

## BEZMREŽNA NUMERIČKA KOLOKACIJSKA METODA ZA MODELIRANJE HETEROGENIH MATERIJALA

Jalušić, B., Jarak, T. & Sorić, J.

**Sažetak:** U radu je prikazana primjena mješovite bezmrežne lokalne Petrov-Galerkinove kolokacijske metode za rješavanje jednodimenzijskih i dvodimenzijskih problema deformiranja heterogenih materijala sastavljenih od dva homogena izotropna dijela. U numeričkim primjerima točnost dobivenih rezultata uspoređena je s točnošću rezultata osnovne formulacije temeljene samo na aproksimaciji komponenta pomaka.

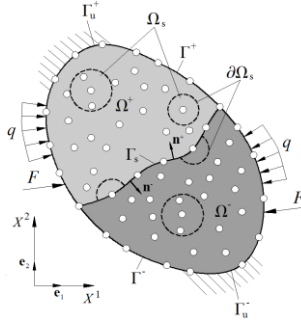
**Ključne riječi:** *bezmrežne kolokacijske metode, modeliranje heterogenih materijala*

### 1 UVOD

U ovom radu prikazana je bezmrežna mješovita lokalna Petrov-Galerkinova metoda za rješavanje problema rubnih vrijednosti pri modeliranju procesa deformiranja heterogenih materijala. Ovdje razmatrani heterogeni materijal sastavljen je od više homogenih izotropnih područja s različitim materijalnim karakteristikama. Diskretizacija različitih homogenih područja kao i aproksimacija nepoznatih veličina provodi se po svakom području zasebno. Jednostavnije definiranje aproksimacijskih funkcija visokog stupnja kontinuiteta kod bezmrežnih metoda [1] predstavlja u općem slučaju prednost u odnosu na metodu konačnih elemenata (MKE) međutim uzrokuje poteškoće u rješavanju problema kada u točnom rješenju postoji diskontinuitet derivacija pomaka. Stoga se za modeliranje heterogenih materijala pomoću bezmrežnih metoda primjenjuju posebni numerički postupci [2]. U tu svrhu ovdje je primijenjen postupak direktnog zadovoljavanja rubnih uvjeta pomaka i sila na spoju različitih homogenih dijelova [3]. Za rješavanje problema deformiranja primjenjuje se mješoviti pristup gdje su komponente pomaka i komponente naprezanja aproksimirane pomoću istih aproksimacijskih funkcija. Jednadžbe ravnoteže diskretizirane su pomoću aproksimiranih naprezanja, a sustav jednadžbi je zatvoren postavljanjem konstitutivnih relacija koje povezuju pomake i naprezanja. Budući da su jednadžbe zadovoljene u jakoj formi, izbjegnuto je numeričko integriranje pa je izračunavanje matrice sustava vrlo jednostavno i brzo. Primjenom mješovitog pristupa smanjuje se potrebni red kontinuiteta aproksimacijskih funkcija [4] što povećava točnost i stabilnost metode. Primijenjene su funkcije koje posjeduju interpolacijska svojstva u čvorovima tako da su rubni uvjeti pomaka na vanjskim granicama zadovoljeni izravno kao kod MKE. Globalni rubni uvjeti sila zadovoljeni su primjenom direktne kolokacijske metode [5]. U izvedenom konačnom sustavu jednadžbi kao nepoznanice javljaju se samo čvorni pomaci. U 2. poglavlju detaljno je prikazana i objašnjena mješovita kolokacijska metoda za modeliranje heterogenih materijala. Učinkovitost izvedenog pristupa prikazana je pomoću dva numerička primjera u 3. poglavlju.

## 2 MJEŠOVITA BEZMREŽNA KOLOKACIJSKA METODA ZA MODELIRANJE HETEROGENIH MATERIJALA

Na slici 1 shematski je prikazan dvodimenzijски heterogeni materijal koji zauzima područje  $\Omega$  omeđeno globalnom granicom  $\Gamma$ . Krivulja  $\Gamma_s$  predstavlja granicu između dva područja  $\Omega^+$  i  $\Omega^-$  s različitim homogenim materijalnim svojstvima.  $\Gamma_s$  dijeli  $\Omega$  tako da vrijedi  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$  i  $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ .



