Sveučilište u Zagrebu

GEODETSKI FAKULTET

Martina Triplat Horvat

KARTOGRAFSKA ANALIZA KARATA PAPINSKE DRŽAVE J. R. BOŠKOVIĆA I CH. MAIREA

DOKTORSKI RAD

Mentor: prof. dr. sc. Miljenko Lapaine

Zagreb, 2014.

University of Zagreb

FACULTY OF GEODESY

Martina Triplat Horvat

CARTOGRAPHIC ANALYSIS OF THE J. R. BOŠKOVIĆ'S AND CH. MAIRE'S MAPS OF THE PAPAL STATE

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Prof. Dr. Miljenko Lapaine

Zagreb, 2014

Zahvale

Prije svega veliku zahvalu dugujem mentoru prof. dr. sc. Miljenku Lapaineu na svoj pomoći, korisnim savjetima, kritikama i podršci tijekom izrade doktorskog rada. Zahvaljujem mu na prenošenju znanja i iskustava.

Hvala članovima Povjerenstva za ocjenu i obranu ovog doktorskog rada doc. dr. sc. Draženu Tutiću, doc. dr. sc. Ivki Kljajić i prof. dr. sc. Josipu Faričiću na uloženom trudu pri pregledu rada te konkretnim i korisnim savjetima za poboljšanje njegova sadržaja.

Cijela ova stranica ne bi bila dovoljna da zahvalim kolegici Marini Viličić na pomoći i podršci koju mi je davala tijekom posljednjih mjeseci. Hvala Ti Marina od srca.

Posebnu zahvalu upućujem kolegama doc. dr. sc. Mladenu Zrinjskom i doc. dr. sc. Ivki Kljajić na moralnoj podršci, savjetima, brizi i povremenim kritikama na moj rad.

Zahvaljujem kolegama Mariji, Bernardu i Ivanu na veselim trenucima koji su mi pomogli da lakše prebrodim stresne trenutke zadnje godine izrade doktorskog rada.

Svojoj obitelji mami Anici, tati Josipu, sestri Ivani i bratu Vinku na nesebičnoj podršci i bezuvjetnoj vjeri u moj uspjeh, posebno zavaljujem.

Na kraju, najveću zahvalnost dugujem suprugu Danijelu na neograničenom strpljenju i razumijevanju kroz sva razdoblja našeg zajedničkog života, a posebno svakodnevnih odricanja zadnjih nekoliko mjeseci kada sam često bila odsutna tijelom i duhom te podršci kada mi je bilo najteže. Danijel(e) znaš da bez tebe sve ovo ne bi bilo TO. Preživjeli smo, vtnns.

I. Autor	
Ime i prezime	Martina Triplat Horvat
Datum i mjesto rođenja	Zagreb, 16.12.1980.
Sadašnje zaposlenje	Asistentica na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu
II. Doktorski rad	
Naslov	Kartografska analiza karata Papinske Države J. R. Boškovića i Ch. Mairea
Broj stranica	255
Broj slika	75
Broj tablica	26
Broj bibliografskih podataka	97+29 URL-ova
Ustanova i mjesto gdje je rad izrađen	Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Znanstveno područje	Tehničke znanosti
Znanstveno polje	Geodezija
Znanstvena grana	Kartografija
Mentor	prof. dr. sc. Miljenko Lapaine
Oznaka i redni broj rada	76
III. Ocjena i obrana	
Datum prijave teme	27. lipnja 2013.
Datum sjednice Fakultetskog vijeća na kojoj je doktorski rad prihvaćen	26. lipnja 2014.
Sastav povjerenstva za ocjenu doktorskog rada	doc. dr. sc. Dražen Tutić doc. dr. sc. Ivka Kljajić prof. dr. sc. Josip Faričić, Sveučilište u Zadru, Odjel za geografiju
Datum obrane doktorskog rada	11. srpnja 2014.
Sastav povjerenstva za obranu doktorskog rada	doc. dr. sc. Dražen Tutić doc. dr. sc. Ivka Kljajić prof. dr. sc. Josip Faričić, Sveučilište u Zadru, Odjel za geografiju

Sažetak

U ovom doktorskom radu sustavno analiziram dvije srodne karte Papinske Države, *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église*. Karte su izdane u 18. stoljeću u razmaku od 15 godina, a prikazuju područje središnje Italije. Prva karta, *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico,* izdana je 1755. godine, nakon opsežne geodetske izmjere koju su proveli Josip Ruđer Bošković i Christopher Maire kada su određivali duljinu luka meridijana između Rima i Riminija na području tadašnje Papinske Države. Mjerilo druge karte, *Carte de l'État de l'Église,* iz 1770. umanjeno je na trećinu u odnosu na kartu iz 1755. godine i prikazuje isto područje.

Analizu sam provela na digitalnim kopijama karata u visokoj rezoluciji i originalnoj veličini, primjenom različitih kartometrijskih tehnika te primjenom metode teorije kartografskih projekcija.

Cilj je istraživanja bio definirati kartografsku projekciju u kojoj su karte izrađene, definirati dimenzije Zemljina elipsoida iz mjerenih duljina luka meridijana te ispitati pet postavljenih hipoteza.

Za određivanje kartografske projekcije u kojoj je neka stara karta izrađena bez poznatog podatka o projekciji, predložena je metoda euklidskih udaljenosti za ispitivanje oblika kartografske mreže koja je nacrtana na karti. U doktorskom radu predlažem novi postupak za određivanje parametara projekcije starih karata, posebno standardnih paralela, ako nije poznat radijus sfere u kojoj je karta izrađena. Uvedena je konstanta C koja je omjer konstante K i radijusa sfere R koji za kartu nisu poznati. Dokazala sam da su *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église* izrađene u uspravnoj konusnoj projekciji sfere ekvidistantnoj uzduž meridijana.

Za određivanje dimenzija Boškovićeva elipsoida korištena je Bošković-Laplaceova metoda izjednačenja. Parametri Boškovićeva elipsoida određeni su iz devet duljina luka meridijana koje je Bošković upotrebljavao u svojim djelima opisujući svoju metodu izjednačenja.

Prošireni sažetak

S obzirom na to da do sada dvije srodne karte Papinske Države, *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église,* još nisu dovoljno istražene, u doktorskom radu provela sam sustavnu kartografsku analizu da bih odgovorila na neka pitanja koja su ostala otvorena nakon istraživanja dosadašnjih istraživača ili su njihovi rezultati pogrešni.

U uvodu doktorskog rada opisana je motivacija za provedeno istraživanje, kao i hipoteze i ciljevi istraživanja te očekivani znanstveni doprinos.

U drugom poglavlju doktorskog rada dan je pregled do sada objavljenih radova o Bošković-Laplaceovoj metodi izjednačenja te radova koji se bave kartama Papinske Države J. R. Boškovića i Ch. Mairea.

U trećem poglavlju doktorskog rada istražila sam osnovne elemente tih karata, a to su: naslov, vrsta, područje prikaza i orijentacija karte, svrha i namjena karte. Također sam proučila sadržaj karata kroz njihove osnovne topografske elemente. U tom poglavlju potvrđivala sam tri postavljene hipoteze. Dokazala sam da su geografske dužine na kartama Papinske Države određene u odnosu na početni meridijan Ferro i da su položaji gradova na kartama Papinske Države točniji od položaja gradova na prethodnim kartama. U istom poglavlju dokazala sam da su autori karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* Ch. Maire i J. R. Bošković, a da autori karte *Carte de l'État de l'Église* vrlo vjerojatno nisu ni J. R. Bošković ni Ch. Maire.

U četvrtom poglavlju provela sam sustavno istraživanje o devet duljina lukova meridijana s pomoću kojih je Bošković izračunao spljoštenost Zemlje. Opisala sam gdje su mjerenja provedena, tko ih je proveo te ukazala na nesklad među vrijednostima duljina luka meridijana koje su objavljene u literaturi. Potom je dana formula za računanje duljine luka meridijana s pomoću koje sam izračunala vrijednosti duljine luka meridijana na srednjim geografskim širinama za devet mjesta koja je Bošković upotrebljavao u svojim analizama. Usporedila sam izračunate i mjerene duljine lukova meridijana. Nakon toga detaljno sam, geometrijski i analitički, opisala Boškovićevu metodu izjednačenja s pomoću koje sam izračunala parametre Boškovićeva elipsoida.

U petom poglavlju provela sam postupak određivanja kartografske projekcije u kojoj su izrađene karte Papinske Države. Na početku poglavlja dan je pregled kartografskih projekcija koje su se primjenjivale u renesansno doba pa sve do sredine 18. stoljeća. Zbog naravi postupka određivanja kartografske projekcije u kojoj je izrađena stara karta na osnovi kartografske mreže nacrtane na karti, definirala sam ocjenu točnosti matematičke osnove *a priori*. Postupak određivanja kartografske projekcije obuhvaća pitanja poput: Jesu li meridijani ravne ili zakrivljene linije? Jesu li paralele ravne ili zakrivljene linije? Ako su paralele zakrivljene, da li su koncentrični kružni lukovi? Koliki je razmak između nacrtanih paralela? Da bismo odgovorili na ta pitanja i odredili kartografsku projekciju u kojoj je karta izrađena potrebno je testirati pravocrtnost ili zakrivljenost (kružnost) meridijana ili paralela, konvergenciju meridijana i koncentričnost paralela.

Pravocrtnost meridijana i zakrivljenost (kružnost) paralela nacrtanih na karti ispitivala sam s pomoću metode euklidskih udaljenosti. Nakon određivanja kartografske projekcije prema obliku kartografske mreže, odredila sam kartografsku projekciju prema vrstama deformacija. Da bih u potpunosti definirala vrstu kartografske projekcije izračunala sam kut pod kojim se sijeku meridijani. Računajući udaljenosti između paralela uzduž meridijana dokazala sam da je projekcija ekvidistantna uzduž meridijana, dok sam računajući koeficijent proporcionalnosti k, odnosno kut pod kojim se sijeku meridijani, dokazala da je karta izrađena u konusnoj projekciji. Opisanim postupkom pokazala sam da je karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* izrađena u uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana, čime sam dokazala da karta nije izrađena u poliedarskoj projekciji, kako se do sada smatralo.

Nakon definiranja kartografske projekcije izračunala sam parametre projekcije u kojoj je karta izrađena. Postupak određivanja parametara ekvidistantne konusne projekcije nije protekao bez problema. Pokazalo se da je najveći problem stvarao postupak određivanja točke zajedničkog presjecišta meridijana, koja je ujedno i središte kružnih lukova paralela. Ta točka direktno utječe na određivanje koeficijenta proporcionalnosti k, odnosno kuta pod kojim se sijeku meridijani. Stoga sam predložila novi postupak za određivanje parametara projekcije neke stare karte, posebno standardnih paralela, ako nije poznat radijus sfere u kojoj je karta izrađena. Uvedena je konstanta C koja je omjer konstante K i radijusa sfere R koje za kartu nisu poznate.

U istom poglavlju opovrgnula sam hipotezu da se Boškovićeve i Maireove karte temelje na dimenzijama elipsoida koje su određene iz mjerenja duljina luka meridijana. Tu hipotezu ispitala sam usporedbom izračunatih udaljenosti između paralela za elipsoid i sferu.

Smanjivanjem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* na dimenzije i u mjerilo *Carte de l'État de l'Église* te usporedbom sadržaja karte, posebno položaja gradova na obje karte, dokazala sam da je i *Carte de l'État de l'Église* izrađena u istoj uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana kao i *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*. Postupak u određivanju kartografske projekcije razlikovao se od prethodno opisanog po tome što na *Carte de l'État de l'Église* nije ucrtana kartografska mreža.

U šestom poglavlju doktorskog rada dane su smjernice za buduća istraživanja.

U zaključku su sustavno analizirani odgovori na postavljene hipoteze.

Ključne riječi: Josip Ruđer Bošković, parametri Boškovićeva elipsoida, kartografska projekcija, karte Papinske Države, kartografska projekcija starih karata, metoda euklidskih udaljenosti, Bošković-Laplaceova metoda izjednačenja

Extended abstract

Due to the fact that two related maps of the Papal States, *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* and *Carte de l'Etat de l'Église,* hasn't been sufficiently studied yet, I have conducted a systematic cartographic analysis in the dissertation, that will give answers to some of the questions which either remained opened, after previous researches, or their results were wrong.

In the Introduction of the dissertation, it is described what the motivation for the carried out research was, as well as the hypotheses and research objectives with their expected scientific contribution.

A review of previously published articles of the Bošković-Laplace's adjustment method and the articles that describe the J. R. Bošković's and C. Maire's maps of the Papal States are given in the second chapter of the dissertation.

Through the third chapter of the dissertation, I got acquainted with the basic elements of maps, which are: title, type, orientation and displayed area of the map, the aim and a purpose of the map. In addition, the contents of the maps were studied through their basic topographical elements. In this chapter, I confirmed three hypotheses. I proved that the longitudes on the maps of the Papal States had been determined in relation to the prime meridian of Ferro and that the locations of the cities on the maps of the Papal States had been more accurate than the locations of the cities depicted on other similar maps of that time. Moreover, I proved that Ch. Maire and J. R. Bošković are the authors of the *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, and that most likely, J. R. Bošković or Ch. Maire are not the authors of the *Carte de l'Etat de l'Église*.

In the fourth chapter of this dissertation I conducted a systematic study on the nine lengths of the meridian arcs which Bošković had used to calculate the flattening of the Earth. I described where the measurements had been carried out, who had completed those measurements and pointed out the discrepancies between the values of the length of the meridian arcs, published in the literature. I presented the formula for calculating the length of the meridian arc, which had been used by Bošković in his analysis, to calculate the values of the meridian arc length at mid-latitudes in nine places. I compared the calculated and measured length of the meridian arcs. Subsequently, I

described geometrically and analytically, in detail, Bošković's adjustment method. With the help of the method I calculated parameters of the Bošković's ellipsoid.

In the fifth chapter, I conducted a procedure of determining the map projection in which the maps of the Papal States had been made. At the beginning of the chapter, there is an overview of map projections, used in the Renaissance era until the 18th century. I defined the estimation accuracy for the mathematical basis *a priori*, due to the nature of the procedure to determine which map projection the map had been made in, based on the drawn graticule on the map. The process of determining the map projection includes questions such as: Are the meridians straight or curved lines? Are the parallels straight or curved lines? If the parallels are curved, are they concentric circular arcs? What is the distance between the drawn parallels? To answer these questions and determine the map projection in which the map is made, there is a need to test the straightness or roundness of the meridians and parallels, the convergence of meridians and parallels' concentricity.

I examined meridian straightness and curvature (roundness) of the parallels drawn on a map, with the help of the Euclidean distance method. After defining the map projection, according to the shape of the map projections, I defined the map projection by type of the deformations. In order to fully define the type of the map projection, I calculated the angle at which the meridians are intersected. By calculating the distance between the parallels along the meridians I proved that the map had been made in the projection equidistant along the meridians. By calculating the coefficient of proportionality k, i.e. the angle at which the meridians intersect, I proved that the map had been made in the conic projection. With the demonstrated method I learned that the *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* had been made in a normal aspect conic projection which is equidistant along the meridians, therefore I proved that the map had not been made in polyhedral projection.

After defining the map projection, I calculated the parameters of the projection in which the map had been made. The process of determining the parameters of the equidistant conic projection did not pass without problems. It revealed that the biggest problem was in determining the point of common intersection of meridians, which is also the centre of the circular arcs of the parallels. That point directly affects the determination of the coefficient of proportionality k, i.e. the angle at which the meridians intersect. Therefore,

I proposed a new method for determining the parameters of the projection of the old maps, especially when determining the standard parallels, if the radius of the sphere in which the map was made is not known. The constant C was introduced, the ratio of constant K and the size of the radius of the sphere R of the map that are not known.

In the same chapter I rejected the hypothesis that the cartographic projection of old map Bošović's and Maire's maps had been based on the dimensions of the ellipsoid determined from measurements of the lengths of the meridian arcs. I examined that hypothesis by comparing the calculated distance between the parallels on the sphere and the ellipsoid.

By decreasing the size of the map *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* to size and scale of the *Carte de l'Etat de l'Église* and by comparing the contents of the maps, particularly the locations of the cities on both maps, I proved that the *Carte de l'Etat de l'Église* had been made in the same normal aspect conic projection which is equidistant along the meridians as well as the *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*. The process of determining the map projection for the *Carte de l'Etat de l'Église* differed from previously described method because the graticule had not been drawn on the map.

In the sixth chapter the guidelines were given for the future research.

The systematic analysis of the answers to the appointed hypothesis was given in the conclusion.

Keywords: Josip Ruđer Bošković, parameters of the Bošković's ellipsoid, the map projection, the maps of the Papal States, cartographic projection of old map, the method of Euclidean distances, Bošković-Laplace's adjustment method,

Sadržaj

Sažetak ..... **i**

Prošireni sažetak ..... **ii**

Extended Abstract ..... **v**

1. Uvod **1**

1.1. Cilj i hipoteze istraživanja 3

2. Pregled dosadašnjih istraživanja **5**

2.1. Dosadašnja istraživanja o Bošković-Laplaceovoj metodi izjednačenja 5

2.2. Dosadašnja istraživanja o kartama Papinske Države J. R. Boškovića i Ch. Mairea 7

3. Opis karata Papinske Države **11**

3.1. *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* iz 1755. 12

3.1.1. Mogući kartografski izvori 17

3.1.2. Prikupljanje podataka za potrebe izrade karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 26

3.1.3. Opis karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 36

3.1.3.1. Opis karte Papinske Države iz 1755. s pomoću osnovnih elemenata karte 36

3.1.3.2. Opis karte Papinske Države iz 1755. s pomoću sporednih elemenata karte 47

3.2. *Carte de l'État de l'Église* iz 1770. 55

3.2.1. Opis karte *Carte de l'État de l'Église* 58

3.2.1.1. *Opis karte Papinske Države iz 1770. s pomoću osnovnih elemenata karte* 58

3.2.1.2. *Opis karte Papinske Države iz 1770. s pomoću sporednih elemenata karte* 62

4. Dimenzije Boškovićeva elipsoida **65**

4.1. Boškovićeva razmišljanja o Zemljinu obliku 65

4.2. Duljine luka meridijana koje je Bošković upotrebljavao u svojim analizama 68

4.2.1. Mjerenja lukova meridijana u Francuskoj 69

4.2.1.1. Nesklad među podacima za lukove meridijana u Francuskoj 70

4.2.2. Luk meridijana Rim-Rimini 71
4.2.3. Duljine lukova meridijana – ekspedicije Kraljevske akademije znanosti 72
4.2.3.1. Nesklad među objavljenim vrijednostima za duljine lukova meridijana u Peruu i Laponiji 73
4.2.4. Luk meridijana u južnoj Africi 74
4.2.4.1. Nesklad među objavljenim vrijednostima za duljine lukova meridijana u južnoj Africi 75
4.2.5. Luk meridijana u Sardiniji 75
4.2.6. Luk meridijana u Sjevernoj Americi 76
4.2.7. Luk meridijana u Austriji 78
4.2.8. Vrijednosti duljina luka meridijana koje je Bošković upotrebljavao u svojim analizama 79
4.3. Formula za računanje duljine luka meridijana 79
4.3.1. Računski primjer 82
4.4. Boškovićeva geometrijska metoda izjednačenja 84
4.4.1. Primjena Boškovićeve geometrijske metode izjednačenja na pet mjerenih stupnjeva meridijana 86
4.4.2. Primjena Boškovićeve geometrijske metode izjednačenja na devet mjerenih stupnjeva meridijana 93
4.5. Bošković-Laplaceova metoda izjednačenja 97
4.6. Računanje parametara Zemljina elipsoida 99
4.6.1. Računanje parametara Boškovićeva elipsoida iz mjerenih duljina luka meridijana 101
4.6.2. Računanje spljoštenosti Zemlje pomoću formule koju je Bošković primjenjivao u svojim analizama 104
5. Određivanje kartografske projekcije karata Papinske Države 107
5.1. Pregled kartografskih projekcija 107
5.1.1. Kartografske projekcije prije 18. stoljeća 108
5.1.2. Razvoj kartografskih projekcija do sredine 18. stoljeća 133
5.1.3. Kartografske projekcije prema obliku kartografske mreže 146
5.2. Točnost prikaza matematičke osnove na kartama 147
5.2.1. Mjere za izražavanje točnosti 148

5.2.2. Točnost grafičko-konstruktivnih radova 148
5.2.3. Ocjena geometrijske točnosti karte 149
5.2.3.1. Ocjena točnosti karte a priori 150
5.3. O primjerku karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 152
5.4. Određivanje mjerila karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 154
5.5. Ispitivanje oblika kartografske mreže na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 157
5.5.1. Određivanje kartografske projekcije prema kartografskoj mreži nacrtanoj na karti 158
5.5.2. Ispitivanje pravocrtnosti meridijana na karti 159
5.5.3. Određivanje presjeka nekoliko pravaca u ravnini – određivanje presjecišta meridijana na karti 173
5.5.4. Ispitivanje zakrivljenosti (kružnosti) paralela na karti 177
5.6. Provjera hipoteze o uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana 181
5.6.1. Određivanje kartografske projekcije na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* prema vrstama deformacije 182
5.6.2. Određivanje kuta pod kojim se sijeku meridijani u projekciji 183
5.6.3. Određivanje parametara uspravne ekvidistantne konusne projekcije 187
5.6.3.1. Rotacija i translacija koordinatnog sustava skenirane slike u koordinatni sustav uspravne konusne projekcije 187
5.6.3.2. Parametri ekvidistantne konusne projekcije za kartu Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico 188
5.6.3.3. Određivanje standardnih paralela uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana 193
5.7. Određivanje parametara i standardnih paralela uspravnih konusnih projekcija 197
5.7.1. Određivanje radijusa sfere s pomoću podataka očitanih s karte 203
5.7.2. Određivanje mjerila karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 207
5.8. Teorijske vrijednosti pravokutnih koordinata presjecišta meridijana i paralela u konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana 209

5.8.1. Ocjena točnosti kartografske mreže nacrtane na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 209
5.9. Preslikavanje sfere ili elipsoida područja Papinske Države u ravninu uspravne ekvidistantne konusne projekcije 210
5.10. Zaključak o kartografskoj projekciji na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 215
5.11. Određivanje mjerila karte *Carte de l'État de l'Église* 217
5.12. Provjera hipoteze o uspravnoj ekvidistantnoj konusnoj projekciji na karti *Carte de l'État de l'Église* 219
6. Smjernice za buduća istraživanja 227
7. Zaključak 231
Popis literature 235
Popis mrežnih adresa 244
Popis slika 247
Popis tablica 253
Popis priloga 255
Životopis

1. UVOD

Josip Ruđer Bošković (Dubrovnik, 18. svibnja 1711. – Milano, 13. veljače 1787.) jedan je od najistaknutijih hrvatskih znanstvenika 18. stoljeća. Tijekom svog znanstvenog rada bavio se mnogim matematičkim problemima, astronomijom, fizikom, filozofijom, a svoj veliki doprinos dao je geodeziji, kartografiji i geografiji.

Kao i mnogi znanstvenici toga doba, Bošković je proučavao problematiku određivanja Zemljina oblika. Boškovićeve rasprave *De veterum argumentis pro telluris sphaericitate* (O dokazima starih za sferni oblik Zemlje) (Gambara i dr. 1739) i *Dissertatio de telluris figura* (Rasprava o obliku Zemlje) (Boscovich 1739) bave se upravo tom problematikom. U kasnijim opsežnijim radovima (Maire i Boscovich 1755, Maire i Boscovich 1770, Stay 1760) obrazlaže svoju teoriju nepravilnog Zemljina oblika zbog utjecaja različitih rasporeda masa u Zemljinoj kori te utjecaja sile teže. Bošković je također osmislio i principe izjednačenja s pomoću kojih se prekobrojna mjerenja koja se međusobno malo razlikuju mogu uskladiti.

U ovom znanstvenom istraživanju usredotočit ću se na rješavanje pitanja koja s geodetskog i kartografskog stajališta još do danas nisu dovoljno istražena, a neminovno će uključiti i povijesni kontekst. Znanstveno istraživanje temeljit će se na detaljnijoj analizi najopsežnijeg Boškovićeva djela u polju geodezije *De litteraria expeditione per Pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam jussu, et auspiciis Benedicti XIV. Pont. Max. suscepta a Patribus Societ. Jesu Christophoro Maire et Rogerio Josepho Boscovich* (O znanstvenom istraživanju po Papinskoj Državi što su ga u svrhu mjerenja dvaju stupnjeva meridijana i ispravljanja geografske karte poduzeli, po nalogu i pod pokroviteljstvom Benedikta XIV., Pontifexa Maximusa, oci Družbe Isusove Christopher Maire i Ruđer Josip Bošković), odnosno njegova francuskog prijevoda *Voyage astronomique et geographique, dans l'État de l'Église, entrepris par lordre et sous les auspices du Pape Benoit XIV, Pour mesurer deux dégrés du méridien, & corriger la Carte de l'État ecclésiastique, Par les Pp. Maire & Boscovich de la Compagnie de Jesus, traduit du latin, Augmenté de Notes & d' extraits de nouvelles mesures de dégrés faites en Italie, en Allemagne, en Hongrie & en Amérique, Avec une nouvelle Carte des États du Pape levée géométriquement* (Astronomsko i geografsko putovanje u Papinskoj Državi koje su poduzeli, po nalogu i pod pokroviteljstvom pape

Benedikta XIV., s ciljem da izmjere luk meridijana od približno dva stupnja i da isprave kartu Papinske Države, oci Maire i Bošković iz Družbe Isusove, prevedeno s latinskoga, prošireno bilješkama i podacima o novim mjerenjima stupnjeva provedenih u Italiji, Njemačkoj, Mađarskoj i u Americi, s novom kartom Papinskih Država, geometrijski kartiranom). Znanstveno istraživanje provest će se analizom karata Papinske Države kako bi se ponajprije utvrdile usvojene dimenzije elipsoida i kartografska projekcija u kojoj su karte izrađene, a izdane su uz navedena djela.

U ovom doktorskom radu istraživanje ću provesti na dva srodna izdanja karte Papinske Države. Prvo je izdanje karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico,* objavljena potkraj 1755. na tri lista uz djelo *De litteraria …* (Maire i Boscovich 1755), a drugo je izdanje karta *Carte de l'État de l'Église* objavljena 1770. na jednom listu u djelu *Voyage astronomique...* (Maire i Boscovich 1770).

O Boškovićevu geodetskom radu do sada je napisano nekoliko radova kako s geodetskog i kartografskog tako i s povijesnoga gledišta. Neki istraživači poput Kljajić i Lapainea (2012) utvrdili su da se o kartama Papinske Države koje su izdane uz Maireova i Boškovićeva djela u Hrvatskoj malo pisalo, a i u tim radovima autorima su se potkrale bitne pogreške. Naime, Borčić (1964–65), Marković (1968), koji se poziva na Borčića i Kutlešu (2011) opisujući kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* iz 1755. godine zapravo opisuju kartu *Carte de l'État de l'Église* iz 1770. godine. Borčić (1964–65) je u svojim istraživanjima zaključio da je karta iz 1755. godine izrađena u poliedarskoj projekciji. Međutim, Borčić je tu pogriješio jer je na karti iz 1755. godine nacrtana mreža meridijana pa se lako može vidjeti da su paralele najvjerojatnije lukovi kružnica, dok su meridijani pravci.

Nadalje, veći broj radova bavio se i Boškovićevom metodom izjednačenja kojoj je bio cilj odrediti jedinstvenu vrijednost za spljoštenost Zemlje. Neki od autora naveli su spljoštenost koju je Bošković izračunao, međutim nitko, barem koliko mi je poznato, nije izračunao i parametre tog elipsoida.

1.1. Cilj i hipoteze istraživanja

S obzirom na to da s geodetskog i kartografskog stajališta karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église* do danas nisu dovoljno istražene, cilj je ovoga znanstvenog istraživanja njihova analiza, utvrđivanje dimenzija Boškovićeva elipsoida i kartografske projekcije u kojoj su izrađene karte iz 1755. i 1770. godine.

U doktorskom radu postavljam sljedeće hipoteze :

1. Autori karata *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église* su J. R. Bošković i Ch. Maire
2. Karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico i Carte de l'État de l'Église* nisu izrađene u poliedarskoj projekciji
3. Dimenzije Zemljina elipsoida na kojem se temelje Boškovićeve i Maireove karte određene su iz mjerenja duljina luka meridijana
4. Geografske dužine na kartama Papinske Države određene su u odnosu na početni meridijan Ferro
5. Položaji gradova na kartama Papinske Države točniji su od položaja gradova na prethodnim kartama

2. PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA

U ovom poglavlju doktorskog rada dat ću pregled istraživanja koja su do danas provedena o Boškovićevu radu na razvoju njegove, ujedno i prve poznate, metode izjednačenja.

U drugom dijelu ovoga poglavlja dat ću pregled dosadašnjih istraživanja o dvije srodne karte koje su izrađene na temelju mjerenja koja su proveli Bošković i Maire. Prvu kartu, koja nosi naslov *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico,* nacrtao je Maire i izdana je 1755. godine na tri lista zajedno s Boškovićevom i Maireovom knjigom *De Litteraria…* (Maire i Boscovich 1755). Druga karta naslova *Carte de l'État de l'Église,* umanjena je u odnosu na kartu iz 1755. godine i izdana 1770. uz francuski prijevod knjige iz 1755. Knjiga nosi naslov *Voyage astronomique…* (Maire i Boscovich 1770). Također ću spomenuti autore koji su opisali mjerenja što su ih Bošković i Maire proveli da bi odredili duljinu luka meridijana između Rima i Riminija te time dokazali da Zemlja nije sferičnog oblika.

2.1. Dosadašnja istraživanja o Bošković-Laplaceovoj metodi izjednačenja

O Bošković-Laplaceovoj metodi izjednačenja do sada su pisali Todhunter (1873), Varićak (1910), Eisenhart (1961), Marković (1968), Stigler (1986), Farebrother (1999), Howarth (2001), Hald (2004), Koenker (2005), Pulskamp (2010) i Wilcox (2010), a vjerojatno i mnogi drugi.

Todhunter (1873) je u prvom dijelu knjige 14. poglavlje pod naslovom *Boscovich and Stay* ponajviše posvetio Boškovićevu doprinosu određivanja Zemljina oblika. Dan je osvrt na Stayeve (1760) stihove uz koje je Bošković napisao velik broj bilješki. Todhunter u cijelom tom poglavlju detaljno analizira knjige *De Litteraria…* (Maire i Boscovich 1755) i *Philosophiae recentioris a Benedicto Stay…* (Stay 1760). Na kraju poglavlja dao je kratak pregled francuskog prijevoda *Voyage astronomique*… iznijevši činjenice koje je smatrao bitnima za napomenuti.

Povodom 200. obljetnice rođenja J. R. Boškovića, Varićak (1910) je u 181. svesku časopisa *Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti* objavio rad na 133. stranici pod nazivom *Matematički rad Boškovićev*. U 5. poglavlju tog opsežnog članka pod naslovom *Boškovićevo mjerenje dvaju stepena meridijanskih* Varićak ukratko opisuje kako su Bošković i Maire mjerili duljinu luka meridijana između Rima i Riminija. Također daje i kratki osvrt na kritičare Boškovićeva i Maireova rada. *Boškovićev pokušaj o računu izravnavanja* naslov je 6. poglavlja rada u kojem Varićak detaljno opisuje Boškovićevu geometrijsku metodu izjednačenja, i to teorijski na primjeru pet meridijanskih stupnjeva, dok numeričke vrijednosti Boškovićeve metode daje na primjeru devet meridijanskih stupnjeva. Nakon opisana geometrijskog postupka, Varićak daje i Laplaceov analitički oblik metode.

Eisenhart (1961) također detaljnije opisuje Boškovićevu metodu izjednačenja te navodi da je Bošković prvi razvio postupak za jedinstveno određivanje koeficijenata pravca oblika $y = \alpha + \beta x$ iz skupa od tri ili više mjerenih točaka. Postupak opisuje analitički.

Stigler (1986) u svojoj knjizi o povijesnom razvoju statistike opisuje Boškovićeva nastojanja u dokazivanju Zemljina nepravilnog oblika te geometrijski opisuje metodu izjednačenja. Stigler u svojoj knjizi vrijednosti uglavnom preuzima iz knjiga *De Litteraria…* i *Voyage astronomique….* Takvim direktnim prepisivanjem preuzeo je i krive vrijednosti za veličine na Rtu dobre nade koje je Bošković dao u knjizi *De Litteraria….* Pokatkad daje prijevod na engleski jezik nekih dijelova iz originalnih knjiga. Stigler također daje formule po kojima je Bošković računao Zemljinu spljoštenost te vrijednost spljoštenosti. Stigler spominje i Laplaceove postupke u razvoju metode izjednačenja.

Farebrother (1999) pristupa opisivanju problema na sličan način kao i Stigler (1986). Boškovićevu metodu opisuje geometrijski, ali daje napomenu da se Boškoviću u knjizi iz 1755. pojavila pogreška za vrijednost sinusa geografske širine na Rtu dobre nade.

Howarth (2001), Hald (2004), Koenker (2005), Pulskamp (2010) i Wilcox (2010) uglavnom opisuju Boškovićevu metodu izjednačenja u kratkim crtama. Howarth opisuje metodu geometrijski, dok ostali daju analitički oblik metode. Svi oni spominju Boškovićevu metodu kao prvu metodu kojom je Bošković pokušao izjednačiti mjerene veličine.

Čubranić (1961) povodom 250. obljetnice rođenja Josipa Ruđera Boškovića objavljuje prijevod na hrvatski jezik sažetog izvješća *De Litterarie…* za časopis Bolonjske akademije (Boscovich 1757). U drugom dijelu tog izdanja Čubranić opširno opisuje Boškovićev rad u području geodezije. Među ostalim daje ocjenu točnosti Boškovićevih mjerenja, Boškovićeva nastojanja u poboljšanju izrade instrumenata kojima se služio za mjerenje duljine luka meridijana, njegovu teoriju o nepravilnom obliku Zemlje kao i računanju spljoštenosti te još mnogo toga. Također spominje metodu izjednačenja, ali ju detaljno ne opisuje nego joj daje veliki značaj kao prvi korak u razvoju metode najmanjih kvadrata koja se danas najčešće upotrebljava za izjednačenje mjerenih vrijednosti. Čubranić ipak ne opisuje izradu karte Papinske Države.

Kutleša (2011) je objavio knjigu o Boškoviću u kojoj na osam stranica u kratkim crtama opisuje Boškovićev doprinos geoznanostima, a time i metodi izjednačenja.

Bialas (1982) objavljuje knjigu u kojoj opisuje problematiku Zemljina oblika kroz povijest. U radu daje kratki prikaz Boškovićeva i Maireova mjerenja te vrijednost duljine luka meridijana koju su pritom odredili.

Cilj postupka izjednačenja mjerenih veličina bio je odrediti spljoštenost elipsoida koji bi najbolje aproksimirao Zemlju po obliku. Bošković je u svojim djelima izračunao Zemljinu spljoštenost. Neki autori poput Todhuntera (1873), Čubranića (1961), Varićaka (1961), Stiglera (1986) i Howartha (2001) daju spljoštenost koju je Bošković izračunao. Do sada, barem koliko je meni poznato, nitko od navedenih autora nije definirao parametre koji bi u potpunosti opisali Boškovićev elipsoid.

2.2. Dosadašnja istraživanja o kartama Papinske Države J. R. Boškovića i Ch. Mairea

Abakumov (1950) daje kratak pregled Boškovićeva djela *Voyage astronomique…* (Maire i Boscovich 1770) te instrumenata koji su korišteni za mjerenje duljine luka meridijana između Rima i Riminija. U kratkim crtama daje točnost astronomskih mjerenja koja su provedena prilikom izmjere.

Senđerđi (1958) objavljuje kratki članak o Ruđeru Boškoviću u kojem se osvrće i na geodetsko mjerenje duljine luka meridijana koje je prethodilo izradi karte Papinske

Države u sklopu djela *De litteraria* ... (Maire i Boscovich 1755). U radu je dao samo osnovne podatke o karti: naslov karte, mjerilo u kojem je izrađena te broj i dimenzije listova od kojih se sastoji.

Pedley (1993) objavljuje rad u kojem opisuje problematiku Zemljina oblika kojom su se bavili znanstvenici toga vremena. U radu daje kratki prikaz Boškovićeva i Maireova znanstvenog života i njihovih postignuća. U dva poglavlja opisuje njihovu geodetsku izmjeru, poteškoće s kojima su se pritom susretali, a djelo *De litteraria*... opisano je u pojedinim poglavljima knjige. Pedley detaljnije opisuje kartu objavljenu 1755., a čak navodi i gdje je karta tiskana te koliki su bili troškovi.

Kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* opisuje i rad autora Crippe i dr. (2013), koji su pokušali rekonstruirati Boškovićev triangulacijski lanac, odnosno odrediti na kojim bi se točno mjestima trebala nalaziti pojedina točka lanca trokuta s kojih su Bošković i Maire provodili opažanja.

Na internetskim stranicama Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (NSK) dostupna je virtualna izložba digitalne zbirke Ruđera Boškovića (URL1) koja je objavljena 2013. godine. U katalogu se navodi da se u Zbirci zemljopisnih karata i atlasa Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu čuva Boškovićeva karta Crkvene Države iz 1755. Karta predstavlja jedini poznati primjerak kartografskih djela Ruđera Boškovića, koji se čuva u knjižnicama u Hrvatskoj. Međutim, to nije točno. U NSK se čuvaju dva primjerka knjige *Voyage astronomique…* (1770) u koju je uvezana karta *Carte de l'État de l'Église.* Ako se pogleda karta na koju se poziva u katalogu može se vidjeti da su ta tri lista karte inačica listova karte nastala na temelju onih Boškovića i Mairea iz 1755. godine. Listovi karata izdani su 1776. godine pod naslovom *Nouvelle carte de l'Etat de l'Eglise* i uvezane u atlas P. Santinija. Te karte, barem koliko mi je za sada poznato, nisu izradili ni Bošković ni Maire. Uvidom u ta tri lista karte, koji nisu sastavni dio atlasa već zasebne karte, primijetila sam da srednji list nije iz istog atlasa jer je taj srednji list na drugačiji način ručno bojen. Kratak prikaz o primjercima listova karte koji se čuvaju u NSK napisala je voditeljica Zbirke zemljopisnih karata i atlasa NSK, Miletić Drder (2011). Isto tako, znam da se primjerak Santinijeva atlasa u kojem su i tri lista karte *Nouvelle carte de l'Etat de l'Eglise* čuva u Gradskom muzeju Trogir.

Rad koji je nedavno objavljen, a odnosi se na Boškovićeva i Maireova mjerenja duljine luka meridijana i opis karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico,* rad je autorice Slukan Altić (2014). U njemu autorica u dva poglavlja daje moguće kartografske izvore iz kojih je precrtan dio sadržaja karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* precrtan te karte kojima je izvor informacija bila karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.*

Po pitanju definiranja kartografske projekcije te točnosti prikaza pojedinih topografskih elemenata na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* do sada je pisao samo Borčić (1964–65). Borčić navodi da se karta sastoji od jednog lista u mjerilu 1:375 000 koje je izračunao iz tri grafička mjerila koja su nacrtana na karti. Borčićevu pogrešku prvi su primijetili Kljajić i Lapaine (2012), koji su u svom radu sustavnije i detaljnije pristupili opisu Boškovićevih i Maireovih karata Papinske Države.

Naime, između karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico,* koja je objavljena 1755., i *Carte de l'Etat de l'Eglise,* objavljene 1770., osnovna je razlika u tome što se prva sastoji od tri lista i nije bila uvezana u knjigu *De litteraria*... uz koju je tiskana, dok je druga na jednom listu, smanjena približno tri puta u odnosu na prvu i uvezana je u knjigu *Voyage astronomique*.... Druga je razlika u tome što je na karti iz 1755. nacrtano 10 grafičkih mjerila, dok se na karti iz 1770. nalaze samo 3 grafička mjerila. Međutim, Borčić to nije uočio pa je pisao o drugoj karti kao da je riječ o prvoj.

Marković (1968) opširno opisuje Boškovićev rad u geodeziji vezan uz mjerenje duljina luka meridijana te određivanje oblika Zemlje. U istom radu mogu se pronaći sažeti podaci o karti koje je Marković preuzeo od Borčića te time u svoj rad prenio pogrešne zaključke o karti koje je dao Borčić u svome radu.

Dosadašnjim istraživanjima također sam utvrdila da su se do sada Snyder (1985), Jenny i Hurni (2011) i Bayer (2013) bavili razvojem računalnih aplikacija koje bi procijenile u kojoj kartografskoj projekciji bi neka stara karta trebala biti izrađena.

Snyder (1985) detaljnije opisuje na koji način softver ispituje oblik kartografske mreže ako je on nacrtan na karti kako bi se na osnovi oblika meridijana i paralela mogla procijeniti vrsta kartografske projekcije. Međutim, čini mi se da taj softver nikada nije dan javnosti za širu upotrebu.

Jennyjeva i Hurnyjeva (2011) i Bayerova (2013) aplikacija besplatno su dostupne za upotrebu. Njihovim ispitivanjem i testiranjem došla sam do zaključka da na obje aplikacije još treba poraditi jer ne daju pouzdane rezultate.

3. OPIS KARATA PAPINSKE DRŽAVE

Papinska Država (tal.: *Stato Pontificio*, *Stato della Chiesa*, *Stati Pontificiili* i *Stato Ecclesiastico;* eng.: *Papal State(s)*, *the State(s) of the Church*, *the Pontifical States* i *the Ecclesiastical States*) ime je povijesne države na području Apeninskog poluotoka koja je postojala od 756. do 1870., kada je došlo do ujedinjenja Italije. Te je godine Giuseppe Garibaldi vojno porazio snage Papinske Države i integrirao tu državu u Kraljevinu Italiju. Jedini njezin današnji ostatak je suverena Država Vatikanskoga Grada. Tijekom renesanse teritorij Papinske Države se proširio najviše za vrijeme papa Aleksandra VI. i Julija II. Uz njihovu ulogu u Crkvi, Pape su postali jedni od najvažnijih talijanskih vladara. U praksi, većinu papinskih posjeda držali su lokalni kneževi. Tek u 16. stoljeću pape uspostavljaju punu vlast nad državom. Na vrhuncu teritorijalne ekspanzije, u 18. stoljeću, Papinska Država obuhvaća većinu središnje Italije: Lacij, Umbriju, Marcu, Ravennu, Ferraru, Bolognu i dijelove Romagne. Također je uključivala enklave u južnoj Italiji i okolicu Avignona u Francuskoj (URL2).

U ovom doktorskom radu istraživanje će se temeljiti na analizi dvije srodne karte Papinske Države, *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église*, objavljene u 18. stoljeću, kada je Papinska Država teritorijalno bila najveća i obuhvaćala veći dio današnje Italije.

Godine 1755. objavljena je *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico,* koja je doživjela drugo izdanje 1770. godine u mjerilu umanjenom tri puta. Karta objavljena 1770. godine nosi naslov *Carte de l'État de l'Église* na francuskom jeziku. Doslovni prijevod naslova karata bio bi za kartu iz 1755. Nova geografska karta Crkvene Države, a za kartu iz 1770. bio bi Karta Crkvene Države. Međutim, danas je u hrvatskom jeziku, za teritorij koji je bio pod neposrednom vladavinom pape, uvriježen naziv Papinska Država. U enciklopedijama u hrvatskom izdanju može se pronaći izraz Papinska Država (vidi npr. URL3). Mnogi hrvatski znanstvenici upotrebljavaju naziv Papinska Država u svojoj znanstvenoj literaturi (npr. doc. dr. sc. Dragan Markovina, Odsjek za povijest Filozofskog fakulteta u Splitu, dr. sc. Lovorka Čoralić, Hrvatski institut za povijest). Crkveno- povijesno i teološko stajalište također podupire pojam Papinska Država jer je u državno- pravnom pogledu ime Papinska Država vezano uz činjenicu da je njezin

suveren bio Papa, a Crkva je pojam koji geografski obuhvaća sve kršćane u svijetu. Stoga je hrvatski prijevod naslova karte iz 1755. *Nova geografska karta Papinske Države*, a naslova karte iz 1770. *Karta Papinske Države*.

U ovom poglavlju doktorskog rada opisat ću osnovne elemente karata, a to su: naslov, vrsta, područje prikaza i orijentacija karte, svrha i namjena karte. Također ću proučiti sadržaj karata kroz njihove osnovne topografske elemente.

3.1. *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* iz 1755.

Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico objavljena je 1755. godine. Položaji gradova i mjesta prikazani na karti ponajprije su prikupljeni tijekom geodetske izmjere koju su proveli Bošković i Maire. Geodetska izmjera provedena je na području tadašnje Papinske Države, države u 18. stoljeću, koja danas obuhvaća područje središnje Italije. *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* objavljena je na tri zasebna lista (slike 3.1., 3.2. i 3.3.) uz knjigu *De litteraria expeditione per Pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam jussu, et auspiciis Benedicti XIV. Pont. Max. suscepta a Patribus Societ. Jesu Christophoro Maire et Rogerio Josepho Boscovich* (O znanstvenom istraživanju po Papinskoj Državi što su ga u svrhu mjerenja dvaju stupnjeva meridijana i ispravljanja geografske karte poduzeli, po nalogu i pod pokroviteljstvom Benedikta XIV., Pontifexa Maximusa, oci Družbe Isusove Christopher Maire i Ruđer Josip Bošković). Listovi, zbog njihova velikog formata, nisu uvezani u knjigu. Kako naziv knjige kaže, mjerenja su imala dva cilja. Prvi je bio izraditi novu kartu Papinske Države, jer su prema Boškovićevu mišljenju dotadašnje karte bile pune krupnih pogrešaka u položajima važnijih gradova i mjesta. Drugi i važniji cilj bio je izmjeriti duljinu luka meridijana između Rima i Riminija kako bi se ispitao Zemljin oblik.

Mjerenja su provedena u razdoblju od 1750. do 1752. godine te dodatnim mjerenjima koja su provedena tijekom 1753. godine (Pedley 1993). Bošković i Maire mjerili su duljinu luka meridijana kako bi dokazali da je Zemlja spljoštena na polovima. Mjerenja duljine luka meridijana, u svrhu određivanja duljine luka jednog stupnja meridijana, bila su aktualna potkraj 17. i tijekom 18. stoljeća jer su se vodile velike rasprave oko pitanja je li Zemlja spljoštena ili ispupčena na polovima.

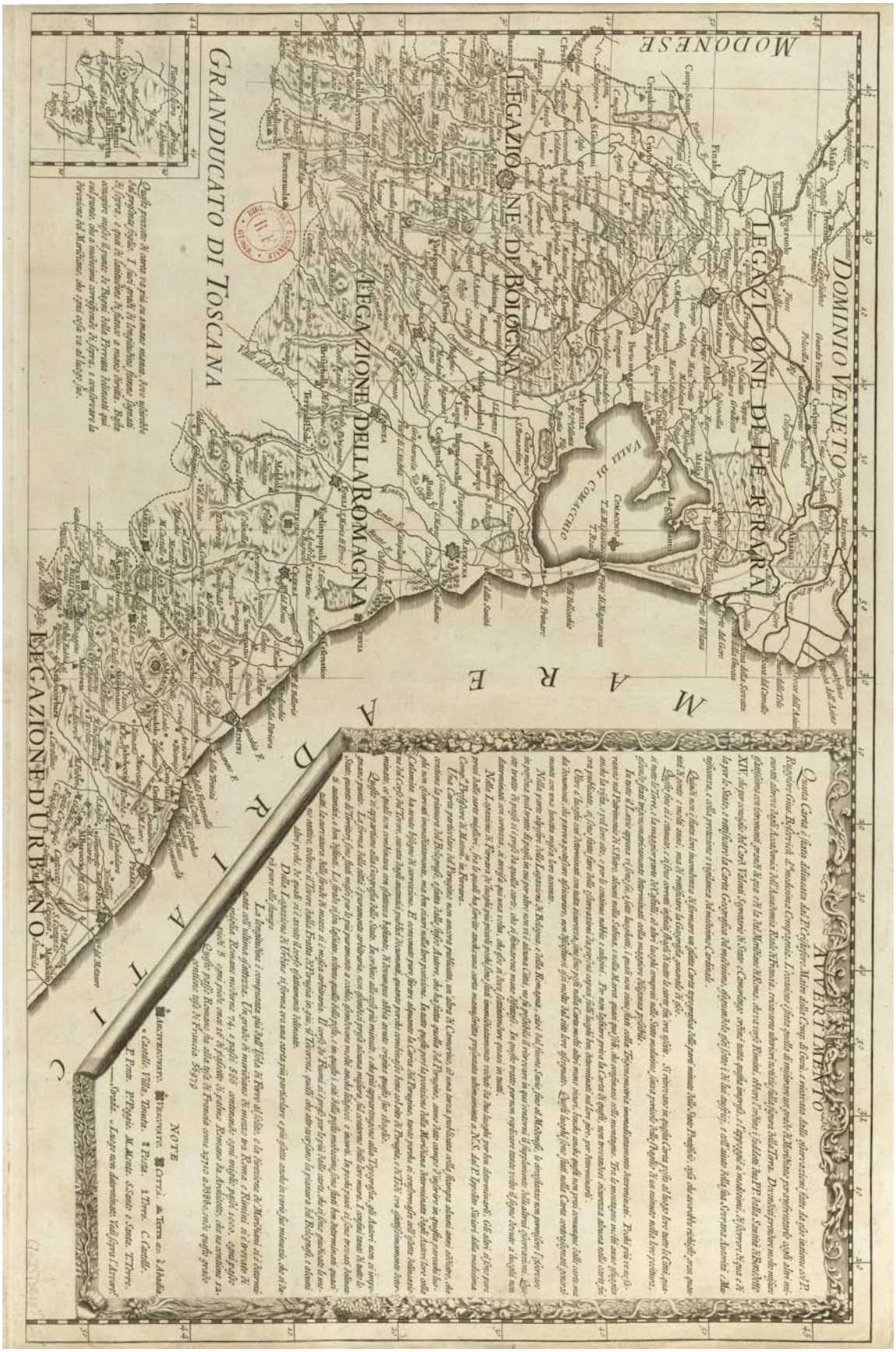
Knjiga *De litteraria…* (Maire i Boscovich 1755) sastoji se od pet dijelova, od kojih je prvi, četvrti i peti napisao Bošković, dok je drugi i treći napisao Maire. U prvom dijelu Bošković je opisao razloge i ciljeve zbog kojih je izmjera provedena te povijesni pregled cijeloga njihova pothvata, dok je u četvrtom dijelu opisao instrumente kojima su mjerenja provedena, kako su oni izrađeni, korišteni i rektificirani. U petom dijelu Bošković je detaljno opisao postupak ispitivanja Zemljina oblika, i to u prvom poglavlju zbog utjecaja različitih rasporeda masa ispod Zemljine kore te utjecaja sile teže, dok u drugom poglavlju daje postupak ispitivanja s pomoću mjerenih duljina lukova meridijana. U drugom dijelu Maire je opisao računanja koja su bila vezana za mjerenje duljine luka meridijana, dok u trećem dijelu opisuje na koji način su pristupili izradi karte Papinske Države te s kojim su se sve poteškoćama pritom susreli (Pedley 1993).

Treći dio knjige nosi naslov *Enarratio eorum, quae ad corrigendam tabulam geographicam Ditionis Pontificiae peracta sunt* (Prikaz onoga što je izvedeno da bi se ispravila karta Papinske Države). Treći dio knjige se sastoji od 25 poglavlja, a na kraju je dana tablica geografskih širina i dužina za 84 grada Papinske Države koje su izračunali na osnovi mjerenja primjenom triangulacije. Ono što je napisano u trećem dijelu knjige u nastavku će biti detaljnije opisano.

Prema I. Kljajić i M. Lapaineu (2012) postoji nekoliko primjeraka karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico,* koji se čuvaju u Vatikanskoj apostolskoj knjižnici u Vatikanu, Centralnoj nacionalnoj knjižnici u Firenci, Vojno-geografskom institutu u Firenci, Francuskoj nacionalnoj knjižnici u Parizu, Nacionalnoj knjižnici Portugala u Lisabonu, Britanskoj knjižnici u Londonu, Nacionalnoj knjižnici Marciana u Veneciji te Kraljevskom geografskom društvu u Londonu. U nekim od navedenih knjižnica ne postoje sva tri lista karte, a bibliografski podaci razlikuju se od knjižnice do knjižnice.

Digitalna kopija primjerka karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* koji će se obrađivati u ovom doktorskom radu naručena je iz Francuske nacionalne knjižnice u Parizu u visokoj rezoluciji i originalnoj veličini (Sign. GE DD-2987 (5411,1-3)).

Usporedbom dimenzija listova karte primijetila sam kako se prvi i drugi list karte po dimenzijama dobro slažu, međutim treći list karte u određenoj mjeri odstupa od prethodna dva.



Slika 3.1. Prvi list karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, 1755. Francuska nacionalna knjižnica (Sign. GE DD-2987 (5411,1), smanjen za 65%

Slika 3.2. Drugi list karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, 1755. Francuska nacionalna knjižnica (Sign. GE DD-2987 (5411,2), smanjen za 65%

Slika 3.3. Treći list karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, 1755. Francuska nacionalna knjižnica (Sign. GE DD-2987 (5411,3), smanjen za 65%

Usporedbom sadržaja na karti može se primijetiti kako on, kada se sadržaj preklopi u sredini lista, na krajevima odstupa i do 3 mm. Karte su stare 250 godina i poznato je da dolazi do različitih deformacija papira zbog dugogodišnjeg stajanja.

Dimenzije listova iznose oko 66×50 cm. Nakon spajanja listova u jednu cjelinu karta ima dimenzije oko 66×134 cm, odnosno bez izvanokvirnog sadržaja dimenzije iznose oko 65×119 cm.

3.1.1. Mogući kartografski izvori

Kod Nove karte Papinske Države samo su položaji mjesta mjereni preciznim geodetskim metodama, dok je ostali sadržaj precrtavan s drugih, već postojećih karata. U ovom poglavlju dat ću pregled mogućih kartografskih izvora s kojih je preuzet ostali sadržaj na karti. Na slici 3.4. prikazano je područje Papinske Države s podjelom na administrativne jedinice (legacije – glavna administrativna podjela Papinske države pod vlašću kardinala legat tijekom 18. i 19. stoljeća).

Za izradu karata Italije u 17. i početkom 18. stoljeća kartografi su se kao izvorom podataka uglavnom služili atlasom *Atlante geografico d'Italia* Giovannija Antonija Maginija, izdanim 1620., tri godine nakon njegove smrti. Magini je svoj radni vijek posvetio izradi karata svih talijanskih regija. Opisi nekih od Maginijevih karata i njihove reprodukcije, npr. *Territorio Perugino, Territorio di Orvieto, Umbria, overo Ducato di Spoleto,* mogu se pronaći u radu Victorije Marini (2012). Prilikom izrade karata Magini je veliku pažnju posvećivao preciznom prikazivanju granica teritorija i legacija. Karte su izrađivane tehnikom bakroreza i nisu se temeljile na geodetskim mjerenjima (Marini 2012).

