum ukupne potencijalne energije po pomacima čvorova. Parcijalnim deriviranjem po svim pomacima, uvažavanjem rubnih uvjeta te izjednačavanjem dobivenih izraza s nulom dolazi se do pomaka čvorova

|  |  |
| --- | --- |
| $$u\_{i}=\sum\_{k=1}^{i-1}\frac{h\_{k}}{EA\_{k}}P,i=2,3,…,n$$ | (13) |

Uvrštavanjem pomaka čvorova (13) u izraz za ukupnu potencijalnu energiju (12) dolazi se do ukupne potencijalne energije sustava izražene preko koordinata čvorova

|  |  |
| --- | --- |
| $$Π=-\frac{P^{2}}{2}\sum\_{k=1}^{n-1}\frac{h\_{k}}{EA\_{k}}$$ | (14) |

Konfiguracijske sile se dobivaju parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije po koordinatama svakog čvora, uz uvažavanje zavisnosti površine poprečnog presjeka elementa o položaju čvorova. Tako imamo,

|  |  |
| --- | --- |
| $$G\_{1}=\frac{P^{2}\left(A\_{n}-A\_{0}\right)}{4EL^{2}}\left[\frac{\frac{2A\_{1}L^{2}}{A\_{n}-A\_{0}}+h\_{1}\left(x\_{2}+x\_{n}\right)}{A\_{1}^{2}}+\sum\_{i=2}^{n-1}\frac{x\_{i+1}^{2}-x\_{i}^{2}}{A\_{i}^{2}}\right]$$ | (15) |
| $G\_{i}=-\frac{P^{2}}{4EL}\left[\frac{2A\_{i-1}L-h\_{i-1}\left(A\_{n}-A\_{0}\right)}{A\_{i-1}^{2}}-\frac{2A\_{i}L+h\_{i}\left(A\_{n}-A\_{0}\right)}{A\_{i}^{2}}\right],i=2,3,…,n-1$  | (16) |
| $$G\_{n}=\frac{P^{2}\left(A\_{n}-A\_{0}\right)}{4EL^{2}}\left[\frac{\frac{2A\_{n-1}L^{2}}{A\_{n}-A\_{0}}+h\_{n-1}\left(x\_{1}+x\_{n}-1\right)}{A\_{n-1}^{2}}+\sum\_{i=1}^{n-2}\frac{x\_{i+1}^{2}-x\_{i}^{2}}{A\_{i}^{2}}\right]$$ | (17) |

Iz gornjih izraza sumiranjem po svim čvorovima dolazi se do izraza za sumu konfiguracijskih sila oblika

|  |  |
| --- | --- |
| $$\sum\_{i=1}^{n}\frac{∂Π}{∂x\_{i}}=\frac{P^{2}\left(A\_{n}-A\_{0}\right)}{2EL}\sum\_{k=1}^{n-1}\frac{h\_{k}}{A\_{k}^{2}}$$ | (18) |

Iz izraza (18) je jasno vidljivo da suma konfiguracijskih sila nije jednaka nuli za konačni broj elemenata. Analizom izraza vidljivo je da se suma konfiguracijskih sila svodi na nulu u slučaju da je $A\_{n}=A\_{0}$ (odnosno, ako imamo ravan štap bez promjene površine poprečnog presjeka) i u slučaju kada broj konačnih elemenata teži beskonačnosti (slučaj $h\_{k}=0$, tada se dobije rješenje koje je ekvivalentno analitičkom rješenju problema). Mogući razlog što suma konfiguracijskih sila nije jednaka nuli leži u tome što je štap koji u stvarnosti ima linearnu promjenu površine poprečnog presjeka simuliran elementima koji imaju skokovitu promjenu površine poprečnog presjeka te se na taj način u svakom čvoru uvijek nalazi svojevrsna nekompatibilnost između površina susjednih elemenata.