Sl. 1. Dvodimenzijски heterogeni materijal

Jednadžbe za sustav prema slici 1 su jaki oblici 2D jednadžbi ravnoteže koje moraju biti zadovoljene u svim čvorovima unutar  $\Omega$ , koje je podijeljeno na  $\Omega^+$  i  $\Omega^-$

$$\sigma_{ij,x^j}^+ + b_i^+ = 0, \text{ unutar } \Omega^+, \quad \sigma_{ij,x^j}^- + b_i^- = 0, \text{ unutar } \Omega^-. \quad (1)$$

Jednadžbe (1) moraju zadovoljavati rubne uvjete propisane na vanjskoj granici  $\partial\Omega$

$$u_i^+ = \bar{u}_i^+, \text{ na } \Gamma_u^+, \quad u_i^- = \bar{u}_i^-, \text{ na } \Gamma_u^-, \quad (2)$$

$$t_i^+ = \sigma_{ij}^+ n_j^+ = \bar{t}_i^+, \text{ na } \Gamma_t^+, \quad t_i^- = \sigma_{ij}^- n_j^- = \bar{t}_i^-, \text{ na } \Gamma_t^- \quad (3)$$

te uvjete kontinuiteta na granici  $\Gamma_s$ . Na granici  $\Gamma_s$  diskretizacija se vrši pomoću dvostrukih čvorova, odnosno pozicije čvorova koji pripadaju područjima  $\Omega^+$  i  $\Omega^-$  se međusobno poklapaju. U svakom od čvorova na  $\Gamma_s$  postavlja se kontinuitet pomaka i recipročnosti vektora naprezanja [3]

$$u_i^+ - u_i^- = 0, \quad t_i^+ + t_i^- = 0. \quad (4)$$

Vrijedi da je  $\partial\Omega = \Gamma_u^+ \cup \Gamma_u^- \cup \Gamma_t^+ \cup \Gamma_t^-$ , gdje  $\Gamma_u = \Gamma_u^+ \cup \Gamma_u^-$  označava dio  $\partial\Omega$  s zadanim pomacima  $\bar{u}_i$ , dok su na  $\Gamma_t = \Gamma_t^+ \cup \Gamma_t^-$  zadane površinske sile  $\bar{t}_i$ . 2D kontinuum se diskretizira pomoću dvaju skupova čvorova  $I=1,2,\dots,N$ , i  $M=1,2,\dots,P$  gdje su  $N$  i  $P$  ukupni brojevi čvorova u području  $\Omega^+$ , odnosno  $\Omega^-$ . Prema mješovitom kolokacijskom postupku iz [4] nepoznate veličine polja su komponente naprezanja i pomaka. Sve nepoznate veličine aproksimirane su zasebno u područjima  $\Omega^+$  i  $\Omega^-$ , pri čemu se koriste iste aproksimacijske funkcije za sve komponente pomaka i naprezanja. Za  $\Omega^+$  vrijedi

$$u_i^{+(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{X}) (\hat{u}_i^+)_J, \quad (5)$$

$$\sigma_{ij}^{+(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{X}) (\hat{\sigma}_{ij}^+)_J, \quad (6)$$

gdje  $\phi_j$  predstavlja čvornu vrijednost 2-D funkcije oblika za čvor  $J$ , a  $(\hat{u}_i^+)_J$  i  $(\hat{\sigma}_{ij}^+)_J$  pripadne čvorne vrijednosti za pomake i naprezanja. Analogno su aproksimirani pomaci i naprezanja po području  $\Omega^-$ . Za konstrukciju funkcija oblika u radu koriste se metoda najmanjih pomičnih kvadrata (*Moving Least Squares*, MLS) [1] prema kojoj se funkcija oblika izračunava

$$\phi_j(\mathbf{X}) = \sum_k^m p_k(\mathbf{X}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X})]_{kj}, \quad (7)$$

i metoda radijalne interpolacije po točkama s polinomnom reprodukcijom (*Radial Point Interpolation Method with Polynomial Reproduction*, RPIM) [1] gdje je funkcija oblika definirana

$$\phi_j(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{X})(\mathbf{S}_a)_j + \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{X})(\mathbf{S}_b)_j. \quad (8)$$