Disegno delle valli di Comacchio izradio je Bartolomeo Gnoli između 1630. i 1650. kao dio svoje *Topografia della città e provincia di Ferrara*. Dugo vremena ta je karta bila najbolja karta tog područja, s prikazanim močvarama, nasipima, poljima, šumama, obalnim dinama, cestama i naseljima (Woodward 2007). Dimenzije karte su 54×41 cm. Karta se čuva u Biblioteca Aristotea di Ferrara (Almagiá 1960). Nadopunjenu sadržajem i u smanjenim dimenzijama Pietro Azzoni i Pompeo Angelotti izdali su 1658. godine kartu istog područja pod naslovom *La pianta delle Valli di Comacchio a scala ridotta nella edizione di Pompeo Angelotti*. Karta je dimenzija 24,5×26,5 cm (Almagiá 1960).

Slika 3.4. Područje Papinske Države u 18. stoljeću s podjelom na legacije

Jedna od karata nastalih pod utjecajem Maginija je *All'Ill.mo Senato di Bologna Camillo Sacenti Perito Publico la presente Geografia del Territorio Bolognese in testimonio della sua servitù humiliss.te dedica e dona (di nuovo p. (er) le mutazioni seguite ridotta al stato presente),* koju je izradio Camillo Sacenti i objavio 1651., a drugi put je izdana 1668. Na karti je prikazano područje Bolonjske legacije, između rijeke Panaro na zapadu i Jadranskog mora na istoku, rijeke Adige na sjeveru i Apena na jugu. Karta je orijentirana prema sjeveru. Tiskana je tehnikom bakroreza, a dimenzije su joj 96×76 cm. Na karti nije prikazana podjela geografskih širina i dužina. Drugu kartu izradio je Camillo Sacenti 1682. i nosi naslov *Disegno rifformato allo stato presente del Corso del Reno et altri nello'anno 1682*. Karta se sastoji od četiri lista dimenzija 58,5×46,5 cm i orijentirana je prema sjeveru. Na karti nije prikazana podjela geografskih širina i dužina. Karta prikazuje područje doline Comacchio i Marmorte te rijeku Po, a prikazane su i granice s legacijama Ferrare i Bologne. Nakon 1688. godine, poslije Sacentijeve smrti, drugi autori nadopunili su granice Bolonjske i Ferarske legacije (Almagiá 1960).

Nuova et esatta tavola topografica del territorio o distretto di Roma, karta autora Innocenza Matteija, izdana je prvi put 1674. godine. Dimenzije su joj 77,5×54,5 cm. Karta je bogata geografskim informacijama. Hidrografija na karti bogata je velikim brojem prikazanih obalnih potoka i svih jezera regije. Toponimi su točni, a prikazani su čak i rudnici i kamenolomi. Na karti se nalaze administrativne jedinice prikazanog područja, *Campagna di Rome* (Almagiá 1960).

Karta *Topografia dello Stato d'Ascoli della Marca con li suoi confini* autora Odoarda Odoardija Casilinija objavljena je 1680. godine. Hidrografska mreža detaljno je prikazana kao i naseljena mjesta, osobito u području trokuta Amandola-Acquasanta-Ascoli. Karta je orijentirana prema sjeveru. Dimenzije su joj 43,5×30,6 cm. Na karti nije prikazana podjela geografskih širina i dužina. Almagiá (1960) u fusnoti uz opis karte navodi da su tu kartu spomenuli Maire i Bošković u svojoj knjizi *De Litteraria…*, a da pritom ne navode ime autora. Također navodi da je kartu ponovno objavio u istoj veličini Vincenzo Coronelli pod naslovom *Territorio d'Ascoli della Marca Anconitana gia Capitale d'essa dissegnata e stampata dall'Illustrissimo Sig. Odoardo Odoardi de Casilini d'Ascoli…*, ali ne navodi godinu objave.

Karta *Status Ecclesiasticus et Magnus Ducatus Thoscanae* Fredericka de Wita, objavljena 1688. godine u atlasu *Atlas Maior*, još je jedna od karata koja je nastala pod utjecajem

Maginijevih karata. Dimenzije karte su 49,5×58,4 cm. Prikazuje područje Papinske Države, a granice između legacija i teritorija su ucrtane na karti i ručno bojene. Na karti su prikazani veći gradovi. Izrađena je tehnikom bakroreza (Marini 2012), u približnom mjerilu 1:860 000 (URL4).

Oko 1690. godine Vincenzo Maria Coronelli izdao je kartu teritorija Ravenne koja nosi naslov *Territorio di Ravenna ovvero Parte Meridionale di quell'Arcivescovato.* Karta je dio atlasa *Corso Geografico Universale*. Prikazuje područje koje se proteže od ušća kanala Bellocchio do rijeke Savio, koja je ujedno južna granica teritorija Cervia. Na karti je s posebnom važnosti prikazana hidrografija. Toponimija na karti prikazana je veoma precizno, kao i mreža prometnica te granice teritorija i biskupija. U lijevom dijelu karte nalazi se u ukrašenoj kartuši detaljan plan grada Ravenne. Dimenzije karte su 60,5×45 cm (URL19).

Giacomo Filippo Ameti objavio je dvije karte, prvu 1693., a drugu 1696. godine. Karta iz 1693. godine nosi naslov *Il Lazio con le sue piu cospicue strade antiche e moderne e principali casali, e tenute di esso descritto da Giacomo Filippo Ameti …*, sastoji se od četiri lista. Dva lista prikazuju obalno područje Sredozemnog mora, a druga dva lista unutrašnjost prikazane pokrajine. Dimenzije svakog lista iznose 42×56 cm, a ukupne su dimenzije karte 85×115 cm. Na karti je prikazano područje *Campagna di Rome* (danas poznata kao pokrajina Lacio), koja se prostire od Tevere sa zapadne strane do zaljeva Terracina u obalnom području. Na rubnim dijelovima karte prikazane su djelomično *Regno di Napoli* na istoku i sjeveroistoku te regija Sabina na sjeverozapadu. Reljef je prikazan „krtičnjacima“, prometnice su detaljno i točno prikazane, karta je bogata hidrografijom, a šumski predjeli prikazani su s pomoću signature drveća (Almagiá 1960, URL9). Približno je mjerilo karte 1:150 000 (URL10). Karta iz 1696. godine nosi naslov *Patrimonio di S. Pietro olim Tuscia Suburbicaria con le sue più cospicue strade antiche, e moderne, e principali casali, e tenute di esso*. Sastoji se također od 4 lista, ukupne su joj dimenzije 85×115 cm. Na karti je prikazano područje *Patrimonio di S. Pietro*. Kao i na karti iz 1693. godine prikazano je obalno područje, dok druga dva lista prikazuju unutrašnjost područja. Karta je bogata hidrografijom, dodatno je iscrtana cestovna mreža, reljef je prikazan krtičnjacima, a šumska područja signaturom drveća (URL11). Na sjevernom dijelu karte djelomično je prikazano područje Umbrije, na zapadnom

dijelu područje teritorija Orvieta, dok je na istočnom dijelu karte djelomično prikazano područje Sabine. Približno je mjerilo karte 1:150 000 (URL12).

Karta *Territorio di Perugia* autora Vincenza Marije Coronellija iz 1696. godine izrađena je pod utjecajem Dantijeve karte iz *Isolario dell'atlante Veneto* i Maginijeve karte *Territorio Perugino*. Grad Perugia nalazi se na sredini karte. Karta je izrađena tehnikom bakroreza (Marini 2012).

Filippo Titi izdao je 1697. godine kartu *Legatione del Ducato D'Urbino con le Diocesi, E Governo di Cittá di Castello.* Hidrografija na karti popravljena je u odnosu na ranije karte. Reljef je prikazan krtičnjacima. Granice između teritorija prikazane su isprekidanim linijama. Na karti je prikazano područje *Legazione della Marca di Ancona*, *Governo di Perugia*, *Granducato di Toscana*, *Diocesi, Governo di Cittá di Castello*, *Legazione di Romagna*, *Repubblica di San Marino* i *Governo di Fano*. Položaj grada Perugino je ispravljen u odnosu na položaj koji je prikazan na kartama ranijih autora. Dimenzije karte su 34×54 cm (Almagiá 1960, Marini 2012). Karta je izrađena u približnom mjerilu 1:239 000 (URL5). Druga karta koju je izradio Filippo Titi i objavio 1699. je karta koja nosi naslov *Legatione della Romagna*. Sastoji se od jednog lista dimenzija 54,5×43,6 cm u približnom mjerilu 1:190 000 (Slukan Altić 2014). Karta je orijentirana prema sjeveroistoku. Primjerci karata dio su *Collection d'Anville* Nacionalne knjižnice Francuske (BnF).

Vincenzo Maria Coronelli je 1708. godine izdao kartu *Umbria D.D.P. Coronelli*. Karta obuhvaća područja gradova *Assisi*, *Nocera*, *Foligno*, *Spoleto*, *Norcia*, *Cascia*, *Rieti*, *Narni*, *Amelia* i *Todi*. Reljef na karti nije prikazan, a veća je pažnja dana hidrografiji i prikazu naselja. Granice regija iscrtane su točkastim linijama. Položaj grada *Gubbia* je ispravljeno u odnosu na karte ranijih autora. Dimenzije karte su 12,8×18,3 cm (Marini 2012).

Corografia del Ducato di Ferrara con parte degli stati al medemo Ducato confinanti autora Bartolomea Gnolija izdana je 1645. godine i sastoji od 4 lista, ukupnih dimenzija 104×137 cm. Tiskana je tehnikom bakroreza i prikazuje područje Ferrare. Gnoli je prvi izradio zbirku karata pod naslovom *Carte generali e particolari di tutto lo Stato di Ferrara.* Karta *Corogafija del Ducato de Ferrara…* je zapravo prva karta koja prikazuje područje Ferrare, s novim, ispravljenim podacima posebice granicama Vojvodstva Ferrare te načina korištenja ferrarskog zemljišta (URL13). Giovanni Tommaso Bonfadini je 1709. godine po uzoru na Gnolijevu kartu izdao svoju kartu *Topografia dello stato di*

Ferrara disegnata nella forma più moderna ... circoscritti da stati circonvicini, che al medesimo sono adiacenti da Giovanni Tomaso Bonfadini ferrarese l'anno 1708. Dimenzije karte su 39×56 cm, a približno je mjerilo 1:244 000. Karta je orijentirana prema istoku. Poseban naglasak dan je na prikazu potoka, močvara, bara i iskrčenog zemljišta te su na karti prikazani veći gradovi i ostala važnija mjesta (URL13, URL14). Tek izdanjem karte *Corografia del Ducato di Ferrara con la delineazione delle Citta, Castelli, Terre, Ville e Luoghi del medisimo e di parte degli altri Stati circonvicini, con i Suoi Fiumi, Valli, Condotti, Argini, e Strade, fatta mediante l'unione delle piu' estate e modern carte, ecc., questi di 8 gennaio 1758 Ferrara Ambrogio Baruffaldi giudice d'argini, e geometra Ferrarese* Ambrogija Baruffaldija iz 1758. godine, granice Vojvodstva Ferrara dobit će svoj novi oblik na kartama koje prikazuju to područje (URL13). Dimenzije karte su 90×67 cm. Karta prikazuje područje između grada Potoviro, rijeke Po i grada Volano te dolinu Comacchio. Hidrografija je prikazana točno. Karta je izrađena u približnom mjerilu 1:145 000 (URL15). Sve tri navedene karte vrlo su rijetke.

Giuseppe Tommaso Bonfadini izdao je kartu, koja nosi naslov *Geografia de Ducati di Guastalla, Mirandola, Mantova ... fatto per dimostrare l'inondazione del Ferrarese successa nel mese di novembre dell'anno scorso 1705 e causata dalle rotte del Po, Mincio, e Secchia sul Mantovano,* 1706. godine. Dimenzije cijelog lista na kojem se karta nalazi iznosi 62×44 cm, dok karta ima dimenzije 58×28 cm. Na karti nema podjele geografskih širina i dužina te je orijentirana prema sjeveru. Ispod karte nalazi se posveta, a u dva su stupca popisani tokovi 48 rijeka. Reljef je prikazan krtičnjacima. Karta prikazuje područja *Ducato di Guastalla*, *Ducato di Mirandola*, *Ducato di Mantova* i *Ducato di Ferrara*. Približno je mjerilo karte 1:320 000 (URL16, URL17, URL18).

Karta *La Marca Anconetana e Fermana* autor koje je Silvestro Amanzio Moroncelli izdana je 1711. godine. Dimenzije karte su 53,5×42,5 cm. Obuhvaća područje obale od *Osteria di Marotta* do *Montepagano,* rubne dijelove *Ducato di Urbino* do Abruzza u Teramu. Unutar prikazanog područja nacrtane su granice biskupija i nadbiskupija. Karta ima dosta zajedničkih elemenata s kartom koju je izradio Magini, ali je znatnije nadopunjena na području Fabriana i Camerina. Geografske koordinate Ancone se od Maginijevih razlikuju po geografskoj širini za nekoliko minuta, dok se geografska dužina razlikuje za gotovo pola stupnja. Almagiá (1960) navodi da su vjerojatno tu kartu Maire i Bošković spomenuli u svojoj knjizi *De Litteraria…* kao jednu od karata kojom su se koristili za

dopunjavanje sadržaja karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico,* iako ne navode ime autora. Almagiá također navodi da su Maire i Bošković u svojoj knjizi naveli da s točnosti te karte nisu bili u potpunosti zadovoljni.

Karta *Tavola generale della provincia dell'Umbria nuovamente corretta et ampliata secondo lo stato presente* Silvestra Amanzija Moroncellija izdana je godinu dana kasnije, 1712. godine. Dio je atlasa *Mercurio Geografico overo guida geografica in tutte le parti del mondo,* koji je izdao Domenico De' Rossi. Na karti je prikazana provincija Umbria koja je u to doba bila pod vlašću Papinske Države. Također je prikazan sjeverni dio pokrajine *Viterbese* i *Sabine* te dijelovi *Marca di Ancona*, *Ducato di Urbino*, *Granducato di Toscana* i *Abruzzo*. Moroncelli je inspiraciju za izradu svoje karte dobio promatrajući Mercatorove i Maginijeve atlase. Područja je prikazao kombinirajući različite kartografske izvore koje je pritom ispravljao. Kartu karakterizira dosta velika točnost, bogatstvo sadržaja, a naglasak je dan na hidrografiji. Dok je granica s Urbinom rekonstruirana s velikom preciznošću, granica s Orvietom manje odgovara stvarnom položaju. Reljef je prikazan krtičnjacima. Karta je dimenzija 56,8×42,1 cm. Izrađena je tehnikom bakroreza. Geografska širina grada Perugie dobro se podudara s geografskom širinom na Maginijevoj karti, ali geografska dužina odstupa za gotovo pola stupnja (Almagiá 1960, Marini 2012).

Još jedna karta koja se nalazi u De' Rossijevu atlasu *Mercurio Geografico overo guida geografica in tutte le parti del mondo* je karta izrađena pod utjecajem Giacoma Cantellija da Vignole, a nosi naslov *Legazione del Ducato di Ferrara.* Dimenzije su joj 55,2×43,5 cm. Karta se sastoji od jednog lista u približnom mjerilu 1:215 000 (Slukan Altić 2014).

Carta topografica levata dalle carte geografiche del Magini, e d'Altri, e ridotta in misura per quanto s'estende il Paese, ove sono le Valli, et Inondazioni del Bolognese, izdana 1726. godine, jedna je od karata iz prve polovice 18. stoljeća koja ima mnogo zajedničkih elemenata, poput hidrografije i naselja, s Maginijevim kartama. Autor karte je Luigio Maria Casoli. Područje rijeke Po i njezina pritoka Reno te dolina Comacchio prikazani su na karti, a reljef nije prikazan. Dimenzije karte su 69×75 cm, orijentirana je prema sjeveru. Casoli je izdao i kartu 1725. godine na kojoj je prikazano područje grada Porreto. Dimenzije te karte su 26,7×38 cm. Obje karte nalaze se kao prilog publikaciji *Scritture e ragioni Sopra il Progetto di dar esito all' Acque chiare del Bolognese* (Almagiá 1960).

Karta *Novissima et accuratissima Delineatio Status Ecclesiae et Magni Ducatus Hetruriae* dio je atlasa *Atlas Novus sive Tabulae Geographicae totius orbis….* Prikazuje područje Papinske Države i *Granducato di Toscana* (Nadvojvodstvo Toscane). Kartu je izradio Matthäus Seutter 1730. godine. U odnosu na Maginijev atlas nepromijenjene su granice područja Tifernate, Perugina, Umbrije i Orvieta, dok izmjenama podliježu područja Castelluccio alla Marca, Sibillini i Umbria. Imena su na karti dana na latinskom jeziku, dok su veći gradovi prikazani stiliziranim kartografskim znakovima. Granice između regija su naknadno ručno bojene. Dimenzije karte su 50,1×58,3 cm, izrađena je tehnikom bakroreza u približnom mjerilu 1:840 000 (Marini 2012, URL8).

Diego de Revillas je 1739. godine izdao kartu *Diocesis et Agri Tiburtini Topographia. Nunc primum trigonometrice delineata et veteribus viis villis ceterisque antiquis monumentis adornata*. U kartuši u gornjem lijevom kutu prikazano je predgrađe Tivolia, dok se u kartuši u gornjem desnom kutu nalazi tumač znakova. Karta je orijentirana prema sjeveru. Na karti su prikazane rijeke i prometnice, dok su šumska područja prikazana signaturom drveća. Karta je bogata toponimima. Detaljno prikazan reljef daje trodimenzionalni dojam prikazanog područja. Kartu je Revillas izradio u sklopu svoje studije o antičkim vodovodima koja se trebala sastojati od 4 knjige, ali rad nije dovršio zbog prerane smrti (Roberti 2000, URL22). Detaljnije o Revillasovu radu može se pročitati u radu Michele Sciò (2006). Iz naslova karte može se vidjeti da je ta karta izrađena na temelju trigonometrijskih mjerenja. Kada je Maire u trećem poglavlju, paragraf 15, knjige *De Litteraria…* (Maire i Boscovich 1755) pisao kojim su se kartama služili da pojedina područja na karti ne bi ostala prazna, naveo je da su vidjeli kartu koja prikazuje područje Tiberinske biskupije, a koju je izradio „otac opat de Revillas“. Upravo bi prethodno navedena karta *Diocesis et Agri Tiburtini Topographia* mogla biti ta karta koju Maire spominje. Maire je još za tu kartu napisao da im nije bila posebno potrebna jer su dovoljno naseljenih mjesta sami opažali, ali je primijetio kako je karta prema sredini točna, ali prema rubovima biskupije ima nedostataka.

U istom paragrafu Maire također navodi da su vidjeli još jednu neobjavljenu kartu „koja obuhvaća veliki dio Fabrianskog polja“ autor koje je „otac Annibale Magnalbò“. Dosadašnjim istraživanjima nisam uspjela utvrditi o kojoj je karti i o kojem je autoru riječ. U Tooleyjevu rječniku kartografa (Scott 2003) ne spominje se kartograf tog imena i prezimena.

Andrea Chiesa je 1742. godine izdao kartu *Carta del bolognese per quanto esso si estende seguitamente dalle radici della collina sino al Modonese, Ferrarese, ed alla Romagna.* Izrađena je na temelju točnih neposrednih opažanja provedenih od 1732. do 1738. godine. Karta je izrađena u približnom mjerilu 1:30 000. Na karti nije prikazana cijela Legacija Bologna već samo Bolonjska ravnica sjeverno od ceste *Via Emilia,* Jadranskog mora na istoku te na zapadu do granice s Modenom. Na južnom dijelu karte prikazana su brdska područja u neposrednoj blizini Bologne (Almagiá 1960). Karta se sastoji od 12 listova dimenzija 49×66,5 cm. Ukupne dimenzije karte su 195,4×197,7 cm i nije bojena (URL6). Almagiá (1960) navodi da je ta karta najvjerojatnije najbolji prikaz Bolonjske ravnice toga doba. Isto tako, Almagiá navodi da su upravo tu kartu Maire i Bošković spominjali kao jedan od izvora za dopunjavanje svoje karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* koja još u njihovo vrijeme nije bila tiskana, ali opet pritom nisu naveli tko je njezin autor. Dugo vremena se smatralo da je *Carta del bolognese…* izgubljena, ali je pronađena u Vatikanskoj knjižnici (Almagiá 1960). Dvadeset godina poslije, 1762. godine na temelju te karte izrađena je *Carta topografica di tutta la pianura del bolognese cavata dalla carta da me Andrea Chiesa stampata dell'anno 1742, e in parte del ferrarese, e del ravegnano, desunta, rispetto alle valli di Marmorta, e di Argenta….* Karta je istih dimenzija i prikazuje isto područje kao karta iz 1742. godine, ali je nadopunjena novim informacijama koje su prikupljene iz drugih izvora ili izmjerom na terenu. Sastoji se od dva dijela od kojih je svaki podijeljen na 24 segmenta koji su pričvršćeni na platno. Karta je naknadno ručno bojena (URL7).

Karta koja prikazuje sabinsko područje je *Tavola generale della provincia di Sabina secondo lo stato presente. Data in luce da Gio. Domenico Campiglia sopraintendente della Calcografia Camerale. Guido Cesare Cigni anconitano disegnò. Giovanni Petroschi incise* iz 1743. godine, autora Giovannija Domenica Campiglije. Karta se sastoji od jednog lista izrađenog u približnom mjerilu 1:209 000. Reljef je prikazan „humcima“. Naseljena mjesta prikazana su signaturama kula i kuća. Na karti su nacrtane prometnice i naznačena su šumska područja. Karta je bogata toponimima, a također su navedeni vlasnici dvoraca i imanja. Orijentirana je prema sjeverozapadu. Izrađena je tehnikom bakroreza i sastoji od jednog lista dimenzija 55×43 cm (URL21).

Angelo Sani je 1757. godine izdao kartu s naslovom *Carta Geografica e Descrizione della Diocesi di Sabina*. Dimenzije karte su 89×57 cm. Granica sjevernog dijela biskupije

promijenjena je nakon vladavine Klementa XI. pa je takva nacrtana na karti. Na zapadnom dijelu karta prikazuje područje do rijeke Tevere, a na istoku područje do Aniene. Karta je u smanjenim dimenzijama (54×38,4 cm) ponovno izdana 1759. godine i na njoj je prikazano isto područje (Almagiá 1960, URL20).

U prvom dijelu knjige *De Litteraria…* (Maire i Boscovich 1755), u 169. paragrafu Bošković navodi da nisu mogli, zbog loših vremenskih uvjeta, provesti opažanja naseljenih mjesta na području Ferrare. Stoga su iskoristili postojeće karte tog područja, a posebno je istaknuo kartu „u rukopisu“ Ippolita Sivierija koja prikazuje područje Ferrare i Bologne sve do Ravenne. Bošković je upoznao Sivierija kada su stigli u Comacchio, gdje su ostali osam dana zbog lošeg vremena. Bošković je također napomenuo kako Sivieri posjeduje veliku kolekciju starih opažanja s pomoću kojih je nacrtao kartu tog područja, a posvetio ju je papi Benediktu XIV. Ime Ippolita Sivierija također se navodi u kartuši s napomenom koja se nalazi na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Ippolito Sivieri bio je profesor matematike na Sveučilištu u Ferrari od 1735. do 1759. godine. Sveučilište u Ferrari se od 1675. godine pa sve do njegova zatvaranja 1773. bavilo znanstvenim i tehničkim pitanjima iskoristivosti riječnih korita za regulaciju plovidbe većim rijekama poput Po, Volano i Primaro, koje se nalaze na području Ferrare. Naime, neka riječna područja često su u pojedinom dobu godine ostala bez vode pa nisu bila plovna. Kao i njegovi prethodnici, tako se i Sivieri bavio tim pitanjem (Fiocca 2004). Autori Chiacchella i Rossi (1983) u fusnoti 64 na stranici 369 navode da se Ippolito Sivieri bavio problemom hidrografije na području svoga rodnoga grada i luke Fano na području Urbina, te da je 1758. godine izdao kartu „*Una carta geografica della legazione di Ferrara*“. Dosadašnjim istraživanjima nisam uspjela otkriti detalje o navedenoj karti.

3.1.2. Prikupljanje podataka za potrebe izrade karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

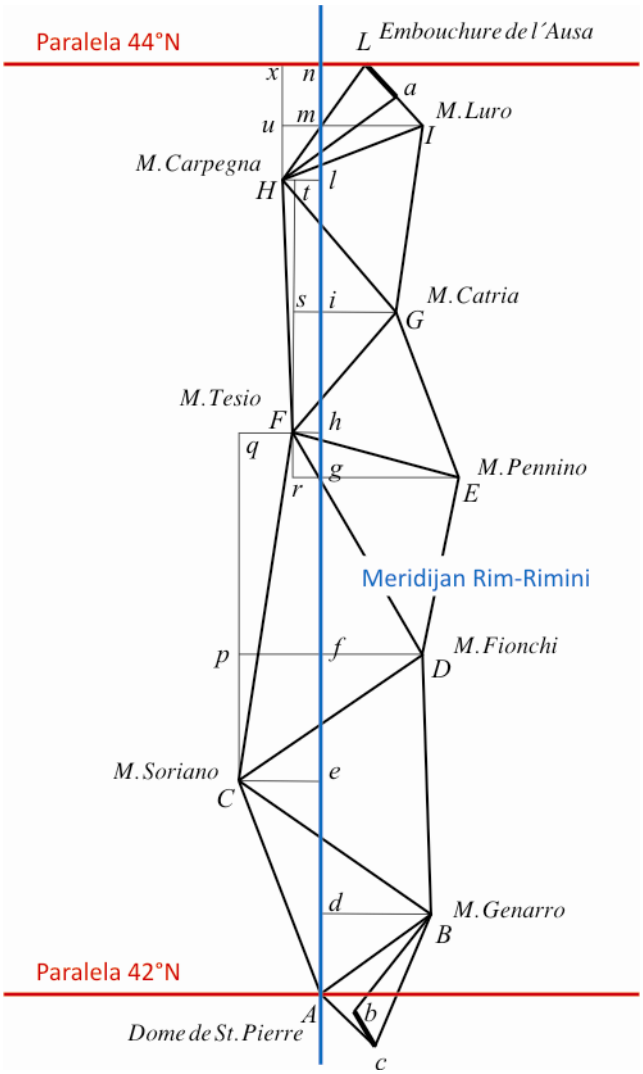
Da bi odredili duljinu luka meridijana između Rima i Riminija, Bošković i Maire su, primijenili trigonometrijsko-astronomsku metodu u kojoj se luk meridijana na Zemlji ne mjeri izravno, nego primjenom triangulacije. Takav način mjerenja sastojao se od mjerenja duljine barem jedne bazne linije (stranice trokuta) te uspostavljanjem lanca (niza povezanih) trokuta između dviju točaka koje su smještene približno uz isti meridijan. U trokutima se mjere svi kutovi te se obavljaju astronomska opažanja u

dvijema krajnjim točkama. Prva dva koraka potrebna su da bi se odredila duljina luka meridijana na Zemlji, dok se s pomoću astronomskih opažanja određuje geografska širina krajnjih točaka luka nebeskog meridijana. Pritom se astronomski određuje geodetska širina (φ) početne i završne točke lanca trokuta te azimut barem jedne trigonometrijske strane (stranice trokuta) (α).

Za potrebe određivanja duljine luka meridijana odabrali su 7 visokih i dobro vidljivih vrhova između Rima i Riminija: *M. Genarro* (*B*) u Sabinskom kraju iznad grada Palombare, M. Cimini blizu Viterba i iznad grada *Soriana* (*C*), *M. Fionchi* (*D*) u blizini grada Spoleta, a iznad sela Ancaiano, *M. Pennino* (*E*) blizu Nocere, *M. Tesio* (*F*) blizu Perugie, *M. Catria* (*G*) blizu mjesta Cagli i Canziano te *M. Carpegna* (*H*) iznad istoimenog sela. Kupola crkve Sv. Petra (*Dome de St. Pierre*) (*A*) u Rimu bila je 8. vrh lanca dok je 9. bio smješten na brežuljku uz Riminijsku obalu zvanu *M. Luro* (*I*) (Boscovich 1757, Čubranić 1961). Lanac trokuta uzduž meridijana Rim-Rimini prikazan je na slici 3.5. Početna točka triangulacijskog lanca nalazila se u Rimu u Rimskom kolegiju, gdje su proveli astronomska opažanja, dok je završna točka bila u Riminiju u kući rimskog patricija Francesca Garampia.

Bošković i Maire mjerili su dvije bazne linije. Prva bazna linija na Rimskoj strani lanca nalazila se uzduž starorimske ceste *Via Appia* počevši od groba Caecilie Metteli, koji se nalazi na mjestu nazvanu *Capo di Bove,* do posjeda obitelji Colonna, koji pokraj grada Albe prekida cestu *Via Appia* na mjestu nazvanu *Le Frattochie* (*c-b* na slici 3.5.). Riminijska bazna linija protezala se od ušća rijeke Ausa blizu grada Riminija do sjeveroistočne obale Jadranskoga mora (*a-L* na slici 3.5.). Bošković i Maire izmjerili su duljinu rimske baze i dobili 6139 francuskih hvata (1 francuski hvat = 1,949 m, pa je rimska baza iznosila oko 11 965 m), dok su za duljinu riminijske baze dobili 6037,62 francuskih hvata (oko 11 767 m).

Francuski hvat (fr. *toise*) je stara francuska mjerna jedinica za duljinu koja se danas više ne koristi.



Slika 3.5. Lanac trokuta uzduž meridijana Rim-Rimini (precrtano prema slici 2, tabla 1, (Maire i Boscovich 1755)).

Rimska baza je zatvarala trokut s vrhom *M. Genarro*, dok je riminijska baza zatvarala trokut s vrhom *M. Carpegna*. Uz duljinu bazne linije u trokutu bilo je potrebno izmjeriti kutove koje krajnje točke bazne linije zatvaraju s nasuprotnim vrhom. Izmjerene kutove Bošković i Maire reducirali su na horizont primjenom sferne trigonometrije (Boscovich 1757, Čubranić 1961). Ostale stranice u trokutu kao i kut nasuprot bazne linije mogu se izračunati, npr. primjenom sinusnog poučka. Ostala mjerenja u lancu svode se na mjerenje kutova u trokutu, a izmjerena bazna linija i izračunate udaljenosti između točaka u trokutu s izmjerenom baznom linijom mogu se upotrebljavati za računanje ostalih stranica u lancu.

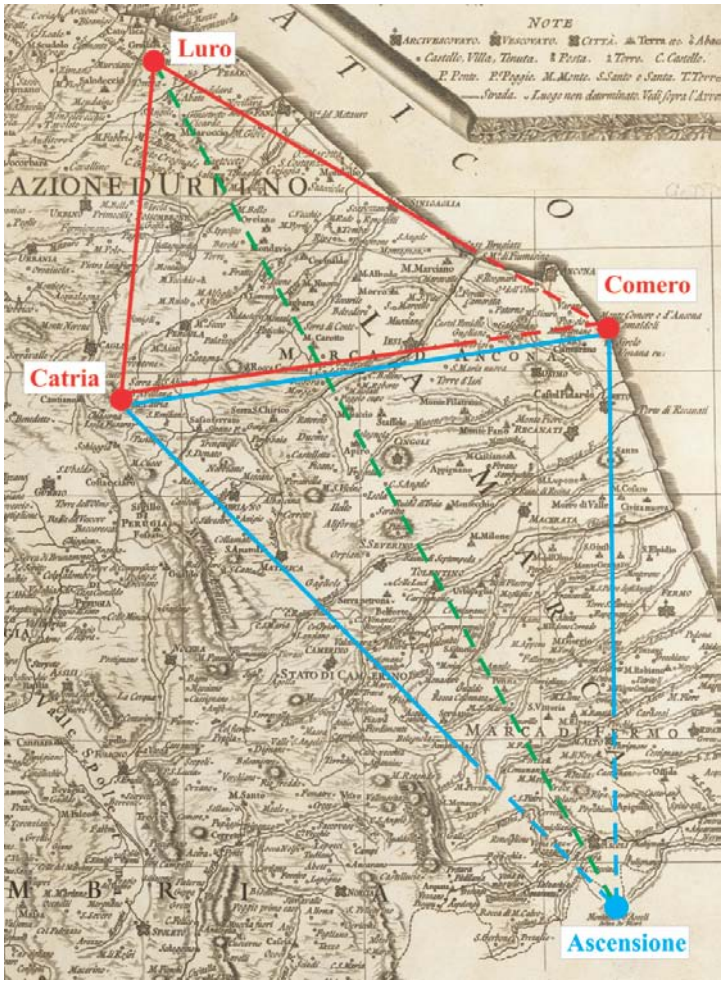
Prilikom postavljanja signala na vrhove planina, koji su tvorili trigonometrijski lanac, Bošković i Maire shvatili su kako s vrhova planina imaju dobar pogled na okolna mjesta sve do granica države, budući da meridijan Rim-Rimini dijeli područje Papinske Države na približno dva jednaka dijela. Prilikom mjerenja kutova u lancu trokuta određivali su geografsku širinu i dužinu vrhova planina, gradova te važnijih i manjih mjesta Papinske Države (Boscovich 1757, Čubranić 1961).

Kvadrant kojim su precizno opažali bio je velik i težak pa su odlučili da će za potrebe određivanja položaja gradova i mjesta upotrebljavati manji i lakši kvadrant koji je mogao, kako i Maire navodi, u dva opažanja obuhvatiti čitavu širinu Papinske Države, a da pritom na opažanja ne utječu velike pogreške. Pri tom je bilo potrebno s velikom točnosti odrediti položaj glavnih vrhova trokuta koji tvore lanac. Da bi odredili položaj gradova i važnijih mjesta, izmjeru su provodili po metodi „iz velikog u malo“. Vodeći se tim principom htjeli su izbjeći mogućnost gomilanja pogrešaka koje nastaju u postupku mjerenja „od točke do točke“, pa su prvo odredili položaj najudaljenijih mjesta, a potom su u odnosu na njih određivali položaj bližih mjesta.

Na slici 3.6. prikazan je primjer određivanja položaja vrha uzvisine Ascensione primjenom dvaju trokuta. Mjerenjem s pomoću velikoga kvadranta precizno je određen položaj vrhova uzvisina Catria i Luro koji su dio triangulacijskog lanca. Primjenom manjega kvadranta opažani su kutovi s uzvisina Catria i Luro prema vrhu uzvisine Comero. Ta tri vrha tvorila su novi trokut (crveni trokut na slici 3.6.). Iz kutnih mjerenja izračunat je položaj uzvisine Comero. Novi trokut činili su vrhovi Comero, Catria i Ascensione (plavi trokut na slici 3.6.). Položaj vrhova Comero i Catria bio je poznat te su s pomoću mjerenih kutova prema vrhu Ascensione odredili i njegov položaj. Položaj vrha Ascensione dobro se vidio s vrhova Catria i Luro. Međutim, trokut koji bi ta dva vrha zatvarala s vrhom Ascensione tvorio bi šiljasti kut pa je Maire pretpostavio kako bi na takav način određen položaj vrha Ascensione mogao sadržavati pogrešku. Položaj većine gradova određivali su iz trokuta. Osim triangulacijskog lanca iz kojeg su računali duljinu luka meridijana, druge trokute nisu prikazali iz tog razloga što su vrlo često morali prekidati njihove nizove (Maire i Boscovich 1755).

Točan položaj važnijih gradova nisu mogli odrediti samo iz trokuta. Tada su primijenili sljedeću metodu. Iz mjesta kojem su trebali odrediti geografsku širinu i dužinu opažali su kutove prema tri dobro poznata objekta te su pomoću kutova i poznatih položaja

ostalih mjesta odredili položaj tog nepoznatog mjesta (Maire i Boscovich 1755). Danas se u geodeziji takva metoda naziva određivanje položaja točke presjekom unutarnjih vizura ili presjekom natrag primjenom Snellius-Pothenotove metode. Po samom nazivu možemo zaključiti kako je tu metodu prvi primijenio Willebrord Snel van Royen (Snellius), početkom 17. stoljeća.



Slika 3.6. Određivanje položaja vrha uzvisine Ascensione. Prvo je određen položaj vrha Comero opažanjem kutova s vrhova Catria i Luro (crveni trokut), a potom je određen položaj vrha Ascensione opažanjem kutova s vrhova Catria i Comero (plavi trokut)

Kada ni na taj način nisu mogli odrediti položaj točaka odnosno mjesta i gradova, primijenili su metodu koja je u to doba bila popularna, a danas je u geodeziji poznata kao metoda primjenom Collinsove pomoćne točke. Šest različitih slučajeva svoje metode prvi puta je objavio Collins (1671) u *Philosophical Transactions* Londonsko kraljevsko društvo (*The Royal Society of London*). Bošković i Maire primijenili su za određivanje položaja mjesta i gradova peti slučaj, koji je Maire opisao na primjeru određivanja

položaja grada Perugie u 17. poglavlju. Pritom Maire upozorava kako je kod primjene te metode potrebno paziti na to da poznata mjesta ne budu previše udaljena od stajališta opažača i da se krugovi koji prolaze stajalištem i kroz dva poznata mjesta ne sijeku previše koso.

Pomoć za određivanje položaja mjesta i gradova koje nisu mogli sami odrediti ili identificirati zbog nedostatka vremena tražili su od lokalnog stanovništva. Pritom su nailazili na različite probleme, od toga da se stanovništvo nije moglo složiti u identifikaciji pojedinih gradova pa do nestručnosti u pokušaju rekonstrukcije položaja gradova prema uputama koje su Maire i Bošković dali.

U nekim slučajevima vremenske prilike im pri opažanju nisu išle u prilog. Zbog magle i sjena oblaka ili planina koje bi nastajale za sunčanog vremena, katkad nisu imali dobru vidljivost prema horizontu i mjestima koja su s pojedinih stajališta mogli opažati. Pri opažanju ferrarskog polja gdje se pružala velika ravnica vizuru su im zaklanjala stabla koja su priječila pogled prema nižim crkvenim tornjevima u gradovima. Znalo se dogoditi kada bi došli u neko mjesto da nisu bili sigurni u koji su točno toranj vizirali. S obzirom na to da se područje Papinske Države proteže kroz Apenine, u sezonama kiše i nepogodnog zimskog vremena imali su poteškoće prilikom penjanja na vrhove planina s kojih su trebali provesti opažanja.

Kako zbog navedenih poteškoća neki dijelovi karte ne bi ostali prazni, pogotovo na rubnim dijelovima Države, pokušali su ta područja dopuniti već postojećim kartama pojedinih pokrajina. Međutim, i tu su nailazili na poteškoće jer na nekim kartama nije bio dobro određen smjer sjevera, a neke su bile izrađene manje preciznim metodama. Ipak su položaje nekih mjesta preuzeli s već postojećih karata, ali su njihov „dvojbeni položaj“ prikazali na taj način da su uz naziv mjesta ucrtali znak polumjeseca. Neka mjesta preuzeli su s drugih karata, ali ih pritom nisu označili znakom polumjeseca. To su bile karte koje su crtane upotrebom Pretorijeva stola ili one na kojima je položaj mjesta bio izračunat trigonometrijski. Karte koje su nacrtane pomoću Pretorijeva stola sadržavale su veće pogreške od onih na kojima je položaj mjesta bio izračunat trigonometrijski. Razlog je taj što se, kod ovih prvih, smjer meridijana određivao upotrebom magnetske igle. Maire je primjetio kako se dvije crte na karti, koje bi trebale biti paralelne, naizmjence naginju jedna prema drugoj. Također se karte nacrtane s pomoću Pretorijeva stola crtaju kroz duže vremensko razdoblje, unutar kojeg se događa da se smjer magnetske igle znatnije mijenja.

Iako su Maire i Bošković tijekom izmjere vrlo pažljivo provodili opažanja, Maire na kraju upozorava kako im se mogla dogoditi pogreška da neko mjesto zamijene za neko drugo. Na kraju treće knjige Maire je sastavio tablicu (slika 3.7.) geografskih širina i dužina za 84 grada Papinske Države koja su odredili vlastitim opažanjima (Maire i Boscovich 1755). Imena gradova dani su dvojezično na talijanskom i latinskom jeziku.

TABULA LONGITUDINIS, ET LATITUDINIS
Urbium omnium, atque Episcopatuum Pontificiæ Ditionis

NOMINA Italica,	& Latina	Longitudo G. M. S.	Latitudo G. M. S.
Acqua pendente	Aquula	29 21 19	42 45 23
Alatri	Alatrium	30 51 50	41 43 43
Albano	Albanum	30 10 31	41 43 50
Amelia	Ameria	29 56 1	42 33 32
Anagni	Anagnia	30 40 11	41 44 41
Ancona	Ancona	31 1 22	43 37 54
S. Angelo in Vado	Tifernum Metaurense	29 55 40	43 40 0
Ascoli	Asculum	31 5 0	42 51 24
Assisi	Assisium	30 7 43	43 4 22
Bagnarea	Balneoregium	29 38 22	42 38 9
Bertinoro	Bretonorium	29 39 13	44 8 54
Bologna	Bononia	28 52 33	44 29 39
Cagli	Callium	30 10 4	43 32 55
Camerino	Camerinum	30 56 33	43 6 25
Cervia	Cervia	29 51 58	44 15 31
Cesena	Cesena	29 45 35	44 8 25
Cingoli	Cingulum	30 44 5	43 22 57
Città di Castello	Tifernum	29 44 26	43 28 16
Città della Pieve	Civitas Plebis	29 31 27	43 0 6
Civita Castellana	Fescennia	29 55 29	42 17 7
Civita Vecchia	Centumcellæ	29 17 0	42 5 24
Comacchio	Comaclum	29 42 17	44 40 27
Corneto	Cornuetum	29 15 30	42 15 23
Fabriano	Fabrianum	30 25 38	43 20 0
Faenza	Faventia	29 24 4	44 17 19

A a 2

NOMINA Italica,	& Latina	Longitudo G. M. S.	Latitudo G. M. S.
Fano	Fanum	30 32 8	43 51 0
Ferentino	Ferentinum	30 46 48	41 41 36
Fermo	Firmanum	31 13 56	43 10 18
Ferrara	Ferraria	29 8 40	44 49 56
Foligno	Fulginium	30 13 17	42 57 49
Forlì	Forum Livii	29 33 44	44 13 25
Fossombrone	Forum Sempronii	30 19 22	43 41 15
Frascati	Tusculum	30 12 4	41 48 22
Frosinone	Frusino	30 52 25	41 38 31
Gubbio	Eugubium	30 5 27	43 20 35
Jesi	Aesium	30 45 53	43 31 51
Imola	Forum Cornelii	29 13 49	44 21 32
S. Leo	Leopolis	29 51 58	43 54 0
Loreto	Lauretum	31 7 20	43 27 0
Macerata	Macerata	30 58 18	43 18 36
Magliano	Massa Malliana	30 0 14	42 21 45
Matelica	Matelica	30 31 8	43 15 8
Montalto	Mons altus	31 7 44	42 59 44
Montefiascone	Mons Falisscus	29 32 59	42 32 15
Narni	Narnia	30 1 50	42 31 17
Nepi	Nepete	29 51 25	42 14 39
Nocera	Nuceria	30 18 32	43 6 40
Norcia	Nursia	30 37 18	42 47 55
Orte	Ortanum	29 54 55	42 27 30
Orvieto	Oropitū, Urbs vetus	29 38 19	42 43 24

NOMINA Italica,	& Latina	Longitudo G. M. S.	Latitudo G. M. S.
Osimo	Auximum	30 59 38	43 29 36
Ostia	Ostia	29 48 50	41 45 35
Palestrina	Præneste	30 24 55	41 50 3
Penna di Billi	Penna	29 47 10	43 29 23
Pergola	Pertia	30 20 24	43 33 54
Perugia	Perusia	29 54 28	43 6 46
Pesaro	Pisaurum	30 25 51	43 55 1
Piperno	Privernum	30 41 57	41 28 38
Ponte Corvo	Fregellæ	31 11 48	41 28 5
Porto	Portus	29 46 40	41 46 44
Ravenna	Ravenna	29 23 6	44 25 5
Recanati	Recinetum	31 3 38	43 25 44
Rieti	Reate	30 22 40	42 24 25
Rimini	Ariminum	30 5 6	44 3 43
Ripatransone	Cupramontana	31 17 0	43 0 24
ROMA	ROMA	30 0 0	41 53 54
Sarsina	Sarsina	29 42 20	43 55 21
Segni	Signia	30 32 45	41 41 53
S. Severino	Septempeda	30 42 5	43 14 17
Sezze	Setia	30 34 29	41 30 5
Sinigaglia	Senogallia	30 44 0	43 43 16
Spoleto	Spoletium	30 15 31	42 44 50
Sutri	Sutrium	29 44 26	41 13 34
Terni	Interamna	30 10 26	42 34 25
Terracina	Anxur, Tarracina	30 45 37	41 18 14

NOMINA Italica,	& Latina	Longitudo G. M. S.	Latitudo G. M. S.
Tivoli	Tibur	30 19 3	41 57 49
Todi	Tudertum	29 55 26	42 46 45
Tolentino	Tolentinum	30 48 28	45 12 30
Toscanella	Tuscania	29 23 27	42 24 50
Velletri	Velitræ	30 17 45	41 41 16
Veroli	Verulum	30 56 16	41 41 41
Viterbo	Viterbium	29 37 49	42 24 54
Urbania	Urbanea	30 3 27	43 39 56
Urbino	Urbinum	30 9 20	43 43 36

Slika 3.7. Popis gradova Papinske Države i njihovi položaja iz trećeg poglavlja knjige *De Litteraria...* (Maire i Boscovich 1755)

Čubranić (1961) je u svom radu ocijenio točnost Boškovićeva određivanja geografskih širina i dužina, azimuta, mjerenja kutova u triangulaciji i bazne linije. Prije ocjene točnosti Čubranić navodi da će ispitivati samo konačne rezultate koje Bošković daje u svojim djelima jer ne posjeduje Boškovićeva originalna mjerenja i računanja da bi mogao ocijeniti točnost mjerenja u potpunosti.

Čubranić je prvo ocijenio točnost astronomskih mjerenja, odnosno razliku geografskih širina krajnjih točaka triangulacijskog lanca. Za ocjenu točnosti primijenio je metodu najmanjih kvadrata na rezultate pojedinačnih mjerenja provedenih u Rimskom kolegiju koja je Bošković objavio u drugom dijelu knjige (Maire i Boscovich 1770, str. 150). Prvo je Čubranić izračunao aritmetičku sredinu mjerenih veličina, a odstupanja mjerenih veličina od aritmetičke sredine upotrijebio je za ocjenu točnosti pojedinih mjerenja. Dobio je ove rezultate: srednja pogreška pojedinog mjerenja iznosi $m = 0{,}7''$, a srednja pogreška aritmetičke sredine $M = 0{,}3''$. Iz dobivenih rezultata Čubranić (1961) zaključuje da su Boškovićeva mjerenja za ono vrijeme najtočnija mjerenja te vrste. Tako dobivenu točnost pripisuje pravilnom odabiru metode određivanja geografskih širina, konstrukciji i točnosti izrade sektora, metodi mjerenja u svrhu izbjegavanja različitih uzroka pogrešaka, dobrom opažanju i pažnji u radu.

Prema mjerenjima koja su provedena nakon Boškovićevih, došlo se do zaključka da je geografska dužina početne točke određena dosta netočno, s razlikom od nekoliko minuta, jer je položaj početnog meridijana kroz Ferro nesiguran. To se vrlo lako može potvrditi i činjenicom da se srednji meridijan preslikavanja na karti, koji prolazi kroz Rim, nalazi na geografskoj dužini, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro. Rim se nalazi na geografskoj dužini, $\lambda = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich. Razlika geografskih dužina u odnosu na početni meridijan Ferro i Greenwich daje kut od $\Delta\lambda = 17°30'$. Iako danas ne možemo sa sigurnošću tvrditi gdje se točno nalazi početni meridijan Ferro, tj. nije poznato kroz koju točku na Ferrou u Kanarskim otocima prolazi, općenito se smatra da je razlika između Ferra i Greenwicha oko 17°40' (Faričić 2008). Usporedba dobivenih razlika geografskih dužina srednjeg meridijana preslikavanja na karti Papinske Države dobila sam razliku od oko 10'. Isto tako, Čubranić navodi da prema kasnijim mjerenjima izgleda da je i početni azimut koji je Bošković odredio pogrešan za oko 1'. Uzrok netočnosti tih dviju vrijednosti koje su određivane

astronomskim metodama leži u tome što u Boškovićevo doba još nije primjenjivao kronometar koji je bio potreban za točnije određivanje tih veličina.

Pogrešno određivanje geografske dužine početne točke od pravog položaja rezultiralo je pomakom trigonometrijskih točaka lanca i karte Papinske Države u smjeru istok-zapad. Pogrešno određivanje azimuta rezultiralo je time da su sve točke zarotirane oko početne. Međutim, te pogreške, smatra Čubranić (1961), nemaju nikakav utjecaj na određivanje duljine luka meridijana. Naime, pogreška u azimutu od 1' utjecala bi na izmjerenu duljinu luka meridijana od oko 250 km za iznos od oko 1 cm, što je veličina koja ne dovodi do velikih pogrešaka u završnom rezultatu.

Sva su se Boškovićeva računanja odnosila na riminijsku bazu. Rimska bazna linija služila je samo za kontrolu i nije reducirana na nivo plohu mora. Ako se uzme da je visina rimske bazne linije oko 90 m iznad nivo plohe mora, redukcija bi iznosila oko –0,17 m. Iznos te redukcije dosta je malen pa se ona ne bi trebala uzeti u obzir. Bošković je duljinu riminijske bazne linije mjerio dva puta, između tih vrijednosti dobio je razliku od oko 4 cm što daje relativnu pogrešku od 1/300 000. Uz to riminijska bazna linija nalazila se uz morsku obalu pa njezina redukcija na nivo plohu mora nije bila potrebna. Računajući postupno stranice trokuta u lancu počevši od riminijske baze, Bošković je izračunao u zadnjem trokutu duljinu rimske baze koja je iznosila 8033,4 koraka (1 korak = 1,489 m) odnosno 11 961,73 m. Direktno izmjerena rimska baza iznosila je 8034,67 koraka odnosno 11 963,62 m. Razlika izmjerene i izračunate baze iznosi 1,27 koraka odnosno 189 cm što u odnosu na mjerenu dužinu daje omjer 1/6300 ili 16 cm po kilometru. Čubranić (1961) smatra da je dobivena razlika za Boškovićevo vrijeme iznad očekivane točnosti.

Bošković je tijekom mjerenja kutova, osobito oštrih, koja je morao primijeniti pri prijelazu s baze na trigonometrijski lanac, vodio računa da ih što točnije odredi mjereći takve kutove u više ponavljanja. Znao je da će pogreška u mjerenju oštrih kutova imati veliki utjecaj na točnost računanja strana triangulacijskog lanca. Stoga je, da bi smanjio utjecaj pogrešaka oštrih kutova, takvim kutovima davao veću težinu, pa su pri izjednačenju kutova u trokutu ti kutovi dobili manji popravak. Čubranić (1961) navodi da je to prvo izjednačenje u povijesti geodetskih i astronomskih mjerenja, gdje su u obzir uzete težine mjerenja.

Kutove je Bošković mjerio s pomoću kvadranta, instrumenta za mjerenje kutova koji se koristio u ono doba. S kvadrantima je teško bilo postići točnost mjerenja kutova veću od 10''.

U trećem paragrafu u kartuši s napomenom na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* možemo pročitati da Maire i Bošković ocjenjuju svoja mjerenja ovako: „Na ovoj su karti smješteni na svoje mjesto svi gradovi, … bez opasnosti za pogrešku od jedne minute u njihovu položaju jer su određeni trigonometrijski …“. Dakle, Maire i Bošković sami su bili svjesni koliku točnost daju njihova mjerenja.

Priprema za početak mjerenja trajala je približno dvije godine jer je Bošković sve instrumente kojima su mjerili dorađivao i dao posebno izraditi po narudžbi. Tako je po svom nacrtu dao napraviti drvene letve koje su rabili za mjerenje duljine baznih linija. Jednu je dao izraditi od željeza i ona im je služila kao komparator, a komparaciju radnih drvenih letvi radili su često pri čemu je u obzir uzimao i koeficijent istezanja željezne letve zbog promjena temperature. Prilikom mjerenja duljina letvama, letve su stavljali na posebne tronošce, kojih su se glave posebnim klinovima dovodile u horizontalan položaj. Manje nagibe letve mjerili su libelom i računali su redukcije mjerenih duljina za izmjereni nagib.

Bošković je za potrebe astronomskih opažanja dao izraditi sektor u izradi kojeg je vrlo često sudjelovao. Tijekom konstrukcije uveo je mnogo svojih detalja kako bi omogućio postizanje visoke točnosti mjerenja. Na primjer, instrument se dao okretati oko horizontalne osi, čime se postizalo mijenjanje nagiba instrumenta u ravnini meridijana, te oko vertikalne osi, čime je omogućio okretanje instrumenta u drugi položaj durbina. Limb je također bio precizno podijeljen na palce i njegove dijelove, a svaka podjela bila je označena točkicom na srednjoj horizontalnoj liniji (Maire i Boscovich 1755).

Kvadrant, instrument za mjerenje kutova u lancu, također je dao sam izraditi kako bi poboljšao preciznost izrade nekih njegovih dijelova.

Možemo primijetiti da je Bošković veliku pažnju posvetio tome da konstrukcijom instrumenata što više umanji pogreške koje bi mogle nastati prilikom mjerenja. Ostale pogreške Bošković ispituje, uzima u obzir prilikom obrade mjerenja, a preostale nastoji ukloniti izjednačenjem izmjerenih veličina.

Iz svega toga mogu zaključiti da su duljina luka meridijana i položaji gradova koji su mjereni za potrebe izrade karte određeni točnije od položaja određenih metodama i instrumentima koji su prije korišteni za mjerenja. Samim time je i karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* točnija od prethodnih karata koje su izrađene u to doba.

3.1.3. Opis karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Prije detaljnije analize karte potrebno je upoznati se s kartom i na primjeren ju način opisati.