Prisutnost konfiguracijskih sila u srednjim čvorovima ukazuje kako je potrebno pomicati početnu konfiguraciju čvorova da bi se ukupna potencijalna energija rješenja dobivenog metodom konačnih elemenata približila analitičkoj potencijalnoj energiji. Time se zapravo dobiva točnije vrijednosti pomaka u čvorovima, odnosno, dobiva se bolja aproksimacija stvarnog problema. Pomicanje čvorova je provedeno pomoću izraza [3]

|  |  |
| --- | --- |
| $$x\_{i}→x\_{i}-c\*G\_{i}$$ | (19) |

Gdje je $c$ konstanta koja mora imati malenu vrijednost. Nakon određivanja novog položaja čvorova ponavlja se procedura i određuju se nove konfiguracijske sile. Cilj je smanjiti vrijednosti konfiguracijskih sila u unutarnjim čvorovima sve dok njihova norma ne postane manja od zadane tolerancije. Postizanjem zadovoljavajućeg početnog položaja čvorova dobiva se bolja aproksimacija ukupne potencijalne energije sustava metodom konačnih elemenata u usporedbi s ukupnom potencijalnom energijom dobivenom analitičkim putem. Također, vrijednost pomaka u opterećenom čvoru se približava analitičkom rješenju za isti problem.

**2.3 Ravni štap s promjenom krutosti (inkluzija) opterećen vlastitom težinom**

Promatra se štap konačne duljine $L$, površine poprečnog presjeka $A$, koji po cijeloj svojoj dužini ima modul elastičnosti $E\_{1}$ izuzev kratkog segmenta u srednjem dijelu štapa koji ima modul elastičnosti $E\_{2}$. Odsječak štapa s modulom elastičnosti $E\_{2}$ je duljine $L\_{2}$ dok su odsječci s modulom elastičnosti $E\_{1}$duljine $L\_{1}$i $L\_{3}$, pritom vrijedi $L=L\_{1}+L\_{2}+L\_{3}$. Štap je pridržan na početku i opterećen je vlastitom težinom. Štap je diskretiziran pomoću $n$ čvorova i $n-1$ konačnih elemenata. Segment $L\_{1}$je podjeljen na $e\_{1}$ elemenata, segment $L\_{2}$na $e\_{2}$ elemenata a segment $L\_{3}$ na $e\_{3}$ elemenata.

Potrebno je odrediti ukupnu potencijalnu energiju diskretiziranog sustava te dobiti pomake čvorova parcijalnim deriviranjem ukupne potencijalne energije po pomacima čvorova rješavanjem dobivenog sustava linearnih jednadžbi. Potom se ukupna potencijalna energija diskretiziranog sustava predstavlja pomoću položaja čvorova i deriviranjem po položajima dolazi se do izraza za konfiguracijske sile. Izrazi za konfiguracijske sile u čvorovima ovakvog sustava su

|  |  |
| --- | --- |
| $$G\_{1}=\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E\_{1}}\left[4L^{2}-h\_{1}^{2}\right]$$ | (20) |
| $$G\_{i\_{1}}=\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E\_{1}}\left[h\_{i\_{1}-1}^{2}-h\_{i\_{1}}^{2}\right],i\_{1}=2,…,e\_{1}$$ | (21) |
|  $G\_{e\_{1}+1}=-\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E\_{1}}\left[4\left(L-L\_{1}\right)^{2}-h\_{e\_{1}}^{2}\right]+\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E\_{2}}\left[4\left(L-L\_{1}\right)^{2}-h\_{e\_{1}+1}^{2}\right]$ | (22) |
| $$G\_{i\_{2}}=\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E\_{2}}\left[h\_{i\_{2}-1}^{2}-h\_{i\_{2}}^{2}\right],i\_{2}=e\_{1}+2,…,e\_{1}+e\_{2}$$ | (23) |
| $$G\_{e\_{2}+1}=-\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E\_{2}}\left[4L\_{3}^{2}-h\_{e\_{2}}^{2}\right]+\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E\_{1}}\left[4L\_{3}^{2}-h\_{e\_{2}+1}^{2}\right]$$ | (24) |
| $$G\_{i\_{3}}=\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E\_{1}}\left[h\_{i\_{3}-1}^{2}-h\_{i\_{3}}^{2}\right],i\_{3}=e\_{1}+e\_{2}+2,…,n-1$$ | (25) |
| $$G\_{n}=\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E\_{1}}\left[4\left(L-L\_{1}\right)^{2}-4L^{2}-4L\_{3}^{2}+h\_{n-1}^{2}\right]+\frac{ρ^{2}g^{2}A}{8E\_{2}}\left[4L\_{3}^{2}-4\left(L-L\_{1}\right)^{2}\right]$$ | (26) |

Iz gornjih izraza se vidi idealan raspored čvorova koji bi trebali biti raspoređeni na jednakim razmacima po segmentima štapa. Također je vidljivo da je suma konfiguracijskih sila u ovakvom problemu jednaka nuli.