U izrazima (7) i (8)  $m$  označava broj monoma u vektoru bazne funkcije  $\mathbf{p}(\mathbf{X})$ , dok se  $n$  odnosi na broj radijalnih baznih funkcija. Kod MLS aproksimacije  $\mathbf{A}(\mathbf{X})$  označava momentnu matricu, a matrica  $\mathbf{B}(\mathbf{X})$  matricu umnoška odabrane težinske MLS funkcije i vektora bazne funkcije  $\mathbf{p}(\mathbf{X})$ . U relaciji (8) s  $\mathbf{R}(\mathbf{X})$  označen je vektor radijalnih funkcija, dok su matrice  $\mathbf{S}_a$  i  $\mathbf{S}_b$  svojstvene RPIM aproksimaciji te su konstantne sve dok se za aproksimaciju koriste isti čvorovi. Sve funkcije korištene u radu posjeduju interpolacijska svojstva što omogućava izravno nametanje rubnih uvjeta pomaka u čvorovima. Kod MLS aproksimacije to je postignuto definiranjem težinske funkcije prema [6]. Diskretizacijom jednadžbi (1)-(4) pomoću aproksimacija (5) i (6) dobiva se nerješivi sustav jednadžbi jer je ukupni broj nepoznatih čvornih naprezanja i pomaka veći od broja raspoloživih jednadžbi. Stoga se u svim čvorovima uvode konstitutivne relacije

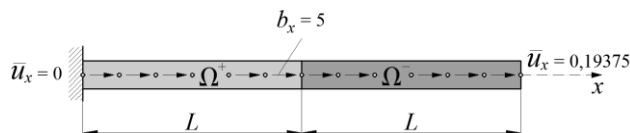
$$(\hat{\sigma}_{ij}^+)_J = \frac{1}{2} C_{ijkl}^+ (u_{i,j}^{+(h)} + u_{j,i}^{+(h)}), \quad (\hat{\sigma}_{ij}^-)_J = \frac{1}{2} C_{ijkl}^- (u_{i,j}^{- (h)} + u_{j,i}^{- (h)}), \quad (9)$$

iz kojih je moguće izračunati čvorna naprezanja pomoću aproksimiranih pomaka iz (5).  $C_{ijkl}^+$ ,  $C_{ijkl}^-$  u jednadžbi (9) predstavljaju komponente materijalnih tenzora u  $\Omega^+$  i  $\Omega^-$ . Eliminacijom čvornih naprezanja, dobiva se zatvoreni sustav linearnih algebarskih jednadžbi u kojima se kao nepoznanice javljaju samo čvorni pomaci.

## 3 NUMERIČKI PRIMJERI

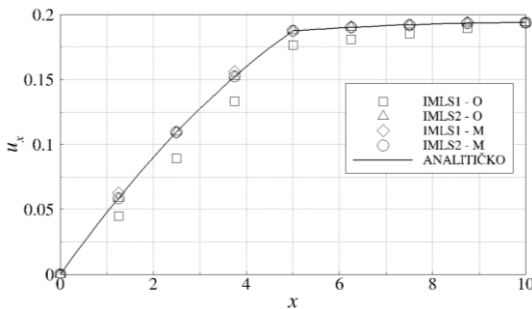
### 3.1 Osno opterećeni štap

Štap sastavljen od dva homogena izotropna područja jedinične površine i duljine  $L = 5$  opterećen je konstantnim kontinuiranim osnim opterećenjem  $b_x = 5$ . Na oba kraja štapa nametnuti su rubni uvjeti pomaka prema slici 2 dobiveni iz analitičkog rješenja.