Karta se opisuje prikazom osnovnih elemenata karte. Osnovne elemente karte čine naslov, vrsta karte, područje koje je na karti prikazano te njezina orijentacija, korisnici i svrha karte odnosno njezina namjena. Također je potrebno upoznati se sa sadržajem karte, u smislu na koji su način prikazani objekti poput prometnica, hidrografije, naselja i njihovi dijelovi, reljef, granice vegetacija, toponimi, sakralni objekti i slično. Za kartu je isto tako bitno kada je izrađena, tko su njezini autori, na koji je način tiskana, tko ju je tiskao i u kolikoj nakladi. Kartografika odnosno znakovni sustav karte bitan je prilikom analize karata jer nam govori koji su kartografski znakovi korišteni na karti i kojim su osnovnim geometrijsko-grafičkim elementima (točka, linija, površina) objekti na karti prikazani. Svaka karta definirana je i matematičkim elementima, a to su elipsoid, kartografska projekcija, mjerilo, mreža meridijana i paralela ili pravokutna mreža. Izvor podataka te način izrade karte također su osnovni elementi karte.

Uz osnovne elemente potrebno je opisati i sporedne elemente karte kao što su okvir karte, umetci na karti, tekst s objašnjenjima, koje su zaslužne osobe ili institucije za izradu karte te tko je kartu recenzirao.

U daljnjem tekstu karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* bit će opisana s pomoću prethodno navedenih osnovnih i sporednih elemenata karte.

3.1.3.1. Opis karte Papinske Države iz 1755. s pomoću osnovnih elemenata karte

- *Naslov karte*

Karta Papinske Države objavljena 1755. godine nosi naslov *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* (Nova geografska karta Papinske Države) na talijanskom jeziku i

sastoji se od tri lista. Naslov karte smješten je u lijevom donjem kutu trećeg lista karte, a nalazi se u ukrašenoj baroknoj kartuši (slika 3.8). U kartuši, uz naslov karte, navedena su i imena autora karte te posveta papi Benediktu XIV. Autor teksta u kartuši je Bošković. Bošković u sažetku (Boscovich 1757) navodi da je autor karte Maire. Iz teksta kartuše može se isčitati da je Bošković knjigu i kartu posvetio papi Benediktu XIV.

Tekst kartuše na talijanskom jeziku glasi:

NUOVA

CARTA GEOGRAFICA DELLO

STATO ECCLESIASTICO

Delin.ta dal P. Cristof.ro Maire d.a C.a di Gesù sulle comuni Osser-

vazioni sue e del P. Ruggiero Gius.e Boscovich d.a med.a C.a

Alla Santità di N.S.

PAPA BENEDETTO XIV

Gi prendiamo l'ardire di presentare alla S.V. questa nuova Carta geografica dello Stato Ecclesiastico, Stato nulla meno felice nel temporale ancora di quello, chi nollo Spirituale si ritrovi il Mondo tutto per le vigilanti benefiche cure del sue felice governo. Qùest'opera intrapresa per espresso commando della S.V. eseguita coll'aiuto della sua liberale munificenza non ardisee di uscire alla publica luce senza il valido appoggio della sevrana sua protezione, quale in atto di profonda venerazione baciondole i piedi divotissimamento imploriamo

Gli umilissimi servi Cristofore Maire e Ruggiero Gius. Boscovich I.a Comp.a di Gesù

Tekst kartuše u prijevodu na hrvatski jezik glasi (s talijanskog jezika tekst kartuše je prevela prof. dr. sc. Olga Perić):

NOVA

GEOGRAFSKA KARTA

PAPINSKE DRŽAVE

Nacrtao ju je otac Christopher Maire, iz Družbe Isusove, na osnovi vlastitih opažanja i onih oca Ruđera Josipa Boškovića, iz iste Družbe.

Svetosti Našega Gospodina

PAPE BENEDIKTA XIV.

Usuđujemo se predstaviti Vašoj Svetosti ovu novu geografsku kartu Papinske Države, države koja je poput čitavoga svijeta jednako sretna u svjetovnim i duhovnim stvarima zahvaljujući budnim dobročiniteljskim brigama njegova sretnoga vladanja. Ovaj rad poduzet prema izričitoj naredbi Vaše Svetosti, proveden uz pomoć njegove širokogrudne darežljivosti, ne bi ugledao svjetlo dana bez njegove najviše i snažne podrške, koju najpobožnije zazivamo ljubeći noge u činu duboka štovanja.

Najponiznije sluge Christopher Maire i Ruđer Josip Bošković, iz Družbe Isusove

Slika 3.8. Barokna kartuša na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* iz 1755. s naslovom karte, imenima autora i posvetom papi Benediktu XIV.

- *Vrsta karte*

Kada su krenuli u projekt izrade karte, Bošković i Maire su odlučili izraditi opću kartu u kojoj će ponajprije ucrtati geografske širine i dužine svih gradova te važnijih mjesta na

području Papinske Države. Autori, kako i sami navode, nisu se bavili manjim stvarima koje pripadaju topografiji već ponajprije onima koje se odnose na geografiju Države (Maire i Boscovich 1755, Boscovich 1757). U naslovu karte piše da je to geografska karta, međutim, mogla bih reći da je to geografska karta regije Papinske Države. Sama karta vrlo je slična topografskoj karti.

Regija ((latinski *regio*), kraj, predjel, područje, okružje, pokrajina, zemlja, dio, sloj, strana) u geografiji je područje koje je jasno obilježeno nekim zajedničkim prirodnim, društvenim ili prirodno-društvenim značajkama (URL3). Geografska karta je karta na kojoj je matematički određen, generaliziran prikaz u ravnini položaja, stanja i ovisnosti različitih prirodnih i društvenih pojava na površini Zemlje, izabranih u skladu s namjenom karte. Topografska karta je opća geografska karta s velikim brojem informacija o mjesnim prilikama prikazanog područja, koje se odnose na naselja, prometnice, vode, zemljišne oblike, vegetaciju i niz drugih pojava potrebnih za opću orijentaciju, sve dopunjeno opisom karte. Svi navedeni objekti prikazuju se s jednakom važnošću (Frančula i Lapaine 2008). Topografske karte su kartografski prikazi proizišli iz točne i cjelovite izmjere topografskih objekata. S obzirom na to da Maire i Bošković nisu sve objekte prikazali s jednakom važnošću, te da nisu proveli cjelovitu izmjeru svih topografskih objekata – objekte koje su smatrali manje važnima preuzeli su s drugih, manje točnih karata ili su ih crtali odoka – ne može se za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* reći da je topografska.

- *Područje prikaza i orijentacija karte*

Karta prikazuje područje današnje središnje Italije koje je u 18. stoljeću bilo pod teritorijalnom nadležnosti Papinske Države. Područje Papinske Države podijeljeno je na legacije ili upravno-administrativne jedinice pod upravom papinskog legata koji su u to doba imali pravnu nadležnost na pojedinom području. Prvi list karte obuhvaća sjeverni dio Države, koji uključuje sljedeća područja: legacije Ferrara (*Legazione di Ferrara*), Bologna (*Legazine di Bologna*), Romagna (*Legazione della Romagna*) i Republiku San Marino (*Rep. di S. Marino*) te dio legacije Urbino (*Legazione d'Urbino*). Drugi list karte obuhvaća središnji dio Države koji prikazuje drugi dio legacije Urbino, djelokrug Vlade grada Castello (*Governo di Citta di Castello*), teritorij Perugie (*Territorio di Perugia*), Orvieta (*Territorio d'Orvieto*), regije Umbria (*Umbria*), *Marca di Fermo*, *Marca d'Ancona*,

državu Camerino (*State di Camerino*) te sjeverni dio patrimonije Sv. Petra (*Patrimonio di S. Pietro*). Treći list karte obuhvaća južni dio Države, u kojem su središnji i južni dio patrimonije Sv. Petra, *Sabina* te *Campagne di Roma*. Papinska Država u to je vrijeme graničila s Mletačkom Republikom (*Dominio Veneto*) na sjeveru, Modenom (*Modenese*), Toskanskim velikim vojvodstvom (*Granducato di Toscana*) i Sredozemnim morem (*Mare Mediterraneo*) na jugozapadu te Jadranskim morem (*Mare Adriatico*) i Napuljskim kraljevstvom (*Regno di Napoli*) na sjeveroistoku.

Navedeno područje proteže se približno od 41°12'N do 45°3'N geografske širine i od 28°33'E do 31°27'E geografske dužine u najsjevernijem području karte, te od 28°37'E do 31°23'E geografske dužine u najjužnijem dijelu karte. Karta je orijentirana prema sjeveru.

- *Korisnici i svrha karte*

Glavna zadaća ili namjena karte nije bila nacrtati topografsku kartu već popraviti što je bolje moguće mnoge pogreške u položaju gradova na karti Papinske Države, kojima su bile opterećene karte objavljene do toga vremena. Taj su cilj autori i ostvarili jer su odredili točan položaj svih gradova, gotovo svih mjesta, veći dio dvoraca te mnogih manjih naselja koja su se nalazila na području tadašnje Papinske Države (Maire i Boscovich 1755, Boscovich 1757). Maire i Bošković su tijekom svojeg putovanja često nailazili na manja naselja koja na dotadašnjim kartama nisu postojala. Stoga su nastojali prikupiti što više položaja naselja kroz koja su prolazili (Slukan Altić 2012). Iz navedenog možemo reći da je svrha karte prikazivanje teritorijalne nadležnosti i topografije Papinske Države s pomoću položaja gradova i važnijih mjesta, a često i manjih naselja koja su bila pod nadležnosti Papinske Države.

Iz dostupnih podataka teško je sa sigurnošću reći tko su bili korisnici karte. Međutim, kartu je „naručio“ papa Benedikt XIV., stoga možemo pretpostaviti da su korisnici bili čelnici Papinske Države kao i sam papa. S obzirom na mjerilo i detaljnost može se pretpostaviti kako je karta, onima kojima je bila dostupna, služila, uz ostalo, za bolju orijentaciju prilikom putovanja u određene krajeve Papinske Države.

- *Sadržaj karte*

Karta je popunjena geografskim sadržajem samo do granica Papinske Države i ponekim gradom koji se nalazi uz samu granicu. Na preostaloj površini do pravokutnog okvira umetnuti su posebni dodatci. Na karti je prikazana većina danas definiranih osnovnih topografskih elemenata. Osnovni topografski elementi koji se na karti nalaze su hidrografija, prometnice, naselja, reljef, granice, vegetacija i toponimi. Topografski elementi na karti nisu prikazani s jednakom važnošću i točnošću. Sukladno namjeni i svrsi karte, položaj gradova i mjesta prikazani su s najvećom mogućom točnošću i najzastupljeniji su na karti.

Ostali topografski elementi djelomično su prikazani jer je njihov položaj uglavnom preuzet s već postojećih karata koje su autori smatrali dovoljno točnima. Oblici gradova nacrtani su proizvoljno jer prilikom izmjere nisu imali dovoljno vremena izmjeriti rubove njihovih zidina (Maire i Boscovich 1755). Na karti su prikazane močvare, šume, jezera i doline koje su prikazane odgovarajućim kartografskim znakovima. Reljef na karti prikazan je šrafiranjem.

Granice Države i legacija prikazane su odoka jer u većini slučajeva nisu bile dobro obilježene na terenu, a i rijetko kad su bile vjerodostojne. Većina prometnica i putovi su izostavljeni. Prikazane su prometnice na kojima su se nalazili poštanski uredi, pri čemu su lokacije poštanskih ureda točno prikazane, dok su zavoji prometnica između njih prikazani proizvoljno. Tokovi rijeka preuzeti su s karata koje su smatrali dovoljno točnima. Na karti nisu ucrtani tokovi svih rijeka (Maire i Boscovich 1755).

Karta je bogata toponimima. Toponimi koji se na karti mogu pronaći jesu oronimi, koji imenuju gore i planine, hidronimi, koji imenuju rijeke, jezera, močvare i mora, regionimi i teritorionimi, koji imenuju regije i teritorije, te ojkonimi, koji imenuju naseljena mjesta. Toponimi na karti napisani su na talijanskom jeziku.

- *Vrijeme izrade i tiskanja karte*

Za razliku od današnje prakse, u to vrijeme na pojedinim kartama nisu navedene godine kada su one izrađene. U sažetku Bošković (1757) navodi kako su u razdoblju od 1753. do 1755. godine provodili računanja potrebna za crtanje karte i određivanje duljine luka meridijana. Često su čekali podatke koji su nedostajali za crtanje karte kako neka

područja ne bi ostala prazna. Dakle razdoblje u kojem je karta izrađena je 1750–1755. ako u obzir uzmemo vremensko razdoblje od prikupljanja pa do izdavanja karte.

S obzirom na to da je knjiga *De litteraria…* tiskana 1755. godine, možemo pretpostaviti da je to godina kada je karta izdana. U radu (Pedley 1993) u Prilogu B autorica daje troškove izdavanja knjige *De literaria…* u kojem se može vidjeti da su troškovi uplaćivani u ratama tijekom 1755. godine. Iz toga se također može zaključiti kako je karta gravirana i tiskana tijekom 1755. godine.

Tehnika izrade karte je bakrorez, a umnožavane su bakrotiskom, postupkom koji se počeo primjenjivati početkom 16. stoljeća. Ručnim postupkom dubokog tiska u bakrenu ploču izrađene su tri bakrene ploče na kojima je ugraviran sadržaj listova karte. Prema Pedley (1993), Slukan Altić (2012), Slukan Altić (2014) i Crippa i dr. (2013) bakrene ploče još postoje i čuvaju se u tiskari danas poznatoj pod nazivom *Calcografia Nazionale* u Rimu.

Karta je tiskana u *Calcografia della Reverende Camera Apostolica in Piè di Marmo* u Rimu. Takav zaključak proizlazi iz natpisa *In Roma nella Calcografia della R. C. A. à Pie di Marmo* koji se nalazi u donjem lijevom kutu trećeg lista karte. Iako nigdje na karti ne postoji potpis gravera, prema Pedley (1993) u knjizi troškova *Calcografije* može se pronaći da je Felice Polanzani primio honorar za graviranje karte, dok je honorar za graviranje kartuše dobio Gaetano de Rossi. Ne postoji točan podatak o tome koliko je točno karata tiskano, međutim iz knjige troškova (Pedley 1993, Prilog B) poznato je da je tiskano 600 primjeraka knjige *De Litteraria…* pa možemo pretpostaviti da je isto toliko tiskano i karata. Sadržaj karte tiskan je u crnoj boji te ona nije naknadno ručno bojena.

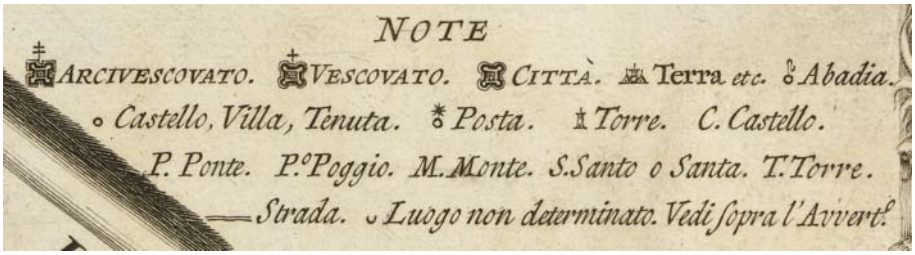
- *Autori karte*

U trećem djelu knjige *De litteraria…* (Maire i Boscovich 1755) koji je napisao Maire jasno se može vidjeti da je kartu nacrtao Maire iz podataka koje je prikupio zajedno s Boškovićem tijekom geodetske izmjere da bi odredili duljinu luka meridijana između Rima i Riminija. U sažetku Bolonjskoj akademiji (Boscovich 1757) Bošković izričito navodi da je Maire nacrtao kartu. Prije crtanja karte Maire je izračunao geografske širine i dužine svih naselja iz podataka koje su prikupili zajedničkim opažanjem. Iz posvete uz naslov karte koji je napisan u kartuši može se potvrditi da je autor karte Maire. Ista rečenica može se pronaći i u kartuši koja se nalazi na prvom listu u desnom kutu karte.

Fizička ili pravna osoba koja je intelektualni tvorac karte ili kartografskoga prikaza i koja je prva kartu ili prikaz izradila naziva se autorom karte (Frančula i Lapaine 2008). Iz prethodno rečenog mogu sa sigurnošću utvrditi kako je Christopher Maire autor karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Međutim, kako je Bošković predložio mjerenje duljine luka meridijana između Rima i Riminija te izradu nove karte da bi se ponajprije popravile pogreške u položaju gradova prikazanih na do tada izdanim kartama, Boškovića možemo smatrati koautorom.

- *Kartografika na karti*

Tumač znakova nalazi se unutar ornamentirano ukrašene kartuše na prvom listu karte s desne strane. Tumač znakova nalazi se ispod Napomene (*Avvertimento*). Iz tumača znakova možemo vidjeti da su za istu vrstu objekta korištene iste signature ili kratice. Tako su sjedišta nadbiskupije, biskupije, gradovi, mjesta, opatije, dvorci, ljetnikovci, seoska imanja, mjesta s poštom te poštanski putovi dobili pripadni znak, dok su toponimi dvoraca, mostova, brežuljaka, planina, tornjeva, vrhova te mjesta kojima ime počinje sa „Sveta“ ili „Sveti“ dobili pripadnu kraticu (slika 3.9). Gradovi i mjesta čiji je položaj bio manje pouzdan dobili su uz ime i znak polumjeseca.



Slika 3.9. Tumač znakova i kratica s karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Prijevod tumača znakova i kratica sa slike 3.9 (s talijanskog jezika tekst je prevela prof. dr. sc. Olga Perić):

Znakovi

Nadbiskupija.	*Biskupija.*	*Grad.*	*Mjesto itd.*	*Opatija.*
Dvorac, Ljetnikovac,	*Seosko imanje.*	*Pošta.*	*Toranj.*	*C. – Dvorac.*
P. – Most.	*P.º – Brežuljak.*	*M. – Planina.*	*S. – Sveti.* ili *Sveta*	*T. – Toranj.*
Cesta.	◡ *Nepouzdano određeno mjesto. Vidi gore Napomenu.*			

Iz navedenoga može se vidjeti da su za isti objekt, nadbiskupije, biskupije i gradove primijenjene slične signature čime su autori definirali njihovu funkciju i hijerarhijski odnos između pojedinih naselja (Slukan Altić 2012). Kako bi se nadbiskupije, biskupije i gradovi razlikovali, oblikovan je osnovni znak za grad, a znaku nadbiskupije i biskupije dodani su mali dodatci u obliku nadbiskupskog ili biskupskog križa (*crux archiepinopolis* i *crux episcopolis*).

Gotovo sve signature navedene u tumaču znakova prikazuju položaj objekta na karti točkom. Iznimka su ceste, koji su prikazani linijskom signaturom, i to dvostrukim usporednim linijama. Položaji nadbiskupija, biskupija i gradova prikazani su pojednostavnjenom površinskom signaturom, i to procijenjene površine, jer autori prilikom izmjere nisu imali vremena precizno snimiti rubne granice gradova. Također je kod naziva gradova, u kojima su postojali poštanski uredi, dodana mala zvjezdica.

Vrlo je bitno naglasiti da u tumaču znakova nisu prikazani svi kartografski znakovi koji su korišteni na karti (vidi sliku 3.10). Na karti su prikazana i neka šumska područja koja su označena signaturom drveća. Močvare su prikazane posebnom signaturom, dok jezera, ribnjaci i doline imaju istu signaturu. Svi navedeni objekti na karti prikazani su površinskim signaturama.

Na karti Papinske Države osim već spomenutih poštanskih putova može se pronaći i veliki broj linijskih signatura. Tako su granice Papinske Države prikazane crtkanom linijskom signaturom, granice između autonomnih jedinica prikazane su točkastom linijskom signaturom, osim kada njihova granica nije ujedno i granica Države. Manji vodotoci prikazani su jednostrukim linijama za razliku od rijeka Po, Tevere, Esino, Garigliano i Tronto korito kojih je šire pa su one prikazane dvostrukim linijama. Rijeka Po je zbog šireg poplavnog područja unutar linija blago osjenčana. Manji vodotoci nisu opisani hidronimima, dok veće rijeke imaju svoje ime.

Papinska Država jednim je svojim dijelom na istoku imala izlaz na Jadransko more, dok je jednim dijelom na zapadu imala izlaz na Sredozemno more. More se u prikazu ne razlikuje od kopna, što je bio slučaj u nešto ranijim kartografskim radovima, međutim obalna crta prikazana je nazubljenim trakom koji se sastoji od paralelnih linija što se pružaju od kopna prema moru u smjeru istok-zapad. Istim trakom prikazane su granice jezera i dolina na kojima se paralelne linije pružaju od kopna prema vodi odnosno

ravnici. Područja koja su obuhvaćena močvarom obrubljena su paralelnom nazubljenom šrafurom.

dolina | obalna crta | jezero

močvara | reljef | šume

granice i manji vodotoci | veće rijeke

Slika 3.10. Kartografski znakovi korišteni na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, a ne nalaze se u tumaču znakova

Visine na karti nisu prikazane pa su grafičkim tehnikama izdvojene različite pejzažno--morfološke cjeline. Najprostranije ravnice na karti ostavljene su bijele, dok su niži brežuljci prikazani tanjim crticama koje prelaze u obrise viših gora i planina. Reljef je prikazan šrafiranjem. Reljef na karti nije prikazan točno, a mogla bih zaključiti ni cjelovito jer tada nisu postojali pouzdani izvornici niti su geodetskom izmjerom mjerene uzvisine. Promatrajući reljef dolazim do zaključka da je prikazano opće pružanje

uzvisina na kojima su istaknuti vrhovi s padinama pri čemu su crtice deblje, gušće i kraće na istočnim padinama pa su zato brdovita područja tamnija. Vrhovi brda i planina su bez crtica koje prikazuju nagib. Takav način prikazivanja reljefa pomaže stvaranju zornog prostornog dojma te njihovoj prepoznatljivosti.

- *Matematički elementi karte – elipsoid, kartografska projekcija, kartografska mreža, početni meridijan*

Uz kartu nisu dani podaci o dimenziji elipsoida i kartografskoj projekciji. Do sada je o tome pisao samo Borčić (1964–65), koji navodi da su na toj karti usvojene dimenzije Boškovićeva elipsoida koje su određene iz mjerenja duljine luka meridijana između Rima i Riminija. Nadalje, Borčić smatra da je riječ o jednom listu poliedarske projekcije. Međutim, Kljajić i Lapaine (2012) u radu navode da su se Borčiću potkrale bitne pogreške, jer je opisivao srodnu kartu *Carte de l'État de l'Église* izdanu 1770. godine na jednom listu kojoj je mjerilo tri puta smanjeno u odnosu na kartu iz 1755. Nadalje su Kljajić i Lapaine (2012) promatrajući kartografsku mrežu primijetili da bi slike meridijana mogle biti pravci, a slike paralela mogle bi biti lukovi koncentričnih kružnica što nikako ne može odgovarati poliedarskoj već nekoj konusnoj projekciji. Istraživanjem u ovoj doktorskoj disertaciji ispitat će se u kojoj je projekciji karta izrađena.

Mreža meridijana i paralela vidljiva je na cijelom području karte. Mreža meridijana iscrtana je svakih 20', a mreža paralela svakih 10'. Uz rubove karte označeni su stupnjevi i minute geografskih širina i dužina.

Otok Ferro u Kanarskom otočju definiran je kao početni meridijan od kojeg su određene geografske dužine. Taj podatak može se pronaći u kartuši na prvom listu karte.

- *Mjerilo karte*

Na desnoj strani drugog i trećeg lista karte nalazi se deset grafičkih mjerila (slika 5.31) na kojima su jedinične mjere za duljine u rimskim (*Miglia Romane*), ankonskim (*Miglia di Ancona*), bolonjskim (*Miglia di Bologna*), fermskim (*Miglia di Fermo*), ferarskim (*Miglia di Ferrara*), peruđijskim (*Miglia di Perugio*), ravenskim (*Miglia di Ravenna*), firentinskim (*Miglia di Firenza*) i engleskim (*Miglia d'Inghilterra*) miljama te francuskim ligama (*Leghe di Francia*) (1 liga = 3 nautičke milje).

Na temelju izmjerenih duljina dužine milje na grafičkim mjerilima, dijela duljine stupnja meridijana milje te duljine luka meridijana koje su Bošković i Maire izračunali može se odrediti numeričko mjerilo karte.

Numeričko mjerilo karte iznosi približno 1:372 000. Detaljan postupak određivanja numeričkog mjerila iz grafičkog opisan je u poglavlju 5.4.

3.1.3.2. Opis karte Papinske Države iz 1755. s pomoću sporednih elemenata karte

Karta Papinske Države uokvirena je pravokutnim okvirom izvan kojeg nema sadržaja. Uz okvir karte označena je podjela na stupnjeve i minute koji prikazuju geografsku širinu i dužinu.

Na drugom listu karte u ornamentiranoj ukrašenoj kartuši nalazi se antikvom (tipografsko pismo sa serifima) i kurzivom ispisan popis 42 objekta abecednim redom (slika 3.11.), i to starih gradova, dvoraca i rijeka ucrtanih na karti pod naslovom *Tavola de' Nomi antichi di alcune e di alcune Città di alcuni Castelli e Fiumi* (Popis imena nekih starih gradova, dvoraca i rijeka). Imena objekata dani su na talijanskom i latinskom jeziku.

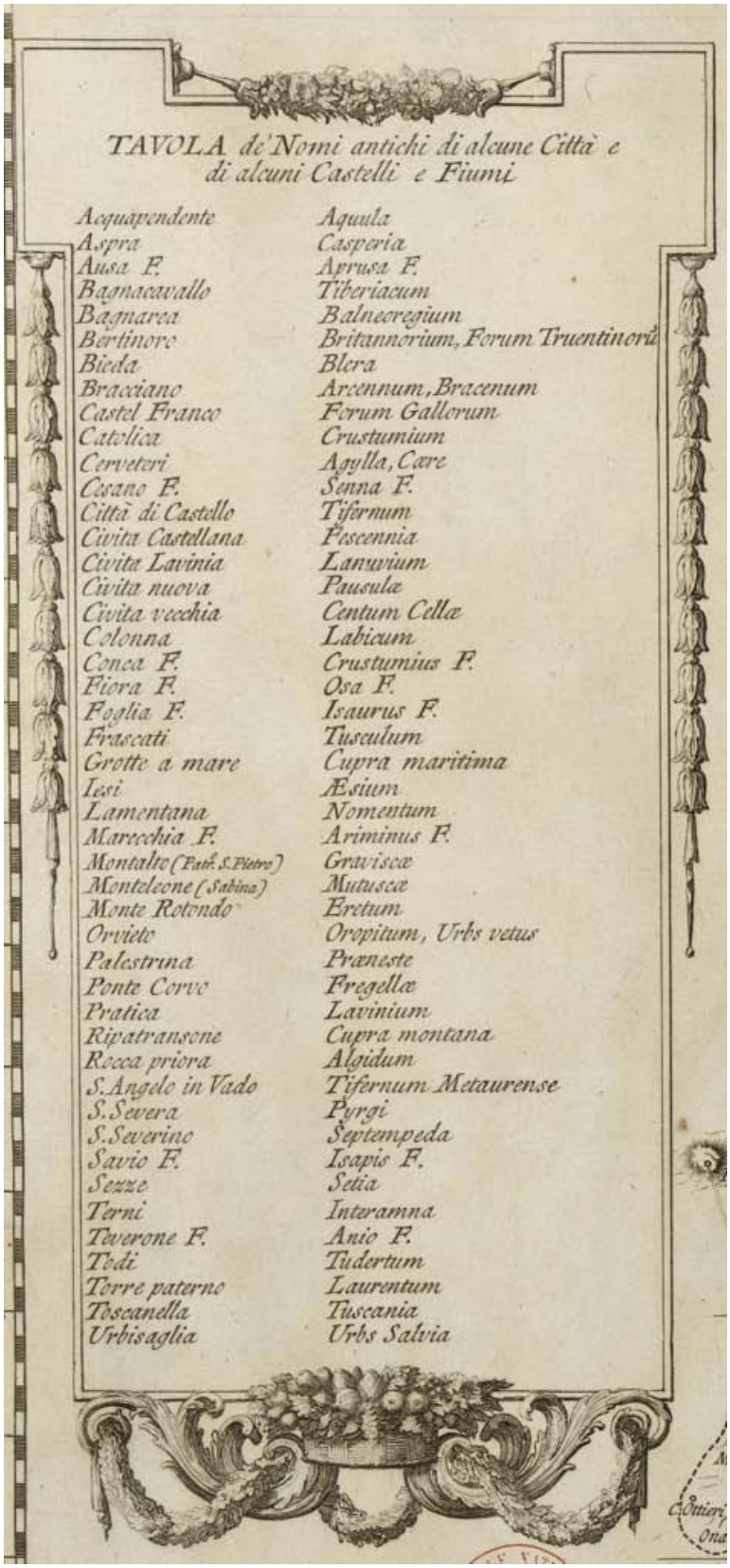


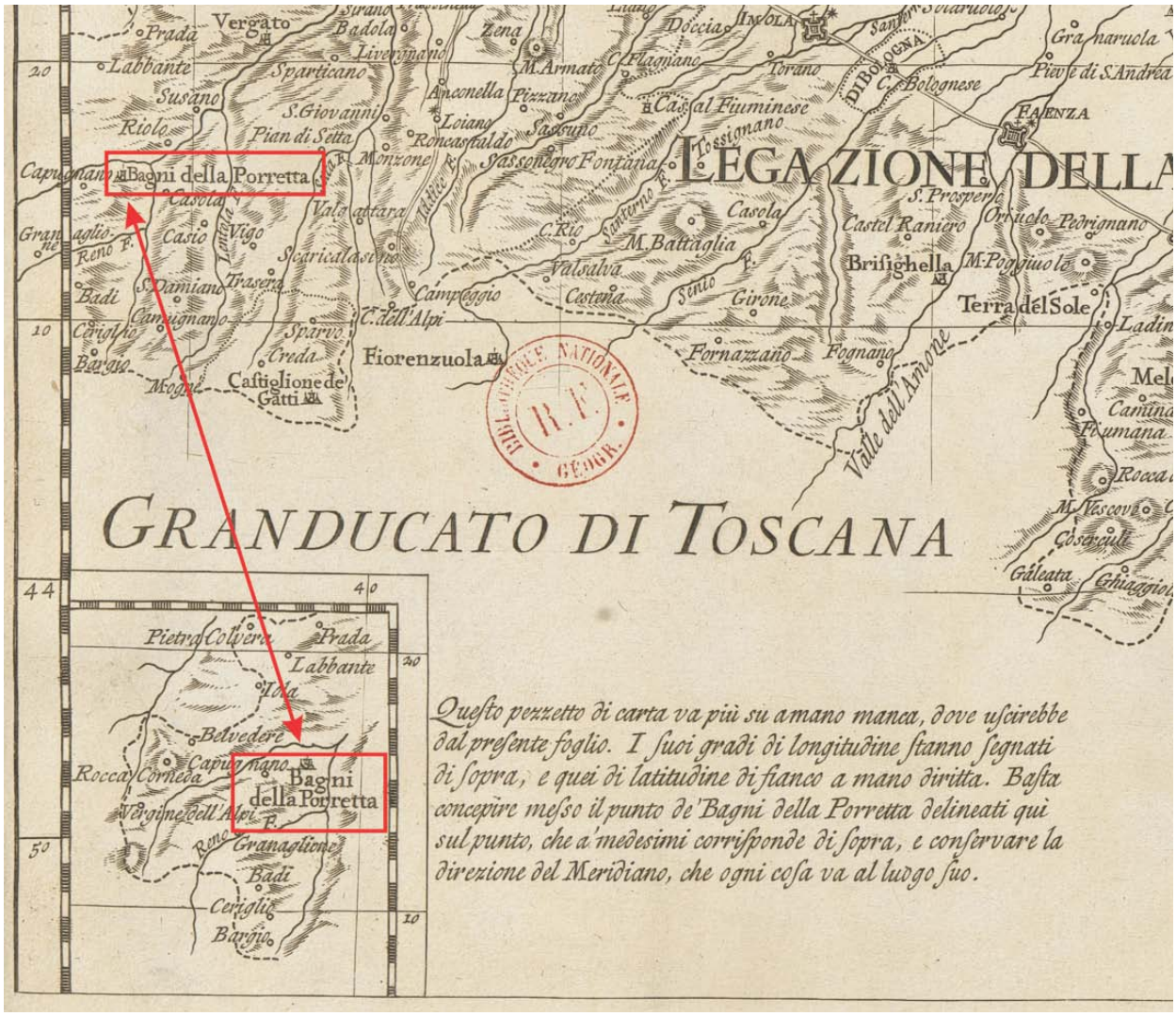
TAVOLA de' Nomi antichi di alcune Città e di alcuni Castelli e Fiumi

Acquapendente	Aquula
Aspra	Casperia
Ausa F.	Aprusa F.
Bagnacavallo	Tiberiacum
Bagnarea	Balneoregium
Bertinoro	Britannorium, Forum Truentinorũ
Bieda	Blera
Bracciano	Arcennum, Bracenum
Castel Franco	Forum Gallorum
Catolica	Crustumium
Cerveteri	Agylla, Cære
Cesano F.	Senna F.
Città di Castello	Tifernum
Civita Castellana	Fescennia
Civita Lavinia	Lanuvium
Civita nuova	Pausulæ
Civita vecchia	Centum Cellæ
Colonna	Labicum
Conca F.	Crustumius F.
Fiora F.	Osa F.
Foglia F.	Isaurus F.
Frascati	Tusculum
Grotte a mare	Cupra maritima
Iesi	Æsium
Lamentana	Nomentum
Marecchia F.	Ariminus F.
Montalto (Patr. S. Pietro)	Graviscæ
Monteleone (Sabina)	Mutuscæ
Monte Rotondo	Eretum
Orvieto	Oropitum, Urbs vetus
Palestrina	Præneste
Ponte Corvo	Fregellæ
Pratica	Lavinium
Rivatransone	Cupra montana
Rocca priora	Algidum
S. Angelo in Vado	Tifernum Metaurense
S. Severa	Pyrgi
S. Severino	Septempeda
Savio F.	Isapis F.
Sezze	Setia
Terni	Interamna
Teverone F.	Anio F.
Todi	Tudertum
Torre paterne	Laurentum
Toscanella	Tuscania
Urbisaglia	Urbs Salvia

Slika 3.11. *Tavola de' Nomi antichi di alcune e di alcune Città di alcuni Castelli e Fiumi* u ukrašenoj kartuši na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Na prvom listu u zasebnom okviru nalazi se zapadni dio bolonjske legacije (*Legazione di Bologna*) koji izlazi izvan područja karte (slika 3.12.). Područje je prikazano u zasebnom okviru koji se nalazi u donjem lijevom kutu lista. Kada se spoje prvi i drugi list karte okvir se nalazi iznad kartuše s popisom gradova, dvoraca i rijeka. Dio koji nedostaje nalazi se iznad tog posebno istaknutog okvira. Pokraj okvira nalazi se kratki tekst s objašnjenjem koji na talijanskom jeziku glasi:

Questo pezzetto di carta va più su amano manca, dove uscirebbe dal presente foglio. I suoi gradi di longitudine stanno segnati di sopra, e quei di latitudine di fianco a mano diritta. Basta concepire messo il punto de'Bagni della Porretta delineati qui sul punto, che a'medesimi corrisponde di sopra, e conservare la direzione del Meridiano, che ogni cosa va al luogo suo.



Slika 3.12. Područje koje izlazi izvan okvira karte prikazano u zasebnom okviru na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Tekst ukratko opisuje da to područje nije stalo unutar okvira karte, da se grad *Bagni della Porretta* nalazi na točnom položaju na oba mjesta te je njihov položaj dovoljno preklopiti zadržavajući smjer meridijana odnosno sjevera. Na gornjem rubu prikazane su geografske dužine, a na onom desnom geografske širine.

Unutar okvira prvog lista karte na desnoj strani nalazi se još jedna ukrašena kartuša (slika 3.13.) s Napomenom (*Avvertimento*) i kartografskim ključem pod naslovom Znakovi (*Note*). Autor teksta u Napomeni nije jasno preciziran. S obzirom na to da je drugi dio u knjizi napisao Maire, a tekst je većim dijelom preuzet i vezan uz njega može se pretpostaviti da je Maire autor teksta u Napomeni.

Tekst s kartuše na talijanskom jeziku glasi:

Avvertimento

Questa Carta è stata delineata dal P. Cristoforo Maire della Comp. di Gesù, e ricavata dalle osservazioni fatte da esso insieme cel P. Ruggiero Gius. Boscovich d.ª medesima Compagnia. L'occasione è stata quella di misurare un grado di Meridiano per confrontarlo cogli altri misurati altrove dagli Accademici dell'Accademia Reale di Francia, e ricavarne ulteriori notizie sulla figura della Terra. Dovendosi prendere molte misure esattissime con istrumenti grandi di qua e di la dal Meridiano di Roma, che va verso Rimini, ebbero l'ordine i suddetti due PP. dalla Santità di Benedetto XIV, che per consiglio del Card. Valenti Segretario di Stato e Camerlengo ordinò tutta questa impresa, e l'appoggiò a'medesimi, di scorrere di qua e di la per lo Stato, e rettificare la Carta Geografica del medesimo, eseguendolo essi sotto i di lui auspici, e coll'aiuto della sua Sovrana Autorità e Munificienza, e colla protezione e vigilanza del medesimo Cardinale.

Quindi non è stata loro incombenza di formare un'esatta Carta topografica delle parti minute dello Stato Pontificio, cosa che avrebbe richiesto gran quantità di gente e molti anni, ma di rettificare le Geografia generale di esso.

Questo fine si è ottenuto e si sono corretti infiniti sbagli di tutte le carte fin'ora uscite. Si ritrovano in questa Carta poste al luogo loro tutte le Città, quasi tutte le Terre, e la maggior parte de'Castelli, ad altri luoghi compresi nello Stato medesimo senza pericolo dello sbaglio di un minuto nella loro positura, essendo stati trigonometricamente determinati colla maggiore diligenza possibile.

In tutto il Lazio appena vi sono sei, o sette luoghetti, i quali non sieno stati colla Trigonometria immediatamente determinati. Pochi più ve ne saranno nel Patrimonia di S. Pietro, alcuni nella Sabina, e nella Marca quasi que' soli, che confinano colle montagne. Tra le montagne molti anno sfuggita anche la vista, o pel loro sito, o per le continue nebbie e caligini. Per non lasciare priva la Carta di questi, non trovandosi sicurezza alcuna nelle carte fin qui ora pubblicate, si sono fatte fare delle osservazioni da persone capaci sulli luoghi ben determinati nel loro giro, per determinarli.

Oltre a'luoghi così determinati con tutta sicurezza, sene sono posti nella Carta molti altri meno sicuri, benche anche questi non presi comunque dalle carte, ma da'documenti, che pareva potessero assicurare, non discostarsi essi molto dal sito loro assegnato. Questi luoghi sono stati nella Carta contrasegnati generalmente con una lunetta messa loro accanto.

Nella parte alpestre delle Legazioni di Bologna, e della Romagna, cioè dal fiume Savio fino al Modenese, le circostanze non permisero l'osservare in persona quel tratto di paese, in cui per altro non vi è alcuna Città, né fu possibile il ritrovare in que'contorni il supplemento delle altrui osservazioni. Questo tratto di paese si è preso da quelle carte, che si stimarono meno difettose. In questo tratto per non replicare tante volte il segno dovuto a'luoghi non determinati con certezza, si avvisa qui una volta, che esso si deve sottintendere quasi in tutti.

Nella Legazione di Ferrara de'luoghi più piccoli pochi sono stati immediatamente veduti da due luoghi per ben determinarli. Gli altri si sono pure presi dalle carte migliori, fra le quali ha servito anche una carta manoscritta presentata ultimamente a N.S. dal P. Ippolito Sivieri della medesima Comp.ª Professore di Matem.ª in Ferrara.

Una carta particolare del Perugino non ancora pubblicata, un'altra di Camerino, ed una terza pubblicata colla stampa alcuni anni addietro, che contiene la pianura del Bolognese, e fatta dallo stesso Autore, che ha fatta quella del Perugino, anno dato campo d'inserire in questa parecchi luoghi non osservati immediatamente, ma ben sicuri nella loro posizione. In tutte queste però la posizione della Meridiana determinata dagli Autori loro colla Calamita ha avuto bisogno di correzione. E convenuto pure stirare alquanto la Carta del Perugino, tanto perche si conformasse coll'esatta delineazione del Corso del Tevere, cavata dagli autentici publici documenti, quanto perche combinasse bene col sito di Perugia, e di Todi ora esattissimamente determinati co'quali non combinava con esattezza bastante, di dovunque abbia avuto origine questo suo sbaglio.

Questo si appartiene alla Geografia dello Stato. In ordine alle cose più minute, e che più appartengono alla Topografia, gli Autori non si impegnano punto. La forma delle città è puramente arbitraria, non essendosi presa alcuna misura sul contorno delle loro mura. I confini tanto di tutto lo Stato, quanto de'Territori sono stati messi per lo più puramente a occhio, essendovene molti anche litigiosi o incerti. In pochi paesi si sono trovati delineati autentici, e ben distinti. Le strade si son lasciate, toltene quelle delle poste, e in queste i siti delle poste medesime sono stati ben determinati quasi tutti, la curvatura delle strade di mezzo si è messa arbitraria. Il corso de'Fiumi si è preso per lo più dalle carte, che si sono giudicate le meno cattive, toltone il Tevere dalla Fratta di Perugia in giù, il Teverone, quelli che attraversano la pianura del Bolognese, e alcuni altri pochi, de'quali si è avuto il corso esattamente delineato.

Della Legazione di Urbino si forma ora una carta più particolare e più esatta anche in varie sue minuzie, che si darà pure alle stampe.

La longitudine è computata giù dall'Isola di Ferro al solito, e la direzione de'Meridiani si è determinata coll'ultima esattezza. Un grado di meridiano di mezzo tra

Roma e Rimini si è trovato di miglia Romane moderne 74, e passi 566 contenendo ogni miglio passi 1000, ogni passo piedi 5 e ogni piede once 16 di passetto di palmo Romano da Architetto che ne contiene 12. Questo passo Romano sta alla tesa di Francia come 29710 a 38880, onde questo grado contiene tese di Francia 56979.

Tekst je na hrvatski jezik prevela prof. dr. sc. Olga Perić:

Napomena

Ovu je kartu nacrtao otac Christopher Maire, iz Družbe Isusove, na osnovi opažanja koja je proveo zajedno s ocem Ruđerom Josipom Boškovićem, iz iste Družbe. Prigoda je bila izmjeriti stupanj meridijana da bi ga se usporedilo s drugima, koje su drugdje izmjerili akademici Kraljevske francuske akademije, i dobiti naknadne podatke o Zemljinu obliku. Budući da je trebalo poduzeti mnoga veoma točna mjerenja pomoću velikih instrumenata s jedne i druge strane rimskoga meridijana, koji ide prema Riminiju, Svetost Benedikta XIV. po savjetu kardinala Valentija, državnog tajnika i komornika, zapovjedila je spomenutoj dvojici otaca i dala im podršku da proputuju po Državi i poprave njezinu geografsku kartu pod njegovim pokroviteljstvom i uz pomoć njegove najviše ovlasti i širokogrudnosti, te pod zaštitom i nadzorom istoga kardinala.

Stoga njihova zadaća nije bila napraviti topografsku kartu s točnim prikazom malenih dijelova Papinske Države, što bi zahtijevalo mnogo ljudi i mnogo godina, nego popraviti općenito geografiju te Države.

Taj je cilj postignut i popravljene su brojne pogreške svih karata koje su do sada izašle. Na ovoj su karti smješteni na svoje mjesto svi gradovi, gotovo sva mjesta i veći dio dvoraca, te druga mjesta, koja obuhvaća ta Država, bez opasnosti za pogrešku od jedne minute u njihovu položaju jer su određeni trigonometrijski s najvećom mogućom pažnjom.

U čitavom Laciju jedva je šest ili sedam mjestašca koja nisu neposredno trigonometrijski određena. Nešto će ih više biti u Baštini Sv. Petra, nešto u Sabinskom području, u Marki samo ona koja graniče s planinama. Zbog planina su mnoga mjesta izbjegla pogledu ili zbog položaja ili zbog neprekidnih gustih magla i izmaglica. Kako karta ne bi ostala bez njih, a do sada izdane karte nisu bile sigurne, za određivanje tih mjesta uzeta su opažanja osoba koje su putovale tim putem i bile sposobne za to na dobro određenim mjestima.

Osim mjesta koja su tako određena sa svom sigurnošću, postoje mnoga druga mjesta na karti manje sigurna, premda i ona nisu preuzeta iz karata nego iz dokumenata. Činilo se da će to pružiti sigurnost da neće biti mnogo udaljena od mjesta na kojima bi trebala biti. Ta su mjesta na karti uglavnom označena polumjesecom uz njih.

U planinskom dijelu legacija Bologne i Romagne, tj. od rijeke Savio sve do Modenskoga područja, prilike nam nisu dopustile osobno opažati taj dio prostora, u kojem uostalom nema niti jednoga grada, niti je bilo moguće u okolici pronaći dopunu na osnovi opažanja drugih. Taj je dio područja preuzet iz onih karata za koje smo smatrali da su

manje manjkave. Da se na tom dijelu ne bi ponavljao znak za mjesta čije je određivanje nepouzdano, ovdje se samo jednom upozorava da se to treba podrazumijevati kod gotovo svih.

U legaciji Ferrare veoma se malo malih mjesta moglo neposredno vidjeti s dvaju mjesta da bi ih se dobro odredilo. Druga su mjesta uzeta iz boljih karata, među kojima je poslužila i jedna karta u rukopisu koju je nedavno izložio Našem Gospodinu otac Ippolito Sivieri, iz iste Družbe, profesor matematike u Ferrari.

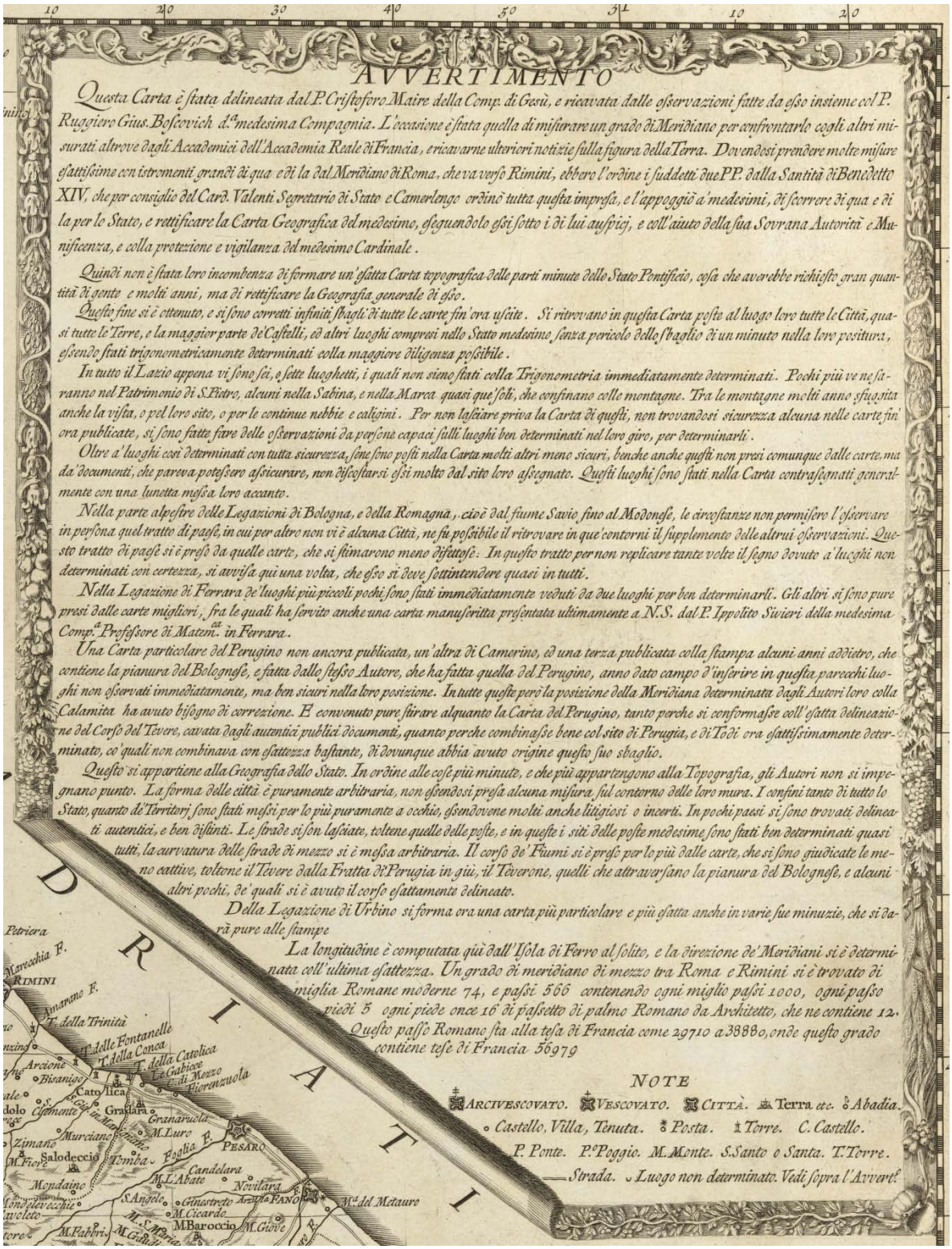
Posebna karta područja Perugie još nije objavljena, jedna druga karta Camerina i jedna treća za ravnicu područja Bologne tiskom objavljena prije nekoliko godina, od istoga autora koji je učinio kartu područja Perugie, dale su priliku da se u ovu umetne nekoliko mjesta, koja nisu bila neposredno opažana, ali im je položaj bio siguran. Međutim, na svim tim kartama položaj meridijana, kako su ga njihovi autori odredili pomoću magneta, zahtijevao je popravak. Dogovoreno je da se neznatno rastegne karta područja Perugie, da bi se prilagodila toku Tibra, koji je uzet prema autentičnim javnim dokumentima, te da bi se dobro slagala s položajem Perugie i Todija, koji su sada potpuno točno određeni, jer se s njima nije dovoljno točno poklapala, bez obzira na izvor te omaške.

To se odnosi na geografiju Države. Autori se nisu bavili manjim stvarima koje više pripadaju topografiji. Oblik gradova sasvim je proizvoljan, jer nisu izmjereni rubovi njihovih zidina. Granice, kako čitave Države, tako i teritorija, stavljene su odoka jer su mnoge prijeporne i nesigurne. Na malo su područja nađene granice koje su vjerodostojne i dobro obilježene. Izostavljeni su putovi, uzeti su oni na kojima su stajališta, i na njima su dobro određeni gotovo svi položaji tih stajališta, zavoji putova između stavljeni su proizvoljno. Tokovi rijeka preuzeti su najčešće s karata za koje se smatralo da su manje loše, uzet je Tibar prema perađijskoj Fratti nizvodno, Teverone, one koje prolaze ravnicom područja Bologne i još nekoliko, čiji je tok bio točno nacrtan.

Za legaciju Urbina radi se sada posebna karta točnija u raznim detaljima, koja će biti objavljena.

Geografska dužina je izračunana kao obično u odnosu na otok Ferro, a smjer meridijana određen je krajnjom točnošću. Stupanj srednjeg meridijana između Rima i Riminija utvrđen je 74 modernih rimskih milja i 566 koraka, svaka milja sadrži 1000 koraka, svaki korak 5 stopa, svaka stopa 16 unča koračića rimskog pedlja arhitekta, koji ih sadrži 12. Taj je rimski korak prema francuskom hvatu kao 29710 prema 38880, stoga taj stupanj sadrži 56979 francuskih sežnjeva.

Iz navedenog teksta može se pročitati da je kardinal Valenti savjetovao papu Benedikta XIV. da omogući Maireu i Boškoviću, pod papinim pokroviteljstvom, a kardinalovim nadzorom, izmjeru duljine luka dva stupnja meridijana. Stoga se može reći da su upravo papa i kardinal zaslužne osobe za izradu karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.*



Slika 3.13. Kartuša s Napomenom (*Avvertimento*) i Znakovima (*Note*) na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

3.2. *Carte de l'État de l'Église* iz 1770.

Karta Papinske Države, *Carte de l'État de l'Église* (slika 3.14.), objavljena je 1770. godine u sklopu knjige *Voyage astronomique et geographique, dans l'État de l'Église, entrepris par l'ordre et sous les auspices du Pape Benoit XIV, Pour mesurer deux dégrés du méridien, & corriger la Carte de l'État ecclésiastique, Par les Pp. Maire & Boscovich de la Compagnie de Jesus, traduit du latin, Augmenté de Notes & d'extraits de nouvelles mesures de dégrés faites en Italie, en Allemagne, en Hongrie & en Amérique, Avec une nouvelle Carte des États du Pape levée géométriquement* (Astronomsko i geografsko putovanje u Papinskoj Državi koje su poduzeli, po nalogu i pod pokroviteljstvom pape Benedikta XIV., s ciljem da izmjere dva stupnja meridijana i da isprave kartu Papinske Države, oci Maire i Bošković iz Družbe Isusove, prevedeno s latinskoga, prošireno bilješkama i podacima o novim mjerenjima stupnjeva provedenih u Italiji, Njemačkoj, Mađarskoj i u Americi, s novom kartom Papinskih Država, geometrijski kartiranom) u koju je uvezana između XVI. i 1. stranice (Maire i Boscovich 1770). Položaj gradova i drugih naselja prikazani na karti prikupljeni su tijekom geodetske izmjere koju je Maire proveo zajedno s Josipom Ruđerom Boškovićem u razdoblju 1750–1753. godine. Geodetska izmjera provedena je na području tadašnje Papinske Države koja danas obuhvaća područje središnje Italije.

Knjiga *Voyage astronomique…* (Maire i Boscovich 1770) francuski je prijevod knjige *De Litteraria…* (Maire i Boscovich 1755), koja je napisana na latinskom jeziku. Sastoji se od pet dijelova kao i njezin original. Knjigu je na francuski jezik preveo isusovac otac Hugon de Châtelain, a proširena je mnogobrojnim fusnotama u obliku objašnjenja koja je dao sam Bošković te Bilješkom (*Note*) na kraju 5. dijela knjige koja ide uz paragraf 303 (*Note Pour la fin du No. 303, Liv. V*) (Whyte 1961). Knjiga je izdana uz Odobrenje (*Approbation*) i privilegije kralja.

Treći dio knjige nosi naslov *Détail des opérations concernant la réformation de la Géographie de l'État de l'Église* (Pojedinosti postupaka koji se odnose na popravak geografije Papinske Države). Sastoji se od 25 poglavlja, a na kraju je dana tablica geografskih širina i dužina 84 grada Papinske Države koji su izračunati na osnovi mjerenja primjenom triangulacije. Ono što je u trećem dijelu knjige napisano u nastavku poglavlja bit će detaljnije opisano.

