Šesti susret Hrvatskoga društva za mehaniku
Rijeka, 29-30. svibnja 2014.

PARAMETRIZACIJA POMAKA I ROTACIJA ŠESTERODIMENZIONALNIM VEKTORIMA

Gaćeša, M. & Jelenić, G.

Sažetak: U radu je dan prikaz ideje konfiguracijskog tenzora koju su predložili Bottasso i Borri, a temelji se na generalizaciji rotacija, koje pripadaju specijalnoj grupi ortogonalnih transformacija SO(3), na konfiguracije, koje pripadaju specijalnoj grupi krutih pomaka SR(6). Kao rezultat dobili su formulaciju konačnog elementa u kojoj su stupnjevi slobode objedinjeni pa se popravci i pomaka i rotacija tretiraju na analogan način na koji se tretiraju popravci rotacija u standardnim formulacijama.

Ključne riječi: *rotacijski tenzor, velike rotacije, fixed-pole pristup, konfiguracijski tenzor*

1 UVOD

Prostorne rotacije predstavljaju jedan od izazova modeliranja problema iz raznih područja mehanike, bez obzira na to radi li se o krutim tijelima, deformabilnim tijelima ili mehanizmima. S obzirom na to da se rotacija može predstaviti kao kretanje točke u trodimenzionalnoj nelinearnoj mnogostrukosti, Liejevoj grupi SO(3) specijalnih ortogonalnih transformacija [2], njihova parametrizacija potrebna je pri formulaciji takvih problema. Bauchau i Trainelli [2] dali su vrlo detaljan prikaz postojećih parametrizacija rotacija (vektorskih i nevektorskih) te su pokazali da se sve vektorske parametrizacije mogu svesti u istu familiju parametrizacija koje se samo razlikuju u odabiru generirajuće funkcije. Borri, Trainelli i Bottasso [3] predložili su analogan prikay parametriyacija konfiguracija (položaj i rotacija) u grupi koju su nazvali SR(6) (specijalna grupa krutih pomaka). U ovome radu ukratko sažimamo te rezultate i naglašavamo njihovu povezanost.

2 LIEJEVE GRUPE

Liejeva grupa je glatka mnogostrukost koja zadovoljava svojstva grupe i zadovoljava svojstvo da su operacije grupe diferencijabilne. Za svaku Liejevu grupu uvijek postoji odgovarajuća Liejeva algebra između kojih je definirano preslikavanje pomoću eksponencijalne mape [5]. Općenito, eksponencijalnu mapu proizvoljne matrice $\mathbf{A}$ možemo prikazati beskonačnim redom [4]

$$\exp(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \,. \tag{1}$$

Izraz (1) u posebnim slučajevima (zbog rekurzivnih svojstava potencija matrice $\mathbf{A}$) može imati zatvoreni oblik i dva takva slučaja ćemo prikazati u nastavku.

3 ROTACIJSKI TENZOR

Kao što je rečeno u uvodu, rotacijski tenzori pripadaju specijalnoj diferencijabilnoj grupi ortogonalnih transformacija, $\boldsymbol{\Lambda} \in$ SO(3). Rotacijski tenzor $\boldsymbol{\Lambda}$ je, dakle, ortogonalna matrica za koju vrijedi $\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda}^T$, $\det \boldsymbol{\Lambda} = +1$ i koja je, eksponentnom mapom povezana s odgovarajućim elementom Liejeve algebre, $\widehat{\boldsymbol{\psi}} \in$ so(3). Elementi Liejeve algebre so(3) su antisimetrične matrice trećega reda s komponentama ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 u obliku

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}} = -\widehat{\boldsymbol{\psi}}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & 0 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 0 \end{bmatrix} . \tag{2}$$

U kontekstu trodimenzionalnih rotacija vektor $\boldsymbol{\psi} = \left\langle \psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \right\rangle^T$ nazivamo rotacijskim pseudovektorom. Važno je napomenuti da komponente ovog vektora *ne* označavaju rotacije s obzirom na odgovarajuće koordinatne osi. Zamislimo neku poznatu početnu orijentaciju $\boldsymbol{\Lambda}_0$ ortonormirane baze u prostoru. Zamislimo da sada želimo tu orijentaciju zarotirati oko osi $\boldsymbol{\psi}$ za iznos $\psi = |\boldsymbol{\psi}| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}$ u novu orijentaciju $\boldsymbol{\Lambda}$. Tada su te dvije orijentacije povezane na sljedeći način [1]

$$\boldsymbol{\Lambda} = \exp \widehat{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\Lambda}_0 \,. \tag{3}$$