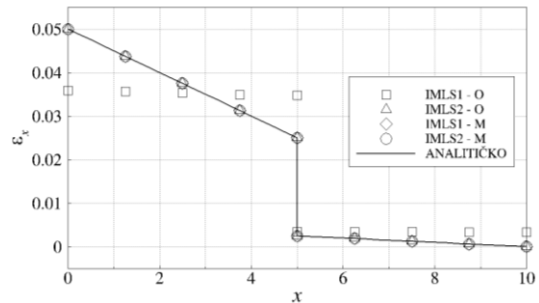


Sl. 2. Heterogeni štap

Modul elastičnosti lijevog dijela štapa jednak je  $E^+ = 1000$ , dok je isti za desni dio jednak  $E^- = 10000$ . Na slikama 3 i 4 prikazane su raspodjela pomaka  $u_x$  i deformacije  $\varepsilon_x$  po duljini štapa izračunate korištenjem osnovnog pristupa (O) temeljenog na metodi pomaka i opisanog mješovitog pristupa (M). Štap je diskretiziran s 10 jednako razmaknutih čvorova dok je za konstrukciju funkcija oblika korištena IMLS aproksimacija 1. i 2. reda.



Sl. 3. Raspodjela pomaka  $u_x$

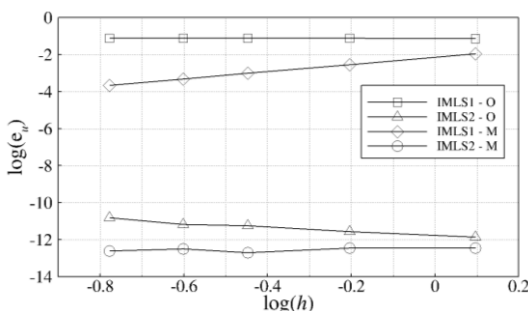


Sl. 4. Raspodjela deformacije  $\varepsilon_x$

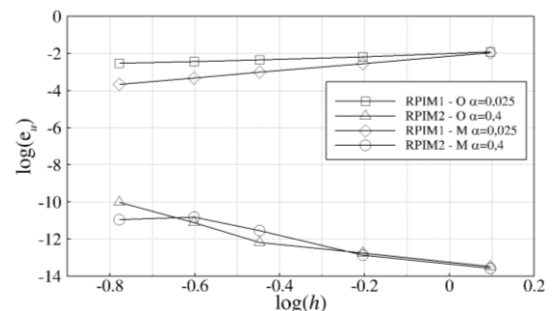
Na slikama 3 i 4 vidljivo je da se primjenom mješovitog pristupa uz korištenje IMLS aproksimacije 1. reda može točno opisati raspodjela pomaka  $u_x$  i diskontinuitet derivacije pomaka na spoju dvaju homogenih područja, dok to nije slučaj kada se koristi osnovni pristup. Korištenjem aproksimacija 2. reda oba pristupa rezultiraju točnim rješenjima s obzirom da mogu točno opisati polinom 2. reda koji je funkcija rješenja pomaka po pojedinim homogenim područjima. Izrađeni su također i testovi konvergencije rješenja u ovisnosti o prosječnom razmaku čvorova ( $h$ ) te su isti prikazani na slikama 5 i 6. Uspoređena je ovisnost globalne greške za pomake definirane pomoću diskretne norme izračunate u kolokacijskim čvorovima kao

$$e_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i^{\text{num}} - u_i^a)^2}{\sum_{i=1}^N (u_i^a)^2}}. \quad (10)$$

Za potrebe izračuna odabrani su optimalni iznosi parametra oblika Gauss-ove radialne funkcije [1]  $\alpha = 0,025$  i  $\alpha = 0,4$  za pojedine redove RPIM aproksimacije.