Dva primjerka knjige *Voyage astronomique...* pa tako i karte *Carte de l'État de l'Église* čuvaju se u Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici (NSK) u Zagrebu. Digitalna kopija primjerka karte koja će se obrađivati u ovom doktorskom radu naručena je iz NSK u visokoj rezoluciji i originalnoj veličini (sig. RIIF-4°-227b). S obzirom na to da je skener u NKS izvan upotrebe, skeniranje sam provela sama u prostorijama NSK upotrebom skenera Plustek OpticPro A320 formata A3. Kartu sam skenirala u rezoluciji 600 dpi.

Drugi primjerak knjige *Voyage astronomique...* koji nije korišten u ovom doktorskom radu ima signaturu sig. RIIF-4°-227a.

Dimenzije karte su 22x40 cm.

Slika 3.14. *Carte de l'État de l'Église*, 1770. Nacionalna i sveučilišna knjižnica u Zagrebu (sig. RIIF-4°-227b), smanjeno za 45%

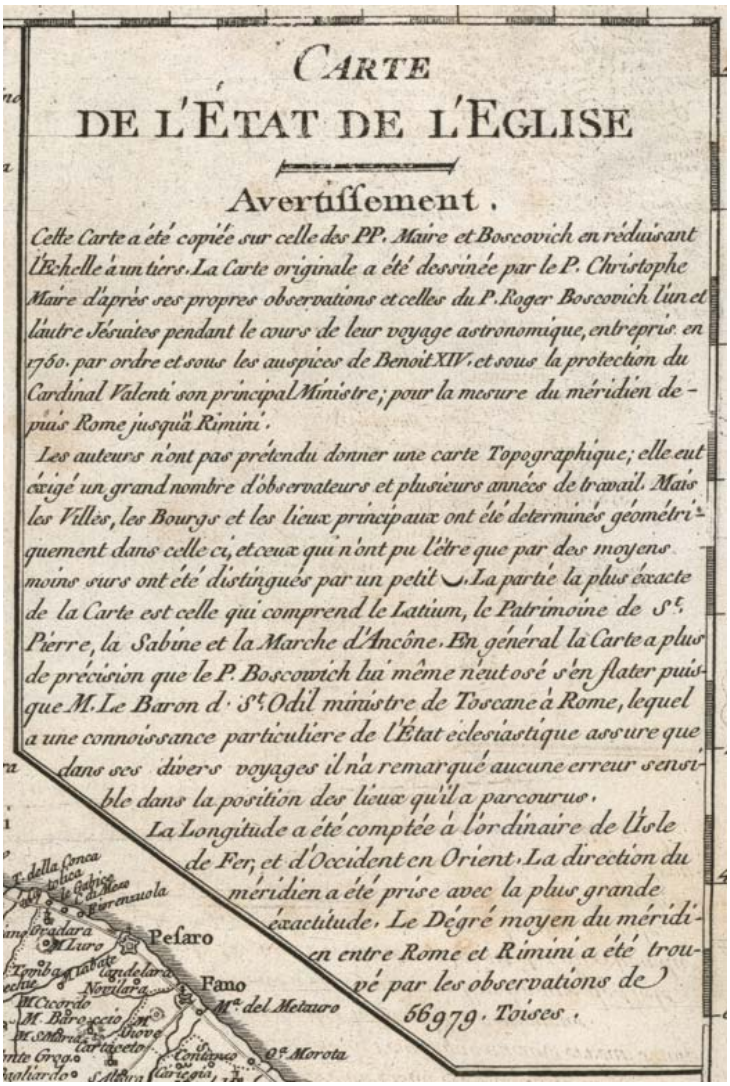
3.2.1. Opis karte *Carte de l'État de l'Église*

U daljnjem tekstu karta *Carte de l'État de l'Église* bit će opisana pomoću osnovnih i sporednih elemenata karte.

3.2.1.1. Opis karte Papinske Države iz 1770. s pomoću osnovnih elemenata karte

- *Naslov karte*

Karta Papinske Države objavljena 1770. godine nosi naslov *Carte de l'État de l'Église* (Karta Papinske Države) na francuskom jeziku i sastoji se od jednog lista. Naslov karte smješten je u gornjem desnom kutu, a nalazi se u kartuši (slika 3.15.) zajedno s Napomenom (*Avertissement*).


CARTE
DE L'ÉTAT DE L'EGLISE

Avertissement.

Celle Carte a été copiée sur celle des PP. Maire et Boscovich en réduisant l'Echelle à un tiers. La Carte originale a été dessinée par le P. Christophe Maire d'après ses propres observations et celles du P. Roger Boscovich l'un et l'autre Jésuites pendant le cours de leur voyage astronomique, entrepris en 1760. par ordre et sous les auspices de Benoit XIV. et sous la protection du Cardinal Valenti son principal Ministre; pour la mesure du méridien depuis Rome jusqu'à Rimini.

Les auteurs n'ont pas prétendu donner une carte Topographique; elle eut éxigé un grand nombre d'observateurs et plusieurs années de travail. Mais les Villes, les Bourgs et les lieux principaux ont été determinés géométriquement dans celle ci, et ceux qui n'ont pu l'être que par des moyens moins surs ont été distingués par un petit ⌣. La partie la plus éxacte de la Carte est celle qui comprend le Latium, le Patrimoine de S.t Pierre, la Sabine et la Marche d'Ancône. En général la Carte a plus de précision que le P. Boscowich lui même n'eut osé s'en flater puisque M. Le Baron d. S.t Odil ministre de Toscane à Rome, lequel a une connoissance particuliere de l'État eclesiastique assure que dans ses divers voyages il n'a remarqué aucune erreur sensible dans la position des lieux qu'il a parcourus.

La Longitude a été comptée à l'ordinaire de l'Isle de Fer; et d'Occident en Orient. La direction du méridien a été prise avec la plus grande éxactitude. Le Dégré moyen du méridien entre Rome et Rimini a été trouvé par les observations de 56979. Toises.

Pesaro
Fano

Slika 3.15. Kartuša s naslovom karte i Napomenom (*Avertissement*) na karti *Carte de l'État de l'Église* iz 1770.

- *Područje prikaza i orijentacija karte*

Karta prikazuje područje koje je u 18. stoljeću bilo pod teritorijalnom nadležnosti Papinske Države koja danas obuhvaća područje središnje Italije odnosno legacije Ferrara, Bologna, Romagna, Republiku San Marino, legacije Urbino, djelokrug Vlade grada Castello, teritorije Perugie, Orvieta, regije Umbria, Marca di Fermo, Marca d'Ancona, državu Camerino, patrimoniju Sv. Petra, Sabinu te Campagne di Roma. Papinska Država u to je vrijeme graničila s Državom Venecijom na sjeveru, Modenom, Toskanom i Sredozemnim morem na jugozapadu te Jadranskim morem i Napuljskim Kraljevstvom na sjeveroistoku.

Navedeno područje proteže se od 41°10'N do 45°5'N geografske širine i od 28°35'E do 31°25'E geografske dužine u odnosu na početni meridijan Ferro. Karta je orijentirana prema sjeveru.

- *Korisnici i svrha karte*

Glavna zadaća ili namjena izvorne karte objavljene 1755. godine bila je što bolje popraviti mnogobrojne pogreške u položaju gradova na karti Papinske Države. Karta objavljena 1770. godine tri je puta smanjena, njezin je sadržaj reduciran te je ona uvezana u knjigu. Iz toga se može pretpostaviti da je karta bila namijenjena čitateljima knjige.

- *Sadržaj karte*

Karta je popunjena geografskim sadržajem samo do granica Papinske Države i ponekim gradom koji se nalazi uz samu granicu. Na preostaloj površini do pravokutnog okvira umetnuto je grafičko mjerilo i kartuša s Napomenom i naslovom karte. Na karti je prikazana većina danas definiranih osnovnih topografskih elemenata. Osnovni su topografski elementi na karti: hidrografija, prometnice, naselja, reljef, granice, vegetacija, toponimi. Topografski elementi na karti nisu prikazani s jednakom važnosti i točnosti. Položaj gradova i mjesta, sukladno s namjenom i svrhom izvorne karte, prikazan je s najvećom mogućom točnosti. Gradovi i naseljena mjesta najzastupljeniji su na karti.

Ostali topografski elementi djelomično su prikazani i pojednostavnjeni u odnosu na izvornu kartu iz 1755. Tako su gradovi prikazani odgovarajućim kartografskim

znakovima. Na karti su prikazane močvare, šume, jezera i doline. Reljef na karti prikazan je šrafiranjem.

Granice država i teritorija, tokovi rijeka i prometnice preuzeti su s karte iz 1755.

Karta je bogata toponimima. Tako se mogu pronaći oronimi, koji imenuju gore i planine, hidronimi, koji imenuju rijeke, jezera, močvare i mora, regionimi i teritorionimi, koji imenuju regije i teritorije, te ojkonimi, koji imenuju naseljena mjesta. Toponimi na karti napisani su na francuskom jeziku.

Sadržaj karte, zbog njezina formata, reduciran je u odnosu na kartu iz 1755. Uspoređujući sadržaj karata može se primijetiti da su izostavljena neka manja mjesta. Prema Slukan Altić (2014) izostavljena su i mjesta kojima je položaj na karti iz 1755. bio nesiguran. Također je reduciran i prikaz močvarnih područja, gdje su neka manja jezera pojednostavnjena, a neka u potpunosti izostavljena.

- *Vrijeme izrade i tiskanja karte*

S obzirom na to da je knjiga *Voyage astronomique…* tiskana 1770. godine, pretpostavljam da je to godina kada je karta izrađena i objavljena. Karte su u 18. stoljeću izrađivane tehnikom bakroreza, a umnožavane su bakrotiskom, pa se može sa sigurnošću reći da je karta izrađena tim postupkom.

Kartu i knjigu izdao je Nicolas-Martin Tilliard, francuski knjižar iz Pariza. Iz Odobrenja (*Approbation*) na kraju knjige može se pročitati da je Jacques Lacombe neposredno od kralja dobio odobrenje za tiskanje knjige. Lacombe je 16. travnja 1769. godine predao privilegije za tiskanje knjige Tilliardu (Maire i Boscovich 1770).

Sadržaj karte tiskan je u crnoj boji te ona nije naknadno ručno bojena.

- *Autori karte*

Ne raspolažem informacijom tko je autor karte, odnosno tko ju je smanjio i gravirao, niti kolika je bila naklada. U Napomeni u kartuši može se pročitati da je *Carte de l'État de l'Église* nastala kopiranjem karte Mairea i Boškovića iz 1755. godine i to reduciranjem mjerila na trećinu, odnosno tri je puta smanjena.

- *Kartografika na karti*

Tumač znakova na karti ne postoji. Međutim proučavanjem karte može se vidjeti da su za isti objekt, nadbiskupije, biskupije i gradove na karti Papinske Države *Carte de l'État de l'Église*, primijenjene različite signature, čime je definirana njihova funkcija i hijerarhijski odnos između pojedinih naselja. Da bi se oni razlikovali, osnovni znak oblikovan je na taj način da je znaku nadbiskupije i biskupije dodan mali crtani dodatak u obliku nadbiskupskog ili biskupskog križa.

Gotovo sve signature prikazuju položaj objekata na karti točkom. Položaj središta nadbiskupija i biskupija te gradovi prikazani su pojednostavnjenom točkastom signaturom. Za razliku od izvorne karte, oznaka u obliku zvjezdice na simbolu pojedinih gradova koja je označavala postojanje poštanskih ureda izostavljena je.

Na karti Papinske Države iz 1770. može se pronaći i veliki broj linijskih signatura. Malobrojne prometnice prikazane su linijskom signaturom, i to dvostrukim usporednim linijama. Granice Papinske Države prikazane su crtkanom linijskom signaturom, granice između autonomnih jedinica točkastom linijskom signaturom osim kada njihova granica nije ujedno i granica Države. Svi vodotoci pa čak i veće rijeke prikazani su jednostrukim linijama i dosta narušavaju preglednost karte.

Površinskim signaturama na karti su prikazane močvare, jezera, ribnjaci i doline, koji su reducirani u odnosu na kartu iz 1755.

Papinska Država jednim je svojim dijelom na istoku imala izlaz na Jadransko more, dok je jednim dijelom na zapadu imala izlaz na Sredozemno more. More se u prikazu ne razlikuje od kopna, a obalna crta prikazana je nazubljenim trakom kao i na karti iz 1755. Istim trakom prikazane su granice jezera i dolina. Područja koja su obuhvaćena močvarom također su obrubljene nazubljenom šrafurom.

Visine na karti nisu prikazane, pa su grafičkim tehnikama izdvojene različite pejzažno--morfološke cjeline. Najprostranije ravnice na karti ostavljene su bijele, dok su niži brežuljci prikazani tanjim crticama koje prelaze u obrise viših gora i planina. Reljef Zemlje prikazan je šrafiranjem. Reljef na karti nije prikazan točno, a mogla bih zaključiti niti cjelovito. Promatrajući reljef dolazim do zaključka da je prikazano opće pružanje planina na kojima su istaknuti vrhovi s padinama pri čemu su crtice deblje, gušće i kraće

na istočnim padinama što brdovita područja čini tamnijima. Vrhovi brda i planina su bez crtica koje prikazuju nagib. Takav način prikazivanja reljefa pomaže stvaranju zornog prostornog dojma i njihovoj prepoznatljivosti, a bio je karakterističan za prikaz reljefa toga doba.

- *Matematički elementi karte – elipsoid, kartografska projekcija, kartografska mreža, početni meridijan*

Uz kartu nisu dani podaci o dimenziji elipsoida i kartografskoj projekciji u kojoj je karta izrađena. Do sada o tom pitanju nitko nije pisao. Daljnjim istraživanjem u doktorskom radu ispitat ću u kojoj je projekciji karta izrađena.

Mreža meridijana i paralela na području karte nije iscrtana. Uz rubove karte označeni su stupnjevi i minute geografskih širina i dužina svakih 10'. Otok Ferro u Kanarskom otočju definiran je kao početni meridijan od kojeg su određene geografske dužine. Taj podatak može se pronaći u kartuši s napomenom i naslovom karte.

- *Mjerilo karte*

U donjem lijevom kutu karte nalaze se tri grafička mjerila na kojima su jedinične mjere za duljine u talijanskoj milji (*Miles d'Italie*), francuskim ligama (*Lieue communes de France*) te ligi (*Lieue*) .

Na temelju mjerenja duljina dužine milje na grafičkim mjerilima, dijela duljine stupnja meridijana milje te duljine luka meridijana koje su Bošković i Maire izračunali 15 godina prije može se odrediti numeričko mjerilo karte.

Numeričko mjerilo karte iznosi približno 1:1 122 000. Detaljan postupak određivanja numeričkog mjerila iz grafičkog opisano je u poglavlju 5.11.

3.2.1.2. Opis karte Papinske Države iz 1770. s pomoću sporednih elemenata karte

Karta Papinske Države uokvirena je pravokutnim okvirom izvan kojeg nema sadržaja. Uz okvir karte označena je podjela na stupnjeve i minute koji prikazuju geografsku širinu i dužinu.

Unutar okvira karte u desnom gornjem kutu nalazi se kartuša (slika 3.13.) s Napomenom (*Avertissement*) i naslovom karte.

Tekst s kartuše na francuskom jeziku glasi:

Carte de l'État de l'Église

Avertissement

Cette Carte a été copiée sur celle des PP. Maire et Boscovich en réduisant l'Echelle à un tiers. La Carte originale a été dessinée par le P. Christophe Maire d'après ses propres observations et celles du P. Roger Boscovich l'un et l'autre Jésuites pendant le cours de leur voyage astronomique, entrepris en 1750. par ordre et sous les auspices de Benoit XIV, et sous la protection du Cardinal Valenti son principal Ministre; pour la mesure du méridien depuis Rome jusqu'à Rimini.

Les auteurs n'ont pas prétendu donner une carte Topographique; elle eut éxigé un grand nombre d'observateurs et plusieurs années de travail. Mais le Villes, les Bourgs et les lieux principaux ont été determinés géometriquement dans celle ci, et ceux qui n'ont pu l'étre que par des moyens moins surs ont été distingués par un petit◡. La partie la plus éxacte de la Carte est celle qui comprend le Latium, le Patrimoine de St. Pierre, la Sabine et la Marche d'Ancone. En général la Carte a plus de précision que le P. Boscovich lui même n'ent osé s'en flater puisque M. Le Baron d. St. Odil ministre de Toscane à Rome, lequel a une connoissance particuliere de l'État éclesiastique, assure que dans ses divers voyages il n'a remarqué aucune erreur sensible dans la position des lieux qu'il a parcourus.

La Longitude a été comptée à l'ordinaire de l'Isle de Fer, et d'Occident en Orient. La direction du méridien a été prise avec la plus grande éxactitude. Le Dégré moyen du méridien entre Rome et Rimini a été trouvé par les observations de 56 979 Toises.

Tekst je na hrvatski jezik prevela prof. dr. sc. Olga Perić:

Karta Papinske Države

Napomena

Ova je karta kopija karte otaca Maira i Boškovića u reduciranom mjerilu na trećinu. Izvornu je kartu nacrtao otac Christopher Maire na osnovi opažanja vlastitih i oca Ruđera Boškovića, koji su obojica isusovci, tijekom njihova astronomskog putovanja, poduzetoga 1750. godine po zapovijedi i pod pokroviteljstvom Benedikta XIV., a pod zaštitom kardinala Valentija, njegova glavnoga pomoćnika – da bi izmjerili meridijan od Rima do Riminija.

Autori nisu imali namjeru dati topografsku kartu; ona bi zahtijevala veliki broj opažatelja i više godina rada. Ali su gradovi, tvrđave i glavna mjesta na njoj određeni

geometrijski, a ona mjesta koja su mogla biti određena manje pouzdanim načinima, označena su malim ◡. Najvjerniji je dio karte onaj koji obuhvaća Lacij, Baštinu Svetoga Petra, Sabinu i Ankonitanske Marke. Karta je općenito točna i više nego što se otac Bošković usudio pomišljati. Naime, gospodin barun de St. Odil, toskanski ministar u Rimu, koji izuzetno poznaje Papinsku Državu, sa sigurnošću tvrdi da tijekom svojih raznih putovanja nije primijetio niti jednu osjetnu pogrešku u položajima mjesta koja je obišao.

Geografska dužina je izračunana kao uobičajeno prema otoku Ferro od zapada prema istoku. Smjer meridijana uzet je s najvećom točnošću. Srednji stupanj meridijana između Rima i Riminija utvrđen je opažanjima – od 56979 hvata.

Iz teksta Odobrenje (*Approbatio*n), na kraju knjige *Voyage astronomique…* (vidi Maire i Boscovich 1770), može se pročitati da je francuski matematičar Jean-Étienne Montucla 30. kolovoza 1769., pisao kralju i tražio njegovo odobrenje da se tiska prijevod knjige *De Litteraria…* (Maire i Boscovich 1755). Odobrenje je dobio 4. rujna 1769. od kraljevskog savjetnika i odvjetnika Antoina Jeana Louisa Le Bequea de Preslea. Knjigu je preveo na francuski jezik otac Hugon u Parizu poznat pod imenom Châtelain, stoga možemo reći da su Montucla i Hugon zaslužne osobe za izdavanje knjige pa tako i karte *Carte de l'État de l'Église.*

Marković (1968) navodi kako je brigu oko izdavanja knjige *Voyage astronomique…* preuzeo La Condamine, Boškovićev prijatelj. Međutim, tu tvrdnju ne mogu potvrditi niti odbaciti jer autor ne navodi izvor iz kojeg je taj podatak preuzeo, a dosadašnjim istraživanjem nisam pronašla podatak kojim bih mogla potvrditi tu Markovićevu tvrdnju.

4. DIMENZIJE BOŠKOVIĆEVA ELIPSOIDA

Danas je poznato da Zemlja nije pravilnog oblika. Problem određivanja točnog oblika i veličine Zemlje trajao je stoljećima.

Zašto je određivanje parametara Zemlje toliko bitno, može se ilustrirati jednostavnim primjerom – da je Kristofor Kolumbo znao pravi Zemljin oblik i veličinu ne bi tražeći Aziju doplovio do Amerike. Pod pretpostavkom da Zemlja ima oblik sfere i da je njezina veličina mnogo manja od danas poznate, koristio se prilikom oplovljivanja svijeta krivim udaljenostima i krivim smjerom (Smith 2005).

4.1. Boškovićeva razmišljanja o Zemljinu obliku

Josip Ruđer Bošković od ranih se znanstvenih dana počeo zanimati za određivanje oblika i veličine Zemlje. Godine 1739., sa samo 28 godina, objavio je dva rada: *De veterum argumentis pro telluris sphaericitate* (O dokazima starih za sferni oblik Zemlje), u koautorstvu s V. Gambarom i A. Casatijem, i *Dissertatio de telluris figura* (Rasprava o obliku Zemlje).

Bošković je došao na ideju da izmjeri duljinu luka meridijana da bi potvrdio svoju pretpostavku da svi meridijani neće biti jednako dugački, a ni paralele neće biti točne kružnice. Smatrao je da se nepravilnost Zemljina oblika može ispitati na taj način da se „točno odrede dva meridijanska stupnja u različitim geografskim dužinama, ali u istoj širini“ (Boscovich 1757). Želio je mjeriti meridijanski stupanj na nekoj geografskoj širini, na kojoj je neki drugi meridijanski stupanj već dovoljno točno određen, ali na različitoj geografskoj dužini. Kardinal Silvije Valenti je uz odobrenje pape Benedikta XIV. predložio da ta mjerenja obavi u Italiji na području Papinske Države, jer se Rim i Rimini nalaze na približno istome meridijanu koji obuhvaća područje od približno dva meridijanska stupnja. Duljina meridijanskog stupnja između Rima i Riminija mogla se usporediti s duljinom stupnja koju su deset godina prije odredili Jacques Cassini i De la Caille u Perpignanu u južnoj Francuskoj.

Rezultate mjerenja duljine luka meridijana Bošković je objavio 1755. skupa s Christopherom Maireom pod naslovom *De Litteraria*…. (Boscovich i Maire 1755). Knjiga *De Litteraria…* sastoji se od 5 dijelova. Ispitivanje Zemljina oblika Bošković je opisao u

petom dijelu knjige pri čemu je primijenio jednostavnu geometriju. Peti dio knjige podijeljen je na dva dijela. U prvom opisuje određivanje Zemljina oblika po zakonima ravnoteže tekućina, dok u drugom dijelu knjige oblik određuje pomoću izmjerenih duljina lukova meridijana.

Rezultate geodetskih mjerenja Bošković je još tri puta publicirao:

- 1757. godine u sažetom izvješću za časopis Bolonjske akademije (Boscovich 1757)
- 1760. u dopuni uz spjev Benedikta Staya (Stay 1760) i
- 1770. u francuskom prijevodu pod naslovom *Voyage astronomique …* svoga glavnoga geodetskog djela *De litteraria*…, u kojem je dao i jedan primjer izjednačenja (Maire i Boscovich 1770).

Bošković je 1760. godine pristupio obradi rezultata svih mjerenja meridijanskih stupnjeva koja su provedena nakon 1736. godine.

Da bi potvrdio svoju pretpostavku da svi meridijani neće biti jednako dugački, Bošković je u svom prvom pokušaju pronalaženja eliptičnosti usporedio pet mjerenih duljina lukova jednog stupnja meridijana na dovoljno udaljenim geografskim širinama, koja je smatrao dovoljno točnima za svoja ispitivanja. Bila su to mjerenja meridijanskih stupnjeva provedena u Južnoj Americi u Quitu, na Rtu dobre nade na jugu Afrike, u Parizu u Francuskoj, u finskoj pokrajini Laponiji te njegova vlastita koja je proveo u Rimu u Italiji (Maire i Boscovich 1755).

S obzirom na to da su mjerenja, kako astronomska tako i geodetska, opterećena pogreškama nastalim iz različitih izvora, Bošković je bio svjestan da uzroke pogrešaka neće u potpunosti moći eliminirati. Uspoređujući spomenutih pet meridijanskih stupnjeva nije mogao odrediti takav elipsoid koji bi bio u skladu sa svim mjerenjima. Stoga je odlučio odrediti popravke kojima bi popravio sve stupnjeve i dobio što bolje procjene pravih vrijednosti. Tom je prigodom oblikovao svoju metodu za izjednačenje rezultata mjerenja postavivši tri zahtjeva.

U sažetku *De Litterarie…* (Maire i Boscovich 1755) koji je objavio 1757. u četvrtom dijelu *De Bononiensi scientiarum et artium Instituto atque Academia commentarii* (Komentari Akademije i Bolonjskog Instituta znanosti i umjetnosti) definira zahtjeve za postupak određivanja popravaka. Postupak je opširno objasnio u Dopunama filozofije u latinskim stihovima *Philosophiæ recentioris a Benedicto Stay* (Novija filozofija Benedikta Staya)

koju je sastavio Benedikt Stay i objavio 1760 (Stay 1760). Glavno Boškovićevo djelo *De Litteraria…,* koje je s latinskoga na francuski preveo otac Hugon pod nazivom *Voyage astronomique…,* objavljeno je u Parizu 1770 (Maire i Boscovich 1770). U njemu je najpotpunije izložena metoda u Bilješci (*Note*) na kraju petog dijela knjige *Voyage astronomique*…, gdje je dan i primjer računanja s tadašnjim najnovijim mjerenjima. Postupak računanja proširen je s četiri nova mjerenja. Četiri mjerene duljine luka meridijana nalazile su se u Pijemontu u Italiji, na granici između sjevernoameričkih država Marylanda i Delawarea, oko Rodeza u južnoj Francuskoj i u Beču. Na slici 4.1. prikazan je položaj meridijanskih stupnjeva kojima se Bošković služio u svojim analizama.

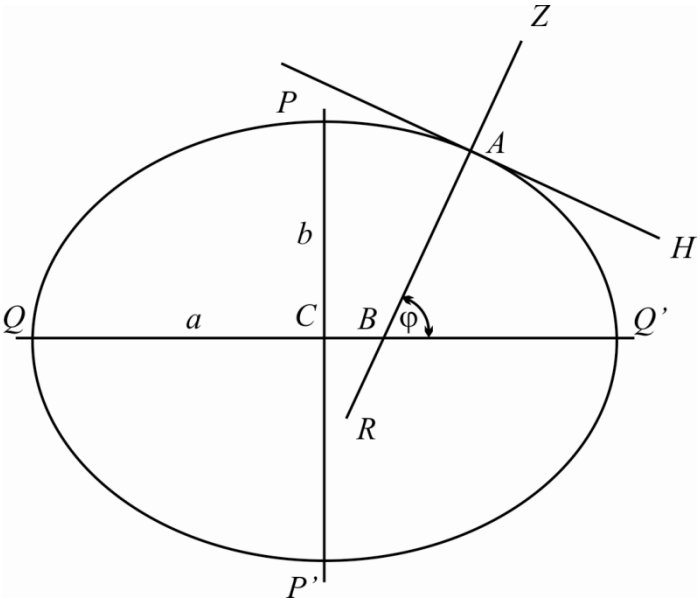
Slika 4.1. Položaj meridijanskih stupnjeva koje je Bošković razmatrao u svojim radovima

Primjenu svoje metode Bošković je protumačio geometrijski, uz malo računanja i bez analitičkog pristupa. Francuski matematičar P. S. de Laplace zainteresirao se za Boškovićev rad. Laplace se, među ostalim, u nekoliko navrata bavio problemom određivanja geometrijskog oblika Zemlje, a kroz to i Boškovićevom metodom uklanjanja utjecaja pogrešaka mjerenja, koju je prihvatio i razradio. Laplace je prvi put primijenio Boškovićevu metodu uklanjanja utjecaja pogrešaka mjerenja te dao njezin prvi analitički prikaz i izvod. Zahvaljujući tomu, metoda koju je izvorno osmislio Bošković naziva se Bošković-Laplaceovom metodom (Triplat Horvat i Lapaine 2012).

Boškovićeva analiza podataka mjerenja pokazala je prvo uspješno rješenje neslaganja različitih mjerenja luka meridijana te uvod u primjenu statistike prilikom obrade mjerenja što je ujedno i glavni predmet rasprave u poglavljima 4.4. i 4.5.

4.2. Duljine luka meridijana koje je Bošković upotrebljavao u svojim analizama

Zamišljamo da elipsoid koji aproksimira Zemlju nastaje rotacijom elipse oko njezine male osi. Na slici 4.2. prikazana je elipsa izvodnica $PQ'P'Q$ koja rotirajući oko osi PP' određuje elipsoid. Veličina QQ' nalazi se u ravnini ekvatora, C središte, A mjesto opažanja, čiji je horizont AH, zenit Z, geografska širina φ ($\measuredangle ABQ'$), a polumjer zakrivljenosti meridijana AR. Položaj točke A na elipsoidu potpuno je određen smjerom vanjske normale (okomica AZ) na plohu elipsoida koja je okomita na tangentu AH elipsoida u točki A. Kut koji zatvara normala u točki na elipsoidu s ravninom ekvatora nazivamo geografskom širinom (φ) (Čubranić 1974).



Slika 4.2. Elipsa izvodnica koja aproksimira Zemljin oblik

Ako Zemlju smatramo sferom, njezin polumjer možemo odrediti s pomoću opažanja u blizini položaja točke A. Znamo da će tada polumjer zakrivljenosti uvijek biti jednak 180°/π pomnožen s duljinom meridijanskog luka jednog stupnja geografske širine u A. Meridijanski luk 1° geografske širine ili skraćeno duljina stupnja geografske širine je

duljina luka na meridijanskoj elipsi koji omeđuju polumjeri zakrivljenosti meridijana i pritom u središtu zakrivljenosti zatvaraju kut od 1° geodetske širine. Kod spljoštenog elipsoida na polovima polumjer zakrivljenosti najmanji je na ekvatoru, a najveći na polovima. Stoga, ako se duljine stupnja geografske širine povećavaju od ekvatora prema polovima, možemo to smatrati dokazom da je Zemlja spljoštena na polovima.

Pomoću duljine luka između dvije točke na istome meridijanu i razlike geografskih širina između njih moguće je odrediti Zemljin oblik, a taj postupak koji se naziva mjerenje luka meridijana bio je tijekom 18. stoljeća najzastupljeniji (Merriman 1881).

Mnogobrojna mjerenja koja su provedena u svrhu određivanja dimenzija i oblika Zemlje temeljila su se na geodetskim mjerenjima i astronomskim opažanjima nebeskih tijela. Geodetskim mjerenjima određivala se duljina luka meridijana između dvije točke, a astronomskim pripadni kut koji odgovara izmjerenom luku. Geodetska mjerenja provedena do 17. stoljeća bila su nepouzdana jer se nisu mogle precizno mjeriti duljine lukova na Zemlji.

Veliki napredak u geodetskim mjerenjima učinjen je razvojem triangulacije početkom 17. stoljeća koju je u geodetsku praksu za određivanje duljine između dvije udaljene točke prvi put uveo Nizozemac Willebrord Snel van Royen (lat. *Snellius*) proučavajući radove svojih prethodnika Reignera Gemme Frisiusa i Tyche Brahea. Pod pojmom riječi triangulacija podrazumijeva se određivanje položaja točaka na Zemlji koje tvore mrežu trokuta, a računaju se iz kutnih mjerenja te barem jedne izmjerene duljine stranice u mreži, koja se naziva bazna linija. Linearna mjerenja, tj. mjerenja duljina bila su teško izvediva i skupa pa su svedena na minimum (Merriman 1881, Macarol 1978, Solarić i Solarić 2009).

4.2.1. Mjerenja lukova meridijana u Francuskoj

U razdoblju 1668–1670. Jean Picard (1620–1682) je mjerio duljinu luka meridijana od 1°23' između Pariza i Amiensa. Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) je 1700. ponovio Picardova mjerenja duljine luka meridijana koji je proširio do Perpignana, 6°19' južno od Pariza. Mjerenje duljine cijelog luka meridijana (8°30') kroz Francusku dovršio je njegov sin Jacques Cassini (Cassini II, 1677–1756) 1718. nakon što je proširio

mjerenja za 2°12' sjeverno, sve do Dunkerquea (Gregory 1819, Butterfield 1906, Bialas 1982, Smith 2005).

Luk je pritom podijeljen na dva dijela koja su mjerena neovisno jedan drugome. Duljina jednog stupnja prvoga luka meridijana (Pariz–Perpignan) iznosila je 57 097 francuskih hvata (111 282,053 m) na srednjoj geografskoj širini 45°41'N, dok je duljina jednog stupnja drugog luka (Pariz–Dunkerque) iznosila 56 960 francuskih hvata (111 015,040 m) na srednjoj geografskoj širini 49°56'N (Gregory 1819, Butterfield 1906, Bialas 1982). Vrijednosti duljina luka meridijana u 18. stoljeću izražavale su se u francuskim hvatima, mjernoj jedinici za duljinu pri čemu 1 francuski hvat = 1,949 m.

Nicolas Louis de Lacaille (De la Caille, 1713–1762) i César-François Cassini (Cassini de Thury, Cassini III, 1714–1784) ponovili su mjerenje istog luka između Pariza i Dunkirka 1739. godine. Prilikom mjerenja luk je podijeljen na četiri dijela koja su mjerena neovisno jedan drugome. Duljina jednog stupnja prvog luka meridijana, između Dunkerquea i Pariza, iznosila je 57 084 francuskih hvata (111 256,716 m) na srednjoj geografskoj širini 49°56'N, a duljina izmjerenog luka iznosila je 2°12'. Duljina jednog stupnja drugog luka, između Pariza i Bourgesa, iznosila je 57 071 francuskih hvata (111 231,379 m) na srednjoj geografskoj širini 47°58'N, a duljina luka iznosila je 1°45'. Treći luk meridijana, između Bourgesa i Rodeza, iznosio je 2°44', a duljina luka jednog stupnja meridijana iznosila je 57 040 francuskih hvata (111 170,960 m) na srednjoj geografskoj širini 45°43'N. Četvrti luk meridijana, između Rodeza i Perpignana, iznosio je 1°39'. Duljina luka jednog stupnja tog meridijana iznosila je 57 048 francuskih hvata (111 186,552 m) na srednjoj geografskoj širini 42°31'N. Triangulacijski lanac za mjerenje sve četiri duljine luka meridijana sastojao se od 400 trokuta (Cassini de Thury i Monnier 1744).

4.2.1.1. Nesklad među podacima za lukove meridijana u Francuskoj

U djelu *Voyage astronomique…* u fusnoti na stranici 481 dana je tablica s vrijednostima i podacima o lukovima meridijana koji su korišteni u računanjima u bilješci na kraju 5. dijela knjige. U tablici je napisano da su 1739. i 1740. godine Maupertuis i Cassini odredili duljinu luka jednog stupnja meridijana od 57 074 francuskih hvata na srednjoj geografskoj širini 49°23’N. Iako bi se na prvi pogled moglo zaključiti kako su Maupertuis i Cassini zajedno mjerili duljinu luka meridijana, zapravo je riječ o popravljenoj

vrijednosti duljine luka meridijana između Amiensa i Pariza koju je mjerio Picard. Maupertuis je 1739. godine ponovio kutna mjerenja krajnjih točaka Picardove baze, iz nje ponovno izračunao duljinu luka te ju popravio na duljinu od 56 926 francuskih hvata. U drugom pokušaju ipak je povećao duljinu luka na 57 183 francuskih hvata. Postupak mjerenja i ispravak vrijednosti Picardova luka meridijana mogu se pronaći u knjizi Maupertuisa i dr. (1740).

Lacaille i C. F. Cassini u sklopu svojih mjerenja duljina luka kroz Francusku, također su ponovno izmjerili duljinu Picardove baze te su uočili da je duljina baze kraća za 6 francuskih hvata. Potom je Cassini izačunao duljinu luka jednog stupnja meridijana između Amiensa i Pariza, te je pritom u obzir uzeo posljednje Maupertuisove analize. Popravio je duljinu luka jednog stupnja meridijana na 57 074 francuskih hvata (Cassini de Thury i Monnier 1744). U istom djelu na stranici 112 ispisane su vrijednosti duljina luka jednog stupnja pariškog meridijana koje su do tog vremena određene.

U istoj tablici u knjizi *Voyage astronomique...* piše da je Cassini u istom razdoblju odredio duljinu luka jednog stupnja meridijana od 57 028 francuskih hvata na srednjoj geografskoj širini 45°N, što se ne poklapa ni s jednom vrijednosti u djelu (Cassini de Thury i Monnier 1744).

Moramo primijetiti kako se u nekim djelima javljaju jedna ili obje navedene pogreške. Tako se u radovima Gregorya (1819), Čubranića (1961), Stiglera (1986), Farebrothera (1999), URL23, URL24 navode iste vrijednosti i podaci kao u knjizi Mairea i Boscovicha (1770). U radovima Butterfielda (1906), Graevea (2005) i Smitha (2005) može se pronaći detaljniji opis mjerenja koja je provela obitelj Cassini. Međutim, čak i u tim radovima ne dolazi do potpunog slaganja između vrijednosti, a pritom nitko od autora nije objasnio zašto te vrijednosti odstupaju od vrijednosti objavljenih u djelu Cassinija de Thuryija i Monniera (1744). U Bialasovoj (1982) knjizi možemo na stranici 155 u tablici 8 pronaći ispravan podatak kako je duljinu luka u Francuskoj odredio Cassini III koja iznosi 57 074 francuskih hvata, međutim također se može na stranici 137 pronaći kako ta duljina iznosi 57 075 francuskih hvata.

4.2.2. Luk meridijana Rim-Rimini

Od ranih dana svoga znanstvenog života Bošković se počeo baviti problemom nepravilnog Zemljina oblika (vidi poglavlje 4.1.). Bošković je proveo geodetsku izmjeru

uzduž meridijana Rim-Rimini (1750–1752) u Papinskoj Državi. Bošković i Maire su 1755. godine u knjizi *De Litteraria…* objavili prve rezultate svojih mjerenja. Nakon 1760. Bošković je pristupio obradi rezultata svih mjerenja meridijanskih stupnjeva koja su provedena nakon 1736. godine. Drugo izdanje s dopunama pod naslovom *Voyage astronomique…* Maireovo i Boškovićevo je djelo objavljeno u francuskom prijevodu 1770. godine u Parizu.

Mjereno područje (slika 3.5., str. 17) obuhvaćalo je nešto više od dva stupnja meridijana (2°10'). Duljina meridijanskog stupnja između Rima i Riminija mogla se usporediti s duljinom stupnja koju su deset godina prije u južnoj Francuskoj odredili Cassini de Thury i Lacaille u Perpignanu (Triplat Horvat i dr. 2011). Duljina jednog stupnja luka meridijana koju su mjerili Bošković i Maire iznosila je 56 979 francuskih hvata (111 052,071 m) na srednjoj geografskoj širini 43°N. Na slici 3.5. (vidi poglavlje 3.1.1) slova A, B, C, D, E, F, G, H, I i L prikazuju točke lanca trokuta između Rima i Riminija s nazivima brežuljaka na kojima su točke smještene.

4.2.3. Duljine lukova meridijana – ekspedicije Kraljevske akademije znanosti

Usporedba duljine luka meridijana mjerenog u sjevernom i duljine luka meridijana mjerenog u južnom dijelu Francuske, Cassiniji su uzeli kao dokaz da je Zemlja spljoštena na ekvatoru. Kako bi se dokazalo je li Zemlja spljoštena na polovima ili ekvatoru, Kraljevska akademija znanosti (*Academie Royale des Sciences*) iz Francuske organizirala je u prvoj polovini 18. stoljeća dvije geodetske izmjere. Odlučeno je da će jedna skupina biti poslana u područje što bliže ekvatoru, dok će druga biti poslana u područje što bliže polu.

Prva geodetska izmjera provedena je u razdoblju 1736–1743. u Peruu, u Quitu, a mjerenja su obavili Charles Marie de La Condamine (1701–1774) i Pierre Bouguer (1698–1758). Duljina izmjerenog luka iznosila je nešto više od tri stupnja meridijana (3°7') između Tarquia i Cochesquia. Duljina jednog stupnja luka meridijana određena je na 56 753 francuskih hvata (110 611,597 m) na srednjoj geografskoj širini 0°. Triangulacijski lanac sastojao se od 33 trokuta (Bouguer i La Condamine 1749).

Ta geodetska izmjera trajala je puno duže od očekivanoga zbog poteškoća i vremena koje im je trebalo da se popnu na vrhove planina na kojima su postavljali signale za opažanja.

Godinu dana poslije druga skupina, koju je predvodio Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759), upućena je u Laponiju u dolinu rijeke Torne. Mjerenje laponijskog luka uglavnom je provedeno na području današnje Finske, a tadašnje švedske pokrajine. Mjereni luk meridijana proteže se od grada Tornija do vrha brda Kittisvaara u blizini grada Pello. Geodetska izmjera završila je 1737. godine (Butterfield 1906, Kakkuri 2001). Luk meridijana obuhvaćao je područje nešto manje od jednog meridijanskog stupnja (0°57'30''), dok je duljina jednog stupnja meridijana određena na 57 438 francuskih hvata (111 946,662 m) na srednjoj geografskoj širini 66°20'N. Triangulacijski lanac sastojao se od 12 trokuta (Maupertuis 1738, Gregory 1819, Butterfield 1906, Bialas 1982, Smith 2005).

Iako skupina u Peruu nije dala rezultate svojih mjerenja prije 1744., rezultatom mjerenja u Laponiji prvi put je znanstveno dokazano da je Zemlja spljoštena na polovima, zbog toga što je duljina luka meridijana dulja u Laponiji od onoga u Francuskoj. Završetkom svojih radova, Peruanska skupina potvrdila je tu pretpostavku.

4.2.3.1. Nesklad među objavljenim vrijednostima za duljine lukova meridijana u Peruu i Laponiji

Vrijednost duljine laponijskog luka meridijana u radu Mairea i Boscovicha iz 1770. zapisana je na 57 422 francuskih hvata te se razlikuje od vrijednosti koju je i sam Maupertuis objavio u svom djelu (57 438 francuskih hvata). U knjizi *De Litteraria…* (1755), a također i u *Philosophiae recentioris a Benedicto Stay* (1760), Bošković navodi kako je smanjio vrijednost laponijskog luka za 16 francuskih hvata jer je prilikom mjerenja nebeskog luka Maupertuis zanemario vrijednost loma svjetlosti od 1'', što je dovelo do te pogreške.

U radovima Gregorya (1819), Mairea i Boscovicha (1770), Butterfielda (1906), Bialasa (1982) i Smitha (2002) vrijednost duljine luka jednog stupnja meridijana, određenog u Peruu, razlikuju se za 3 francuska hvata (56 750 francuskih hvata) od one koju objavili Bouguer i Condamine. Bošković u *De litterariji…* (1755) koristi za duljinu luka u Peruu vrijednost 56 751 francuskih hvata. Bošković u knjizi *Voyage astronomique…* (1770) navodi kako je za vrijednost duljine peruanskog meridijana uzeo srednju vrijednost između onih koje su neovisno jedan o drugome odredili Bouguer i Condamine, stoga dolazi do te razlike od 3 francuska hvata.

4.2.4. Luk meridijana u južnoj Africi

Nicolas Louis de Lacaille otputovao je u Cape na krajnji jug Afrike (današnji Cape Town u Južnoafričkoj Republici) 1750. godine kako bi proveo trigonometrijska mjerenja udaljenosti Sunca, Mjeseca i ostalih planeta na južnoj Zemljinoj polutki. Završetak radova na opažanju neba potrajao je duže od očekivanog i produžio se do pred kraj ljeta 1752. Tada je bilo već dosta kasno za povratak jer se iz iskustva znalo kako druga polovina godine nije povoljna za plovidbu brodom pa su brodovi uglavnom pristajali u luku potkraj svibnja. S obzirom na okolnosti imao je otprilike 5 slobodnih mjeseci prije povratka u Francusku pa je odlučio tražiti potporu Kraljevske akademije znanosti iz Pariza za novi projekt – mjerenje stupnja meridijana s ciljem da utvrdi je li veličina Zemlje približno jednaka na obje Zemljine polutke. Do tada još nisu bila provedena mjerenja duljine luka meridijana na južnoj polutki pa je to postao jedan od Lacailleovih ciljeva – odrediti Zemljinu spljoštenost mjerenjima na južnoj polutki (Graeve 2005, Smith 2006, Glass 2012).

Tražeći najpogodnije mjesto za postavljanje triangulacijske mreže popeo se na planinu Kapokberg u blizini današnjeg Darlinga s koje je na istočnoj strani mogao vidjeti izolirani vrh na planini Kasteelberg u blizini današnjega grada Riebeek Kasteel. Procijenio je kako su te dvije planine dobro smještene da tvore bazu za dva velika trokuta. Treći vrh prvog trokuta nalazio se u Cape Townu, dok se treći vrh drugog trokuta nalazio na neimenovanoj planini, pokraj planine Piketberg na farmi Klipfonteyn u blizini današnje Aurore. Duljina izmjerenog luka iznosila je 1°13'. Duljina jednog stupnja meridijana određena je na 57 037 francuskih hvata (111 165,113 m) na srednjoj geografskoj širini 33°18'S (Gregory 1819, Butterfield 1906, Bialas 1982, Smith 2005, Smith 2006, Graeve 2005, Glass 2012).

Lacaille se iznenadio kada je izračunao duljinu luka meridijana, jer je očekivao manju vrijednost. Kada je usporedio svoju vrijednost duljine luka meridijana i duljinu luka meridijana određenu u Francuskoj, došao je do zaključka da je na južnoj polutki Zemlja spljoštenija nego na sjevernoj. Do tog zaključka došao je jer je duljina na 33°S gotovo jednaka duljini na 45°N. Odlučio je ponoviti mjerenje bazne linije i sva računanja, međutim dobio je iste vrijednosti. George Everest je 1820. godine doputovao u Cape Town te se dogovorio s Williamom Lambtonom, svojim nadređenim, da pokuša istražiti mogući uzrok Lacailleove anomalije. Iako nije u potpunosti mogao odrediti točan položaj

točaka koje su tvorile bazu i Lacailleovu triangulacijsku mrežu, došao je do zaključka da je do anomalije došlo zbog otklona viska uslijed utjecaja blizine planine Piketberg na najsjevernijoj točki mreže (Graeve 2005, Smith 2006).

4.2.4.1. Nesklad među objavljenim vrijednostima za duljine lukova meridijana u južnoj Africi

Treba napomenuti kako je u radu Smitha (2005) navedena pogrešna veličina srednje geografske širine u iznosu 33°8'S. Već prije u radu (Triplat Horvat i Lapaine 2012) došla sam do zaključka, računajući kvadrate sinusa geografskih širina, da se u Boškovićevim knjigama (Maire i Boscovich 1755, Stay 1760) upotrebljava pogrešna vrijednost 0,2987 za vrijednost kvadrata sinusa geografske širine za mjerenje na Rtu dobre nade. Pri računanju s devet meridijanskih stupnjeva (Maire i Boscovich 1770) ta vrijednost je ispravljena. Pogrešna vrijednost 0,2987 kvadrata sinusa geografske širine odgovarala bi geografskoj širini 33°8'S, međutim riječ je o širini 33°18'S.

4.2.5. Luk meridijana u Sardiniji

Bošković je vjerojatno uvjerio kralja Sardinije Carla Emanuela III, da podupre mjerenja duljine luka jednog stupnja meridijana u Italiji na području Lombardije, Pijemonta. Mjerenje je proveo Giovanni Battista Beccaria (1716–1781) u razdoblju 1760–1764. između Mondovie i Andrate, a izmjerena duljina luka meridijana iznosila je 1°08'. Cijelo područje nalazi se u ravničarskom predjelu, dok je Bošković svoja mjerenja obavljao u brdovitom području. Instrumenti koje je Beccaria rabio bili su oni kojima se Bošković služio u svojim mjerenjima. Duljina jednog stupnja luka meridijana iznosila je 57 024 toaza (111 227,481 m) na srednjoj geografskoj širini 44°44'N (Beccaria 1774).

U radovima Mairea i Boscovicha (1770), Gregorya (1819), Butterfielda (1906), Bialasa (1982) navodi se vrijednost od 57 069 francuskih hvata. Franz Xaver von Zach (Zach 1811) pronašao je pogrešku od 15 francuskih hvata u postupku računanja duljine luka meridijana te mnogobrojne pogreške u mjerenju kutova. S obzirom na to da su Beccarijevi rezultati i mjerenja nailazili na velike kritike, pretpostavljam da je objavljena vrijednost od 57 069 francuskih hvata korigirana.

4.2.6. Luk meridijana u Sjevernoj Americi

Jeremiah Dixon (1733–1779) i Charles Mason (1728–1786) su 1764. započeli mjerenje granica koje su razdvajale države Maryland, Pennsylvaniju i tri donje grofovije Pennsylvanije (*Three Lower Counties of Pennsylvania*), današnji Delaware, zbog dugogodišnjih neslaganja posjednika tadašnjih dviju britanskih kolonija. Granica između tih kolonija danas je poznata kao linija Mason-Dixon (*Mason-Dixon Line*). Tadašnji posjednik Pennsylvanije Thomas Penn i posjednik Marylanda Frederick Calvert (šesti barun od Baltimorea), odlučili su riješiti granični spor između tih dviju kolonija (Maskelyne i dr. 1769, Danson 2002, URL 25, URL 26).

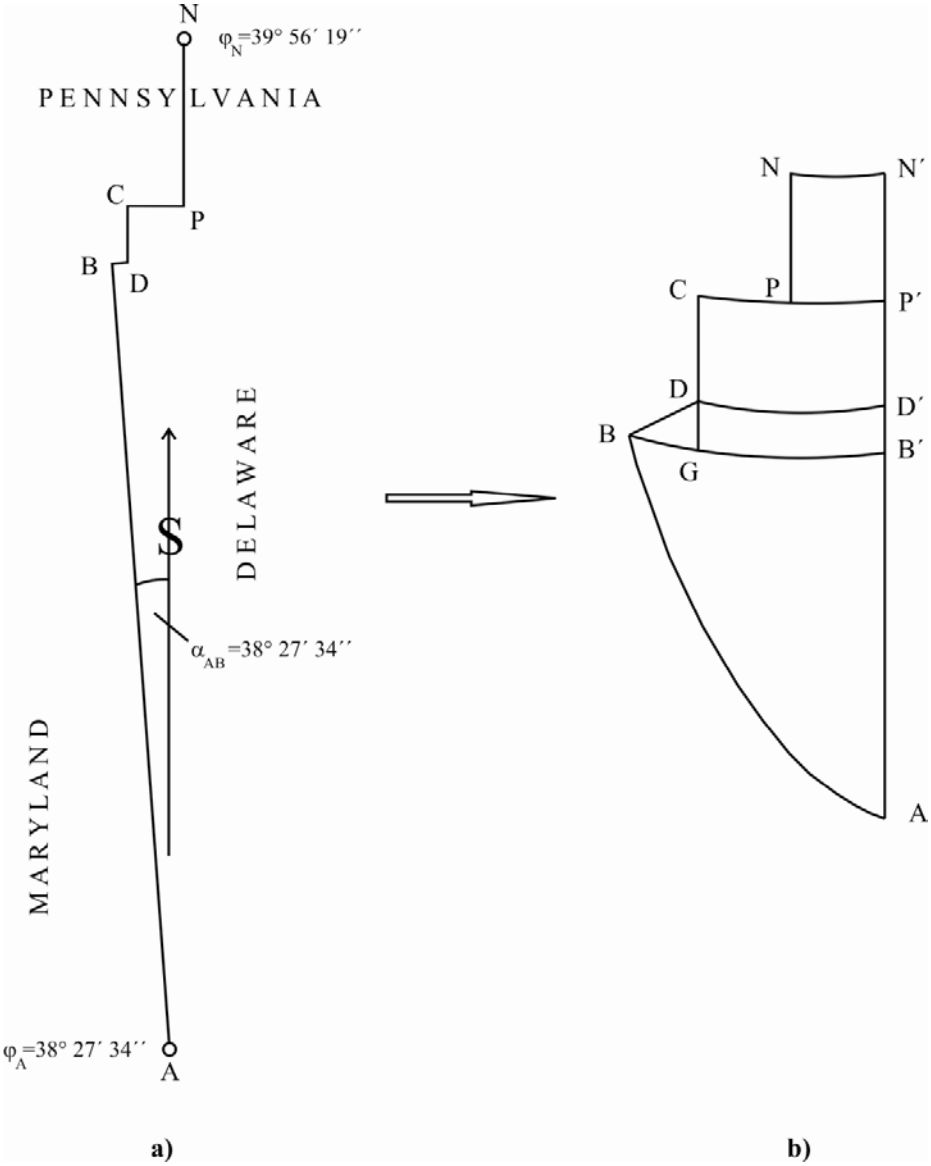
Mason je bio upoznat s teorijama i eksperimentima odnosno mjerenjima koja su se provodila u svrhu određivanja Zemljina oblika pa je zajedno s Dixonom u ime Kraljevskoga londonskog društva (*Royal Society of London*) proveo mjerenje duljine luka meridijana na području Sjeverne Amerike. To je bilo prvo mjerenje luka meridijana u Sjevernoj Americi (Danson 2002).

Duljina luka mjerila se na području poluotoka Delmarva, između geografske širine 38°27'34''N i geografske širine 39°56'19''N, a obuhvaćala je sjevernu (*North Line*) i tangentnu liniju (*Tangent Line*) linije Mason-Dixon te linije od Brandywinea do zapadne linije (*West Line*) linije Mason-Dixon. Duljina izmjerenoga luka iznosila je 1°29'. Duljina jednog stupnja meridijana iznosila je 538 067 stopa, odnosno 363 763 engleskih stopa, tj. 56 904 francuskih hvata (110 905,896 m) na srednjoj geografskoj širini 39°12'N. Nakon popravka dobivene duljine luka za pogreške mjerenja zbog različitih utjecaja, duljina luka jednog stupnja meridijana iznosila je 56 888 francuskih hvata, odnosno 110 874,712 m (Mason i Dixon 1769, Gregory 1819, Butterfield 1906, Bialas 1982, Danson 2002, URL 26).

Prije nego što su Mason i Dixon objavili rezultate mjerenja koja su proveli kako bi odredili duljinu luka jednog stupnja meridijana, napisali su kratak uvod (vidi Maskelyne i dr. 1769) u kojem su objasnili problematiku, odnosno zašto su odlučili odrediti duljinu luka. U uvodu su napomenuli kako se iz razrađene Boškovićeve rasprave može zaključiti da će doći do otklona viska sektora od njegova pravilnog položaja zbog utjecaja blizine planina.

Uz izvještaj su priložili kartu Chesapeaka i zaljeva Delaware na kojoj su ucrtali linije koje su mjerene, a prikazane su na slici 4.3a. Ista karta objavljena je 1769. u izdanju časopisa Gentleman's Magazine pod naslovom *A Map of that Part of America where a Degree of*

Latitude was measured for the Royal Society by Cha. Mason & Jere. Dixon i može se pronaći na URL 27, dok se skenirane stranice časopisa mogu pronaći na URL 28. Detaljniji podaci o karti nalaze se na URL 29.