Ukoliko izračunamo $\exp \widehat{\boldsymbol{\psi}}$ pomoću formule za eksponencijalnu mapu (1), imamo

$$\exp \widehat{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{I} + \widehat{\boldsymbol{\psi}} + \frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{\psi}}^2 + \frac{1}{6}\widehat{\boldsymbol{\psi}}^3 + \frac{1}{24}\widehat{\boldsymbol{\psi}}^4 + \dots \,, \tag{4}$$

što se, zbog svojstva rekurzivnosti matrica u so(3) [4]

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}^{2k-1} = (-1)^{k-1} \psi^{2(k-1)} \widehat{\boldsymbol{\psi}} \,, \tag{5}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}^{2k} = (-1)^{k-1} \psi^{2(k-1)} \widehat{\boldsymbol{\psi}}^2 \,, \tag{6}$$

može zapisati u zatvorenom obliku kao

$$\exp \widehat{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{I} + \frac{\sin\psi}{\psi}\widehat{\boldsymbol{\psi}} + \frac{1-\cos\psi}{\psi^2}\widehat{\boldsymbol{\psi}}^2 \,. \tag{7}$$

Izraz (7) često nazivamo Rodriguesovom formulom i predstavlja najjednostavniji oblik vektorske parametrizacije rotacija [2]. Agryris [1] je dao vrlo zornu geometrijsku interpretaciju trodimenzionalnih rotacija kao i svojstava trodimenzionalnih rotacija koja slijede iz svojstava elemenata grupe SO(3).

4 KONFIGURACIJSKI TENZOR

Bottasso i Borri [4] su vrlo temeljito prikazali mogućnost objedinjavanja definicije položaja i orijentacije ortonormirane baze konfiguracijskim tenzorom $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \widehat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Prva matrica, nazvana transportnim operatorom, proizlazi iz uspostavljanja relacije između brzine ortonormiranog okvira i brzina s obzirom na neku fiksnu točku u prostoru, nazvanu *fixed-pole* brzinom. $\mathbf{0}$ predstavlja trodimenzionalnu nul-matricu, dok $\mathbf{r}$ predstavlja vektor položaja promatrane točke. Druga matrica se sastoji od standardnih rotacijskih matrica $\boldsymbol{\Lambda}$ koje su elementi SO(3) grupe sa svojstvima prikazanim u prethodnom poglavlju. Autori su pokazali vrlo jasnu analogiju između konfiguracijskog tenzora, za koji su pokazali da je element specijalne grupe krutih pomaka SR(6), i rotacijskih matrica koje su elementi specijalne grupe ortogonalnih transformacija SO(3).
Ako je SR(6) Liejeva grupa, to znači da mora postojati i Liejeva algebra sr(6). Neka je $\boldsymbol{\nu} = \left\langle \boldsymbol{\nu}_1 \quad \boldsymbol{\nu}_2 \right\rangle^T$, $\boldsymbol{\nu}_1$ i $\boldsymbol{\nu}_2 \in \mathbb{R}^3$, $\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}$ je

$$\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\nu}}_2 & \widehat{\boldsymbol{\nu}}_1 \\ \mathbf{0} & \widehat{\boldsymbol{\nu}}_2 \end{bmatrix} . \tag{9}$$

Ako je taj tenzor element odgovarajuće Liejeve algebre sr(6), između dvije konfiguracije $\mathbf{C}$ i $\mathbf{C}_0$ postoji veza u obliku eksponencijalne mape

$$\mathbf{C} = \exp \overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{C}_0 . \tag{10}$$

Da bismo to pokazali, uvrstimo $\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}$ u (1),

$$\exp \overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{I} + \overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{2}\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^2 + \frac{1}{6}\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^3 + \frac{1}{24}\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^4 + \frac{1}{5!}\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^5 + \frac{1}{6!}\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^6 + \dots , \tag{11}$$

i uočimo rekurzivnost matrica u sr(6) [4],

$$\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^{2k} = (-1)^k \left[(k-1)\nu_2^{2(k-2)} \overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^4 + (k-2)\nu_2^{2(k-1)} \overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^2 \right] , \tag{12}$$

$$\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^{2k+1} = (-1)^k \left[(k-1)\nu_2^{2(k-2)} \overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^5 + (k-2)\nu_2^{2(k-1)} \overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^3 \right] , \tag{13}$$