Sl. 5. Konvergencija diskretne greške norme pomaka  $e_u$  - IMLS aproksimacija

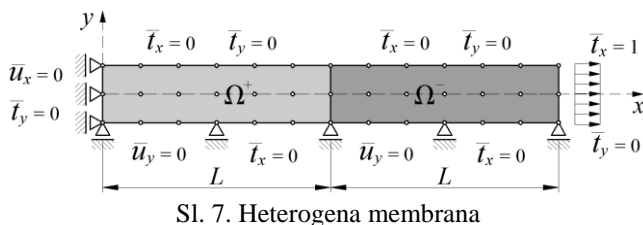


Sl. 6. Konvergencija diskretne greške norme pomaka  $e_u$  - RPIM aproksimacija

Na slikama 5 i 6 jasno je vidljivo da se primjenom mješovitog pristupa dobivaju točniji ili jednako dobri rezultati u usporedbi s onima dobivenima osnovnim pristupom.

### 3.2 Vlačno opterećena membrana

Membrana jedinične debljine i visine sastavljena od dva homogena izotropna područja duljine  $L = 5$  opterećena je na desnom kraju jediničnim opterećenjem vlačno u smjeru osi  $x$ . Preostali rubni uvjeti pomaka i sila prikazani su na slici 7.

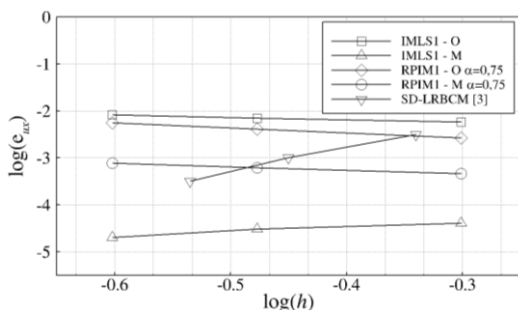


Sl. 7. Heterogena membrana

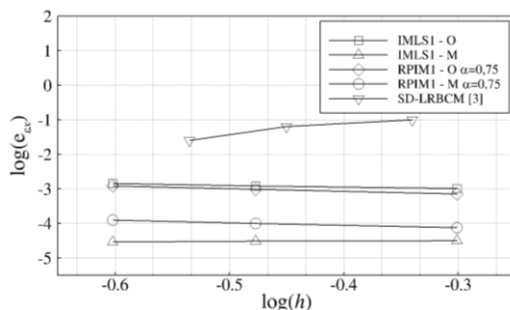
Konstante elastičnosti lijevog dijela membrane jednake su  $E^+ = 1000$  i  $\nu^+ = 0,25$ , dok su iste za desni dio jednake  $E^- = 10000$  i  $\nu^- = 0,3$ . Membrana je diskretizirana jednoliko razmaknutim čvorovima u oba smjera. Kao referentno rješenje za izračun grešaka uzeto je rješenje MKE dobiveno programskim paketom Abaqus s 16000 pravokutnih linearnih konačnih elemenata (CPS4). Analizirane su pogreške za komponente pomaka i normalnih deformacija u smjeru osi  $x$ ,  $u_x$  i  $\varepsilon_x$ , za čvorove duž osi  $y = 0$  s obzirom na diskretne norme definirane kao

$$e_{ux} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_{xi}^{num} - u_{xi}^{ref})^2}, \quad e_{\varepsilon_x} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\varepsilon_{xi}^{num} - \varepsilon_{xi}^{ref})^2}. \quad (11)$$

U svrhu usporedbe točnosti formulacija temeljenih na osnovnom odnosno mješovitom pristupu provedeni su testovi konvergencije u ovisnosti prosječnog razmaka čvorova ( $h$ ) te su isti prikazani na slikama 8 i 9. S obzirom da su ovdje funkcije koje opisuju točnu raspodjelu pomaka po pojedinim homogenim dijelovima polinomi 1. reda za analizu su korištene samo bezmrežne aproksimacijske funkcije prvog reda. Za izračun korištenjem RPIM aproksimacije 1. reda odabran je optimalni iznos parametra oblika Gauss-ove funkcije  $\alpha = 0,75$ . Rješenja su uspoređena s dostupnim rješenjima iz literature [3] za membranu jednakih dimenzija i identičnih rubnih uvjeta analiziranu kolokacijskom metodom temeljenom na osnovnom pristupu.