Slika 4.3. Granice saveznih država iz kojih je računata duljina luka meridijana u Sjevernoj Americi (preuzeto iz rada Masona i Dixona (1769))

Duljina luka meridijana koju su Mason i Dixon određivali jedina je duljina koja nije dobivena triangulacijskom metodom. Postupak koji su primijenili je sljedeći: u točki A opažali su visine zvijezda, određivali lokalno vrijeme te meridijan odnosno geografsku širinu u točki A (φ_A) te zenitne udaljenosti zvijezda koje su sjekle meridijan. Iz tih veličina odredili su azimut u točki A prema B (α_{AB}). U točki N opažali su zenitne

udaljenosti istih zvijezda kao u točki A iz kojih su odredili geografsku širinu točke N (φ_N), odnosno razlike geografskih širina između točaka A i N (slika 4.3a).

Upotrebom drvenog pravokutnog okvira duljine 20 stopa direktno su mjerili udaljenosti: AB granicu između država Delaware i Maryland, BD kratku liniju koja se pruža u smjeru istok-zapad, CD i PN koje prate smjer meridijana te CP luk paralele koja je ujedno i najjužniji dio granice države Pennsylvanije (slika 4.3a).

Prema slici 4.3b, duljina luka meridijana (s) definirana je s udaljenošću AN′, koja je dobivena zbrajanjem udaljenosti N′P′, P′D′, D′B′ i B′A. Te udaljenosti dobivene su projekcijom lukova paralela kroz točke B, D, C, P i N na meridijan koji prolazi točkom A.

4.2.7. Luk meridijana u Austriji

Joseph Liesganig (1719–1799) započeo je mjerenje luka meridijana između Soběšica u blizini Brna u današnjoj Republici Češkoj i Varaždina u Hrvatskoj 1762. godine, a prema naredbi Marije Terezije. Mjerenje područja od gotovo tri meridijanska stupnja (2°57') završeno je 1767. Triangulacijski lanac sastojao se od 22 velika trokuta, iz kojih je izračunao duljinu luka jednog stupnja meridijana od 57 077 toaza (111 243,073 m) na srednjoj geografskoj širini 47°40'N (Liesganig 1768, Hutton i dr. 1809, Gregory 1819, Butterfield 1906).

Instrumenti kojima se Liesganig služio dobrim dijelom bili su oni kojima je Bošković provodio svoju geodetsku izmjeru. U *Philosophical Transactions* mogu se pronaći i kratki izvještaji u obliku pisma o astronomskim opažanjima koja je Liesganig provodio za potrebe određivanja duljine luka tzv. Bečkog meridijana (vidi Bevis i Liesganig 1765). Iz sadržaja tog pisma može se primijetiti kako je Bošković imao veliki utjecaj prilikom odluke da se mjerenja provedu.

Bialas (1982) u tablici 10 na stranici 166 navedena je vrijednost duljine luka meridijana od 56 984 francuskih hvata na srednjoj geografskoj širini 47°20'N. U knjizi *Voyage astronomique...* (Maire i Boscovich 1770) za duljinu Austrijskog luka napisana je vrijednost 57 091 francuskih hvata. Nije mi poznato zašto se ona razlikuje od vrijednosti koju je dobio Liesganig.

4.2.8. Vrijednosti duljina luka meridijana koje je Bošković upotrebljavao u svojim analizama

U tablici 4.1. prikazane su vrijednosti opisanih duljina jednog stupnja meridijana koje je Bošković upotrebljavao u knjizi *Voyage astronomique...* za određivanje oblika i veličine Zemlje. Iste vrijednosti mogu se pronaći u *Philosophical Transactions* iz godine 1768. u dodatku (*Postskriptumu*) Astronomer Royala, koji se nalazi nakon izvještaja Masona i Dixona (1768) na str. 327.

Tablica 4.1. Duljine jednog stupnja meridijana i pripadne geografske širine. Vrijednosti u drugom i trećem stupcu preuzete su od Mairea i Boscovicha (1770)

Mjesto mjerenog stupnja meridijana	Srednja geografska širina luka meridijana	Duljina luka [francuski hvat]
Quito	0° 0'	56 750
Rt dobre nade	33° 18'	57 037
Maryland-Delaware	39° 12'	56 888
Rim	43° 00'	56 979
Pijemont	44° 44'	57 069
Francuska	45° 00'	57 028
Austrija	47° 40'	57 091
Pariz	49° 23'	57 074
Laponija	66° 20'	57 422

4.3. Formula za računanje duljine luka meridijana

Prilikom rješavanja različitih zadataka u geodeziji Zemljin oblik aproksimiramo nekim matematičkim modelom, elipsoidom ili sferom.

Rotacijski elipsoid u R^3 s poluosima a i b i sa središtem u ishodištu prostornog pravokutnog koordinatnoga sustava je skup (Lapaine 1994)

$$E = \left\{ (X,Y,Z) : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \right\}. \tag{4.1}$$

Neka je $\Omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ i preslikavanje $\mathrm{R}: \Omega \to E$, $R(\varphi, \lambda) = (X, Y, Z)$ zadano formulama:

$$X = N \cos\varphi \cos\lambda, \qquad Y = N \cos\varphi \sin\lambda, \qquad Z = \frac{b^2}{a^2} N \sin\varphi \tag{4.2}$$

Izraz za prvu diferencijalnu formu rotacijskog elipsoida glasi

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2\varphi d\lambda^2 \tag{4.3}$$

gdje su φ geografska širina, λ geografska dužina točke na elipsoidu.

Polumjer zakrivljenosti meridijana (M), polumjer zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu (N) i prvi ekscentricitet (e) dobijemo pomoću izraza

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2\varphi)^3}}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}. \tag{4.4}$$

Kako je uzduž meridijana $d\lambda$=0, izraz za diferencijal duljine luka meridijana glasi

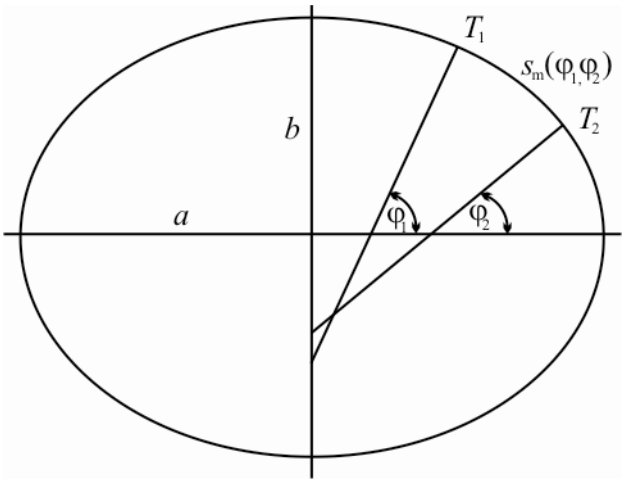
$$ds_m = M d\varphi. \tag{4.5}$$

Integriranje izraza (4.5), duljina luka meridijana od ekvatora do točke s geografskom širinom φ, dobije se pomoću izraza

$$s_m(\varphi) = \int_0^{\varphi} M d\varphi \tag{4.6}$$

odnosno duljina luka meridijana između dviju točaka s geografskim širinama φ_1 i φ_2 (slika 4.4.)

$$s_m = s_m(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = s_m(\varphi_2) - s_m(\varphi_1). \tag{4.7}$$



Slika 4.4. Duljina luka meridijana s_m između dviju točaka s geografskim širinama φ_1 i φ_2

Integral (4.6) i (4.7) nije moguće izravno integrirati jer je riječ o tzv. nepotpunom eliptičkom integralu III. vrste, pa se na podintegralne funkcije primjenjuju razvoji u redove trigonometrijskih funkcija. U radu Lapainea (1990), autor je dao novi oblik formule za računanje duljine luka meridijana koja je za praktičnu primjenu najučinkovitija, a dobije se izravno s pomoću parametara razmatranog elipsoida

$$s_m(\varphi) = A[\varphi + \sin 2\varphi(c_1 + (c_2 + (c_3 + (c_4 + c_5 \cos 2\varphi)\cos 2\varphi)\cos 2\varphi)\cos 2\varphi)\ ] + ..., \quad (4.8)$$

gdje se konstanta A, tzv. polumjer rektificirajuće sfere, c pomoćni koeficijenti i treća spljoštenost n određuju s pomoću izraza:

$$A = a(1-n)(1-n^2)(1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4 + ...) \quad (4.9)$$

$$c_1 = -\frac{3}{2}n + \frac{31}{24}n^3 - \frac{669}{640}n^5 + ...$$

$$c_2 = \frac{15}{8}n^2 - \frac{435}{128}n^4 + ...$$

$$c_3 = -\frac{35}{12}n^3 + \frac{651}{80}n^5 + ... \quad (4.10)$$

$$c_4 = \frac{315}{64}n^4 + ...$$

$$c_5 = -\frac{693}{80}n^5 + ...$$

$$n = \frac{a-b}{a+b}. \tag{4.11}$$

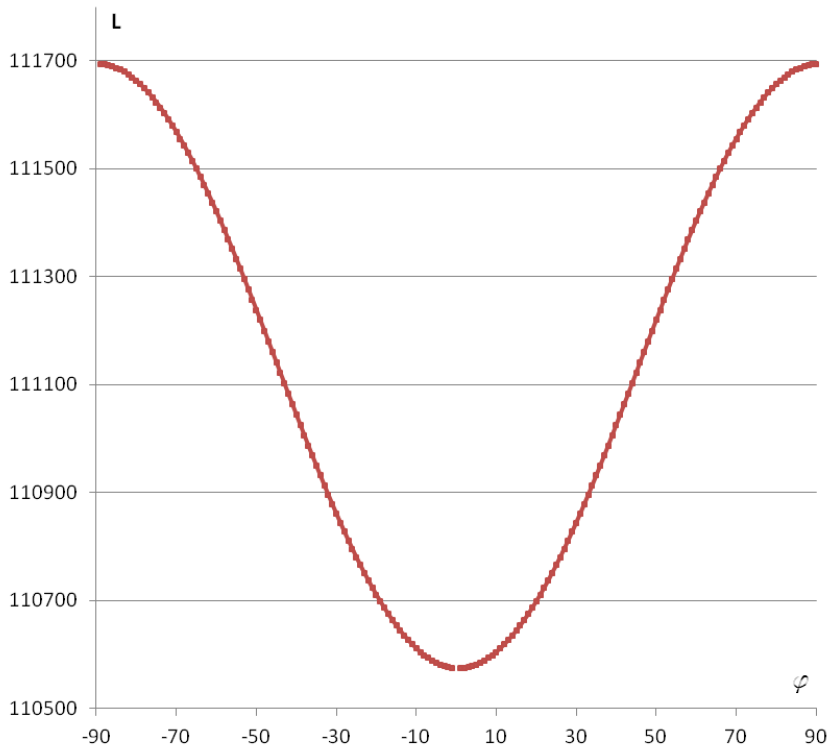
4.3.1. Računski primjer

Numeričke vrijednosti koeficijenata n, A, c_1, c_2, c_3, c_4 i c_5 potrebnih za računanje duljine luka meridijana izračunala sam pomoću izraza (4.9), (4.10) i (4.11) za elipsoid GRS80 te su one prikazane u tablici 4.2. Koeficijenti su izračunati uz pomoć definiranih vrijednosti za malu b i veliku a poluos elipsoida GRS80.

Tablica 4.2. Numeričke vrijednosti koeficijenata za elipsoid GRS80

Koeficijent	Vrijednost [m]
a	6 378 137,0000 [zadano]
b	6 356 752,3141 [zadano]
n	0,001 679 22
A	6 367 449,1458
c_1	–0,002 518 82
c_2	$5{,}287\,062\,62 \cdot 10^{-6}$
c_3	$-1{,}381\,040\,72 \cdot 10^{-8}$
c_4	$3{,}913\,464\,37 \cdot 10^{-11}$
c_5	$-1{,}156\,596\,18 \cdot 10^{-13}$

Na slici 4.5. prikazane su duljine luka meridijana koje odgovaraju 1° geografske širine. Vrijednosti su izračunate pomoću izraza (4.7) i (4.8) te koeficijenata iz tablice 4.2. za elipsoid GRS80.



Slika 4.5. Duljine luka meridijana koje odgovaraju 1° geografske širine za elipsoid GRS80

Tablica 4.3. Usporedba duljina luka meridijana korištenih u djelu *Voyage astronomique...* preračunatih u metre i izračunatih za elipsoid GRS80

Mjesto mjerenog stupnja meridijana	Duljina luka (Maire i Boscovich 1770) [m]	Duljina luka na GRS80 [m]	Razlika duljina luka [m]	Razlika duljina luka [%]
Quito	110 605,750	110 574,550	31,200	0,028
Rt dobre nade	111 165,113	110 909,824	255,289	0,230
Maryland-Delaware	110 874,712	111 019,313	–144,601	–0,130
Rim	111 052,071	111 092,747	–40,676	–0,037
Pijemont	111 227,481	111 126,567	100,914	0,091
Francuska	111 147,572	111 131,787	15,785	0,014
Austrija	111 270,359	111 183,739	86,620	0,078
Pariz	111 237,226	111 217,138	20,088	0,018
Laponija	111 915,478	111 512,265	403,213	0,362

Pomoću izraza (4.8), vrijednosti koeficijenata iz tablice 4.2., te vrijednosti geografskih širina iz tablice 4.1., izračunate su duljine luka meridijana na elipsoidu GRS80. Dobivene vrijednosti prikazane su u tablici 4.3. te su uspoređene s vrijednostima duljina luka meridijana koje su korištene u Boškovićevim radovima.

4.4. Boškovićeva geometrijska metoda izjednačenja

U svojim radovima Bošković daje samo geometrijsko objašnjenje metode izjednačenja. U sažetku glavnoga djela *De Litteraria…* objavljenog u spisu Bolonjskog instituta (Boscovich 1757) navodi da se algebarskim računom koristio samo da bi na temelju geometrijskih rješenja sastavio kratke formule, koje odmah daju rješenje (Boscovich 1757). Bošković postavlja problem na sljedeći način: potrebno je izračunati srednju spljoštenost (eliptičnost, fr. *ellipticité*, lat. *ellipticitate*) iz svih mjerenih i međusobno uspoređenih stupnjeva meridijana. Uzimajući u obzir odnos koji moraju imati razlike stupnjeva meridijana, kao i zakone vjerojatnosti koji se tiču popravaka, potrebno je stupnjeve korigirati da ih se svede na taj odnos. Kako bi se dobila takva sredina, koja nije jednostavno aritmetička sredina, već se vodi zakonom o slučajnim kombinacijama i o računu vjerojatnosti, s obzirom na određeni broj stupnjeva meridijana, treba naći popravke i primijeniti ih na svaki mjereni meridijanski stupanj, uvažavajući tri zahtjeva. Bošković postavlja sljedeća tri zahtjeva (Boscovich 1757, Stay 1760, Maire i Boscovich 1770):

1. da razlike stupnjeva meridijana budu proporcionalne razlikama sinus versusa dvostrukih geografskih širina
2. da zbroj pozitivnih popravaka bude jednak zbroju negativnih popravaka (po apsolutnoj vrijednosti) i
3. da zbroj apsolutnih vrijednosti svih popravaka, kako pozitivnih tako i negativnih, bude što je moguće manji.

Sinus versus – (pre)okrenuti sinus (lat. *versus* = (pre)okrenut), trigonometrijska funkcija koja se danas više ne koristi, a definira se kao versin $\varphi = 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\varphi$.

Bošković je postavio prvi zahtjev iz zahtjeva zakona ravnoteže, tj. pretpostavke da Zemlja ima oblik elipsoida. Naime, Isaac Newton (1643–1728) je u svom djelu *Philisophiae Naturalis Principia Mathematica* (djelo poznato pod nazivom *Principia*) iz

1687., pokazao kako zbog utjecaja centrifugalne sile uslijed Zemljine dnevne rotacije oko svoje osi i međusobnog privlačenja masa između planeta, možemo očekivati da će Zemlja na polovima biti spljoštena, a na ekvatoru ispupčena. Pritom je primijenio svoju teoriju gravitacije. Pretpostavljajući da se Zemlja može smatrati rotirajućim fluidom koji se zajedno drži svojom snagom privlačenja, u propoziciji 19, knjiga 3, Newton daje dokaz da je Zemljin oblik sferoid (tijelo oblikom slično obliku kugle s malom spljoštenošću koji se danas naziva elipsoid) spljošten na polovima koji odgovara elipsi koja rotira oko svoje kraće osi. Također je izračunao njezinu eliptičnost prema zahtjevu da će dva vodena kanala koja vode prema središtu Zemlje, jedan iz pola, a drugi iz ekvatora, biti u tlačnoj ravnoteži u središtu. U svojim računanjima Newton također uzima u obzir promjene gravitacijske sile unutar Zemlje zbog njezina iskrivljenog oblika, o čemu raspravlja u propoziciji 91, korolar 3, knjiga 1 (Newton 1726, Todhunter 1873, Nauenberg 2012).

Newton (1726) u svom djelu *Principia* u knjizi 3 u propoziciji 20 navodi: „Odakle proizlazi ovaj Teorem, da će se povećanje težine mijenjati od ekvatora prema polovima približno kao versus sinus dvostruke geografske širine, odnosno, isto, kao kvadrat sinusa geografske širine; i lukovi stupnjeva geografske širine u meridijanu se povećavaju približno u istom omjeru.“ (eng. „*Whence arises this Theorem, that the increase of weight in passing from the equator to the poles is nearly as the versed sine of double the latitude; or, which comes to the same thing, as the square of the right sine of the latitude; and the arcs of the degrees of latitude in the meridian increase nearly in the same proportion.*”).

Drugi zahtjev proizlazi iz činjenice da otklon njihala ili pogreške opažača koje povećavaju ili umanjuju stupnjeve imaju isti stupanj vjerojatnosti, odnosno da su pogreške pozitivnog i negativnog predznaka jednako vjerojatne. Kako bi se ispunio drugi zahtjev, zbroj svih vrijednosti popravaka treba izjednačiti s nulom i navodi da je to jedini zahtjev u kojem se može zbroj pozitivnih izjednačiti s negativnim po apsolutnoj vrijednosti (Stay 1760, Maire i Boscovich 1770).

Treći zahtjev je nužan da bi se aproksimirale mjerene veličine što je bolje moguće jer su pogreške mjerenja vrlo vjerojatno jako male. Bošković je treći zahtjev postavio i zbog toga što rješenje nije u potpunosti definirano pomoću prva dva postavljena zahtjeva (Stay 1760, Maire i Boscovich 1770).

4.4.1. Primjena Boškovićeve geometrijske metode izjednačenja na pet mjerenih stupnjeva meridijana

U postupku računanja s pet mjerenih stupnjeva meridijana korištene su vrijednosti prikazane u tablici 4.4. Duljine luka meridijana i odgovarajuće im geografske širine (2. i 4. stupac u tablici 4.4.) preuzete su iz Boškovićevih izvornika (Maire i Boscovich 1755, Boscovich 1757, Stay 1760). Ostale vrijednosti u tablici izračunate su iz tih vrijednosti. Zbog lakšeg računanja umjesto sinus versusa dvostrukih širina uzete su njihove polovične vrijednosti (prema Maire i Boscovich 1755).

Računajući sinus versuse došla sam do zaključka da se u Boškovićevim djelima (Maire i Boscovich 1755, Boscovich 1757, Stay 1760) pri računanju s pet meridijanskih stupnjeva upotrebljava pogrešna vrijednost (2987) za vrijednost polovine sinus versusa dvostruke geografske širine za mjerenje na Rtu dobre nade. Kod računanja s devet meridijanskih stupnjeva u knjizi (Maire i Boscovich 1770) ta vrijednost je ispravljena i iznosi 3014 kao što je prikazano u trećem stupcu tablice 4.4. Vrijednost 2987 polovine sinus versusa dvostruke širine pripada geografskoj širini 33°8', što ne odgovara ni jednom mjerenju geografske širine na Rtu dobre nade u to doba.

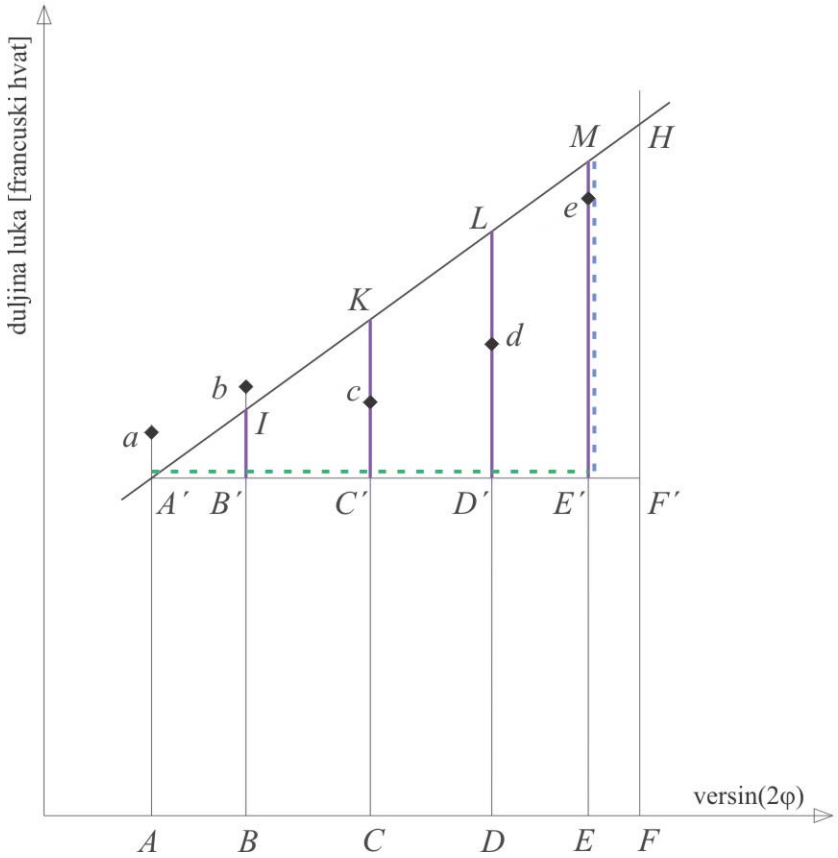
Tablica 4.4. Pet mjerenih meridijanskih stupnjeva i pripadajuće im geografske širine (veličine iz drugog i četvrtog stupca preuzete iz (Maire i Boscovich 1755)). Vrijednost polovine versus sinusa dvostruke geografske širine na Rtu dobre nade popravljena je prema vrijednosti objavljenoj u (Maire i Boscovich 1755).

Mjesto mjerenog meridijanskog stupanja	Geografska širina izmjerenog stupnja	½ ver. sin. pomnožen s 10 000	Iznos duljine luka [francuski hvat]	Razlike od prvog stupnja mjerenog u Quitu [francuski hvat]
Quito	0° 0'	0 (*AA*)	56 751 (*Aa*)	0 (*A'a*)
Rt dobre nade	33 18	3014 (*AB*)	57 037 (*Bb*)	286 (*B'b*)
Rim	42 59	4648 (*AC*)	56 979 (*Cc*)	228 (*C'c*)
Pariz	49 23	5762 (*AD*)	57 074 (*Dd*)	323 (*D'd*)
Laponija	66 19	8387 (*AE*)	57 422 (*Ee*)	671 (*E'e*)

Boškovićev postupak za određivanje popravaka može se opisati na sljedeći način. U pravokutnom koordinatnom sustavu (slika 4.6.) na apscisi se nanose sinusi versusi

dvostrukih širina pet izmjerenih stupnjeva. Točke *B*, *C*, *D* i *E* ucrtavaju se kao da su mjereni na ekvatoru iz točke *A*. Na ordinatu se nanose segmenti *Ee*, *Dd*, *Cc*, *Bb* i *Aa* koji predstavljaju pet stupnjeva meridijana koji se trebaju popraviti. Ti segmenti okomiti su na *AF*. Veličinu *AF* možemo smatrati kao jednu jedinicu duljine, dok *A*, *B*, *C*, *D* i *E* predstavljaju pet vrijednosti $sin^2\varphi_i$, odnosno $\frac{1}{2}versin(\varphi)$ označenih na tom jediničnom intervalu. Ekvator prolazi kroz *A*, a geografski Sjeverni pol kroz *F*.

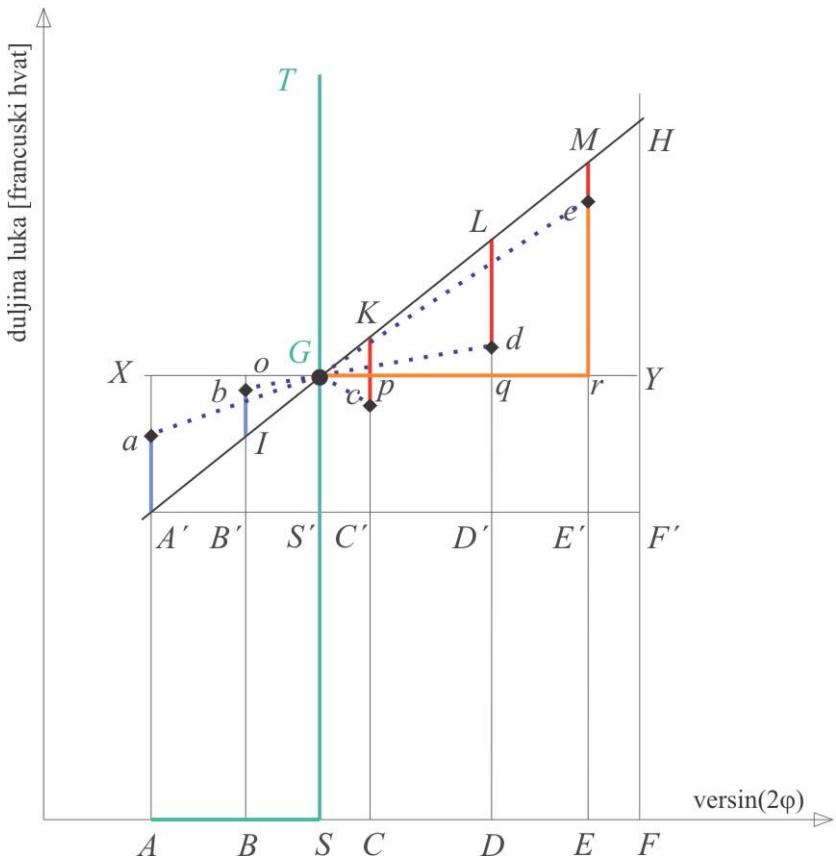
Bošković navodi da povuče li se bilo koji pravac *A'H* koji siječe te segmente, može se odrediti stupanj koji će ispuniti prvi zahtjev. Ako kroz točku *A'* povučemo pravac *A'F'* koji je paralelan s *AF,* tada će određeni stupnjevi meridijana sjeći taj pravac u točkama *E'*, *D'*, *C'* i *B'*. Tako dobivene veličine *E'M*, *D'L*, *C'K*, *B'I* i *A'A'* (nula) predstavljaju razlike stupnjeva prema stupnju na ekvatoru i one su proporcionalne s veličinama *A'E'*, *A'D'*, *A'C'*, *A'B'* i *A'A'* (nula) odnosno sa versusima sinusima *AE*, *AD*, *AC*, *AB* i *AA* (nula) (Maire i Boscovich 1770). Na slici 4.6. prikazana je proporcionalnost za mjereni stupanj u točki *e* crtkanim (ljubičastom i zelenom) linijama.



Slika 4.6. Proporcionalnost za stupanj u točki *e*

Prva točka pravca *A'H* može se odrediti pomoću drugog zahtjeva, da zbroj pozitivnih popravaka bude jednak zbroju negativnih popravaka po apsolutnoj vrijednosti.

Odsječci na ordinati *eM*, *dL*, *cK*, *bI* i *aA'* popravci su pozitivnog (označeni plavom linijom na slici 4.7.) ili negativnog (označeni crvenom linijom na slici 4.7.) predznaka. Predznak im ovisi o tome nalaze li se točke *e, d, c, b* i *a* s jedne ili druge strane pravca *A'H* u odnosu na *AF*. Drugi zahtjev bit će zadovoljen kada pravac prolazi zajedničkim središtem gravitacije *G* odnosno težištem navedenih točaka. Prema dobro poznatom svojstvu težišta (centra gravitacije) zbroj udaljenosti svih točaka koje se nalaze s jedne strane, u bilo kojem smjeru, jednak je zbroju svih udaljenosti koje se nalaze s druge strane pravca (Maire i Boscovich 1770).



Slika 4.7. Pojednostavnjena slika 7 iz Boškovićeva prvog priloga s pomoćnim veličinama koje su potrebne za računanje

Koordinate težišta *G* određene su veličinama *AS* i *SG* (veličine su prikazane na slici 4.7. zelenim linijama). Geografska širina kojoj odgovara položaj točke *G* definirana je

udaljenošću *AS*. Vrijednost *AS* izračunata je dijeljenjem zbroja vrijednosti trećeg stupca tablice 4.4. s brojem mjerenja.

$$AS = \frac{AA + AB + AC + AD + AE}{5} = 4362{,}2. \tag{4.12}$$

Veličina *SG* definira položaj točke *G* u potpunosti. Ta veličina nanosi se okomito na *AF*, a računa se kao aritmetička sredina veličina koje se nalaze u četvrtom stupcu tablice 4.4.

$$SG = \frac{Aa + Bb + Cc + Dd + Ee}{5} = 57052{,}6. \tag{4.13}$$

Budući da je Bošković za mjerenje na Rtu dobre nade upotrebljavao pogrešnu vrijednost polovine versus sinusa (2987), njegovi se rezultati djelomično razlikuju od dobivenih u (4.12) i (4.13). Veličina *AS* koju je Bošković izračunao iznosi 4356,6, dok se veličina *SG* podudara s dobivenom u (4.13).

Veličine *AS* i *SG* određuju prvi meridijanski stupanj koji definira pravac. Kroz točku *G* može se postaviti beskonačan broj pravaca, a da zadovolje prva dva zahtjeva.

Kako bismo definirali drugu točku pravca koji zadovoljava traženi minimum, potrebno je poznavati još barem jedan stupanj. U tom slučaju možemo provesti treći zahtjev.

Da bi se zadovoljio treći zahtjev potrebno je odrediti kojim će redoslijedom pomični pravac, koji rotira oko točke *G*, prolaziti svakom točkom. Zamisli se pravac *A'GH*, s početnim položajem *SGT* (što je prikazano zelenom bojom na slici 4.7.), kako se vrti oko točke *G* u smjeru kazaljke na satu. U početku će on s tom osi zatvarati mali kut, a pogreške *aA*, *bI*, *cK*, *dL* i *eM* će biti velike. Rotacijom pravca, apsolutne vrijednosti popravaka će se smanjivati sve dok pravac ne dođe do neke točke *a, b, c, d* ili *e*. Kada pravac padne u neku od točaka poništava se popravak u toj točki. Čim pravac prođe tu točku popravak koji odgovara toj točki promijenit će predznak i počet će rasti. Istodobno apsolutne vrijednosti popravaka ostalih točaka do kojih pravac još nije došao nastavit će se smanjivati. Zbroj svih popravaka smanjivat će se sve dok zbroj popravaka koji se povećavaju ne bude veći od zbroja popravaka koje se smanjuju. Zbroj svih popravaka bit će najmanji, kada zbroj popravaka koji se povećava prestane biti manji od zbroja popravaka koji se smanjuje. Taj zaključak proizlazi iz činjenice što je zbroj popravaka s pozitivnim i negativnim predznakom međusobno jednak ako promatramo njihovu apsolutnu vrijednost i svaki sadrži polovinu cjelokupnog zbroja (Maire i Boscovich

1755). Te promjene popravaka proporcionalne su dužinama *AS*, *BS*, *CS*, *DS*, *ES*. Dakle, suma dužina *AS*, *BS*,..., koje su s lijeve strane *S*, jednaka je sumi onih koje su desno od *S*, a jednaka je i polovici svih dužina *AS*, *BS*,....

Redoslijed po kojem pomični pravac prolazi svakom točkom određuje se numerički. Bošković ipak navodi da računanje neće biti potrebno već će sama konstrukcija, pod uvjetom da je točna, biti dovoljna da se odredi kojim redoslijedom pravac prolazi kroz pojedinu točku.

Kroz točku *G* položi se pravac *XY* paralelno s *AF*. Okomice na *AF* koje prolaze točkama *A*, *B*, *C*, *D* i *E* sjeći će pravac *XY* u *X*, *o*, *p*, *q* i *r*. Ako se sada zamisli da je težište *G* ishodište pravokutnoga koordinatnog sustava, tada kutovi *SGY*, *YGT*, *TGX* i *XGS* tvore kvadrante tog sustava. Prvo treba odrediti u kojem se kvadrantu nalazi svaka točka budući da se svaka od njih nalazi lijevo ili desno u odnosu na *SGT*, ovisno o tome je li njezin sinus versus manji ili veći od *AS*. Isto tako svaka mora biti ispod ili iznad *XGY* ovisno o tome hoće li njezin stupanj biti manji ili veći od *SG*.

Također treba pronaći i tangense kutova koje čine ili *GS* ili *GT* s pravcem koji prolazi kroz pojedinu točku (označeni plavom točkastom linijom na slici 4.7.). Ako pravac prolazi kroz točku *e* tada vrijedi da je *re* u odnosu prema *Gr*, kao što je radijus prema tangensu kuta *reG*, ili *eGT*, pa su oni u odnosu koji možemo pisati na sljedeći način:

$$\mathrm{tg}\ reG = \frac{Gr}{re}. \tag{4.14}$$

Budući da je *Gr* razlika sinus versusa točke *e* i sinus versusa *AS* (vrijednosti u tablici 4.5, redak A), a *re* je razlika stupnjeva *Ee* i *SG* (vrijednosti u tablici 4.5, redak B), te vrijednosti treba podijeliti i s pomoću njih složiti niz brojeva (vrijednosti u tablici 4.5, redak C). Niz započinje rastućim nizom brojeva pozitivnog predznaka (točke koje se nalaze u prvom i trećem kvadrantu koordinatnog sustava), a nastavlja silaznim nizom brojeva negativnog predznaka (točke koje se nalaze u drugom i četvrtom kvadrantu koordinatnog sustava).

Za određivanje veličina iz tablice 4.5. potrebno je izračunati udaljenosti *aX*, *bo*, *cp*, *dq* i *er* (tablica 4.5, redak B) prema pravcu *XY*. Navedene udaljenosti računaju se kao razlike veličine *S'G* i veličina *A'a*, *B'b*, *C'c*, *D'd* i *E'e* koje se nalaze u petom stupcu tablice 4.4. Veličina *S'G* jednaka je aritmetičkoj sredini brojeva petog stupca tablice 4.4. i iznosi 301,6.

Udaljenosti *AS*, *BS*, *CS*, *DS* i *ES* točaka *a*, *b*, *c*, *d* i *e* u odnosu na pravac *SGT* jednake su udaljenostima veličine *AS* od veličina *AA*, *AB*, *AC*, *AD* i *AE* (treći stupac u tablici 4.4.).

Tablica 4.5. Pomoćne računske veličine za rješavanje trećeg zahtjeva kod pet meridijanskih stupnjeva

	Quito (*a*)	**Rt dobre nade (*b*)**	**Rim (*c*)**	**Pariz (*d*)**	**Laponija (*e*)**
A	4362,2 (*AS*)	1348,2 (*BS*)	–286,8 (*CS*)	–1400,8 (*DS*)	–4025,8 (*ES*)
B	301,6 (*aX*)	15,6 (*bo*)	73,6 (*cp*)	–21,4 (*dq*)	–369,4 (*er*)
C=A/B	14,5	86,4	–3,9	65,4	10,9

Tangensi kutova (tablica 4.5, redak C) računaju se kao omjer veličina retka A i B tablice 4.5. Slaganjem niza s dobivenim vrijednostima retka C iz tablice 4.5., pomični pravac siječe točke ovim redoslijedom *e, a, d, b, c*.

Da bi se pronašao položaj pravca koji će zadovoljiti traženi minimum (da zbroj svih popravaka bude najmanji moguć), zbrajaju se apsolutne vrijednosti veličina iz retka A tablice 4.5. po navedenom redoslijedu sve dok zbroj veličina ne prijeđe polovinu ukupnog zbroja apsolutnih vrijednosti veličina iz retka A.

Prva apsolutna vrijednost za točku *e* iznosi 4025,8 i ona je manja od polovine zbroja apsolutnih vrijednosti koja iznosi 5710. Kada se vrijednosti *e* doda sljedeća vrijednost iz niza (*a*) koja iznosi 4362,2, njihov zbroj iznosi 8388. Ta veličina prelazi polovinu ukupnog zbroja apsolutnih vrijednosti. Dakle, kada pomični pravac dođe do točke *a* dobije se traženi minimum.

Pravac koji prolazi točkama *a* i *G* dat će najmanji zbroj svih popravaka (zadovoljit će treći zahtjev), a ujedno će i zbroj popravaka pozitivnog i negativnog predznaka biti jednak po apsolutnoj vrijednosti (zadovoljit će drugi zahtjev). Isto tako točka *a* ostaje bez popravka budući da pravac koji daje minimum prolazi upravo kroz tu točku.

Pronalaskom pravca koji zadovoljava uvjete definirana su dva meridijanska stupnja s pomoću kojih se mogu pronaći svi ostali stupnjevi i njihove korekcije.

Za određivanje popravaka *bI, cK, dL* i *eM* potrebno je izračunati veličinu *F'H,* razliku dužina stupnja na polu i na ekvatoru pomoću omjera

$$aS':S'G = A'F':F'H \quad \rightarrow \quad F'H = \frac{301{,}6 \cdot 10000}{4362{,}2} = 691{,}4 \text{ francuska hvata.} \qquad (4.15)$$

Veličina *F'H* koja je dobivena u (4.15) razlikuje se od one koju je izračunao Bošković za samo 0,6 francuska hvata, odnosno ona iznosi 692 francuska hvata.

Poštujući zahtjev proporcionalnosti pomoću razlika veličina *B'I, C'K, D'L* i *E'M* od *B'b, C'c, D'd* i E'*e* računaju se popravci određenih meridijanskih stupnjeva. Veličine *B'I, C'K, D'L* i *E'M* (tablica 4.6., kolona 2) udaljenosti su od pravca *A'H* do pravca *A'F'*. Postupak njihova računanja prikazan je na primjeru veličine *B'I* koja se dobije iz omjera

$$A'F':A'B' = F'H:B'I \quad \Rightarrow \quad B'I = \frac{3014 \cdot 691{,}4}{10000} = 208{,}4. \qquad (4.16)$$

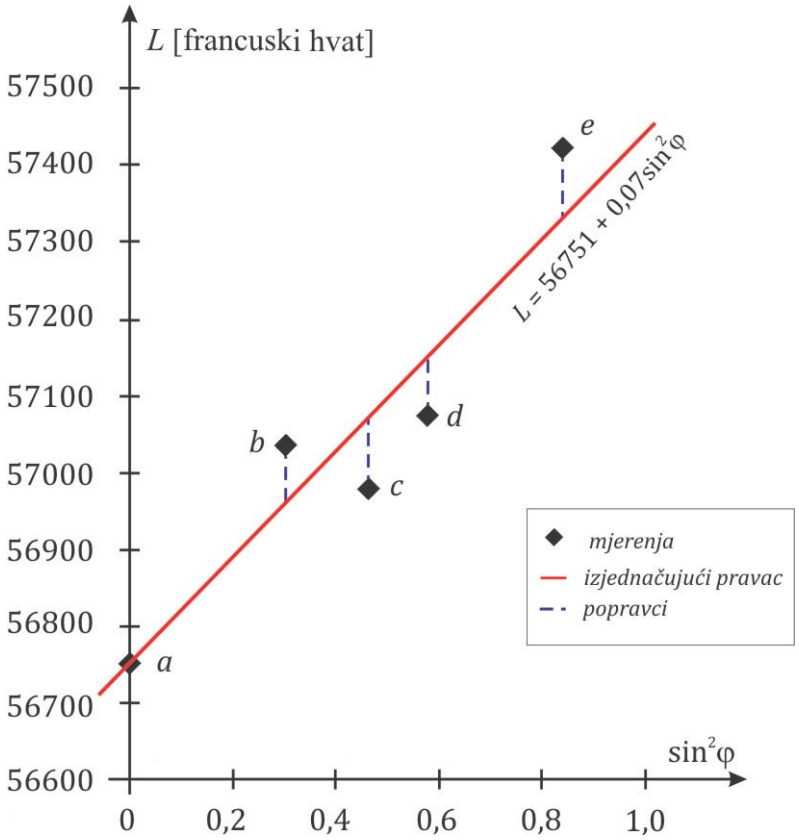
Veličine *B'b, C'c, D'd* i *E'e* razlike su određenih stupnjeva meridijana od prvog (*Aa*) jer on ostaje bez popravka. Njihove vrijednosti nalaze se u drugom retku tablice 4.6. kao i u petom stupcu tablice 4.4.

Tablica 4.6. Izračunate vrijednosti popravaka za pet meridijanskih stupnjeva.

	Quito (*a*)	**Rt dobre nade (*b*)**	**Rim (*c*)**	**Pariz (*d*)**	**Laponija (*e*)**
Udaljenosti pravaca *A'H* i *A'F'* [francuski hvat]	0	208,4	321,3	398,4	579,9
Razlike od prvog stupnja [francuski hvat]	0	286,0	228,0	323,0	671,0
Popravci [francuski hvat]	0	–77,6	+93,3	+75,4	–91,1

Zbroj popravaka s pozitivnim predznakom i onih s negativnim predznakom jednak je po apsolutnoj vrijednosti i iznosi 168,7 francuskih hvata čime je zadovoljen drugi zahtjev.

Budući da je Bošković već na početku računanja, za jedno mjerenje, upotrijebio pogrešnu vrijednost polovine sinus versusa (tablica 4.4.), njegovi se rezultati djelomično razlikuju. Vrijednosti popravaka u Boškovićevom petom dijelu knjige iznose: 0, –79,2, +93,8, +75,9, –90,5. Provede li se postupak računanja pomoću pogrešne vrijednosti koju je upotrijebio u svojim računanjima, dobiju se identični rezultati koje je dobio i Bošković.



Slika 4.8. Pet duljina luka meridijana i pravac koji zadovoljava traženi minimum

Pet duljina luka meridijana i pravac koji zadovoljava sve zahtjeve grafički su prikazani na slici 4.8. Jednadžba tog pravca glasi

$$L = 56751 + 0{,}07 \sin^2 \varphi. \tag{4.17}$$

4.4.2. Primjena Boškovićeve geometrijske metode izjednačenja na devet mjerenih stupnjeva meridijana

Metodu možemo, na isti način, primijeniti i na devet mjerenih meridijanskih stupnjeva prikazanih u tablici 4.1. Duljine luka meridijana i odgovarajuće im geografske širine preuzete su iz djela *Voyage astronomique...* (Maire i Boscovich 1770). U razdoblju od 15 godina između izdanja djela *De Litteraria...* i *Voyage astronomique...* trajala su mjerenja duljina luka meridijana i pripadajućih geografskih širina te su njihove vrijednosti popravljane za određeni iznos. Tako se može primijetiti da se pojedine vrijednosti u tablicama 4.1. i 4.4. razlikuju.

Tablica 4.7. Devet mjerenih meridijanskih stupnjeva i pripadajuće im srednje geografske širine (veličine iz drugog i četvrtog stupca preuzete iz (Maire i Boscovich 1770)).

Mjesto mjerenog meridijanskog stupanja		Geografska širina izmjerenog stupnja	½ sin. ver. pomnožen s 10 000	Iznos duljine luka [francuski hvat]	Razlike od prvog stupnja mjerenog u Quitu [francuski hvat]
Quito	(1)	0° 0'	0	56 750	0
Rt dobre nade	(2)	33 18	3014	57 037	287
Maryland-Delaware	(3)	39 12	3995	56 888	138
Rim	(4)	43 00	4651	56 975	225
Pijemont	(5)	44 44	4953	57 069	319
Francuska	(6)	45 00	5000	57 028	278
Austrija	(7)	47 40	5465	57 091	341
Pariz	(8)	49 23	5762	57 074	324
Laponija	(9)	66 20	8389	57 422	672

Da bi se odredio položaj točke *G* koji definira drugi zahtjev, potrebno je izračunati vrijednosti *AS* i *SG*. Zbrajanjem vrijednosti iz trećeg stupca tablice 4.7. i dijeljenjem tog zbroja s brojem 9 (jer toliko je mjerenih stupnjeva) dobije se *AS* i on iznosi 4581,0, dok se *SG* računa kao aritmetička sredina četvrtog stupca tablice 4.7., te iznosi 57 037,6 francuskih hvata. Vrijednost *SG* identična je s onom koja je iskazana u Bilješci petog dijela knjige *Voyage astronomique…*, a *AS* se razlikuje za dvije desetinke (4581,2) što je rezultat računanja s većim brojem decimalnih mjesta.

Udaljenosti točaka u odnosu na pravac koji prolazi kroz *SG* prikazane su u prvom retku tablice 4.8. (niz A). Te udaljenosti jednake su razlici *AS* i vrijednosti prikazanih u trećem stupcu tablice 4.7. Vrijednost *S'G* je aritmetička sredina vrijednosti petog stupca tablice 4.7. i iznosi 287,6. Veličine u drugom retku tablice 4.8., koje tvore niz B, su razlike *S'G* i vrijednosti petog stupca tablice 4.7. Kada se podijele članovi niza A s odgovarajućim članom niza B, dobije se novi niz C čiji su članovi tangensi kutova. S pomoću njih slaže se novi niz vrijednosti, počinjući s rastućim nizom pozitivnog predznaka, a nastavlja se silaznim nizom negativnog predznaka, pomoću kojih definiramo kojim redoslijedom pomični pravac siječe točke. Redoslijed je sljedeći: 3, 9, 5, 1, 7, 8, 2, 6, 4.

Tablica 4.8. Pomoćne računske veličine za rješavanje trećeg zahtjeva kod devet meridijanskih stupnjeva (tablica sastavljena prema onoj iz Bilješke petog poglavlja *Voyage astronomique...* (Maire i Boscovich 1770)).

	Quito (1)	Rt dobre nade (2)	Maryland-Delaware (3)	Rim (4)	Pijemont (5)	Francuska (6)	Austrija (7)	Pariz (8)	Laponija (9)
A	4581,0	1566,7	586,4	–70,2	–372,5	–419,0	–883,7	–1181,0	–3807,7
B	287,6	0,6	149,6	58,6	–31,4	–9,6	–53,4	–36,4	–384,4
C	15,9	2820,1	3,9	–1,2	11,8	–43,8	16,5	32,4	9,9

Zbrajanjem vrijednosti, niza A, pozitivnih i negativnih predznaka dobije se ista apsolutna vrijednost kao u knjizi Mairea i Boscovicha (1770) i ona iznosi 6734,1. Za određivanje pravca koji zadovoljava minimum zbrajaju se apsolutne vrijednosti poredanih veličina retka A tablice 4.8. dok njihov zbroj ne prijeđe iznos 6734,1. Zbrajanjem veličina 3, 9 i 5 dobije se 4766,5, što još ne prelazi taj iznos. Ako se tom iznosu doda još i vrijednost za točku 1, odnosno Quito, dobije se 9347,5 koji ga prelazi tako da je minimum zadovoljen kada pravac padne u točku 1. Ako se usporedi u koju točku je pao pravac u primjeru računatom za pet meridijanskih stupnjeva, dolazi se do zaključka da je to ista točka mjerena u Quitu.

Tablica 4.9. Izračunate vrijednosti popravaka za devet meridijanskih stupnjeva

	Quito (1)	Rt dobre nade (2)	Maryland-Delaware (3)	Rim (4)	Pijemont (5)	Francuska (6)	Austrija (7)	Pariz (8)	Laponija (9)
Udaljenosti pravaca *A'H* i *A'F'* [fr. hvat]	0	189,2	250,7	292,0	310,9	313,9	343,0	361,7	526,6
Razlike od prvog stupnja [fr. hvat]	0	287,0	138,0	229,0	319,0	278,0	341,0	324,0	672,0
Popravci [fr. hvat]	0	–97,8	112,7	63,0	–8,1	35,9	2,0	37,7	–145,4

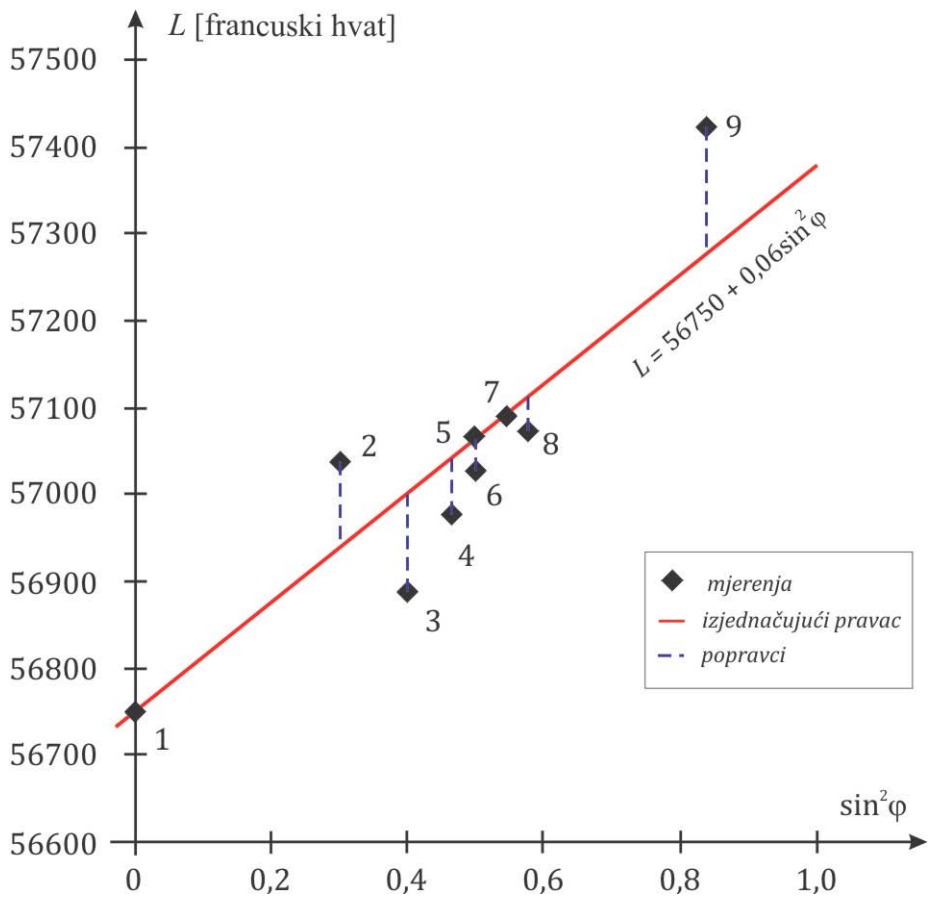
Opisanim načinom dobivena su dva meridijanska stupnja s pomoću kojih se mogu odrediti popravci odnosno razlike za koje mjereni stupnjevi prelaze stupanj na ekvatoru (mjerenje provedeno u Quitu ostaje bez popravka) (vidi 4.19). Razlika duljine stupnja na

ekvatoru i polu $F'H$ iznosi 627,7 francuskih hvata i računa se iz izraza (4.15). Množenjem brojeva iz četvrtog stupca tablice 4.7. sa $F'H$ i dijeljenjem tog umnoška s $A'F'$ = 10 000, dobiju se vrijednosti u prvom retku tablice 4.9. Tablica 4.9. sastavljena je radi lakšeg praćenja računanja popravaka koju Bošković u svojim djelima nije dao. Oduzimanjem veličina iz prvog i drugog retka (razlike iz petog stupca tablice 4.7.) iste tablice dobit će se popravci određenih meridijanskih stupnjeva.

Izračunate vrijednosti popravaka za prvo, četvrto, šesto i osmo mjerenje identične su s onima u Bilješci petog poglavlja *Voyage astronomique…*, dok se vrijednosti popravaka za drugo, treće, peto, sedmo i deveto mjerenje razlikuju samo za jednu desetinku francuskog hvata. Zbroj izračunatih popravaka s pozitivnim predznakom i onih s negativnim predznakom jednak je po apsolutnoj vrijednosti i iznosi 251,3 francuskih hvata čime je zadovoljen drugi zahtjev. U navedenom djelu zbroj popravaka s pozitivnim predznakom iznosi 251,5 francuskih hvata, a onih s negativnim predznakom −251,0 francuskih hvata. Aritmetička sredina apsolutnih vrijednosti tih dviju zbrojeva iznosi 251,25 francuskih hvata, što je za samo 5 stotinki francuskog hvata različito od ovdje dobivenih zbroja. Ta neznatna razlika vjerojatno je posljedica današnjeg načina računanja kada se u obzir uzimaju vrijednosti s više decimalnih mjesta što je dovelo do razlike u vrijednosti izračunate veličine *AS*. Stoga možemo smatrati da se izračunate vrijednosti podudaraju s onima iskazanim u djelu *Voyage astronomique…* te da sam Boškovićevu metodu ispravno primijenila.

Devet duljina luka meridijana i pravac koji zadovoljava sve zahtjeve grafički su prikazani na slici 4.9. Jednadžba tog pravca glasi

$$L = 56750 + 0{,}06 \sin^2 \varphi \tag{4.18}$$



Slika 4.9. Devet duljina luka meridijana i pravac koji zadovoljava traženi minimum.

4.5. Bošković-Laplaceova metoda izjednačenja

Geometrijsko rješenje kako ga je Bošković opisao nije odmah lako razumljivo, što su uočili i drugi autori koji su proučavali Boškovićevu metodu. Stoga će geometrijski opisana Boškovićeva metoda biti prikazana i u analitičkom obliku.

Pod pretpostavkom da Zemlja ima oblik elipsoida, male spljoštenosti na polovima, zbog svoje rotacije, duljine kratkih lukova mogu se aproksimirati linearnom funkcijom, čime je ispoštovan prvi Boškovićev zahtjev (Stigler 1986):

$$L_i + v_i = x + y\sin^2\varphi_i \qquad (i=1, 2,\ldots, n), \tag{4.19}$$

gdje su

x – duljina meridijanskog stupnja na ekvatoru

y – prirast (povećanje) duljine stupnja od ekvatora prema polu

L_i – duljina luka meridijana na položaju i za srednju širinu φ_i

φ_i – srednja geografska širina mjerenog luka na položaju i

v_i – popravak mjerene duljine luka meridijana.

Uz druge oznake izraz (4.19) može se napisati ovako

$$b_i + v_i = x + ya_i \qquad (i=1, 2,\ldots, n), \tag{4.20}$$

gdje su x i y parametri koje treba procijeniti. Jedan od problema kojima se Bošković bavio bio je određivanje vrijednosti parametara x i y koje su "najprikladnije" za n jednadžbi postavljenih u (4.20). Kako bi pronašao najprikladnije vrijednosti koeficijenata x i y, formirao je dodatna dva zahtjeva.