Unutar pojedinih segmenata konfiguracijske sile se ponašaju kao i kod primjera s ravnim štapom, tj. čvorovi teže biti na jednakim razmacima. Kod čvorova gdje imamo promjenu krutosti uvijek je prisutna konfiguracijska sila. Ukoliko je $E\_{1}>E\_{2}$ tada konfiguracijske sile u tim čvorovima djeluju prema sredini štapa, dok ako je $E\_{2}>E\_{1}$ konfiguracijske sile djeluju prema krajevima štapa. Iz toga se može zaključiti da su na mjestima promjene krutosti konfiguracijske sile usmjerene prema zoni manje krutosti.

## 3 ZAKLJUČAK

U radu je opisan postupak određivanja konfiguracijskih sila kod primjene metode konačnih elemenata u linearnoj elastičnosti te je dobivena raspodjela konfiguracijskih sila za tri različita primjera. Kod homogenog štapa jednolikog presjeka određen je optimalan raspored čvorova te su dobivene vrijednosti konfiguracijskih sila u srednjim i rubnim čvorovima. Optimalnim rasporedom čvorova konfiguracijske sile u unutrašnjosti nestaju dok su u rubnim čvorovima uvijek prisutne konfiguracijske sile. Rubne konfiguracijske sile se mogu tumačiti kao utjecaj okoline na promatrano tijelo. Kod problema štapa s linearnom promjenom površine poprečnog presjeka optimalni raspored čvorova se dobiva iterativno, uz primjenu opisanog numeričkog postupka. Kod takvog problema ravnoteža konfiguracijskih sila nije zadovoljena jer su prisutne skokovite promjene površine poprečnog presjeka na kontaktima dva elementa. Treći analizirani problem je slučaj štapa s inkluzijom kod kojega konfiguracijske sile nestaju unutar segmenata štapa s istim modulom elastičnosti ali na kontaktu dva materijala su uvijek prisutne konfiguracijske sile. Njihova vrijednost ovisi o odnosima modula elastičnosti, sile su usmjerene od zone veće krutosti prema zoni manje krutosti. Slično kao što se prisutnost konfiguracijskih sila kod nehomogenih materijala može tumačiti kao težnja materijala da se homogeniziraju, u slučaju mreže konačnih elemenata, prisutnost konfiguracijskih sila se može interpretirati kao težnja čvorova da se postave u optimalan položaj. U budućem radu se planira analizirati probleme konfiguracijskih sila u ravnini te konfiguracijske sile u kontekstu pukotina i delaminacije materijala.

**Literatura:**

[1] Braun, M., “Configurational forces in discrete elastic systems”, Archive of Applied Mechanics, No.77., 2007, str. 85-93.

[2] Braun, M., “Configurational forces induced by finite-element discretization”, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, Physics, Mathematics, Vol. 2, No.46., 1997, str. 24-31.

[3] Eurviriyanukul, S. & Askes, H., “Tendon layout optimisation through configurational forces equilibration in plane stress analysis of prestressed concrete structures”, Computers and Structures, No.89., 2011, str. 1673-1680.

[4] Maugin, G.A., “Material Inhomogeneities in Elasticity”, Chapman & Hall London UK, 1993.

[5] Mueller, R. & Maugin, G.A., “On material forces and finite element discretizations”, Computational Mechanics, No.29, 2002, str. 52-60.

**Autori:**

Nikola Lustig, Sveučilište u Rijeci, Građevinski Fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, e-mail: nikola.lustig@uniri.hr

Nenad Bićanić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski Fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, e-mail: nenad.bicanic@glasgow.ac.uk