uz $\nu_2 = |\boldsymbol{\nu}_2|$. Tako dolazimo do toga da će i $\exp \overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}$ imati zatvoreni oblik [4]

$$\exp \overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{5} \delta_k \overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}^k , \tag{14}$$

gdje su δ_k trigonometrijske funkcije ν_2 koje sljede iz suma redova članova uz odgovarajuće potencije $\overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}}$ [4]

$$\begin{aligned}
&\delta_1 = 1 , \qquad \delta_2 = \alpha_2(1 + \psi^2\gamma_2) , \qquad \delta_3 = \frac{1}{2}(5\beta_2 - \alpha_2) , \\
&\delta_4 = \alpha_2\gamma_2 , \qquad \delta_5 = \frac{1}{2\psi^2}(3\beta_2 - \alpha_2) , \\
&\alpha_1 = \frac{\sin\psi}{\psi} , \qquad \alpha_2 = \beta_1 = \frac{1 - \cos\psi}{\psi^2} , \\
&\beta_2 = \frac{\psi - \sin\psi}{\psi^3} , \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\psi^2}\left(1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right) .
\end{aligned} \tag{15}$$

Daljnjim sređivanjem dobijemo izraz

$$\exp \overset{\rtimes}{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} \exp \widehat{\boldsymbol{\nu}}_2 & \heartsuit \\ \mathbf{0} & \exp \widehat{\boldsymbol{\nu}}_2 \end{bmatrix} , \tag{16}$$

gdje smo oznakom $\heartsuit$ označili matricu[1] koja je izražena preko $\widehat{\boldsymbol{\nu}}_1$ i $\widehat{\boldsymbol{\nu}}_2$ na sljedeći način

$$\heartsuit = \alpha_1 \widehat{\boldsymbol{\nu}}_1 - (\boldsymbol{\nu}_1 \cdot \boldsymbol{\psi}) \left(\alpha_2 - \beta_2\right) \widehat{\boldsymbol{\psi}} - (\boldsymbol{\nu}_1 \cdot \boldsymbol{\psi}) 2 \alpha_2 \gamma_2 \widehat{\boldsymbol{\psi}}^2 + \alpha_2 \left(\widehat{\boldsymbol{\psi}} \widehat{\boldsymbol{\nu}}_1 + \widehat{\boldsymbol{\nu}}_1 \widehat{\boldsymbol{\psi}}\right) , \tag{17}$$

sa koeficijentima α_1, α_2, β_2 i γ_2 definiranim u (15). Uvrstimo li (8) i (16) u (10) dobivamo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \widehat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp \widehat{\boldsymbol{\nu}}_2 & \heartsuit \\ \mathbf{0} & \exp \widehat{\boldsymbol{\nu}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \widehat{\mathbf{r}}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda}_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & \widehat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\Lambda} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp \widehat{\boldsymbol{\nu}}_2 \boldsymbol{\Lambda}_0 & \exp \widehat{\boldsymbol{\nu}}_2 \widehat{\mathbf{r}}_0 \boldsymbol{\Lambda}_0 + \heartsuit \boldsymbol{\Lambda}_0 \\ \mathbf{0} & \exp \widehat{\boldsymbol{\nu}}_2 \boldsymbol{\Lambda}_0 \end{bmatrix} , \tag{18}$$

odakle slijedi

$$\boldsymbol{\Lambda} = \exp \widehat{\boldsymbol{\nu}}_2 \boldsymbol{\Lambda}_0 . \tag{19}$$

Ovdje prepoznajemo vezu (3) pa zaključujemo da donji dio vektora $\boldsymbol{\nu}$, mora biti jednak rotacijskom pseudovektoru, dakle, $\boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\psi}$. Izjednačavanje preostalog bloka u (18) daje

$$\widehat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\Lambda} = \exp \widehat{\boldsymbol{\nu}}_2 \widehat{\mathbf{r}}_0 \boldsymbol{\Lambda}_0 + \heartsuit \boldsymbol{\Lambda}_0 , \tag{20}$$

što, uvođenjem $\boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\psi}$, kao i veze (3) dovodi do

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{r}} \exp \widehat{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\Lambda}_0 &= \exp \widehat{\boldsymbol{\psi}} \widehat{\mathbf{r}}_0 \boldsymbol{\Lambda}_0 + \heartsuit \boldsymbol{\Lambda}_0 \\ \Rightarrow \widehat{\mathbf{r}} &= \exp \widehat{\boldsymbol{\psi}} \widehat{\mathbf{r}}_0 \exp^{-1} \widehat{\boldsymbol{\psi}} + \heartsuit \exp^{-1} \widehat{\boldsymbol{\psi}} , \end{aligned} \tag{21}$$