Drugi Boškovićev zahtjev glasi: neka zbroj pozitivnih popravaka bude jednak zbroju negativnih po apsolutnoj vrijednosti. Drugim riječima:

$$\sum_{j=1}^{m} v_j^+ = -\sum_{k=1}^{u} v_k^- \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{n} v_i = 0. \tag{4.21}$$

U izrazu (4.21) s v_j^+ označeni su popravci s pozitivnim predznakom, a s v_k^- popravci s negativnim predznakom. Iz (4.20) i (4.21) slijedi

$$\sum_{i=1}^{n} (x + ya_i - b_i) = 0. \tag{4.22}$$

Prema trećem zahtjevu zbroj apsolutnih vrijednosti svih popravaka treba biti što je moguće manji. Analitički taj treći zahtjev glasi:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x + ya_i - b_i \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| v_i \right| = \min. \tag{4.23}$$

Traženo rješenje dat će onaj par *(x, y)* za koji (4.23) poprima najmanju vrijednost. Iz (4.22) lako se dobije

$$x = \overline{b} - y\overline{a}, \tag{4.24}$$

gdje su

$$\overline{a} = \frac{\sum_i a_i}{n} \text{ i } \overline{b} = \frac{\sum_i b_i}{n}. \tag{4.25}$$

Drugim riječima, drugi zahtjev pokazuje da će Boškovićev najprikladniji pravac prolaziti kroz centroid (težište) zadanih točaka. Uvrstimo li (4.24) u izraz (4.23) jasno je da koeficijent y treba odrediti tako da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \left| (b_i - \overline{b}) - y(a_i - \overline{a}) \right| = \min . \tag{4.26}$$

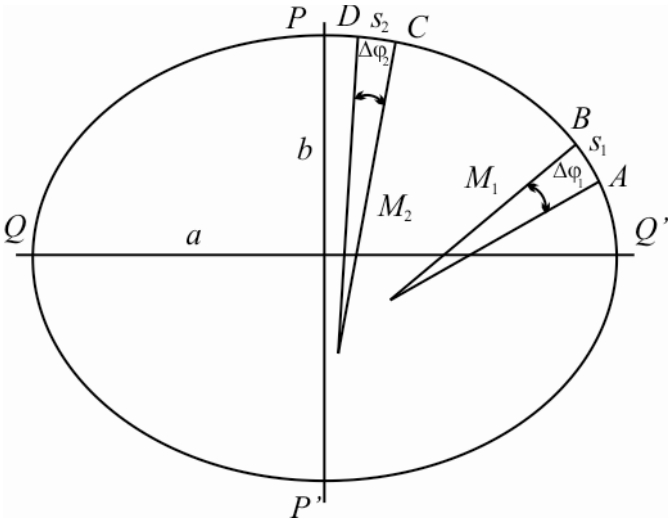
Za određivanje parametra y ne postoji gotova formula. Boškovićevu metodu smatramo zasebnom, a ujedno i prvom metodom izjednačenja koja je potaknula daljnje studije razrade problema izjednačenja (Čubranić 1961). Metoda se danas uglavnom koristi u modificiranom obliku koji se primarno temelji na Boškovićevu trećem zahtjevu, a najčešće se naziva izjednačenje po L_1-normi (Sneeuw i Krumm 2010).

4.6. Računanje parametara Zemljina elipsoida

Za određivanje parametara Zemljina elipsoida potrebno je izmjeriti barem dvije duljine luka meridijana. S obzirom na to da Zemlja nije jako spljoštena na polovima, preporučuje se da ta mjerenja budu provedena na što većim udaljenostima, odnosno da jedan duljina luka meridijana bude mjerena što bliže ekvatoru, a druga što bliže polu.

Neka su uzduž nekog meridijana $PQ'P'$ geodetskim metodama izmjerene duljine luka s_1 i s_2, a na krajnjim točkama tih duljina A, B, C i D astronomskim metodama izmjerene geografske širine. Iz razlika geografskih širina možemo izračunati Δ kutove φ_1 i $\Delta\varphi_2$ (slika 4.10.) pomoću izraza

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_B - \varphi_A , \quad \Delta\varphi_2 = \varphi_D - \varphi_C . \tag{4.27}$$



Slika 4.10. Duljine luka meridijana

Ako u obzir uzmemo kratke duljine s_1 i s_2 kao lukove kružnica, one su direktno proporcionalne duljini polumjera zakrivljenosti u srednjoj točki toga luka, odnosno možemo pisati (Merriman 1881, Čubranić 1974)

$$s_1 = M_1 \cdot \Delta\varphi_1 \cdot \frac{\pi}{180°} \quad \Leftrightarrow \quad M_1 = \frac{s_1}{\Delta\varphi_1} \cdot \frac{180°}{\pi} \tag{4.28}$$

$$s_2 = M_2 \cdot \Delta\varphi_2 \cdot \frac{\pi}{180°} \quad \Leftrightarrow \quad M_2 = \frac{s_2}{\Delta\varphi_2} \cdot \frac{180°}{\pi}. \tag{4.29}$$

Za polumjer zakrivljenosti meridijana *M* primijenimo izraz (4.4) i možemo pisati

$$M_1 = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi_{s_1})^3}} = \frac{s_1}{\Delta\varphi_1} \cdot \frac{180°}{\pi} \tag{4.30}$$

$$M_2 = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi_{s_2})^3}} = \frac{s_2}{\Delta\varphi_2} \cdot \frac{180°}{\pi}, \tag{4.31}$$

gdje su φ_{s_1} i φ_{s_2} geografske širine koje odgovaraju sredini lukova s_1 i s_2, dok je *e* prvi ekscentricitet. Imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice (*a* i *e*). Podijelimo li jednadžbu (4.30) s (4.31) i riješimo li je dobijemo za prvu nepoznanicu *e* izraz

$$e^2 = \frac{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{2/3} - 1}{\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{2/3} \cdot \sin^2 \varphi_{s_1} - \sin^2 \varphi_{s_2}}, \tag{4.32}$$

odnosno uvrstimo li izraze za M, nepoznanica e s pomoću mjerenih duljina luka meridijana dobije se kao:

$$e^2 = \frac{s_1^{2/3} - s_2^{2/3}}{s_1^{2/3} \cdot \sin^2 \varphi_{s_1} - s_2^{2/3} \cdot \sin^2 \varphi_{s_2}}. \tag{4.33}$$

Uvrstimo li izraz za e u jednadžbu (4.30) i (4.31), dobijemo izraz za vrijednost velike poluosi a

$$a = \frac{M_1(1 - e^2 \sin^2 \varphi_{s_1})^{2/3}}{1 - e^2} = \frac{M_2(1 - e^2 \sin^2 \varphi_{s_2})^{2/3}}{1 - e^2}. \tag{4.34}$$

Ostale parametre elipsoida možemo izračunati s pomoću izraza za a i e. Mala poluos elipsoida b dobije se s pomoću izraza

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \tag{4.35}$$

te spljoštenost μ

$$\mu = \frac{a - b}{a}. \tag{4.36}$$

4.6.1. Računanje parametara Boškovićeva elipsoida iz mjerenih duljina luka meridijana

Opisanom metodom u poglavlju 4.6. može se odrediti veličina Zemlje kombiniranjem dvaju mjerenih lukova meridijana. U drugoj polovini 18. stoljeća takvim načinom kombiniranja nekoliko izmjerenih lukova, uzimajući dvije po dvije duljine, dobio se nesklad među izračunatim vrijednostima za spljoštenost. Mnogi su znanstvenici toga doba pokušavali na različite načine kombinirati skupljene podatke kako bi dokazali da su meridijani elipse i izračunali jedinstvenu vrijednost za spljoštenost Zemlje. U tablici 4.1. prikazane su vrijednosti duljina luka jednog stupnja meridijana koje je

Bošković upotrebljavao prilikom pokušaja dokazivanja Zemljine spljoštenosti i njezina računanja.

Krenuvši od pretpostavke da kratke duljine izmjerenih lukova možemo smatrati kružnicama koje su proporcionalne duljini polumjera zakrivljenosti u srednjoj točki toga luka, duljinu bilo kojeg meridijanskog stupnja (L) možemo odrediti s pomoću izraza (Merriman 1881)

$$L = \frac{\pi \cdot M}{180°}. \tag{4.37}$$

Taj izraz u potpunosti se slaže sa (4.28) i (4.29). Uvrsti li se u (4.37) izraz za M iz (4.4), dobije se

$$L = \frac{\pi \cdot a}{180°}(1-e^2)\cdot(1-e^2\sin^2\varphi_s)^{-\frac{3}{2}}, \tag{4.38}$$

gdje je φ_s geografska širina koja odgovara sredini mjerenog luka. Zbog lakšeg računanja razvit ćemo zadnji faktor izraza (4.38) u binomni red

$$L = \frac{\pi \cdot a}{180°}(1-e^2)\cdot(1+\frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi_s+\frac{15}{8}e^4\sin^4\varphi_s+...). \tag{4.39}$$

Zanemarimo li potencije za e veće od kvadrata, duljinu luka jednog stupnja meridijana možemo izračunati pomoću izraza

$$L = x + y\sin^2\varphi_s, \tag{4.40}$$

gdje su

$$x = \frac{\pi \cdot a \cdot (1-e^2)}{180°} \tag{4.41}$$

$$y = \frac{3}{2}e^2 x. \tag{4.42}$$

Uvrste li se u izraz (4.40) vrijednosti iz tablice 4.1., dobit će se devet jednadžbi:

$$
\begin{aligned}
56750 &= x + 0{,}0000 \cdot y \\
57037 &= x + 0{,}3014 \cdot y \\
56888 &= x + 0{,}3995 \cdot y \\
56979 &= x + 0{,}4651 \cdot y \\
57069 &= x + 0{,}4953 \cdot y \\
57028 &= x + 0{,}5000 \cdot y \\
57091 &= x + 0{,}5465 \cdot y \\
57074 &= x + 0{,}5762 \cdot y \\
57422 &= x + 0{,}8389 \cdot y
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Potrebno je pronaći takve x i y koji će zadovoljiti svih devet jednadžbi s najmanjim mogućim odstupanjima. Dvije jednadžbe su dovoljne da bi se odredile dvije nepoznanice, međutim već je Bošković u svojim radovima zaključio da kombiniranjem dvije po dvije jednadžbe ne može pronaći vrijednosti x i y koje će u potpunosti zadovoljiti svih devet jednadžbi. Najbolje što se može učiniti je odrediti takve vrijednosti x i y koje će zadovoljiti svih devet jednadžbi i da pritom zadovolje neke unaprijed zadane zahtjeve. Bošković je rješavajući taj problem razvio metodu u kojoj je izračunao jedinstvene vrijednosti za x i y. Metodu je opisao geometrijski, a Laplace je 1789. godine dao njezin analitički oblik (vidi poglavlja 4.4. i 4.5.).

Bošković-Laplaceova metoda je metoda procjenjivanja pogrešaka mjerenja i matematičkog uklanjanja njihova utjecaja na konačni rezultat mjerenja. Osnovni matematički problem kojim se Bošković bavio pri procjenjivanju pogrešaka mjerenja je kako odrediti vrijednosti koeficijenata x i y koje su najprikladnije za n jednadžbi oblika

$$L_i + v_i = x + y \sin^2 \varphi_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{4.44}$$

Stoga, devet jednadžbi u (4.43) možemo pisati u obliku

$$
\begin{aligned}
v_1 &= x + 0{,}0000 \cdot y - 56750 \\
v_2 &= x + 0{,}3014 \cdot y - 57037 \\
v_3 &= x + 0{,}3995 \cdot y - 56888 \\
v_4 &= x + 0{,}4651 \cdot y - 56979 \\
v_5 &= x + 0{,}4953 \cdot y - 57069 \\
v_6 &= x + 0{,}5000 \cdot y - 57028 \\
v_7 &= x + 0{,}5465 \cdot y - 57091 \\
v_8 &= x + 0{,}5762 \cdot y - 57074 \\
v_9 &= x + 0{,}8389 \cdot y - 57422
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

u kojima su v_1, v_2, ..., v_n popravci duljine luka meridijana.

Da bi pronašao najprikladnije vrijednosti koeficijenata x i y, formirao je dva dodatna zahtjeva: da zbroj pozitivnih popravaka bude jednak zbroju negativnih po apsolutnoj vrijednosti te da zbroj apsolutnih vrijednosti svih popravaka bude što je moguće manji (vidi poglavlja 4.4. i 4.5.).

Primjenom navedenih zahtjeva dobivene su vrijednosti x = 56 750,00 francuskih hvata i y = 627,71 francuskih hvata (vidi 4.19). Uz pomoć vrijednosti x i y lako se može dobiti vrijednost za prvi ekscentricitet e, kada te vrijednosti uvrstimo u (4.42)

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{2}e^2 \quad \Leftrightarrow \quad e^2 = \frac{2 \cdot y}{3 \cdot x}. \tag{4.46}$$

S pomoću vrijednosti x može se iz izraza (4.41) izračunati vrijednost velike poluosi a

$$a = \frac{x}{1 - e^2} \cdot \frac{180}{\pi} \tag{4.47}$$

dok se vrijednosti male poluosi b i spljoštenost μ računaju pomoću izraza (4.35) i (4.36).

Primjenom navedenih formula i vrijednosti x = 56 750,00 te y = 627,71 izračunati su parametri Boškovićeva elipsoida koji su prikazani u tablici 4.10.

Tablica 4.10. Parametri Boškovićeva elipsoida

Koeficijent	Vrijednost [francuski hvat]	Vrijednost [m]
a	3 275 690,49147	6 384 320,76788
b	3 263 590,64202	6 360 738,16129
e	0,085 872 108 718 56	
μ	0,003 693 831 724 29	
$1/\mu$	270,721 590 652	

4.6.2. Računanje spljoštenosti Zemlje pomoću formule koju je Bošković primjenjivao u svojim analizama

Na drugačiji način računao je Bošković spljoštenost Zemlje, primijenivši iste vrijednosti x i y u formuli oblika

$$\frac{1}{\mu} = \frac{3 \cdot x}{y}, \tag{4.48}$$

gdje je

x – duljina meridijanskog stupnja na ekvatoru, a

y – prirast (povećanje) stupnja od ekvatora prema polu, odnosno prema Boškoviću „čitava razlika stupnjeva na ekvatoru i polu“ (Stay 1760).

Takav oblik formule primijenio je Bošković u radu (Maire i Boscovich 1755), gdje je vrijednosti x i y odredio usporedbom dvije po dvije mjerene vrijednosti duljine luka meridijana te je tim postupkom dobio pet vrijednosti za spljoštenost. U kasnijim djelima (Stay 1760, Maire i Boscovich 1770) primijenjena je formula nešto drugačijeg oblika, gdje se navodi „… U onoj petoj mojoj knjizi [Maire i Boscovich 1755] i u raspravi umetnutoj u spise Bolonjske akademije [Boscovich 1757] trećinu razlike podijelio sam sa stupnjem na ekvatoru; kako bi se ovdje dobilo ono što nazivam eliptičnošću, tj. razlika polumjera ekvatora i poluosi podijeljena polumjerom ekvatora, prema broju 350 [… *Neka se stupanj na ekvatoru podijeli s trećinom čitave razlike stupnjeva na ekvatoru i polu te neka se rezultatu doda dvojka i [tako] će se dobiti traženi razlomak…*] dijelim stupanj na ekvatoru s trećinom ukupne razlike, a kvocijent uvećan za dva uzimam za nazivnik, dok je brojnik 1: na taj se način dobivaju prvi nazivnici uvećani za dva i malo točniji prema istome broju…“ (na hrvatski preveo Jan Šipoš). Iz navedenog dobije se formula oblika

$$\frac{1}{\mu} = \frac{x}{\frac{y}{3}} + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu} = \frac{3 \cdot x}{y} + 2. \tag{4.49}$$

Tablica 4.11. Usporedba recipročnih vrijednosti spljoštenosti

Metoda	Vrijednost $1/\mu$	Razlika od GRS80	Razlike od GRS80 [%]
GRS80	298,257	0	0
Boškovićev elipsoid	270,722	–27,536	–9,23
formula (4.48)	271,223	–27,035	–9,06
formula (4.49)	273,223	–25,035	–8,39

Uvrste li se vrijednosti $x = 56\,750{,}00$ francuskih hvata i $y = 627{,}71$ francuskih hvata u izraz (4.48) dobije se recipročna vrijednost za spljoštenost $1/\mu = 271{,}223$, dok recipročna vrijednost za spljoštenost primjenom izraza (4.49) i vrijednosti x i y iznosi $1/\mu = 273{,}223$.

Usporedba dobivenih vrijednosti za $1/\mu$ prikazana je u tablici 4.11.

Prirodno se postavlja pitanje koja je veza između formula (4.48) i (4.49) koje je Bošković primjenjivao za računanje spljoštenosti, s formulama (4.41), (4.42) i (4.46). Odgovor na to pitanje mogao bi se dati u nekim budućim istraživanjima.

5. ODREĐIVANJE KARTOGRAFSKE PROJEKCIJE KARATA PAPINSKE DRŽAVE

U prvom dijelu ovog poglavlja opisane su projekcije koje su se upotrebljavale u prvoj polovini 18. stoljeća. Karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* otisnuta je 1755. godine, pa projekcije koje su razvijene u drugoj polovini 18. stoljeća nisu uzete u razmatranje.

U drugom dijelu poglavlja opisana su provedena istraživanja o kartografskoj projekciji na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* J. R. Boškovića i Ch. Mairea. Treći dio poglavlja opisuje provedena istraživanja o kartografskoj projekciji na karti *Carte de l'État de l'Église*.

5.1. Pregled kartografskih projekcija

Do kraja renesanse razvijeno je oko 15 kartografskih projekcija kako bi se zakrivljena Zemljina površina pokušala prikazati u ravnini. Pritom su se meridijani i paralele prikazivali u obliku

- pravokutne mreže – kvadratična cilindrična projekcija ili Plate Carrée,
- lukova kružnica – primjerice globularna Nicolosijeva projekcija
- geometrijske perspektivne projekcije – ortografska ili stereografska.

Matematika je u tom razdoblju bila preelementarna da bi omogućila razvoj kartografskih projekcija koje će zadovoljiti određene uvjete. Konstrukcija mreže meridijana i paralela bila je često vrlo gruba, s velikim kružnim lukovima umjesto korektnih krivulja tako da nacrtana projekcija nije točno zadržala jednakost površina, iako je Zemlja bila korektno kartirana u odnosu na mrežu.

Nakon renesanse u upotrebi su bile sljedeće projekcije: kvadratična cilindrična projekcija (eng. *Equirectangular Projection*), trapezna projekcija (eng. *Trapezoidal Projection*), Mercatorova (cilindrična) projekcija, sinusoidna projekcija i Bonneova projekcija. Od azimutnih projekcija u upotrebi su bile stereografska, azimutna ekvidistantna i druge stare azimutne projekcije (Snyder 1993).

Slijedi opis navedenih kartografskih projekcija i onih projekcija koje su razvijene u prvoj polovini 18. stoljeća.

Svaka projekcija bit će prikazana trima slikama. Na prvoj slici bit će prikazan cijeli svijet u pojedinoj projekciji. Na drugoj će biti prikazana Italija u projekciji u odnosu na početni meridijan Ferro. Treća slika prikazat će područje središnje Italije preklopljeno sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*.

Prva slika nacrtana je u računalnom programu „Kartografske projekcije“ koji je izradio Dražen Tutić (Tutić 1998). Formule koje su korištene za računanje koordinata točaka u ravnini kartografskih projekcija iste su one koje ću opisati u prvom dijelu ovog poglavlja (vidi poglavlja 5.1.1. i 5.1.2.).

Podaci za izradu druge i treće slike preuzeti su s internetskih stranica Natural Earth u vektorskom obliku (ESRI shapefile). Koordinate točaka dane su u geografskom koordinatnom sustavu na elipsoidu WGS84 u odnosu na početni meridijan Greenwich. U Quantum GIS-u geografske koordinate točaka koje prikazuju konture administrativnih jedinica i granice Italije transformirane su u geografski koordinatni sustav s početnim meridijanom Ferro ($\Delta\lambda = 17°30'$). Na taj način dobivene su geografske koordinate koje su u skladu s geografskim koordinatama prikazanima na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*. Potom sam primjenom formula (vidi poglavlja 5.1.1. i 5.1.2.) za pojedinu kartografsku projekciju iz geografskih koordinata mreže i kontura izračunala pravokutne koordinate točaka u ravnini projekcije. Izračunate pravokutne koordinate točaka mreže i granice administrativnih jedinica i Italije potom su ponovno učitane u Quantum GIS gdje su podaci obrađeni.

5.1.1. Kartografske projekcije prije 18. stoljeća

Opisane su kartografske projekcije predrenesansnog i renesansnog doba koje su se upotrebljavale u 18. stoljeću.

- *Kvadratična cilindrična projekcija (Plate Carrée)*

U toj cilindričnoj projekciji slike svih paralela preslikavaju se u ravninu projekcije kao ravne, paralelne crte, jednako udaljene za jednake promjene u geografskoj širini. Slike meridijana se u ravninu projekcije preslikavaju kao ravne, međusobno paralelne crte koje su okomite na paralele. Meridijani su jednako udaljeni za jednake promjene u geografskoj dužini. Mjerilo je uščuvano uzduž svih meridijana i uzduž ekvatora ili uzduž svih meridijana i odabranog para paralela koje su jednako udaljene od ekvatora (Snyder

1993). Projekcija nije ni ekvivalentna ni konformna. Deformacije površina i kutova povećavaju se udaljavanjem od ekvatora, odnosno odabranog para paralela.

Opće jednadžbe kvadratične cilindrične projekcije u pravokutnim koordinatama imaju oblik

$$\begin{aligned} y &= R\cos\varphi_0\lambda \\ x &= R\varphi, \end{aligned} \tag{5.1}$$

gdje su

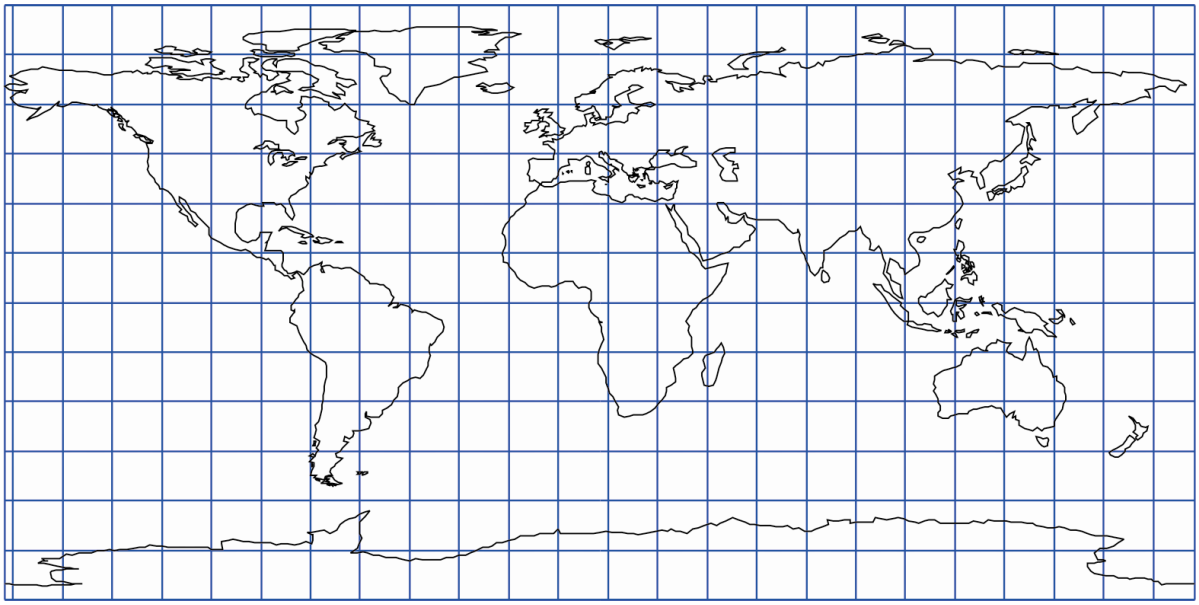
φ, λ – geografske koordinate točke na sferi

φ_0 – geografska širina standardnih paralela, sjeverno i južno od ekvatora

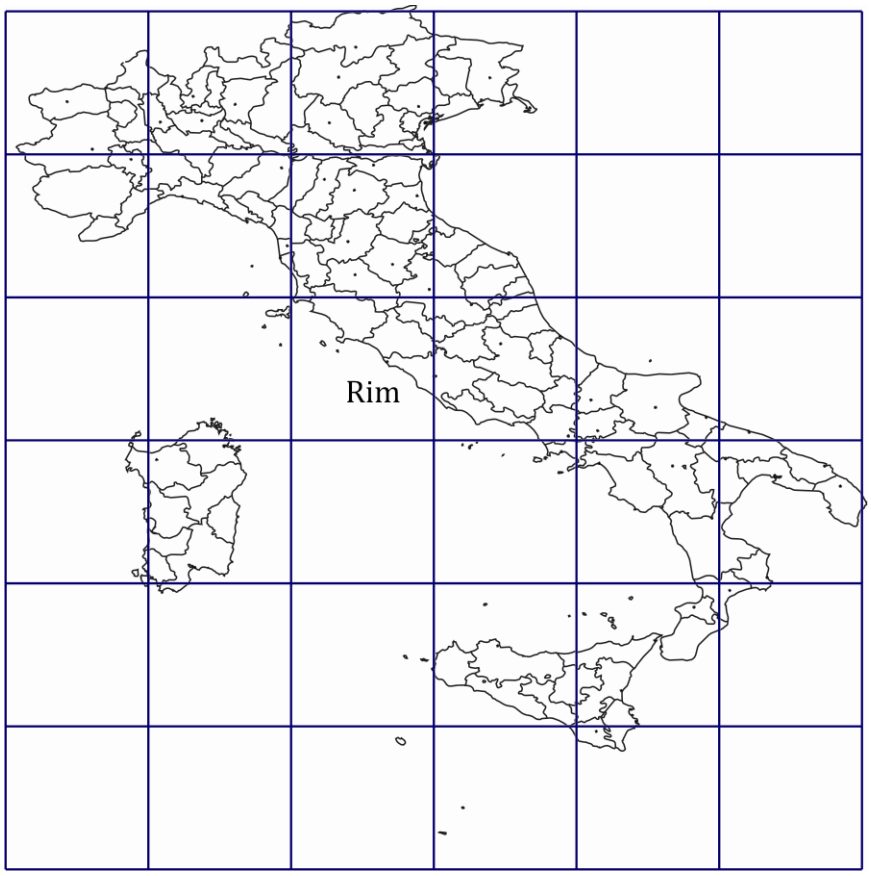
R – polumjer sfere koja se preslikava

y, x – pravokutne koordinate slike točke u ravnini projekcije.

Plate Carrée je specijalan slučaj kvadratične cilindrične projekcije gdje je standardna paralela $\varphi_0 = 0$.

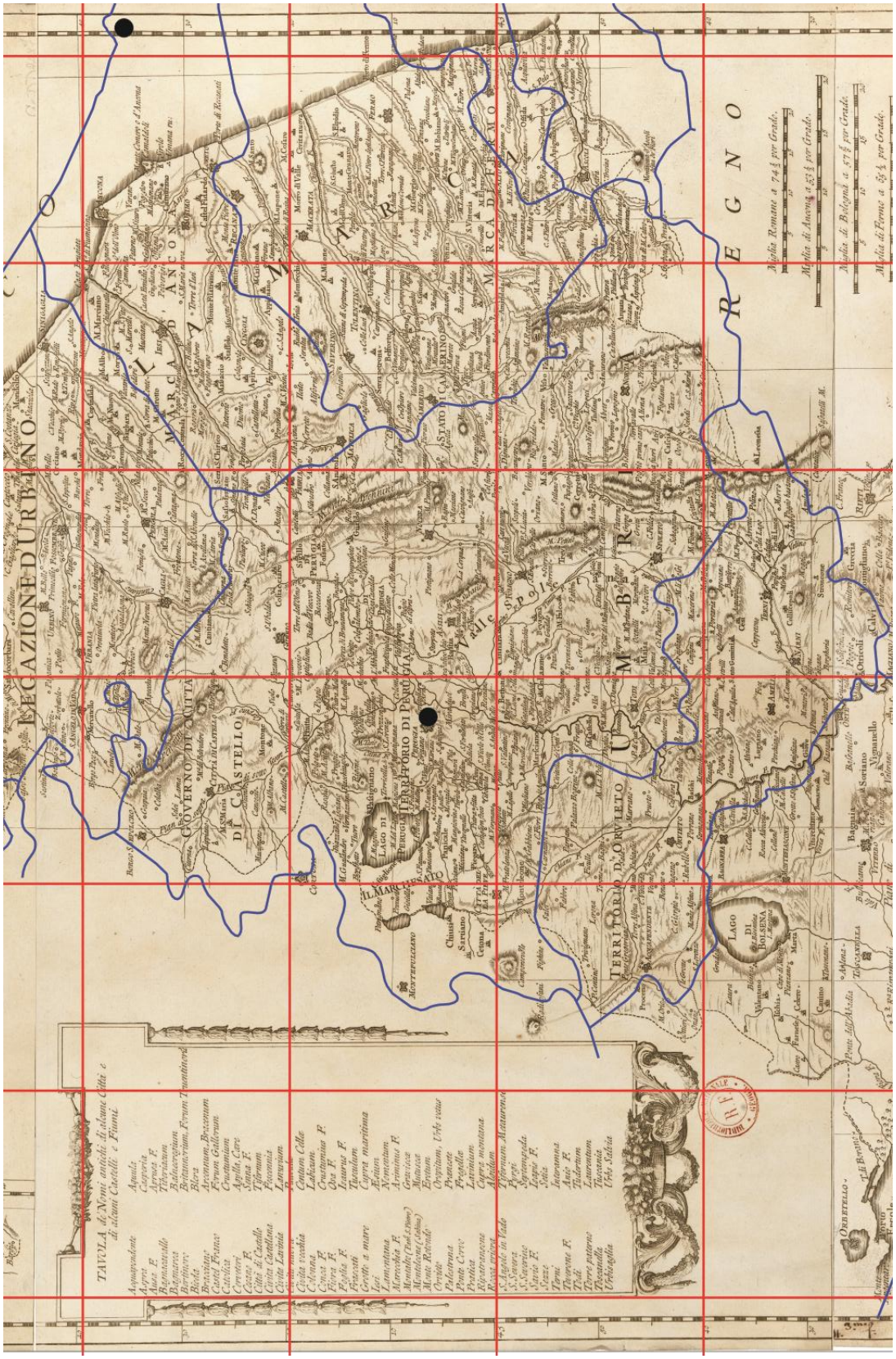


Slika 5.1. Plate Carrée – kvadratična cilindrična projekcija, $\varphi_0 = 0°$, $\lambda_0 = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich



Slika 5.2. Italija u kvadratičnoj cilindričnoj projekciji, $\varphi_0 = 0°$, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro

Smatra se da je tu projekciju smislio Eratosten, a Ptolemej je pripisuje Marinu od Tira. Ta se projekcija često upotrebljavala u 15. i 16. stoljeću, a danas je ugrađena u većini programa za izradu karata. Može se reći da je ona najjednostavniji oblik ekvidistantne cilindrične projekcije pa nosi i naziv jednostavna cilindrična projekcija. Poprečni oblik te projekcije zove se Cassinijeva projekcija (Snyder 1993).



Slika 5.3. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u kvadratičnoj cilindričnoj projekciji ($\varphi_0 = 0°$, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte.

- *Trapezna projekcija*

Trapezna projekcija ima ravne međusobno paralelne slike paralela, a meridijani su također dijelovi pravaca. Srednji meridijan je pravac okomit na paralele. Dvije paralele su standardne paralele. Meridijani konvergiraju u zajedničku točku koja ne mora biti pol. Prema tome trapezna projekcija ima prednost pred Marinovom za karte kontinenata i manjih područja jer su dvije paralele u tom području bez linearnih deformacija umjesto samo jedne. S druge strane, meridijani više ne sijeku paralele pod pravim kutom kao što je to na globusu, osim na srednjem meridijanu koji je također jedini meridijan bez deformacija duljina. Projekcija nije ni ekvivalentna ni konformna (Snyder 1993).

Mercator je mnoge karte izrađivao u modificiranoj verziji trapezne projekcije u kojoj standardne paralele nisu krajnje paralele, već se nalaze na udaljenosti približno jedne četvrtine i tri četvrtine od krajnjih paralela kako bi se smanjila sveukupna deformacija. Trapezne projekcije pripadaju skupini pseudocilindričnih projekcija (Rajaković i dr. 2013).

Projekcije Donnusa Nicolausa Germanusa i Mercatora s dvije standardne paralele φ_1, φ_2 i srednjim meridijanom bez deformacija duljina glase (Rajaković i dr. 2014)

$$y = \frac{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}(\lambda - \lambda_0)\left(x + R\frac{\varphi_2\cos\varphi_1 - \varphi_1\cos\varphi_2}{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}\right) \qquad (5.2)$$
$$x = R\varphi$$

gdje su

φ, λ – geografske koordinate točke na sferi

φ_1, φ_2 – geografske širine standardnih paralela

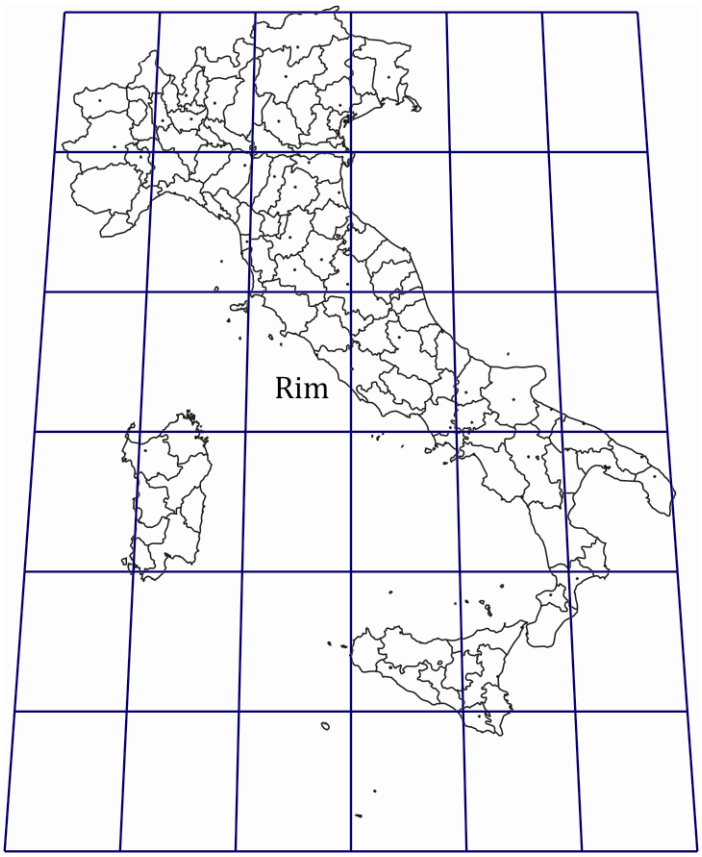
λ_0 – geografska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja

R – polumjer sfere koja se preslikava

y, x – pravokutne koordinate slike točke u ravnini projekcije.

Trapezna projekcija se često upotrebljavala u 17. i 18. stoljeću za karte država u atlasima Sansona, De l'Islea, Homanna i dr (Snyder 1993).

Slika 5.4. Mercatorova trapezna projekcija, $\varphi_1 = -10°$, $\varphi_2 = 45°$, $\lambda_0 = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich



Slika 5.5. Italija u Mercatorovoj trapeznoj projekciji, $\varphi_1 = 41°10'$, $\varphi_2 = 44°$, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro

Slika 5.6. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u Mercatorovoj trapeznoj projekciji (φ_1 = 41°10', φ_2 = 44°, λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte.

- *Stereografska projekcija*

Stereografske projekcije pripadaju skupini perspektivnih azimutnih projekcija. U perspektivnim azimutnim projekcijama Zemlja se obično aproksimira sferom polumjera *R*. Udaljenost točke promatranja *O* do središta sfere označava se s *D*, a udaljenost do projekcijske ravnine s *L*. Ovisno o veličini *D*, perspektivne azimutne projekcije dijele se na:

- ortografske $D = \infty$
- stereografske $D = R$
- centralne $D = 0$
- vanjske $R < D < \infty$.

U stereografskoj projekciji točka promatranja nalazi se na površini sfere ($D = R$) (Frančula 2000).

U poprečnom i kosom aspektu stereografskih projekcija, slike svih meridijana i paralela u projekciji preslikavaju se kao kružnice ili lukovi kružnica.

U polarnom (uspravnom) aspektu slike meridijana su ravne linije koje se sijeku u polu, dok su slike paralela koncentrične kružnice čija se udaljenost povećava udaljavanjem od pola u kojem se nalazi središte koncentričnih kružnica.

Stereografska projekcija je konformna tako da se mala područja u projekciji preslikavaju bez deformacija kutova. Tu konformnost prvi je uočio Edmond Halley (1656–1742).

Uspravne stereografske projekcije upotrebljavale su se u 17. i 18. stoljeću za prikazivanje Zemljinih polutki te nebeske polutke. Poprečni aspekt projekcije upotrebljavao se za izradu karata kontinenata (Snyder 1993).

Jednadžbe uspravne stereografske projekcije u pravokutnim koordinatama imaju oblik (Frančula 2000):

$$\begin{aligned} y &= \rho \sin \delta \\ x &= \rho \cos \delta \\ \rho &= 2R \tan(45^\circ - \frac{\varphi}{2}) \\ \delta &= \lambda - \lambda_0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

gdje su

φ, λ – geografske koordinate točke na sferi

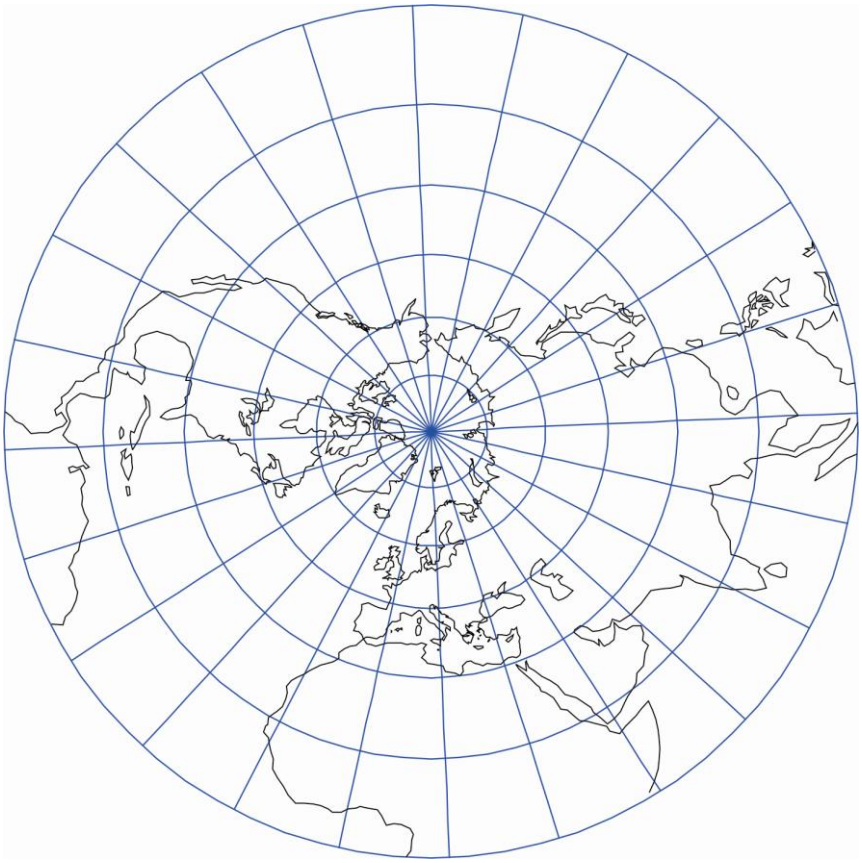
λ_0 – geografska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja

ρ – polumjer paralele kojoj odgovara geografska širina φ

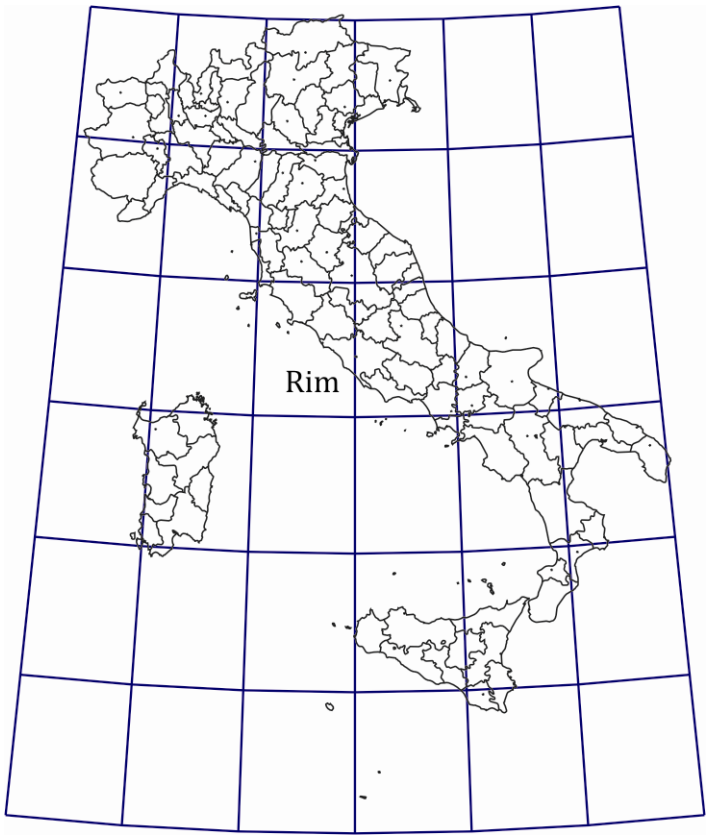
δ – kut između meridijana u projekciji

R – polumjer sfere koja se preslikava

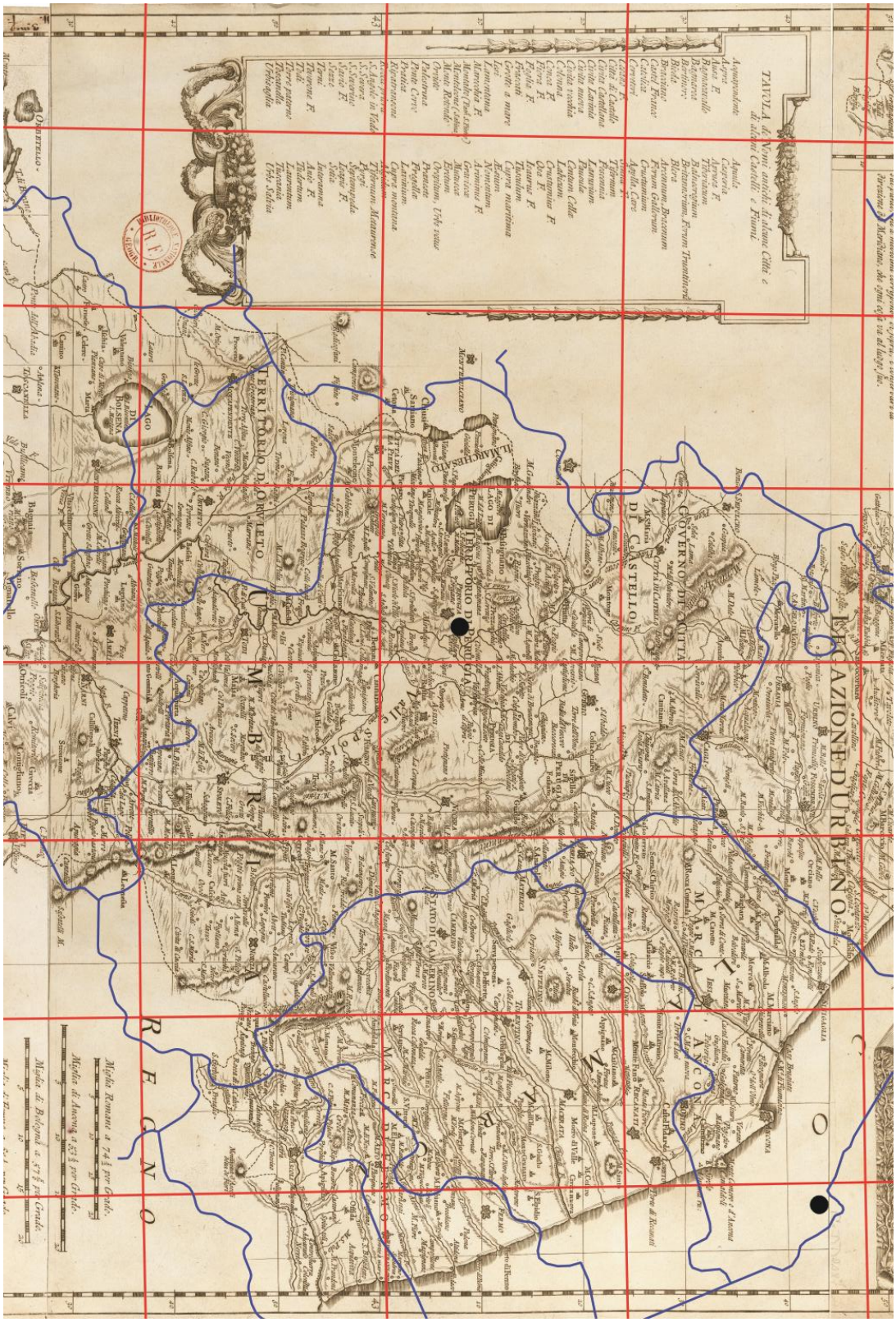
y, x – pravokutne koordinate slike točke u ravnini projekcije.



Slika 5.7. Stereografska projekcija – perspektivna azimutna uspravna/polarna, $\lambda_0 = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich



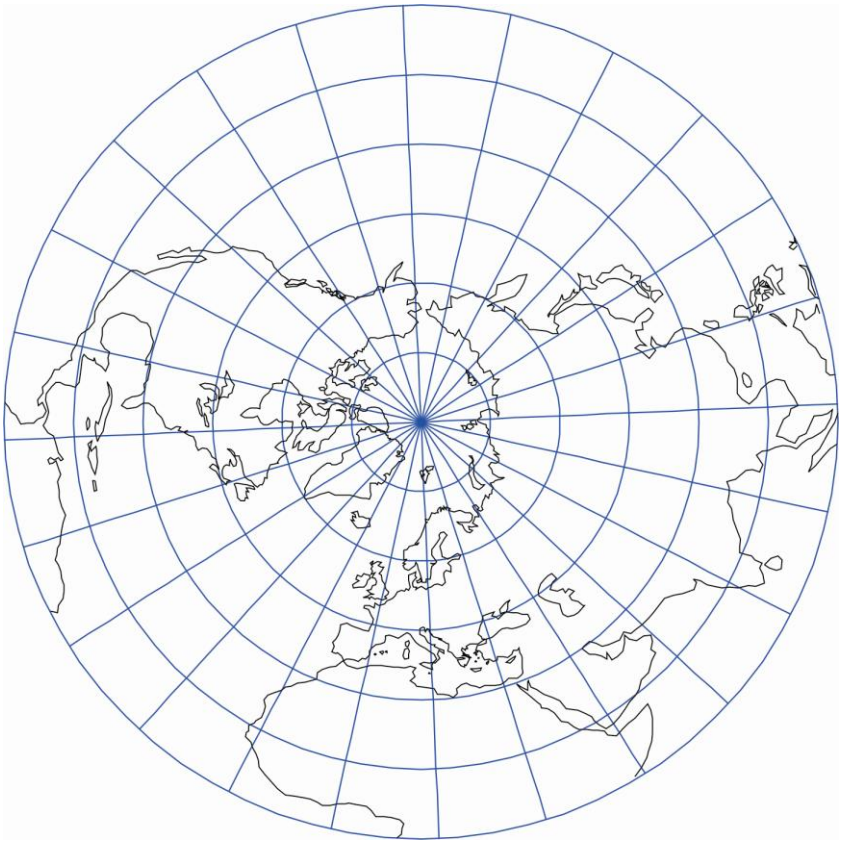
Slika 5.8. Italija u uspravnoj stereografskoj projekciji, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro



Slika 5.9. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u uspravnoj stereografskoj projekciji ($\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte.

- *Azimutna ekvidistantna projekcija*

Zbog jednostavnosti konstrukcije, karte izrađene u uspravnoj (polarnoj) ekvidistantnoj azimutnoj projekciji pronašle su svoje mjesto u mnogim atlasima 17. i 18. stoljeća. U toj projekciji slike meridijana su ravne crte, dok su slike paralela koncentrične kružnice jednako udaljene za jednake promjene geografske širine (Snyder 1993).



Slika 5.10. Azimutna ekvidistantna projekcija, uspravna/polarna, λ_0 = 12°30' u odnosu na početni meridijan Greenwich

Jednadžbe uspravne azimutne ekvidistantne projekcije u pravokutnim koordinatama imaju oblik (Frančula 2000)

$$\begin{aligned} y &= \rho \sin \delta \\ x &= \rho \cos \delta \\ \rho &= R(90^\circ - \varphi) \\ \delta &= \lambda - \lambda_0 , \end{aligned} \tag{5.4}$$

gdje su

φ, λ – geografske koordinate točke na sferi

λ_0 – geografska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja

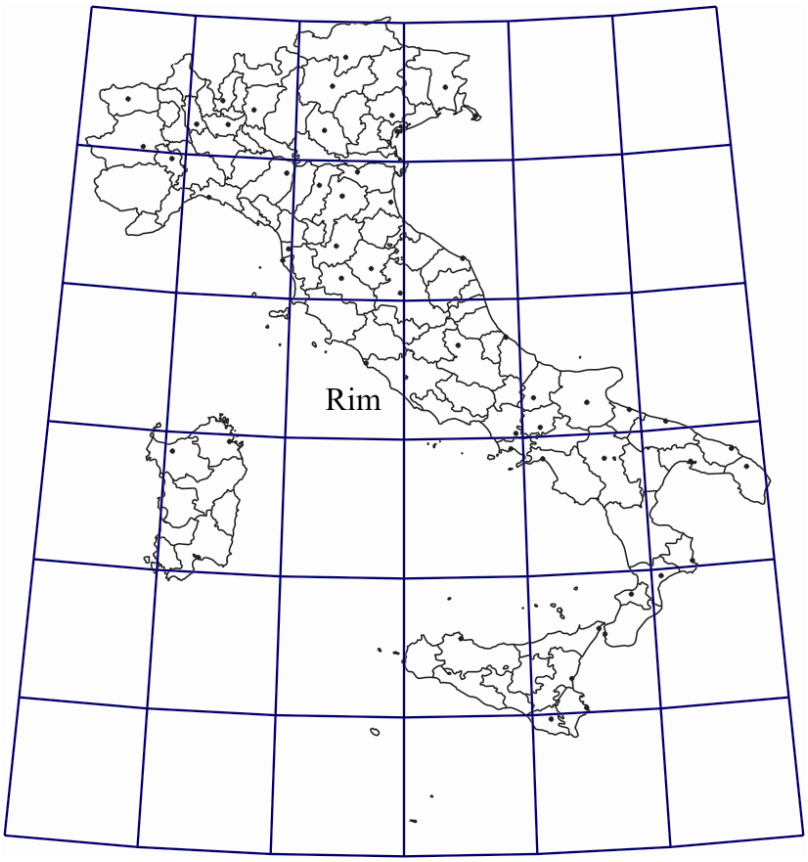
ρ – polumjer paralele kojoj odgovara geografska širina φ

δ – kut između meridijana u projekciji

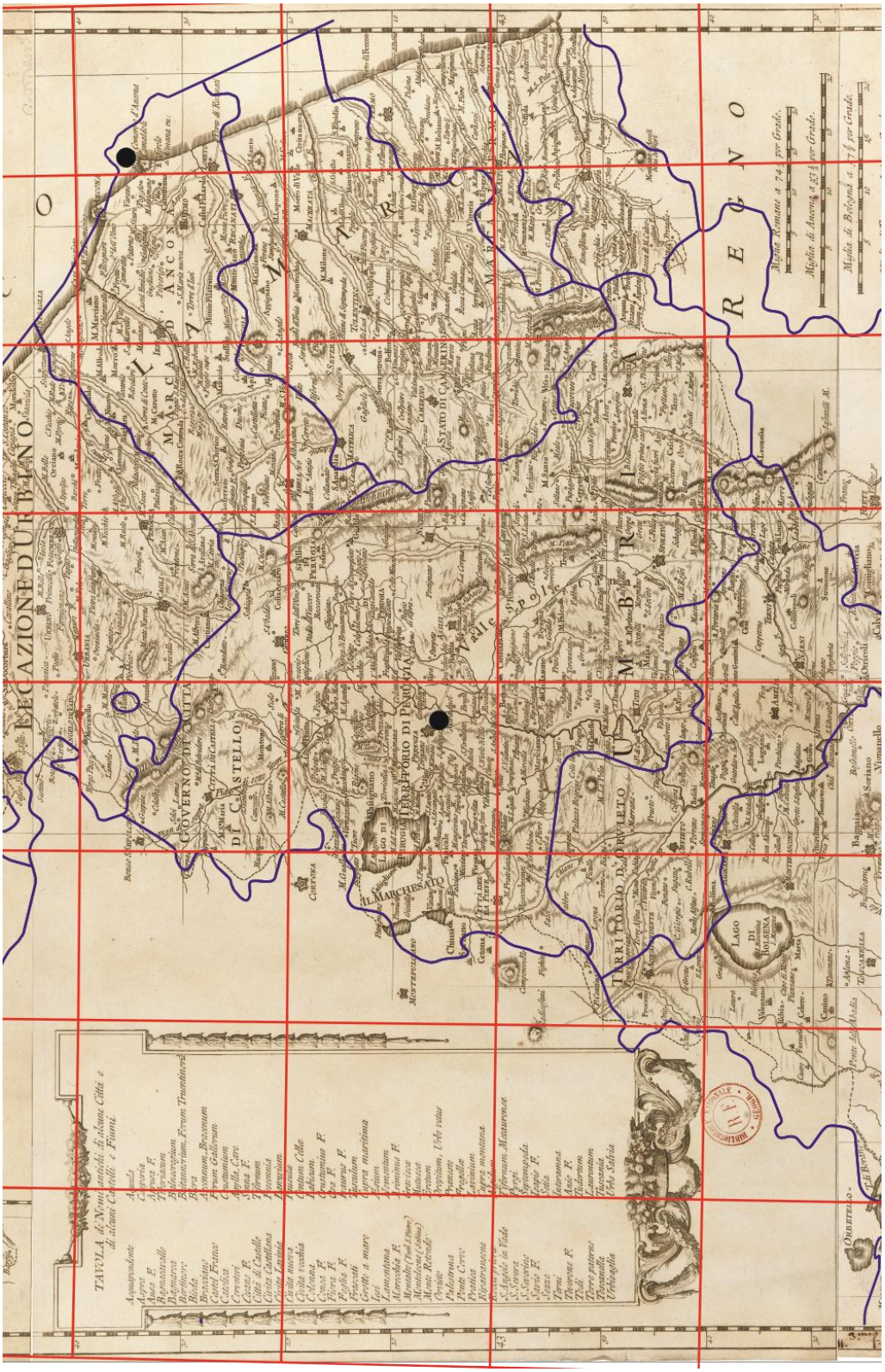
R – polumjer sfere koja se preslikava

y, x – pravokutne koordinate slike točke u ravnini projekcije.