Sl. 8. Konvergencija diskretne greške norme  $e_{ux}$



Sl. 9. Konvergencija diskretne greške norme  $e_{\varepsilon_x}$

U radu iz literature se za konstrukciju funkcija oblika koristi metoda reproduciranja jezgre (*Reproducing Kernel, RK*) [3] u kombinaciji s radialnim baznim funkcijama (*Radial Basis Functions, RBF*) [1]. Za konstrukciju RK dijela aproksimacije

primijenjen je vektor baznih funkcija 3. reda, a kao težinska funkcija korišten je spline 5. reda. Na slikama 8 i 9 može se vidjeti prednost primjene mješovitog pristupa u odnosu na osnovni pristup i kod računanja dvodimenzijskih problema deformiranja heterogenih materijala. S obzirom da su norme grešaka (11) računane u odnosu na referentna rješenja dobivena metodom konačnih elemenata, koja su dostupna samo na određeni broj decimalnih mjesta, teško je postići visoku točnost rješenja. Stoga se može smatrati da rješenja dobivena mješovitim pristupom vrlo dobro opisuju realno deformiranje heterogenog materijala unatoč tome što konvergencija rješenja na dijagramima nije vidljiva. Prednost u vidu točnosti rezultata dobivenih mješovitim pristupom također se očituje i u usporedbi s rezultatima dostupnima iz literature [3] gdje je za aproksimaciju korištena funkcija 3. reda.

## 4 ZAKLJUČAK

Sve do sada dostupne bezmrežne metode za modeliranje heterogenih materijala temeljene su na metodi pomaka (osnovni pristup) u kojima je potrebno izračunavati derivacije bezmrežnih funkcija drugog reda što povećava računalne troškove, također pritom aproksimacijske funkcije moraju posjedovati  $C^2$  kontinuitet. U prikazanoj bezmrežnoj mješovitoj kolokacijskoj metodi za modeliranje deformiranja heterogenih materijala sve komponente pomaka i naprezanja aproksimirane su istim funkcijama koje moraju imati samo  $C^1$  kontinuitet. Numerička učinkovitost i točnost modeliranja heterogenih materijala ovdje je stoga povećana smanjenjem potrebnog reda derivacija aproksimacijskih funkcija čime je povećana točnost metode što se i očituje analizom grešaka na prikazanim numeričkim primjerima.

### Literatura:

- [1] Liu, G.R., "Mesh Free Methods - Moving Beyond The Finite Element Method", CRC Press, 2003.
- [2] Jalušić, B., Jarak, T., Sorić, J., "O Bezmrežnom Modeliranju Heterogenih Materijala", Peti susret Hrvatskog društva za mehaniku, Donja Stubica, Hrvatska, 2013, str. 73-78.
- [3] Chen, J-S., Wang, L., Hu, H-Y., Chi, S-W., "Subdomain Radial Basis Collocation Method for Heterogeneous Media", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.80, 2009, str. 163-190.
- [4] Atluri, S.N., Liu, H.T., Han, Z.D., "Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Mixed Collocation Method for Elasticity Problems", CMES, Vol.14, No.3, 2006, 141-152.
- [5] Jalušić, B., Jarak, T., Sorić, J., "On the Enforcement of Neumann Boundary Conditions in the Mixed MLPG Collocation Method for 2-D Linear Elastic Problems", ICCES MM, Budva, 2012, str. 16.
- [6] Most, T., Bucher, C., "New Concepts for Moving Least Squares: An Interpolating Non-singular Weighting Function and Weighted Nodal Least Squares", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.32, No.6, 2008, 461-470.

### Autori:

Boris Jalušić, Tomislav Jarak, Jurica Sorić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5 10002 Zagreb, tel: 016168/115, 514, 103, fax: 01 6168 187, e-mail: [boris.jalusic@fsb.hr](mailto:boris.jalusic@fsb.hr), [tomislav.jarak@fsb.hr](mailto:tomislav.jarak@fsb.hr), [jurica.soric@fsb.hr](mailto:jurica.soric@fsb.hr), web stranica: [www.fsb.unizg.hr/inm/staff/](http://www.fsb.unizg.hr/inm/staff/)