Da bismo odredili čemu je jednak gornji dio vektora $\boldsymbol{\nu}$, potrebno je prepoznati da se $\widehat{\boldsymbol{\nu}}_1$ krije u matrici $\heartsuit$ (17). Uvažavajući činjenicu da je $\exp \widehat{\boldsymbol{\psi}}$ antisimetrična matrica ($\exp^{-1} \widehat{\boldsymbol{\psi}} = \exp^T \widehat{\boldsymbol{\psi}}$), sređivanjem (21) uz prepoznavanje da s obje strane imamo antisimetrične matrice konačno dobivamo

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \widehat{\boldsymbol{\psi}} + \gamma_2 \widehat{\boldsymbol{\psi}}^2\right) \mathbf{r} - \left(\mathbf{I} - \beta_1 \widehat{\boldsymbol{\psi}} + \beta_2 \widehat{\boldsymbol{\psi}}^2\right) \mathbf{r}_0 , \tag{22}$$

što nam daje konačni oblik vektora $\boldsymbol{\nu}$

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{Bmatrix} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \widehat{\boldsymbol{\psi}} + \gamma_2 \widehat{\boldsymbol{\psi}}^2\right) \mathbf{r} - \left(\mathbf{I} - \beta_1 \widehat{\boldsymbol{\psi}} + \beta_2 \widehat{\boldsymbol{\psi}}^2\right) \mathbf{r}_0 \\ \boldsymbol{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\psi}) \widehat{\mathbf{r}} - \mathbf{H}^T(\boldsymbol{\psi}) \mathbf{r}_0 \\ \boldsymbol{\psi} \end{Bmatrix} , \tag{23}$$

koji je topološki ekvivalentan odgovarajućem elementu Liejeve algebre sr(6) putem (9).

5 ZAKLJUČAK

Analogno vektorskoj parametrizaciji rotacija u SO(3), Bottasso i Bori su pokazali da je moguća i vektorska parametrizacija konfiguracija u SR(6) eksponencijalnom mapom u zatvorenom obliku! Ovo svojstvo omogućuje formuliranje problema kod kojih su stupnjevi slobode združeni te omogućuje objedinjeno popravljanje položaja i rotacija u iterativnim metodama.

Na temelju prikazanog je izvedena je formulacija geometrijski točnog prostornog konačnog elementa temeljena na principu virtualnog rada čiji će rezultati biti prikazani u budućim radovima.

[1] Poduži izvod izostavljen je zbog sažetosti rada

ZAHVALA

Istraživanje koje je rezultiralo ovim radom je provedeno u sklopu znanstvenog projekta br. 114-0000000-3025: "Unapređivanje točnosti nelinearnih grednih elemenata s neograničenim 3D rotacijama " koji je financijski podržalo Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske i u sklopu potpore Sveučilišta u Rijeci br. 13.05.1.3.06 "Ispitivanje vitkih grednih prostornih konstrukcija s naglaskom na validaciju modela". Dodatno se zahvaljujemo Hrvatskoj zakladi za znanost koja je sufinancirala projekt br. 03.01/129 iz programa "Stipendije za doktorante" s naslovom "Očuvanje mehaničkih konstanti pri numeričkoj integraciji nelinearnih jednadžbi kretanja grede u vremenu".

Literatura

[1] Argyris, J., "An excursion into large rotations," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 32, no. 1-3, 1982, pp. 85–155.

[2] Bauchau, O.A., Trainelli, L., "The Vectorial Parameterization of Rotation," Nonlinear Dynamics, vol. 32, no. 1, 2003, pp. 71–92.

[3] Borri, M., Trainelli, L., Bottasso, C.L., "On Representations and Parameterizations of Motion," Multibody System Dynamics, vol. 4, no. 2-3, 2000, pp. 129–193.

[4] Bottasso, C., Borri, M., "Integrating finite rotations," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 164, no. 3-4, 1998, pp. 307–331.

[5] Hall, B., Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction, 2003.

Autori

Maja Gaćeša, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051 265957,
e-mail: maja.gacesa@uniri.hr, web stranica: http://www.gradri.uniri.hr/?rijeka=staff,114
Gordan Jelenić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051 265955,
e-mail: gordan.jelenic@gradri.hr, web stranica: http://www.gradri.uniri.hr/?rijeka=staff,44