Poprečne i kose azimutne projekcije nisu se često upotrebljavale sve do 19. stoljeća zbog toga što je konstrukcija kartografske mreže bila presložena. U tim oblicima azimutnih projekcija slike meridijana i paralela su kompleksne krivulje (Snyder 1993).



Slika 5.11. Italija u uspravnoj azimutnoj ekvidistantnoj projekciji, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro



Slika 5.12. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u uspravnoj azimutnoj ekvidistantnoj projekciji ($\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte.

- *Mercatorova projekcija*

Mercatorova projekcija je uspravna konformna cilindrična projekcija. Slike meridijana su međusobno paralelni pravci, a slike paralela su ravne, paralelne crte koje su okomite na meridijane. Za razliku od drugih cilindričnih projekcija udaljenost između paralela povećava se udaljavanjem od ekvatora (Snyder 1993, Frančula 2000). Udaljavanjem od ekvatora prema sjevernom ili južnom polu deformacije površina jako rastu. Polovi se preslikavaju u beskonačnost.

Za preslikavanje sfere jednadžbe uspravne konformne cilindrične projekcije u pravokutnim koordinatama imaju oblik (Frančula 2000)

$$\begin{aligned} y &= k(\lambda - \lambda_0) \\ x &= k \ln \tan(45° + \frac{\varphi}{2}) \\ k &= R \cos \varphi_0 , \end{aligned} \tag{5.5}$$

gdje su

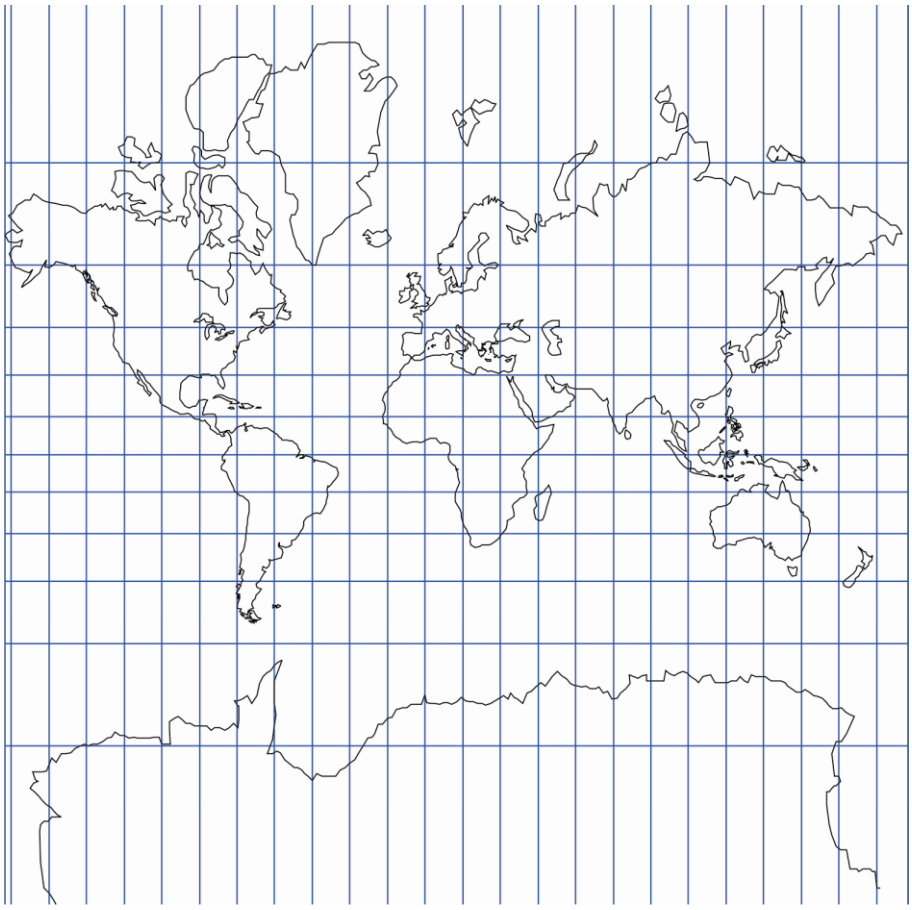
φ, λ – geografske koordinate točke na sferi

φ_0 – geografska širina paralele koja se u ravnini projekcije preslikava bez deformacija

λ_0 – geografska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja

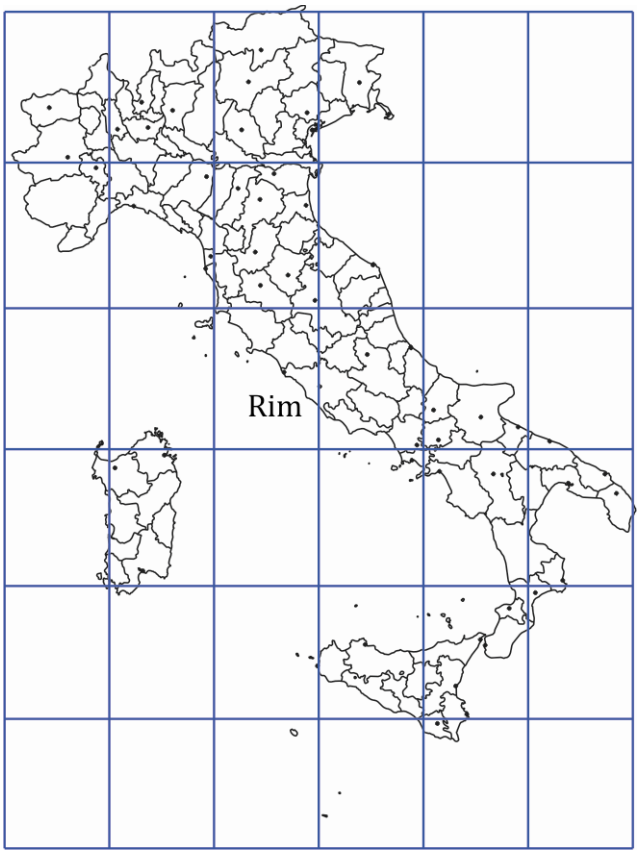
R – polumjer sfere koja se preslikava

y, x – pravokutne koordinate slike točke u ravnini projekcije.

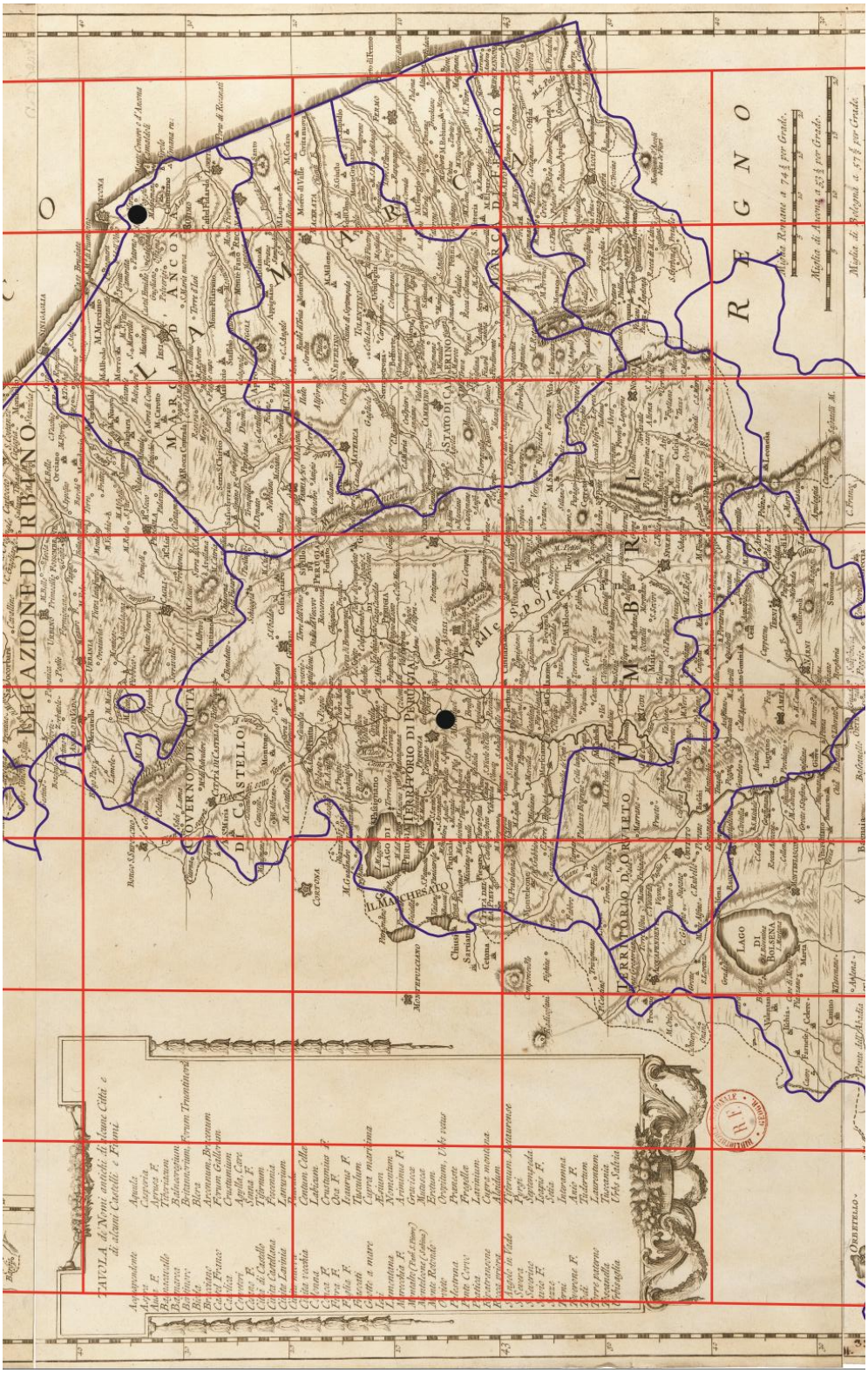


Slika 5.13. Mercatorova projekcija – uspravna konformna cilindrična, φ_i = 0°, λ_0 = 12°30' u odnosu na početni meridijan Greenwich

Mercatorova projekcija imala je i ima veliku primjenu u navigaciji jer se u njoj meridijani i paralele preslikavaju kao ravne crte, sačuvana je jednakost kutova (što je najvažnije) i loksodrome se preslikavaju kao ravne crte. Loksodroma je krivulja na sferi koja sa svim meridijanima zatvara iste kutove, a isto svojstvo ima i u ravnini Mercatorove projekcije (Frančula 2000).



Slika 5.14. Italija u Mercatorovoj projekciji, φ_0 = 31°10', λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro



Slika 5.15. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u Mercatorovoj projekciji (φ_0 = 31°10', λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte.

- *Sinusoidna projekcija*

U toj projekciji slike paralela su ravne, paralelne crte. Slika srednjeg meridijana preslikava se u ravnini projekcije kao ravna crta okomita na paralele. Slike meridijana su dijelovi sinusoida simetrični prema srednjem meridijanu, a sijeku se u polovima. Sve paralele i srednji meridijan preslikavaju se bez deformacija duljina. Sinusoidna projekcija pripada skupini pseudocilindričnih projekcija (Snyder 1993, Frančula 2000).

Za preslikavanje sfere jednadžbe sinusoidne projekcije u pravokutnim koordinatama imaju oblik (Frančula 2000):

$$\begin{aligned} y &= R(\lambda - \lambda_0)\cos\varphi \\ x &= R\varphi, \end{aligned} \tag{5.6}$$

gdje su

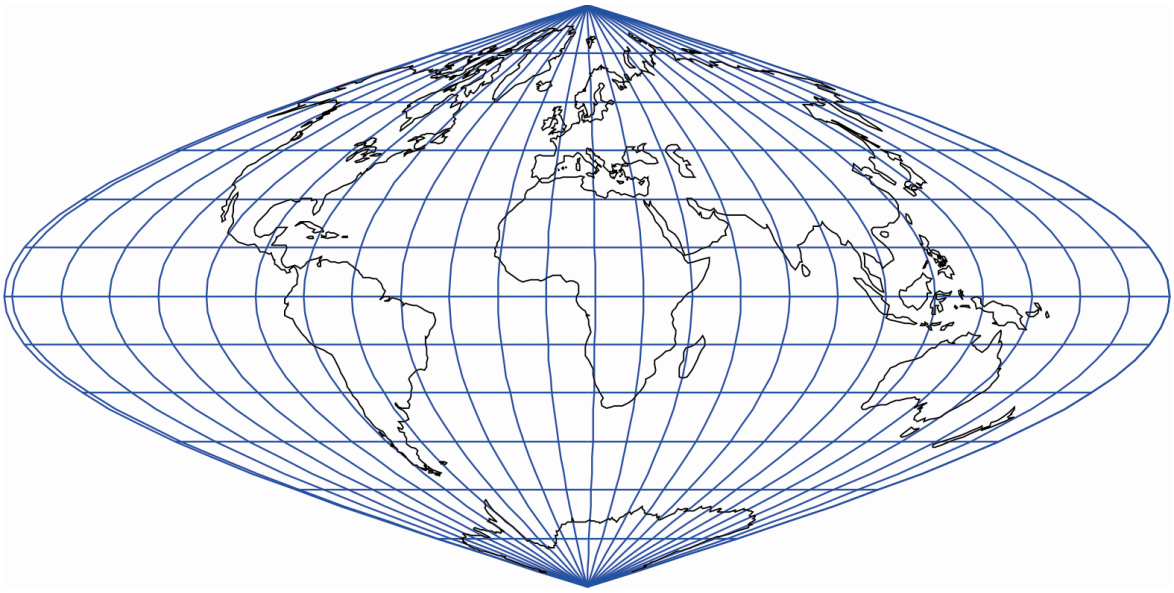
φ, λ – geografske koordinate točke na sferi

λ_0 – geografska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja

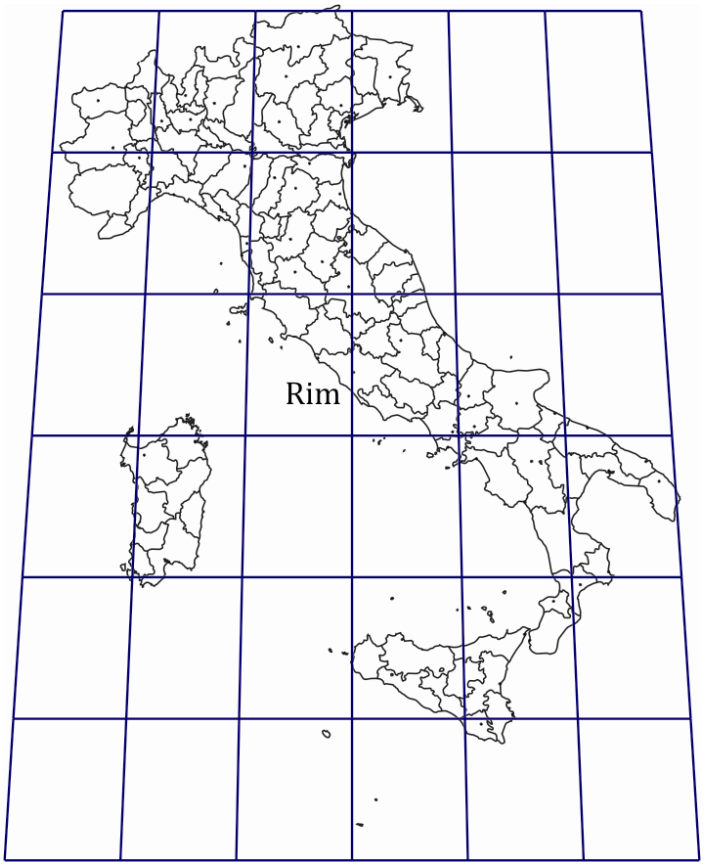
R – polumjer sfere koja se preslikava

y, x – pravokutne koordinate slike točke u ravnini projekcije.

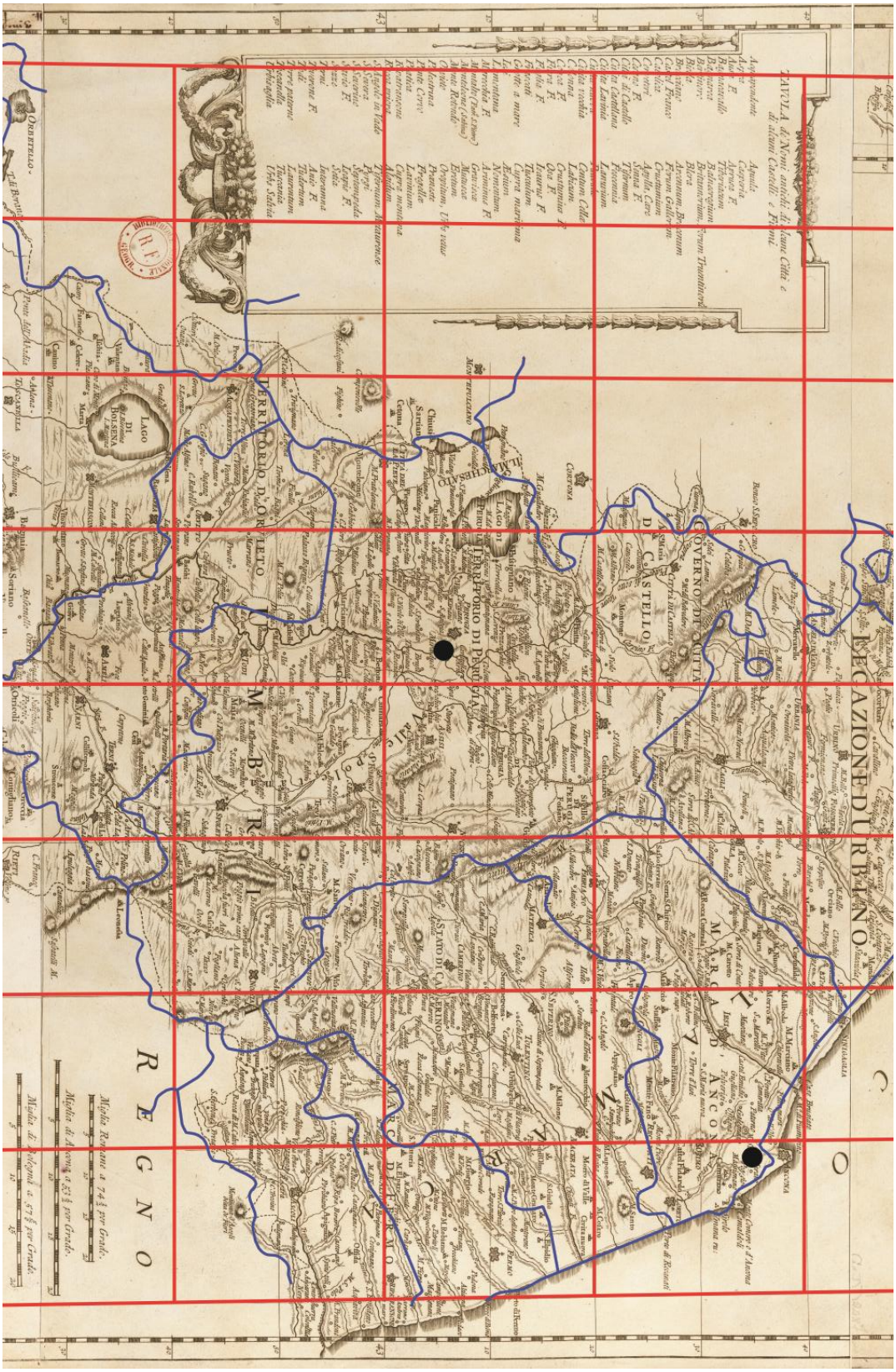
Iako su Jean Cossin i Jodocus Hondius potkraj 16. i početkom 17. stoljeća upotrebljavali sinusoidnu projekciju, Sanson ju je učestalo upotrebljavao između 1650. i 1700. godine za karte kontinenata. Zbog toga se sinusoidna projekcija zove i Sansonova projekcija. De l'Isle ju je upotrebljavao u 18. stoljeću za regionalne karte (Snyder 1993, Frančula 2000).



Slika 5.16. Sansonova projekcija – sinusoidna pseudocilindrična projekcija, $\lambda_0 = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich



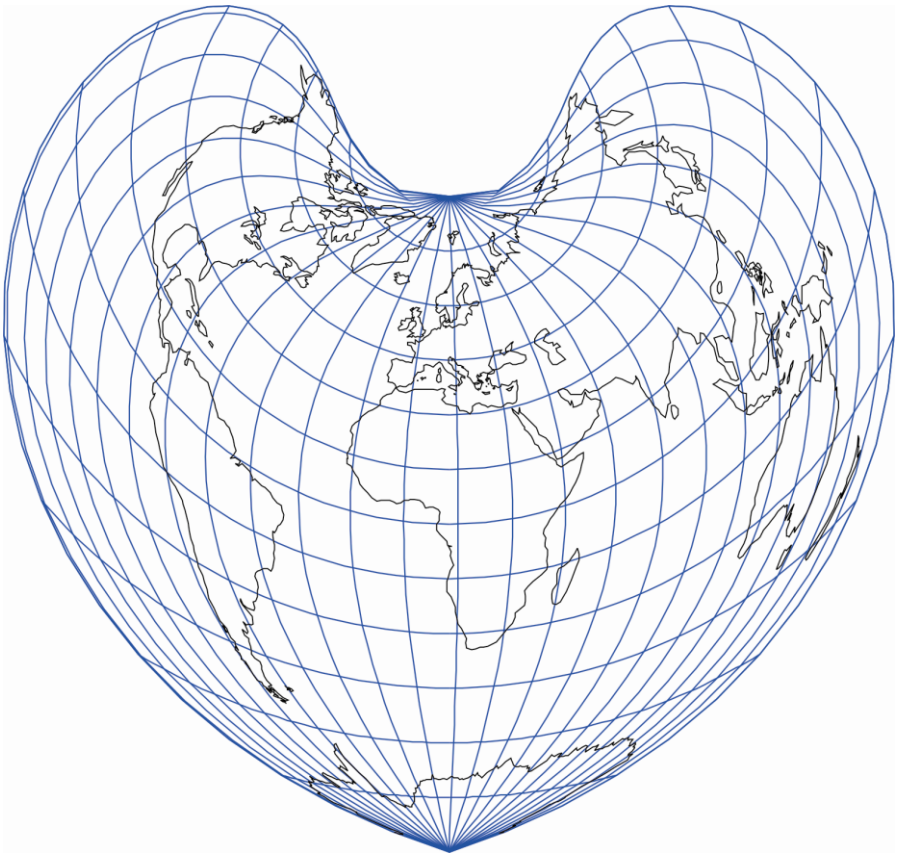
Slika 5.17. Italija u sinusoidnoj pseudocilindričnoj projekciji, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro



Slika 5.18. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u sinusoidnoj pseudocilindričnoj projekciji ($\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte.

- *Bonneova projekcija*

Bonneova projekcija pripada skupini pseudokonusnih projekcija. Kod te projekcije slike paralela su lukovi koncentričnih kružnica. Slika srednjeg meridijana preslikava se kao ravna crta, dok su ostali meridijani kompleksne krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan. Bonneova projekcija je ekvivalentna, u kojoj se sve paralele i srednji meridijan preslikavaju bez deformacija duljina, dok standardna paralela kojoj odgovara geografska širina φ_0 nema ni deformacija kutova. Deformacije kutova se povećavaju udaljavanjem od srednjeg meridijana i standardne paralele (Snyder 1993, Frančula 2000).



Slika 5.19. Bonneova projekcija – pseudokonusna ekvivalentna projekcija, φ_0 = 45°, λ_0 = 12°30' u odnosu na početni meridijan Greenwich

Za preslikavanje sfere jednadžbe Bonneove projekcije u pravokutnim koordinatama imaju oblik (Frančula 2000):

$$
\begin{aligned}
&y = \rho \sin \delta \\
&x = q - \rho \cos \delta \\
&q = \rho_j \\
&\rho = R(\mathrm{ctg}\varphi_0 + \varphi_0 - \varphi) \\
&\delta = \frac{r}{\rho}(\lambda - \lambda_0) \\
&r = R \cos \varphi,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

gdje su

φ, λ – geografske koordinate točke na sferi

φ_0 – geografska širina paralele koja se u ravnini projekcije preslikava bez deformacija

λ_0 – geografska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja

ρ – polumjer paralele kojoj odgovara geografska širina φ

ρ_j – polumjer paralele kojoj odgovara geografska širina φ_j, obično polumjer najjužnije paralele

δ – kut između meridijana u projekciji

R – polumjer sfere koja se preslikava

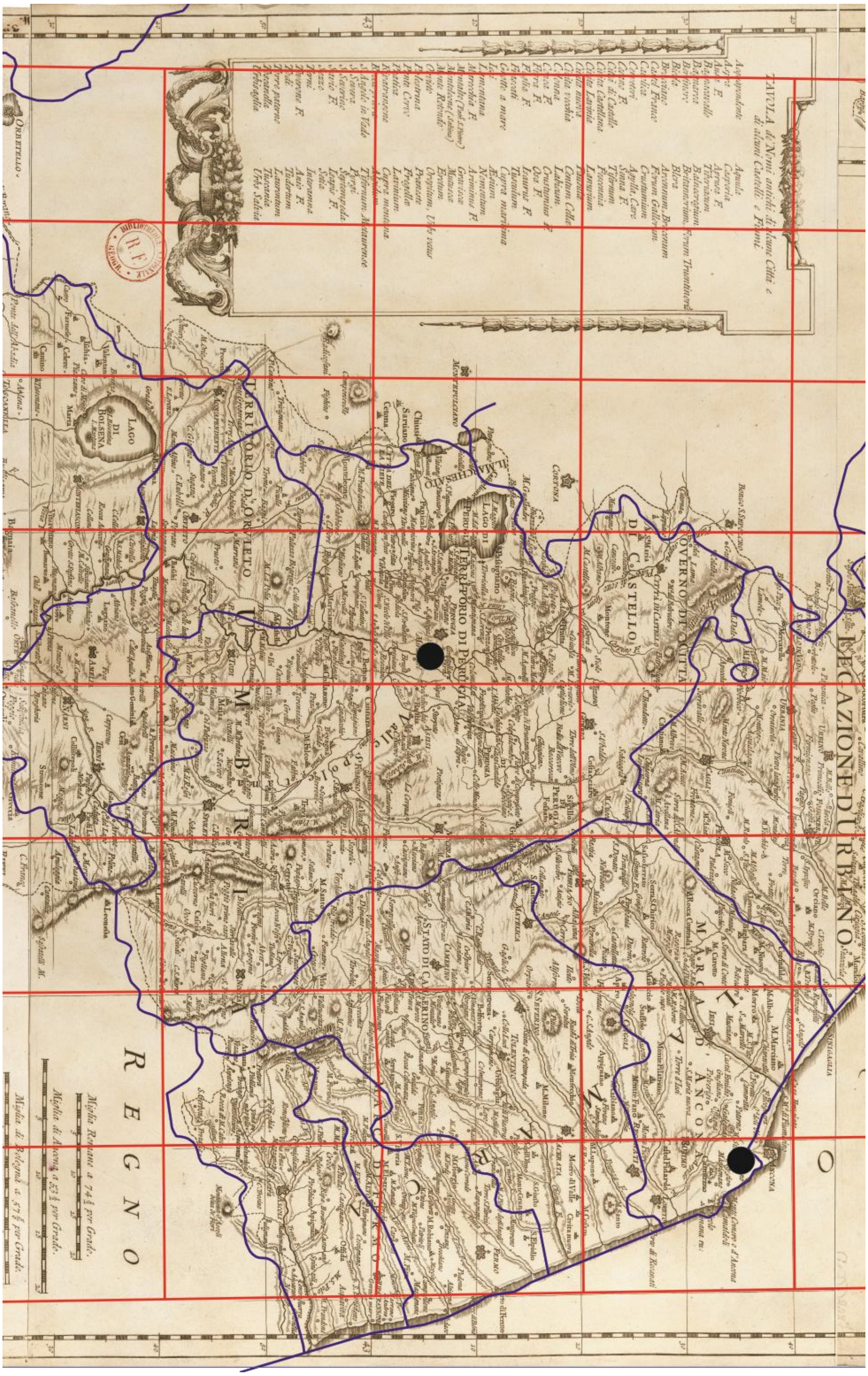
r – polumjer paralele na sferi

y, x – pravokutne koordinate slike točke u ravnini projekcije.

Slika 5.20. Italija u Bonneovoj projekciji, φ_0 = 31°10', λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro

Ako je φ_0 = 90° dobije se Wernerova projekcija.

Rigobert Bonne, francuski geograf i hidrograf, tu je projekciju predložio 1752. godine za kartu Francuske. Međutim, „Bonneova“ projekcija se koristila i prije Bonneova rođenja. U 16., 17. i prvoj polovici 18. stoljeća neki kartografi, poput Orteliusa, Mercatora, De l'Islea i Coronellia izrađivali su karte kontinenata u nerazvijenom (osnovnom, rudimentarnom) obliku te projekcije (Snyder 1993).



Slika 5.21. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u Bonneovoj projekciji (φ_0 = 31°10', λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte.

5.1.2. Razvoj kartografskih projekcija do sredine 18. stoljeća

Razvoj matematike u 17. stoljeću, pogotovo analitičke geometrije i logaritamskih tablica, omogućio je daljnji razvoj kartografskih projekcija. Nakon renesanse, do sredine 18. stoljeća, definirano je tek 10-ak novih kartografskih projekcija. Međutim, u drugoj polovini 18. stoljeća, posebno zaslugom J. H. Lamberta i njegove primjene matematike, broj novih kartografskih projekcija se udvostručio.

Sve točnije metode izmjere oblika i veličine Zemlje te zaključak da je bolja aproksimacija Zemljina oblika elipsoid od sfere, također su pridonijeli izraženijem razvoju novih kartografskih projekcija.

Početkom 18. stoljeća sve se češće upotrebljavala jednostavna konusna projekcija, dok su neki autori, poput La Hirea i Parenta, dali značajan doprinos razvoju perspektivnih azimutnih projekcija.

- *Perspektivne azimutne projekcije s malim deformacijama*

U perspektivnim azimutnim projekcijama točke s plohe sfere projiciraju se po zakonima linearne perspektive na ravninu projekcije, koja je okomita na pravac koji spaja točku promatranja sa središtem sfere. U vanjskoj perspektivnoj projekciji točka promatranja nalazi se izvan sfere, ali na konačnoj udaljenosti (vidi 2.1.3.). Ovisno o položaju točke promatranja, vrijednosti deformacija na karti povećavaju se ili smanjuju.

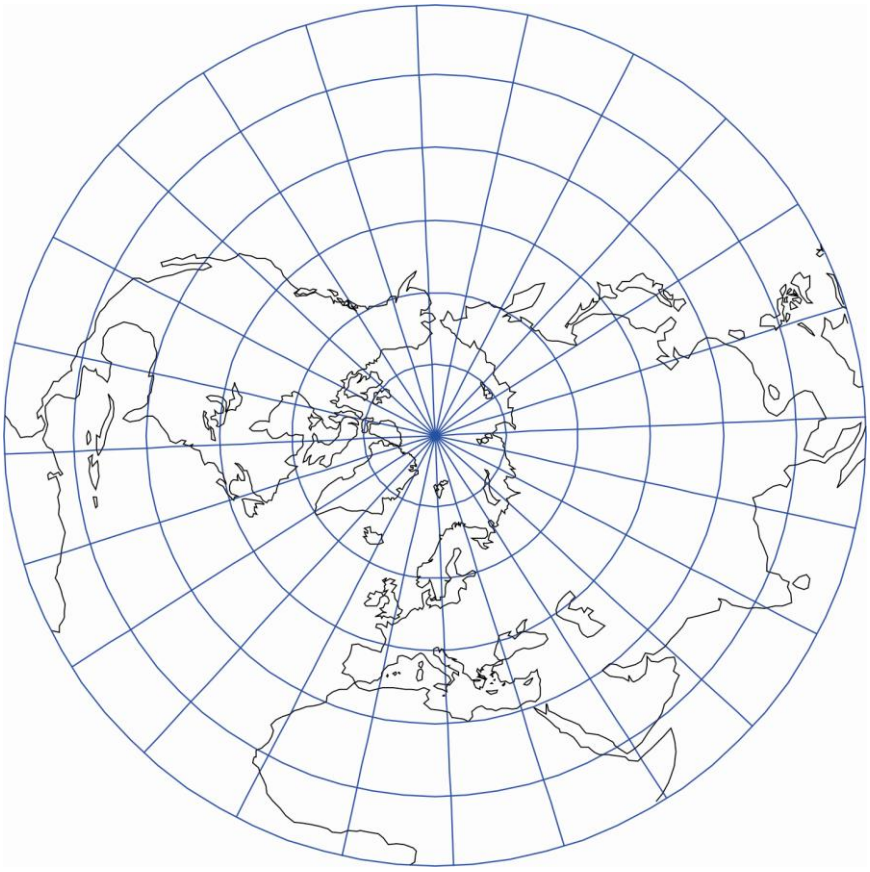
Philippe de La Hire i Antoine Parent su 1701. i 1702. godine predložili nekoliko novih položaja točke promatranja kako bi pokušali smanjiti deformacije projekcije.

– *La Hireova projekcija*

La Hire je odredio udaljenost točke promatranja (D) uz uvjet da je polumjer kružnice koja prikazuje ekvator točno dva puta veći od polumjera kružnice koja prikazuje paralelu kojoj odgovara geografska širina $\varphi = 45°$, kada je riječ o uspravnom aspektu projekcije (Snyder 1993).

Uz taj uvjet La Hire je dobio da D iznosi

$$D = R\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}7071R\,.$$



Slika 5.22. La Hireova projekcija – perspektivna azimutna projekcija uspravna/polarna, λ_0 = 12°30' u odnosu na početni meridijan Greenwich

Ako taj izraz za D uvrstimo u opće jednadžbe uspravnih perspektivnih azimutnih projekcija (Frančula 2000), dobit ćemo jednadžbe La Hierove projekcije:

$$\begin{aligned} y &= \rho \sin\delta \\ x &= \rho \cos\delta \\ \rho &= \frac{LR\cos\varphi}{D + R\sin\varphi} \\ \delta &= \lambda - \lambda_0\,, \end{aligned} \tag{5.8}$$

gdje su

φ, λ – geografske koordinate točke na sferi

λ_0 – geografska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja

ρ – polumjer paralele kojoj odgovara geografska širina φ

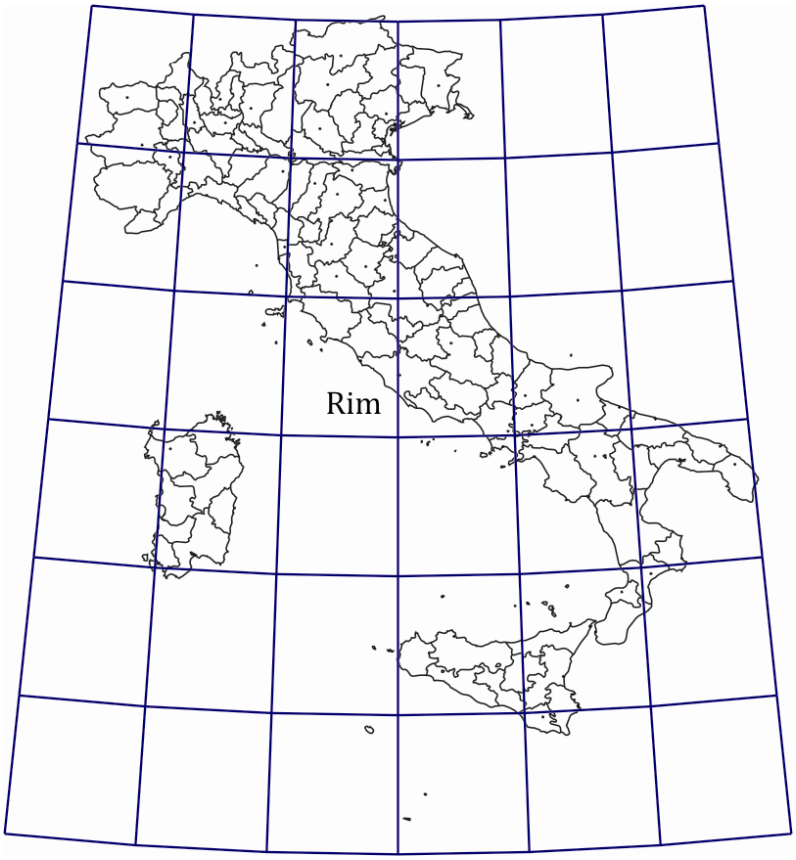
δ – kut između meridijana u projekciji

R – polumjer sfere koja se preslikava

D – udaljenost točke promatranja do središta sfere

L – udaljenost točke promatranja do projekcijske ravnine

y, x – pravokutne koordinate slike točke u ravnini projekcije.



Slika 5.23. Italija u uspravnoj La Hireovoj projekciji, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro

Slika 5.24. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u uspravnoj La Hireovoj projekciji ($\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte.

– *Parentove projekcije*

Parent je predložio tri perspektivne projekcije s malim deformacijama.

Za prvu projekciju predložio je za $D = 1{,}594R$ da bi umanjio „čitavu promjenu povećanja duljina“ na polusferi.

U drugoj projekciji predložio je za $D = 1{,}732R = \sqrt{3}R$ kako bi najveća deformacija faktora mjerila uzduž meridijana bila što je manja moguća, kada ravnina projekcije prolazi kroz središte sfere.

Za treću projekciju predložio je $D = 2{,}105R$ (Snyder 1993).

Ako vrijednosti za D uvrstimo u opće jednadžbe uspravnih perspektivnih azimutnih projekcija (5.8), dobit ćemo jednadžbe Parentovih projekcija.

- *Meadove modificirane globularne projekcije*

Bradock Mead je u knjizi *The construction of maps and globes* (1717) opisao konstrukciju nekoliko kartografskih projekcija koje su se upotrebljavale u to doba. Dvije projekcije je pritom modificirao (Snyder 1993).

Mead je konstruirao kružnicu s horizontalnim i vertikalnim promjerom koji su slike ekvatora i srednjeg meridijana. Svaki od promjera podijeljen je na 180 jednakih dijelova, dok je vanjska kružnica podijeljena na 360 jednakih dijelova. Paralele su kružni lukovi koji spajaju točke na vanjskoj kružnici s točkama uzduž srednjeg meridijana.

U prvoj modifikaciji projekcije Mead je na svakoj paraleli označio točke koje su od srednjeg meridijana udaljene isto kao i na globusu. Na taj način spajanjem odgovarajućih točaka dobio je slike meridijana. Meridijani nisu kružni lukovi. Ta prva Meadova modificirana globularna projekcija slična je polikonusnoj projekciji koja se počela upotrebljavati u 19. stoljeću.

U drugoj modifikaciji meridijani su pravci koji spajaju polove na krajevima vertikalnog promjera s točkama koje su jednako raspoređene uzduž ekvatora. Na taj način nastaju oštri lomovi na ekvatoru (Snyder 1993). Snyder navodi da nije vidio primjere upotrebe tih projekcija.

- *Poboljšane jednostavne ili ekvidistantne konusne projekcije*

Za preslikavanje sfere jednadžbe jednostavne konusne projekcije s dvije standardne paralele φ_1, φ_2 u pravokutnim koordinatama imaju oblik (Snyder i Voxland 1989):

$$
\begin{aligned}
&y = \rho \sin \delta \\
&x = q - \rho \cos \delta \\
&q = \rho_j \\
&\rho = R\left(\frac{\varphi_2 \cos\varphi_1 - \varphi_1 \cos\varphi_2}{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2} - \varphi \right) \\
&\delta = k(\lambda - \lambda_0) \\
&k = \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1},
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

gdje su

φ, λ – geografske koordinate točke na sferi

λ_0 – geografska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja

φ_1, φ_2 – geografske širine standardnih paralela

ρ – polumjer paralele kojoj odgovara geografska širina φ

ρ_j – polumjer paralele kojoj odgovara geografska širina φ_j, obično polumjer najjužnije paralele

δ – kut između meridijana u projekciji

R – polumjer sfere koja se preslikava

k – konstanta

y, x – pravokutne koordinate slike točke u ravnini projekcije.

– *De l'Isleova projekcija*

Veliki napredak u razvoju jednostavnih ili ekvidistantnih konusnih projekcija ostvario je Joseph Nicolas De l'Isle. U De l'Isleovoj projekciji paralele se preslikavaju kao koncentrični kružni lukovi. Dvije standardne paralele nalaze se na udaljenosti približno jedne četvrtine i tri četvrtine od krajnjih paralela. Na standardnim paralelama označio je točke koje su od srednjeg meridijana udaljene isto kao i na globusu. Na taj način spajanjem dviju odgovarajućih točaka pravcem dobio je slike meridijana. Meridijani se u projekciji ne sijeku u središtu koncentričnih kružnica koje su slike paralela, a

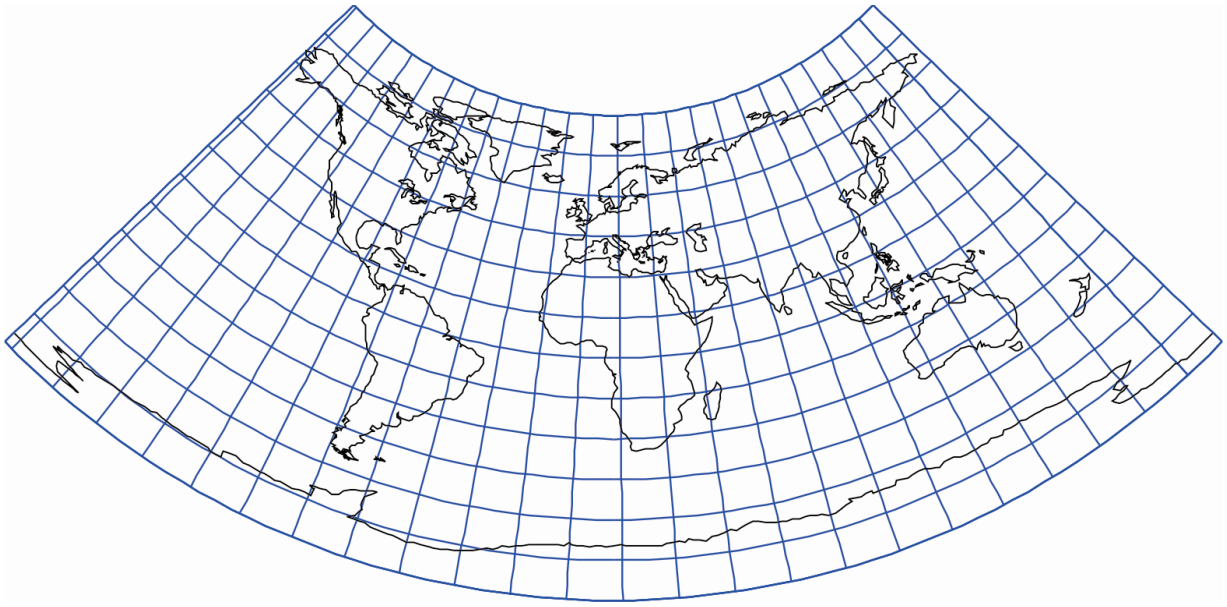
preslikavaju se kao pravci koji ne sijeku paralele pod pravim kutovima. Ta se projekcija danas više ne upotrebljava.

Jednostavne ili ekvidistantne konusne projekcije s koncentričnim kružnim paralelama i ravnim meridijanima koji konvergiraju i sijeku paralele pod pravim kutovima bilo s jednom ili dvije standardne paralele, uobičajeno su se upotrebljavale za izradu karata regija (Snyder 1993).

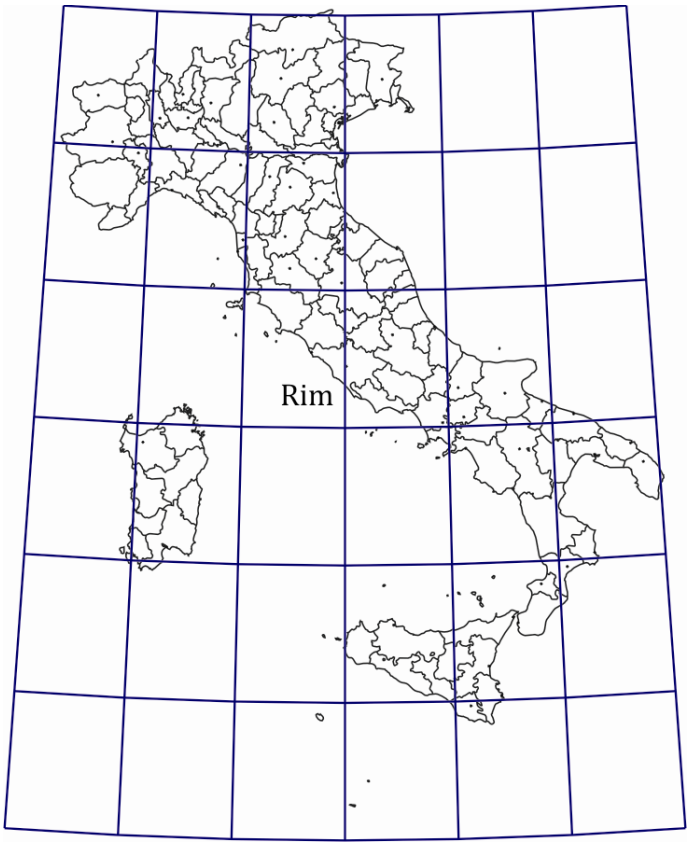
– *Meadova projekcija*

Mead je svoju projekciju opisao na sljedeći način. Nacrta se trapez širine 1° geografske dužine na najsjevernijoj i najjužnijoj geografskoj širini, simetrično u odnosu na srednji meridijan i visine jednake broju stupnjeva geografske širine koji obuhvaća područje karte. Srednji meridijan i granične geografske širine (najsjevernija i najjužnija) preslikavaju se u ravninu projekcije bez deformacija duljina. Slike paralela preslikavaju se kao međusobno paralelni pravci produženi do rubova trapeza. Takav trapez potom se niza naslanjajući se jedan na drugi. U takvoj kartografskoj mreži meridijani su pravci koji konvergiraju, dok su paralele kratki ravni segmenti linija koji kad se spoje podsjećaju na koncentrične kružne lukove.

Meadova je projekcija aproksimacija jednostavne konusne projekcije s dvije standardne paralele.



Slika 5.25. Ekvidistantna konusna projekcija s dvije standardne paralele, $\varphi_1 = 0°$, $\varphi_2 = 30°$, $\lambda_0 = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich



Slika 5.26. Italija u ekvidistantnoj konusnoj projekciji, $\varphi_1 = 42°10'$, $\varphi_2 = 44°$, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro

Slika 5.27. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u ekvidistantnoj konusnoj projekciji (φ_1 = 42°10', φ_2 = 44°, λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte.

- *Cassinijeva projekcija (poprečna ekvidistantna cilindrična projekcija)*

Cassinijeva projekcija pripada skupini cilindričnih ekvidistantnih projekcija. Slike srednjeg meridijana, svakog meridijana koji se nalazi 90° od srednjeg meridijana i ekvator preslikavaju se u projekciji kao pravci. Ostali meridijani i paralele su kompleksne krivulje konkavne prema srednjem meridijanu i bližem polu. Polovi su točke. Nema deformacija duljina uzduž srednjeg meridijana ni uzduž bilo kojeg pravca koji je okomit na srednji meridijan.

Jednadžbe Cassinijeve projekcije u pravokutnim koordinatama imaju oblik (Snyder i Voxland 1989):

$$\begin{aligned} y &= R\arcsin[\cos\varphi\sin(\lambda-\lambda_0)] \\ x &= R\arctan\left(\frac{\tan\varphi}{\cos(\lambda-\lambda_0)}\right), \end{aligned} \tag{5.10}$$

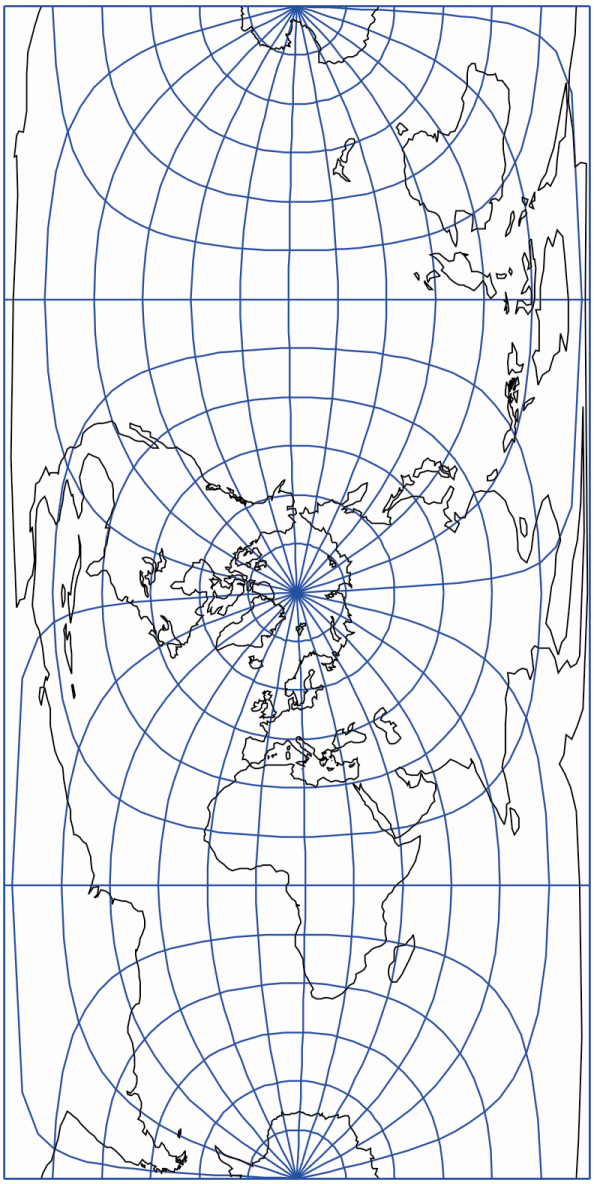
gdje su

φ, λ – geografske koordinate točke na sferi

λ_0 – geografska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja

R – polumjer sfere koja se preslikava

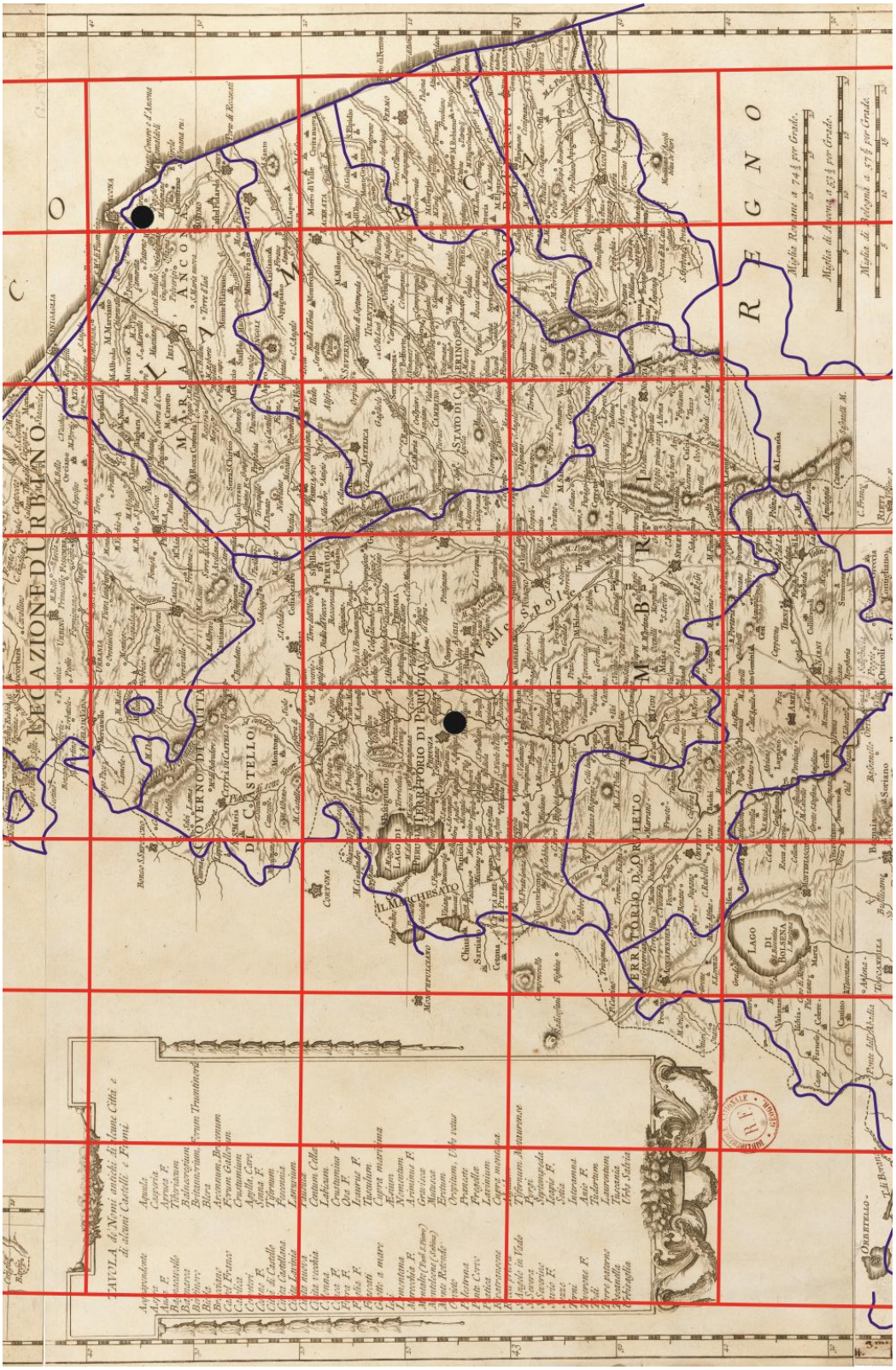
y, x – pravokutne koordinate slike točke u ravnini projekcije.



Slika 5.28. Cassinijeva projekcija – poprečna ekvidistantna cilindrična projekcija, λ_0 = 12°30' u odnosu na početni meridijan Greenwich

Cassinijeva projekcija upotrebljavala se u drugoj polovini 17. stoljeća za izradu službenih topografskih karata Francuske dok ju 1803. godine nije zamijenila Bonneova projekcija. Projekcija, kako ju je Cassini i osmislio, upotrebljavala se samo za preslikavanje elipsoida u ravninu projekcije (Snyder 1993).

Slika 5.29. Italija u Cassinijevoj projekciji, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro



Slika 5.30. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u Cassinijevoj projekciji ($\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte.

5.1.3. Kartografske projekcije prema obliku kartografske mreže

- *Konusne projekcije*

U konusnim projekcijama meridijani uspravnih projekcija preslikavaju se kao pravci koji se sijeku u jednoj točki pod kutovima proporcionalnim odgovarajućim razlikama geografskih dužina, a paralele kao lukovi koncentričnih kružnica sa središtem u presjeku meridijana (Frančula 2000).

Od navedenih projekcija u poglavljima 5.1.1. i 5.1.2. toj vrsti projekcija pripadaju jednostavna ili ekvidistantna konusna, De l'Isleova projekcija i Meadova projekcija.

- *Cilindrične projekcije*

U cilindričnim projekcijama meridijani uspravnih projekcija preslikavaju se kao pravci međusobno paralelni, na razmaku proporcionalnom odgovarajućim razlikama geografskih dužina, a paralele također kao pravci okomiti na meridijane (Frančula 2000).

Od navedenih projekcija u poglavljima 5.1.1. i 5.1.2. toj vrsti projekcija pripadaju kvadratična cilindrična projekcija (Plate Carrée), Mercatorova projekcija i Cassinijeva projekcija koja je poprečna.

- *Azimutne projekcije*

U azimutnim projekcijama paralele uspravnih projekcija preslikavaju se kao koncentrične kružnice, a meridijani kao pravci koji se sijeku u zajedničkom središtu paralela (Frančula 2000).

Od navedenih projekcija u poglavljima 5.1.1. i 5.1.2. toj vrsti projekcija pripadaju stereografska, azimutna ekvidistantna, La Hireova i Parentove projekcije.

- *Pseudokonusne projekcije*

U pseudokonusnim projekcijama paralele uspravnih projekcija preslikavaju se kao lukovi koncentričnih kružnica, a meridijani kao krivulje koje su simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac (Frančula 2000).

Od navedenih projekcija u poglavljima 5.1.1. i 5.1.2. toj vrsti projekcija pripada Bonneova projekcija.

- *Pseudocilindrične projekcije*

U pseudocilindričnim projekcijama paralele uspravnih projekcija preslikavaju se kao paralelni pravci, a meridijani kao krivulje simetrične u odnosu na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac okomit na paralele (Frančula 2000).

Od navedenih projekcija u poglavljima 5.1.1. i 5.1.2. toj vrsti projekcija pripadaju sinusna i trapezna projekcija.

- *Polikonusne projekcije*

U polikonusnim projekcijama paralele uspravnih projekcija preslikavaju se kao lukovi ekscentričnih kružnica, a meridijani kao krivulje simetrične s obzirom na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac na kojem se nalaze središta lukova paralela (Frančula 2000).

Od navedenih projekcija u poglavljima 5.1.1. i 5.1.2. toj vrsti projekcije slična je Meadova modificirana globularna projekcija.

5.2. Točnost prikaza matematičke osnove na kartama

Mjerenja, kao i konstruktivni i grafički postupci u geodetsko-kartografskim radovima opterećeni su pogreškama koje nije moguće izbjeći. Na kvalitetu karata bitno utječe i kartografsko-reprodukcijska obrada koju često nije moguće u potpunosti jednoznačno odrediti jer se ne mogu obuhvatiti vrijednosti koje se mogu egzaktno izmjeriti. Točnost možemo grupirati u dvije osnovne komponente: točnost općih informacija koje karta pruža i geometrijsku točnost. Nemoguće je naći matematički izraz za točnost općih informacija jer se ona odnosi, na primjer, na pogreške u položaju geografskog imena, klasifikaciji putova, pogrešnoj koti i slično, a ne utječe izravno na geometrijsku točnost. Može se samo odrediti broj pogrešnih u odnosu na ukupan broj informacija takve vrste (Peterca i dr. 1974). Taj oblik točnosti neće se razmatrati u ovom poglavlju doktorskog rada.

5.2.1. Mjere za izražavanje točnosti

Razlike između pravih i mjerenih ili konstruiranih veličina i njihovih vrijednosti dobivenih mjerenjem ili konstruiranjem nazivamo *pogreškama*. Ako je prava vrijednost mjerene veličine nepoznata, iz rezultata mjerenja može se odrediti njezina procijenjena vrijednost. Razlika između procijenjene i mjerene vrijednosti naziva se *odstupanje* (v).

Kada su mjerenja oslobođena sustavnih pogrešaka, slučajne pogreške, a i točnost mjerenja, izražavaju se (Peterca i dr. 1974):

- *srednjim apsolutnim odstupanjem* – aritmetička sredina zbroja apsolutnih vrijednosti odstupanja

$$\Theta = \frac{|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |v_i|}{n} \tag{5.11}$$

- *srednjim kvadratnim odstupanjem* – drugi korijen zbroja kvadrata odstupanja podijeljen s brojem mjerenja

$$m = \pm\sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n}}. \tag{5.12}$$

Kategorije točnosti mogu se definirati i s pomoću (Peterca i dr. 1974)

- *pogreške elementarnih grafičkih konstrukcija* – srednja kvadratna pogreška osnovnih grafičkih operacija, a iznosi ±0,1–0,2 mm
- *grafičke točnosti u mjerilu* – dužina u prirodi koja odgovara pogrešci elementarnih grafičkih konstrukcija i čija veličina ovisi o promatranome mjerilu. Npr. za kartu koja je izrađena u M1:25 000 iznosit će ±2,5–5,0 m.

5.2.2. Točnost grafičko-konstruktivnih radova

Većina kartografskih operacija sadrži niz grafičko-konstruktivnih radnji, od konstrukcije okvira i kartografske mreže, iscrtavanja, graviranja itd. Sve su te radnje podložne neizbježnim pogreškama koje utječu na točnost karte. Veličina tih pogrešaka ovisi o tehničkoj mogućnosti korištenog pribora i instrumenata, fizioloških osobina oka crtača koje su uvijek ograničene, kao i pažnje crtača. Veličina pogrešaka ovisit će također i o izabranoj metodi rada (Peterca i dr. 1974).

S obzirom na to da je karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* iz 1755. godine izrađena bakrorezom, ne možemo sa sigurnošću tvrditi kojim priborom i instrumentom je karta točno izrađivana, niti o preciznosti crtača. Točnost grafičko-konstruktivnih radnji procijenit će se na osnovi tehnika izrade karata graviranjem koja je bila u upotrebi sredinom 20. stoljeća.

U procjenjivanju točnosti konstruiranja, najčešće grafičko-instrumentalne radnje podložne pogreškama bile su (Peterca i dr. 1974):

- *označavanje točke ubodom igle* – nastao je kružić promjera 0,1 mm. Pravi položaj točke je centar kružića. Ponovljeni ubod proširi točku na 0,2 mm. Višestrukim ubodom točka se dodatno proširuje
- *označavanje točke ubodom na ravnoj ili zakrivljenoj liniji* – centar uboda neće se nalaziti na osi linije. Srednja kvadratna pogreška iznosi ±0,05 mm
- *označavanje presjeka dviju linija točkom* – pogreška obilježavanja ponajprije je ovisila o kutu pod kojim se linije, bile one ravne ili zakrivljene, sijeku. Srednja pogreška udaljenosti uboda od pravog presjeka iznosi oko ±0,06 mm. Što je kut između linija manji to će pogreška biti veća
- *povlačenje linije kroz danu točku* – os linije neće se poklopiti sa središtem zadane točke. Pri pažljivom radu srednja pogreška iznosi ±0,07 mm
- *povlačenje pravca kroz dvije zadane točke* – prilikom crtanja pravca on će odstupati od stvarnog pravca koji treba proći kroz središte zadanih točaka. Povećanjem udaljenosti između točaka, točnost se smanjuje. Procjena je da će se, pri udaljenosti između točaka od 35 cm, pravac otkloniti od svog položaja za 1'
- *točnost iscrtavanja i graviranja* – svako odstupanje od predloška izaziva pogrešku. Prema nekim ispitivanjima, srednje kvadratno odstupanje iscrtavanja ili graviranja iznosi od ±0,12 mm pa do ±0,2 mm.

5.2.3. Ocjena geometrijske točnosti karte

Ako je karta rezultat neke terenske izmjere, ona će uz pogreške nastale zbog grafičko-konstruktivnih radnji (vidi 5.2.2.) sadržavati i pogreške mjerenja. U slučaju da karta nije izravan rezultat terenske izmjere već se izrađuje na osnovi kartografskih izvora, točnost izmjere zamjenjuje se pogreškama u položaju točaka i kontura na kartografskim

izvorima. Sve navedene činjenice utječu na točnost karte. Uzimajući ih u obzir, mogu se odrediti ukupne pogreške položaja točaka i kontura te na taj način definirati geometrijska točnost, koja kvalificira kartometrijsku vrijednost karte.

S obzirom na način pristupanja i svrhu ocjenjivanja, karta se može ocijeniti na dva različita načina: procjena točnosti *a priori* i procjena točnosti *a posteriori*.

Osnovne komponente geometrijske točnosti karte su horizontalna (planimetrijska, položajna) točnost, tj. točnost točaka, linija i kontura objekata po položaju i vertikalna (altimetrijska, visinska) točnost, tj. točnost izohipsa i kotiranih točaka koje služe za određivanje nadmorskih visina ostalih točaka na karti (Peterca i dr. 1974).

S obzirom na to da na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* nema visinskog prikaza terena izohipsama i kotama, u doktorskom radu ocjenjivat će se samo horizontalna točnost karte.

5.2.3.1. Ocjena točnosti karte a priori

Procjena točnosti *a priori* dobije se analizom pojedinih pogrešaka koje nastaju tijekom izrade karte. Zbrajanjem pojedinih pogrešaka po pravilima prenošenja pogrešaka, dobije se veličina pogreške koja bi se mogla očekivati na gotovoj karti ako se izrađuje pod pretpostavljenim uvjetima.

Kod tog načina ocjenjivanja točnosti potrebno je poznavati sve operacije u postupku izrade karte. S obzirom na to da ne možemo sa sigurnošću utvrditi sve operacije koje su se provele u postupku izrade karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* jer nam one nisu dostupne, procjena točnosti provest će se na osnovi tehnika izrade karata graviranjem koja je bila u upotrebi sredinom 20. stoljeća.

Tražena pogreška može se dobiti kao srednja kvadratna pogreška iz sume slučajnih pogrešaka pomoću formule (Peterca i dr. 1974)

$$m = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i^2}\ , \qquad (5.13)$$

gdje je

m – srednja kvadratna pogreška cijelog postupka izrade

m_i – srednja kvadratna pogreška jedne operacije dobivena pomoću formule (5.12)

n – broj operacija u čitavom postupku izrade karte.

Ocjena *a priori* mogućih horizontalnih odstupanja temelji se na analizi pogrešaka nastalih obradom numeričkih i grafičkih podataka, koji se tijekom kartografsko-reprodukcijske obrade uobličuju u završni proizvod – otisnuti list karte. Pritom je teško odrediti prave veličine pogrešaka koje nastaju u procesu izrade karte. Zbog toga veličine pogrešaka koje će se dati u daljnjem tekstu treba smatrati procijenjenom vrijednosti koja ne bi trebala daleko odstupati od realne vrijednosti.

- *Pogreške geodetske osnove*

Zadatak se svodi na određivanje položaja točaka i konstruiranje linija matematičke osnove buduće karte po kojima će se orijentirati, tj. međusobno uklapati identične točke i linije na kartografskom izvoru i budućoj karti. Sadržaj karata orijentira se korištenjem veznih točaka (obično presjecišta meridijana i paralela) i pravokutne kartografske mreže.

Pod pretpostavkom da najudaljenije točke međusobno mogu odstupati do ±0,3 mm, srednja kvadratna pogreška osnove iznosi m_1=±0,08 mm (Peterca i dr. 1974).

- *Pogreška sastavljanja*

Na kopiji dobivenoj s montažnog originala nalazi se sadržaj koji odgovara mjerilu osnovnoga kartografskog izvora. To je položajna osnova po kojoj se generaliziranjem oformljuje sadržaj buduće karte. Nakon toga se iscrtava generalizirani sadržaj.

Srednja kvadratna pogreška generaliziranja mogla bi se kvalificirati pogreškom reda veličine m_G=±0,2 mm. U tu je pogrešku uključena i točnost iscrtavanja sastavljačkog originala (Peterca i dr. 1974).

Srednja *pogreška izrade predložaka za graviranje* iznosi m_2=±0,08 mm.

Srednja kvadratna *pogreška graviranja i iscrtavanja* iznosi m_3=±0,12 mm.

Odstupanjima treba dodati *pogrešku zbog deformacije papira* tijekom tiskanja. Za srednju kvadratnu pogrešku uzima se veličina m_4=±0,1 mm (Peterca i dr. 1974).

- *Pogreška očitavanja*

Iako prije navedene ocjene točnosti analiziraju pogreške nastale tijekom izrade karte, u obzir treba uzeti i točnost očitavanja koordinata točaka s karte. Objekt na karti ne daje samo vizualnu sliku njegova položaja, već služi i kao predmet kartometrijskih mjerenja. Mjerenja na karti ne mogu se izvoditi bez pogrešaka, posebno ako znamo da pogreška

mjerenja koordinate točke na karti sadrži pogrešku ocjene položaja središta te točke kao i pogrešku samog očitanja.

Općenito se uzima da je grafička točnost odnosno srednja pogreška pri očitavanju koordinata točaka s karte na papiru m_t=±0,2 mm (Peterca i dr. 1974).

- *Ukupna pogreška*

Zbrajanjem utjecaja pojedinih pogrešaka dobije se prema formuli (5.13) ocjena očekivane točnosti karte *a priori*.

Topografske karte u mjerilu 1:25 000 i 1:50 000 u izdanju Vojnogeografskog instituta bivše Jugoslavije bile su podvrgnute ocjeni točnosti (Peterca i dr. 1974). Procijenjeno je da srednja kvadratna pogreška točke otisnute na karti, čija je vrijednost određena upotrebom geodetskog stola, iznosi 0,2–0,4 mm, a da pritom nije uzet u obzir utjecaj deformacije papira, za mjerilo karte 1:10 000, 1:25 000 i 1:50 000. Međutim, standardi za izradu topografskih karata iz 50-ih godina 20. stoljeća propisivali su da srednje pogreške u položaju objekata i kontura na karti ne prelazi ±0,5 mm, dok su se za granične maksimalne pogreške uzimale dvostruke vrijednosti srednjih pogrešaka, dakle ±1,0 mm.

Tu svakako treba naglasiti da je karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* izrađena bakrorezom 200 godina prije od danih procijenjenih točnosti i da je karta izrađena u približnom mjerilu 1:372 000, a ranije procjene provedene su za mjerila karata do 1:50 000. Do sada, barem koliko je meni poznato, nitko nije dao ocjenu točnosti izrade karata tehnikom bakroreza.

Stoga za procjenu točnosti *a priori*, dopušteno srednje odstupanje koje je dvostruko veće od propisanih standarda za izradu karata iz 50-ih godina 20. stoljeća, odnosno ±1,0–2,0 mm, može se smatrati zadovoljavajućim rezultatom prilikom ocjene točnosti matematičke osnove na starim kartama.

5.3. O primjerku karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Digitalna kopija primjerka karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* koji će se upotrebljavati za određivanje kartografske projekcije u ovom doktorskom radu

naručena je iz Francuske nacionalne knjižnice u Parizu u visokoj rezoluciji i originalnoj veličini (Sign. GE DD-2987 (5411,1-3)).

Prilikom primitka listova karte nisam dobila listove traženih obilježja, pa sam kontaktirala Francusku nacionalnu knjižnicu s pitanjem u kojoj su točno rezoluciji skenirali karte i mogu li izmjeriti dimenzije dijagonala svakog lista karte. Podatak o točnoj rezoluciji skeniranja nisam dobila, ali su mi iz Francuske nacionalne knjižnice poslali izmjerene dijagonale listova karte.

Listove karte dobila sam u rezoluciji 72 dpi i gotovo tri i pol puta većih dimenzija od onih dimenzija koje su mi poslali iz Francuske nacionalne knjižnice. Usporedbom dimenzija dijagonale (originalnih i skeniranih) listova i poznate rezolucije skeniranja, računskim putem odredila sam da bih rezoluciju listova trebala povećati na 245 dpi. Nakon što sam povećala rezoluciju sa 72 dpi (izvorna rezolucija u kojoj sam dobila karte) na rezoluciju 245 dpi i smanjila dimenzije listova karte te ih usporedila s dobivenim dimenzijama dijagonala listova karte, uvjerila sam se da su listovi karte u originalnoj veličini.

Usporedbom dimenzija listova karte primijetila sam da se prvi i drugi list karte po dimenzijama dobro slažu, međutim da treći list karte odstupa od prethodna dva. Usporedbom sadržaja na karti može se primijetiti kako on, kada se sadržaj preklopi u sredini lista, na krajevima odstupa i do 3 mm.

Sljedeći korak bio je spajanje listova karte u jednu cjelinu. S obzirom na to da treći list karte odstupa po dimenzijama od prva dva, trebala sam ga proporcionalno smanjiti po širini i visini. Treći list bilo je potrebno smanjiti za 1% kako bi po dimenzijama odgovarao prvom i drugom listu karte. Spajanje listova karte provela sam u softveru GIMP, programu za obradu rasterske grafike.

Sve daljnje analize u doktorskom radu provedene su na spojenim listovima karte.

Za detaljnu analizu karte, kao što su npr. određivanje kartografske projekcije ili ocjena točnosti podataka nacrtanih na karti, potrebno je znati pravokutne koordinate karakterističnih točaka na karti. Karakteristične točke kod npr. određivanja vrste kartografske projekcije i parametara koji opisuju tu kartografsku projekciju, su pravokutne koordinate kartografske mreže odnosno presjecišta meridijana i paralela nacrtanih na karti.

Spojeni listovi karte, u originalnoj veličini, učitani su u program (nanoCAD) koji podržava rasterski format podataka, a namijenjen je ponajprije za vektorsku grafiku, što mi je omogućilo iscrtavanje točaka presjeka meridijana i paralela te očitavanje koordinata tih točaka. Donji lijevi rub karte postavljen je u ishodište koordinatnog sustava radnog prostora nanoCAD-a, a odabrana je mjerna jedinica metar. Iscrtavanjem linije srednjeg meridijana na karti, koji bi trebao biti ravna crta paralelna s ordinatnom osi radnog prostora nanoCAD-a, primijetila sam da su listovi karte zarotirani za 0,25° u smjeru obrnutom od kazaljke na satu u odnosu na ordinatnu os koordinatnog sustava.

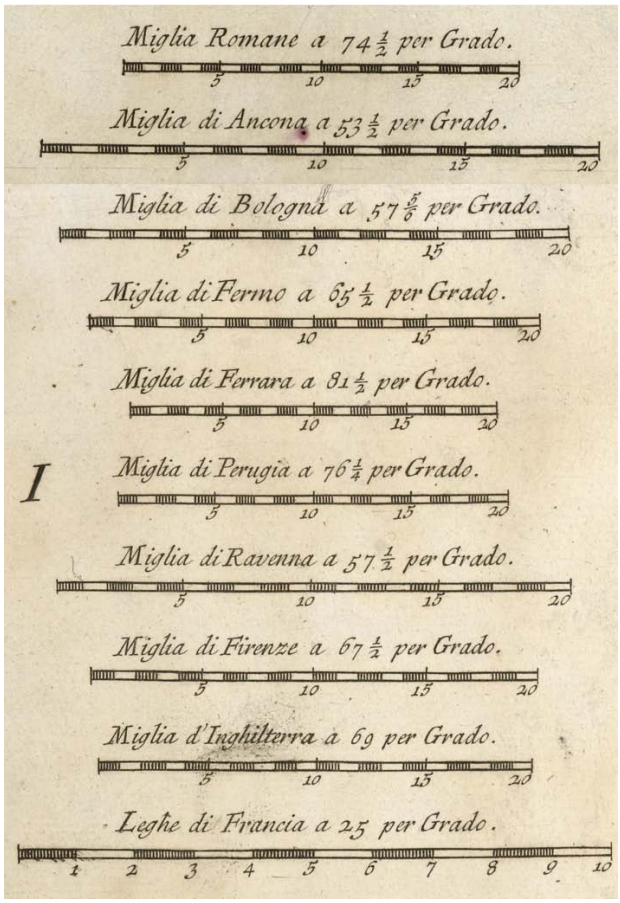
Na dobro vidljivim mjestima gdje meridijani sijeku paralele očitane su vrijednosti koordinata (x, y) presjecišta meridijana i paralela i pridružene su im teorijske vrijednosti (geografske koordinate (φ, λ)) očitane iz opisa koordinatne mreže s rubova karte.

Na taj način pripremljeni podaci čine osnovu za određivanje kartografske projekcije u kojoj je karta izrađena.

5.4. Određivanje mjerila karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Na desnoj strani drugog i trećeg lista karte nalazi se deset grafičkih mjerila (slika 5.31.) na kojima su jedinične mjere za duljine u rimskim (*Miglia Romane*), ankonskim (*Miglia di Ancona*), bolonjskim (*Miglia di Bologna*), fermskim (*Miglia di Fermo*), ferarskim (*Miglia di Ferrara*), peruđijskim (*Miglia di Perugio*), ravenskim (*Miglia di Ravenna*), firentinskim (*Miglia di Firenza*) i engleskim (*Miglia d'Inghilterra*) miljama te francuskim ligama (*Leghe di Francia*) (1 liga = 2000 francuskih hvata). S obzirom na to da brojčano mjerilo nije naznačeno na karti, ono se može izračunati iz grafičkog mjerila. S obzirom na to da mi nisu poznate duljine milja s grafičkih mjerila potrebno je znati duljinu luka 1° meridijana.

Glavni cilj cijele geodetske izmjere koju su proveli Maire i Bošković bilo je određivanje duljine luka meridijana između Rima i Riminija. Vrijednost koju su pritom izračunali za duljinu luka 1° meridijana iznosila je 56 979 francuskih hvata, odnosno 111,052 km. Tu vrijednost upotrebljavala sam za računanje numeričkog mjerila.



Slika 5.31. Grafička mjerila na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Uz svako grafičko mjerilo na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* navedeno je koliki dio duljine stupnja meridijana iznosi određena milja (vidi na slici 5.31.), a prikazani su u drugom stupcu tablice 5.1. Primjenom jednostavnog izraza

$$m = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{S}} \tag{5.14}$$

može se izračunati koliko iznosi pojedina milja, gdje je *m* duljina milje (treći stupac, tablica 5.1.), L duljina luka jednog stupnja meridijana (111,052 km), a S dio duljine luka stupnja meridijana (drugi stupac, tablica 5.1.). U tablici 5.1. u trećem stupcu prikazane su izračunate vrijednosti milja s pomoću izraza (5.14). Na grafičkih mjerila prikazanima na karti u softveru Inkscape izmjerila sam duljine dužina jedne milje te sam izračunala srednju vrijednost za svaku milju. Te vrijednosti prikazane su u četvrtom stupcu tablice 5.1. Tu je bitno naglasiti da su duljine jedne milje na grafičkim mjerilima koja se nalaze na trećem listu karte izmjerene u originalnoj veličini lista karte, a ne u smanjenoj.

Tablica 5.1. Duljine milja i mjerila na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* izračunati iz grafičkih mjerila i duljine luka 1° meridijana

Naziv milje	**Dio duljine luka stupnja meridijana, S**	**Duljina milje, *m* [km]**	**Srednja duljina milje na grafičkom mjerilu, N [mm]**	**Mjerilo (zaokruženo)**
Rimska milja	74,50	1,491	4,00	373 000
Ankonska milja	53,50	2,076	5,60	371 000
Bolonjska milja	57,83	1,920	5,10	377 000
Ferminska milja	65,50	1,695	4,52	375 000
Ferarska milja	81,50	1,363	3,68	370 000
Peruđijska milja	76,25	1,456	3,91	372 000
Ravenska milja	57,50	1,931	5,16	374 000
Firentinska milja	67,50	1,645	4,48	367 000
Engleska milja	69,00	1,609	4,35	370 000
Francuska liga	25,00	4,442	11,90	373 000
			Srednja vrijednost	372 000

Na temelju izmjerenih duljina dužine jedne milje na grafičkim mjerilima te duljina milje izračunate s pomoću formule (5.14) izračunala sam numerička mjerila pomoću izraza

$$\mathrm{M} = \frac{m}{\mathrm{N}}, \tag{5.15}$$

gdje je N srednja vrijednost jedinične duljine milje mjerene na grafičkom mjerilu. U petom stupcu tablice 5.1 prikazane su zaokružene vrijednosti numeričkih mjerila. Iz tih se vrijednosti može zaključiti da numeričko mjerilo karte iznosi zaokruženo 1:372 000.

5.5. Ispitivanje oblika kartografske mreže na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Istraživanje kartografske projekcije u kojoj je izrađena neka karta uvijek je bio izazov. To se posebno odnosi na stare karte izrađene prije nekoliko stotina godina. I u slučaju da je mreža meridijana i paralela iscrtana na karti, nije odmah jasno o kojoj je kartografskoj projekciji riječ.

Jedna od takvih karata je i *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* Ch. Mairea i J. R. Boškovića iz 1755. godine. Borčić (1964–65) u svom radu navodi da je ta karta izrađena u poliedarskoj kartografskoj projekciji.

Promatra li se kartografska mreža koja je nacrtana na karti može se primijetili da meridijani izgledaju kao ravne crte, a paralele kao zakrivljene linije koje bi mogle biti lukovi kružnica. Prema definicijama oblika kartografske mreže u danas poznatim kartografskim projekcijama (vidi 5.1.3.) to nikako ne može odgovarati poliedarskoj već nekoj od konusnih ili azimutnih projekcija.

U ovom poglavlju doktorskog rada objasnit ću postupak određivanja kartografske projekcije zajedno s njezinim parametrima. Ako kartografska projekcija i njezini parametri nisu poznati, podaci s karte neće se moći na ispravan način transformirati u neku drugu projekciju ili bazu. Postupak određivanja kartografske projekcije obuhvaća pitanja poput: Jesu li meridijani ravne ili zakrivljene linije? Jesu li paralele ravne ili zakrivljene linije? Ako su paralele zakrivljene, jesu li koncentrični kružni lukovi? Kako su paralele razmaknute uzduž meridijana?

Da bismo odgovorili na ta pitanja i odredili kartografsku projekciju u kojoj je karta izrađena potrebno je testirati pravocrtnost meridijana ili paralela, konvergenciju meridijana i koncentričnost paralela.

Za ispitivanje pravocrtnosti meridijana i zakrivljenosti paralela predložena je metoda euklidskih udaljenosti.

5.5.1. Određivanje kartografske projekcije prema kartografskoj mreži nacrtanoj na karti

Promatrajući kartografsku mrežu koja je nacrtana na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* primijetila sam da bi slike meridijana mogle biti ravne crte, dok su slike paralela zakrivljene crte koje podsjećaju na lukove kružnica ili dijelove neke krivulje.

S obzirom na to i opis oblika kartografske mreže iz poglavlja 5.1.3. možemo sa sigurnošću reći da karta nije izrađena u uspravnoj cilindričnoj ni pseudocilindričnoj projekciji jer se kod tih projekcija paralele preslikavaju u pravce. Iznimka je jedino Cassinijeva projekcija, koja je poprečna cilindrična projekcija. Zbog specifičnog oblika kartografske mreže, slike meridijana i paralela u ravnini projekcije preslikavaju se kao kompleksne krivulje, Cassinijeva projekcija također ulazi u moguće projekcije u kojoj je karta izrađena, ako meridijani nacrtani na karti nisu pravci.

Iscrtavanjem paralela htjela sam odrediti kakav oblik one poprimaju, koncentričnih ili ekscentričnih kružnica. Kružnice sam crtala u nanoCAD-u s pomoću tri točke. Prva točka nalazi se na zapadnom dijelu karte gdje paralela siječe rub karte. Druga točka nalazi se na presjecištu paralele i srednjeg meridijana, dok je treća točka na istočnom dijelu karte gdje paralela siječe rub karte. Nacrtane kružnice dobro prate nacrtane paralele na karti, a poprimile su ekscentričan oblik čija se središta nalaze približno uzduž srednjeg meridijana.

S obzirom na opis oblika kartografske mreže iz poglavlja 5.1.3. došla sam do zaključka da je karta izrađena u nekoj polikonusnoj projekciji jer su jedino kod te vrste projekcije paralele ekscentrične kružnice.

Međutim, polikonusne projekcije ušle su u upotrebu u drugoj polovini 19. stoljeća. Jedina slična projekcija koja je u doba izrade karte postojala bila je Meadova globularna projekcija. Kao što se može pročitati u poglavlju 5.1.1., Snyder (1993), koji je proučavao razvoj kartografskih projekcija i njihove primjene na kartama, nije pronašao ni jednu kartu izrađenu u toj projekciji.

Može se primijetiti da se približnim iscrtavanjem i promatranjem oblika kartografske mreže ne može u potpunosti definirati u kojoj je kartografskoj projekciji karta izrađena.

Ipak takvim postupkom, ako je na karti nacrtana kartografska mreža, može se suziti izbor kartografskih projekcija u kojoj je karta izrađena.

5.5.2. Ispitivanje pravocrtnosti meridijana na karti

Pretpostavimo da su meridijani na karti ravne crte koje bi trebale biti dio pravca. Treba ispitati jesu li meridijani na karti ravne crte. U nastavku dajem prijedlog rješenja pronalaska „najboljeg“ pravca metodom euklidskih udaljenosti. Primjenom navedene metode ispitat će se jesu li meridijani na karti dijelovi pravca ili krivulje.

Za konačno mnogo točaka u ravnini, dobivenih mjerenjem neke kontinuirane pojave ili objekta, obično se želi rekonstruirati krivulja koja prolazi kroz njih, odnosno, budući da su mjerenja uvijek opterećena pogreškama, što bliže tim točkama. Posebno, ako je priroda problema takva (npr. točke su nastale mjerenjem nečega što "bi trebalo" biti pravac), tražimo pravac koji "najbolje" predstavlja (aproksimira) dane točke (Jovičić i dr. 1982, Petrović i dr. 1983, Lapaine 1989).

Najčešće se postupa ovako: točke T_1, T_2,..., T_n prikažu se u nekom Kartezijevu koordinatnom sustavu u ravnini kao točke s koordinatama (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n), pa se traži onaj pravac $y = f(x) = ax + b$ za koji je zbroj kvadrata razlika ordinata

$$\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-y_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i+b-y_i\right)^2 \tag{5.16}$$

najmanji. Taj uvjet vodi na sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice koji znamo riješiti.

Budući da pri određivanju pravocrtnosti meridijana nije riječ o proučavanju korelacije nego o traženju "najboljeg" pravca za zadani skup točaka, može se zaključiti da minimizacija zbroja kvadrata razlike ordinata nije najbolji kriterij za pronalaženje toga pravca. Zato će se zadatak rješavati na drugi način. Želimo da, bez obzira na odabrani koordinatni sustav, kao "najbolji" pravac uvijek dobijemo jedan te isti pravac. Budući da je euklidska udaljenost točke od pravca uvijek ista, bez obzira na koordinatni sustav u kojem računamo, ona je dobar kriterij za nalaženje najboljeg pravca. Euklidska udaljenost definira se kao drugi korijen iz zbroja kvadrata razlika koordinata zadanih točaka (Pitagorin poučak primijenjen na koordinatne razlike).

- *Zadatak*

Za zadanih n točaka T_1, T_2,..., T_n u ravnini treba naći onaj pravac koji ima svojstvo da je zbroj kvadrata euklidskih udaljenosti zadanih točaka od toga pravca najmanji.

- *Rješenje*

Neka točke T_1, T_2,..., T_n u nekom Kartezijevu koordinatnom sustavu imaju koordinate

$T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2), ..., T_n(x_n, y_n)$.

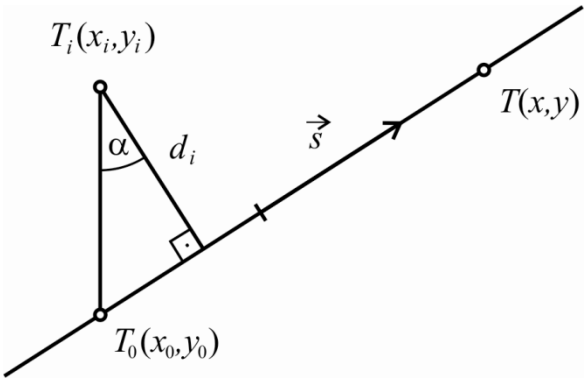
Kvadrat euklidske udaljenosti točke $T_i(x_i, y_i)$ od pravca

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} \tag{5.17}$$

je

$$d_i^2 = \frac{[(x_i - x_0)l - (y_i - y_0)k]^2}{k^2 + l^2}. \tag{5.18}$$

Uočimo da je (5.17) kanonski ili standardni oblik jednadžbe pravca u ravnini. U toj jednadžbi x i y su koordinate bilo koje točke na pravcu, x_0 i y_0 su koordinate jedne zadane točke na pravcu, a k i l su komponente vektora smjera toga pravca $\vec{s} = k\vec{i} + l\vec{j}$ (vidi sliku 5.32.).



Slika 5.32. Pravac kroz zadanu točku s koordinatama (x_0, y_0) i zadanog smjera $\vec{s} = k\vec{i} + l\vec{j}$. Udaljenost točke $T_i(x_i, y_i)$ od pravca je d_i

Sa slike se lako vidi da je $\overrightarrow{T_0T} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$. Vektori $\overrightarrow{T_0T}$ i $\vec{s}$ su kolinearni, pa vrijedi $\overrightarrow{T_0T} = \lambda\vec{s} = \lambda(k\vec{i} + l\vec{j})$ i odatle $x - x_0 = \lambda k$, $y - y_0 = \lambda l$, što je ekvivalentno s (5.17).

Kosinus kuta α između vektora $\overrightarrow{T_iT_0}$ i vektora $l\vec{i} - k\vec{j}$ koji je okomit na vektor $\vec{s}$ smjera pravca, odnosno koji ima smjer euklidske udaljenosti točke $T_i(x_i, y_i)$ od pravca, može se izraziti na dva načina: iz trokuta na slici i iz definicije skalarnog produkta:

$$\cos\alpha = \frac{d_i}{\left|\overrightarrow{T_iT_0}\right|} = \frac{\overrightarrow{T_iT_0}(l\vec{i} - k\vec{j})}{\left|\overrightarrow{T_iT_0}\right|\left|l\vec{i} - k\vec{j}\right|}.$$

Odatle se odmah dobije

$$d_i = \frac{\overrightarrow{T_iT_0}(l\vec{i} - k\vec{j})}{\left|l\vec{i} - k\vec{j}\right|} = \frac{(x_i - x_0)l - (y_i - y_0)k}{\sqrt{l^2 + k^2}}.$$

Kako je svakom pravcu pridruženo beskonačno mnogo jednadžbi oblika (5.17) jer k i l nisu jednoznačno određeni, možemo po volji zadati jedan uvjet koji povezuje k i l. Iz (5.18) vidimo da je pogodno odabrati

$$k^2 + l^2 = 1 \tag{5.19}$$

pa onda umjesto (5.18) imamo

$$d_i^2 = \left[(x_i - x_0)l - (y_i - y_0)k\right]^2. \tag{5.20}$$

Tražimo dakle da funkcija

$$S = S(k, l, x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \tag{5.21}$$

poprimi najmanju moguću vrijednost, minimum, uz uvjet (5.19). Da bismo riješili postavljeni zadatak, tzv. uvjetni ekstrem, konstruiramo pomoćnu funkciju kako nas uči matematička analiza:

$$R = R(k, l, x_0, y_0, \lambda) = S(k, l, x_0, y_0) - \lambda(k^2 + l^2 - 1) \tag{5.22}$$

i tražimo njezine ekstremne vrijednosti. U tu svrhu odredimo parcijalne derivacije i izjednačimo ih s nulom:

$$\frac{\partial R}{\partial k} = \frac{\partial S}{\partial k} - 2\lambda k = 2\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_0)^2 - \lambda\right]k - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(y_i - y_0)l\right\} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial l}=\frac{\partial S}{\partial l}-2\lambda l=2\left\{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)(y_i-y_0)k+\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2-\lambda\right]l\right\}=0$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_0}=\frac{\partial S}{\partial x_0}=2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-x_0)l-(y_i-y_0)k\right]\ (-l)\right\}=0 \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y_0}=\frac{\partial S}{\partial y_0}=2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-x_0)l-(y_i-y_0)k\right]\ k\right\}=0$$

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda}=-(k^2+l^2-1)=0.$$

Dobili smo 5 nelinearnih jednadžbi s 5 nepoznanica. Lako se vidi da se treća i četvrta od tih jednadžbi mogu pojednostaviti i da vode na jednu te istu jednadžbu

$$k\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0)=l\sum_{x=1}^{n}(x_i-x_0) \tag{5.24}$$

koja se uz oznake

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\ \text{ i }\ \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n} \tag{5.25}$$

može napisati u obliku

$$k(\bar{y}-y_0)=l(\bar{x}-x_0). \tag{5.26}$$

Iz posljednjeg izraza čitamo da točka s koordinatama $(\bar{x},\bar{y})$, tj. težište skupa točaka, pripada traženom pravcu. To pak znači da se jednadžba traženoga pravca može napisati u obliku

$$\frac{x-\bar{x}}{k}=\frac{y-\bar{y}}{l}. \tag{5.27}$$

Dakle, još je potrebno naći odgovarajuće vrijednosti za k i l. Uz oznake

$$\begin{aligned}
a&=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\\
b&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\\
d&=n\bar{x}\bar{y}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})
\end{aligned} \tag{5.28}$$

prva, druga i peta jednadžba iz sustava (5.23) prelaze u

$$\begin{aligned}&(a-\lambda)k+dl=0\\&dk+(b-\lambda)l=0\\&k^2+l^2=1.\end{aligned}\tag{5.29}$$

Trivijalno rješenje $k = l = 0$ očito ne dolazi u obzir. Shvatimo prve dvije jednadžbe u (5.29) kao homogeni sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama k i l. Da bi on imao netrivijalno rješenje, determinanta tog sustava mora biti jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & d \\ d & b-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

To je kvadratna jednadžba

$$\lambda^2-(a+b)\lambda+ab-d^2=0\tag{5.30}$$

koju znamo riješiti:

$$\lambda_{1,2}=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-4(ab-d^2)}}{2}=\frac{a+b\pm\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2}.\tag{5.31}$$

Uočimo da su oba rješenja realna i pozitivna. Ako sad bilo koju od te dvije vrijednosti λ uvrstimo u sustav

$$\begin{aligned}&(a-\lambda)k+dl=0\\&k^2+l^2=1\end{aligned}$$

dobit ćemo k i l:

$$k=\pm\frac{d}{\sqrt{d^2+(a-\lambda)^2}}\ \text{ i }\ l=\mp\frac{a-\lambda}{\sqrt{d^2+(a-\lambda)^2}}.\tag{5.32}$$

Na prvi pogled se čini da smo dobili dva rješenja, dva pravca. Međutim, vektori $\vec{s}$ i $-\vec{s}$ određuju jedan te isti pravac. No treba ipak uočiti da smo odredili dvije svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2, a one daju dva međusobno okomita vektora $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$. Dokažimo to!

S obzirom na to da se u izrazima za k i l pojavljuju isti nazivnici, dovoljno je dokazati da su međusobno okomiti vektori

$$d\vec{i}-(a-\lambda_1)\vec{j}\ \text{ i }\ d\vec{i}-(a-\lambda_2)\vec{j},\tag{5.33}$$

odnosno da je njihov skalarni produkt jednak nuli:

$$\begin{aligned}&\left[d\vec{i}-(a-\lambda_1)\vec{j}\right]\left[d\vec{i}-(a-\lambda_2)\vec{j}\right]=d^2+(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)=\\&=d^2-a(\lambda_1+\lambda_2)+a^2+\lambda_1\lambda_2=d^2-a(a+b)+a^2+ab-d^2=0.\end{aligned} \tag{5.34}$$

Na taj smo način dokazali da postoje dva međusobno okomita smjera (pravca) u kojima funkcija R postiže ekstrem. Dakle, naš zadatak ima dvije stacionarne točke, dva lokalna ekstrema. U kojem je minimum, a u kojem maksimum?

Na to pitanje nije jednostavno odgovoriti (Bronštejn i Semendjajev 1964) jer je u (5.22), $R=R(k,l,x_0,y_0,\lambda)$ funkcija 5 varijabli. Relativno jednostavni postupci za određivanje dovoljnih uvjeta za ekstremne vrijednosti razrađeni su za funkcije jedne i dviju varijabli, dok je u slučaju više varijabli postupak složeniji i može zahtijevati "dodatna ispitivanja" (Kurepa 1975). Stoga ćemo krenuti drugim putem i pokazati da se naš problem može svesti na određivanje ekstremnih vrijednosti funkcije jedne varijable. Naime, nakon što smo se uvjerili da treba uzeti $x_0=\bar{x}$ i $y_0=\bar{y}$ te ako uvedemo supstituciju

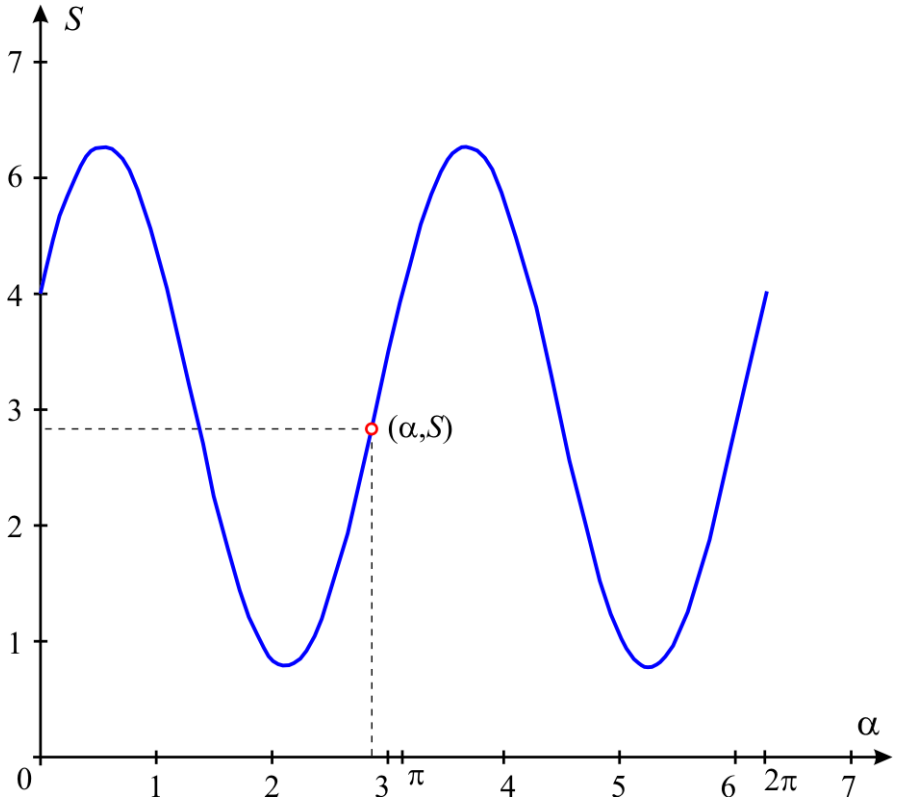
$$k=\cos\alpha\,,\ l=\sin\alpha \tag{5.35}$$

bit će očito ispunjen uvjet $k^2+l^2=1$, a funkcija čije ekstremne vrijednosti tražimo može se sad napisati u obliku

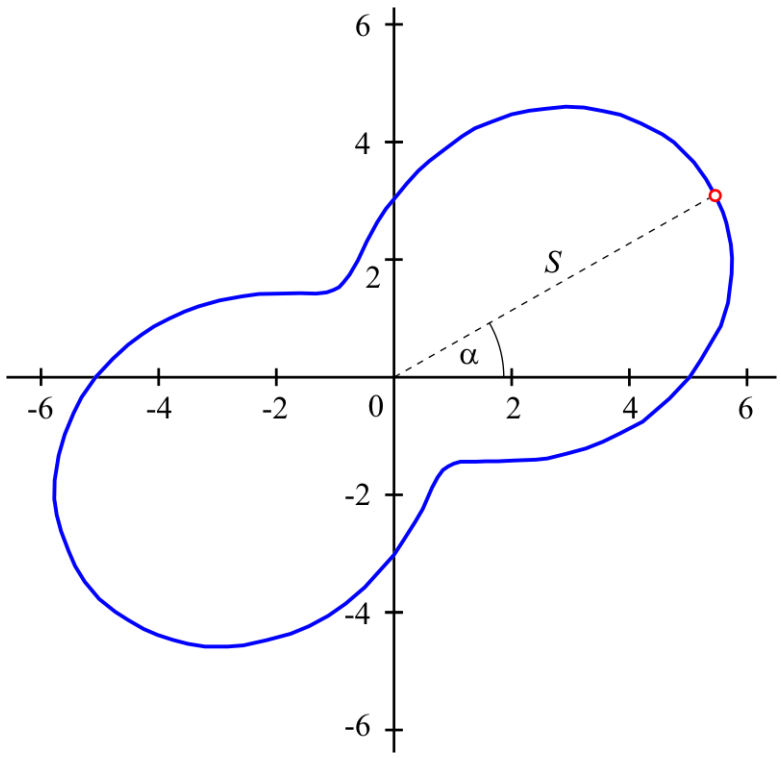
$$S=S(\alpha)=ak^2+bl^2+2dkl=a\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha+d\sin 2\alpha\,, \tag{5.36}$$

tj. u obliku funkcije jedne varijable $S=S(\alpha)$, gdje su a, b, i d određeni formulama (5.28).

Oblik koji funkcija $S=S(\alpha)$ (5.36) poprima u pravokutnom koordinatnom sustavu prikazan je na slici 5.33, dok je njezin oblik u polarnom koordinatnom sustavu prikazan na slici 5.34.



Slika 5.33. Prikaz funkcije $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha + d\sin 2\alpha$ u pravokutnom koordinatnom sustavu (a = 5, b = 3, d = 2)



Slika 5.34. Prikaz funkcije $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha + d\sin 2\alpha$ u polarnom koordinatnom sustavu (a = 5, b = 3, d = 2)

Slučaj d = 0

Ako je *d* = 0 onda se izraz (5.36) pojednostavnjuje u

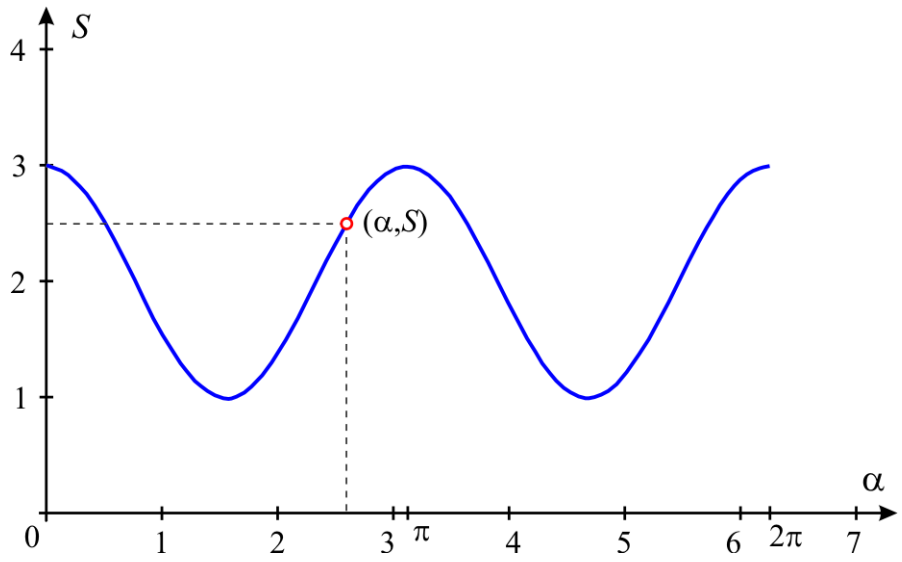
$$S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha \tag{5.37}$$

što se može primjenom poznatih trigonometrijskih relacija

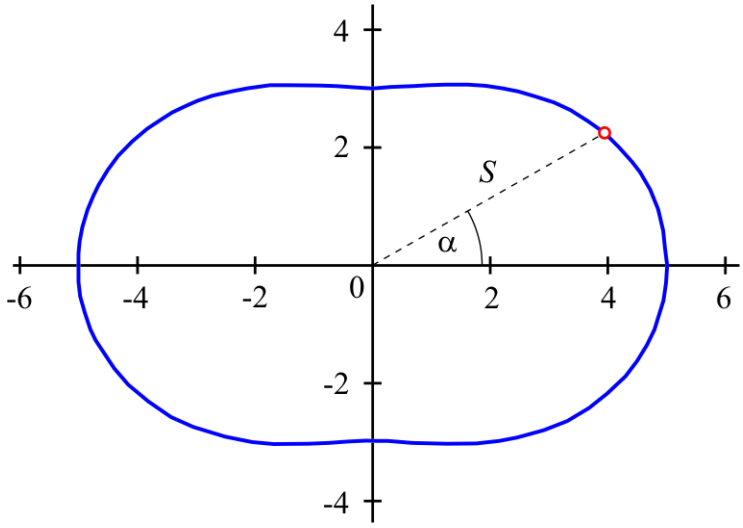
$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \text{ i } \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

transformirati u

$$S = S(\alpha) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\alpha\,. \tag{5.38}$$



Slika 5.35. Prikaz funkcije $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\alpha$ u pravokutnom koordinatnom sustavu (*a* = 5, *b* = 3)



Slika 5.36. Prikaz funkcije $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\alpha$ u polarnom koordinatnom sustavu (a = 5, b = 3)

Poznavajući svojstva trigonometrijske funkcije kosinus, nije teško zaključiti da je:

za $a > b$

i $\cos 2\alpha = 1$, $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\alpha$ te za $\cos 2\alpha = 1$, $S_{\min} = b$

i obratno

za $a < b$

i $\cos 2\alpha = 1$, $S_{\min} = a$ te za $\cos 2\alpha = 0$, $S_{\max} = b$.

Ako je $a = b$ tada je funkcija S konstantna pa nema ekstrema.

Oblik koji funkcija $S = S(\alpha)$ poprima za slučaj kada je $d = 0$ u pravokutnom koordinatnom sustavu prikazan je na slici 5.35, dok je njezin oblik u polarnom koordinatnom sustavu prikazan na slici 5.36.

Slučaj $d \neq 0$

Prva derivacija funkcije S po α je

$$\frac{dS}{d\alpha} = (b-a)\sin 2\alpha + 2d\cos 2\alpha. \tag{5.39}$$

Iz nužnog uvjeta za ekstrem

$$\frac{dS}{d\alpha}=0$$

slijedi

$$\tan 2\alpha=\frac{2d}{a-b} \tag{5.40}$$

i odatle zbog periodičnosti funkcije tangens možemo izračunati najprije rješenja $2\alpha+n\pi$, a zatim $\alpha+n\frac{\pi}{2}$, gdje je n bilo koji cijeli broj. Iz prirode problema slijedi da je dovoljno odrediti kutove α i $\alpha+\frac{\pi}{2}$ ili $\alpha-\frac{\pi}{2}$.

Uočimo najprije da iz (5.32) i (5.35) slijedi

$$\tan\alpha=\frac{l}{k}=-\frac{a-\lambda}{d}=\frac{-(a-b)\pm\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2d}. \tag{5.41}$$

Lako se vidi da je

$$(\tan\alpha)_1(\tan\alpha)_2=\frac{-(a-b)+\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2d}\frac{-(a-b)-\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2d}=-1 \tag{5.42}$$

što je u skladu s prije utvrđenom činjenicom da su smjerovi koji određuju ekstremne vrijednosti međusobno okomiti.

Nadalje,

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2d}{a-b}, \tag{5.43}$$

a to je izraz (5.40) do kojeg smo sada došli na drugi način. Međutim, i dalje ostaje pitanje na koje tražimo odgovor, a to je u kojem je smjeru maksimum, a u kojem minimum funkcije koju istražujemo. S obzirom na to da je u (5.36) definirana funkcija jedne varijable, poslužit ćemo se znanjem iz matematičke analize prema kojem odgovor na to pitanje daje predznak druge derivacije funkcije u stacionarnoj točki. Stoga odredimo drugu derivaciju funkcije S derivirajući prvu derivaciju izraženu izrazom (5.39):

$$\frac{d^2S}{d\alpha^2}=2(b-a)\cos 2\alpha-4d\sin 2\alpha. \tag{5.44}$$

Uzevši u obzir poznate relacije među trigonometrijskim funkcijama

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \text{ i } \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

izraz (5.44) može se transformirati u

$$\frac{d^2S}{d\alpha^2} = -\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\frac{(a-b)^2+4d^2}{d} \tag{5.45}$$

iz kojeg se vidi da predznak $\frac{d^2S}{d\alpha^2}$ ovisi samo o predznacima od d i $\tan\alpha$. No kako je prema (5.41)

$$\tan\alpha = \frac{-(a-b)\pm\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2d}$$

to je jasno da će biti $\frac{d^2S}{d\alpha^2} > 0$ ako uzmemo $\tan\alpha = \frac{-(a-b)-\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2d}$ te da će biti $\frac{d^2S}{d\alpha^2} < 0$ za $\tan\alpha = \frac{-(a-b)+\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2d}$.

Dakle, minimum funkcije $S = S(\alpha)$ definirane s (5.36) postiže se za onaj α_1 za koji je

$$\tan\alpha_1 = \frac{-(a-b)-\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2d}. \tag{5.46}$$

Odgovarajuća minimalna vrijednost funkcije $S = S(\alpha)$ iznosi

$$S_{\min} = S(\alpha_1) = d\tan\alpha_1 + a = \frac{a+b-\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2d}. \tag{5.47}$$

Analogno tome, maksimum funkcije $S = S(\alpha)$ definirane s (5.36) postiže se za onaj α_2 za koji je

$$\tan\alpha_2 = \frac{-(a-b)+\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2d}. \tag{5.48}$$

Odgovarajuća maksimalna vrijednost funkcije $S = S(\alpha)$ iznosi

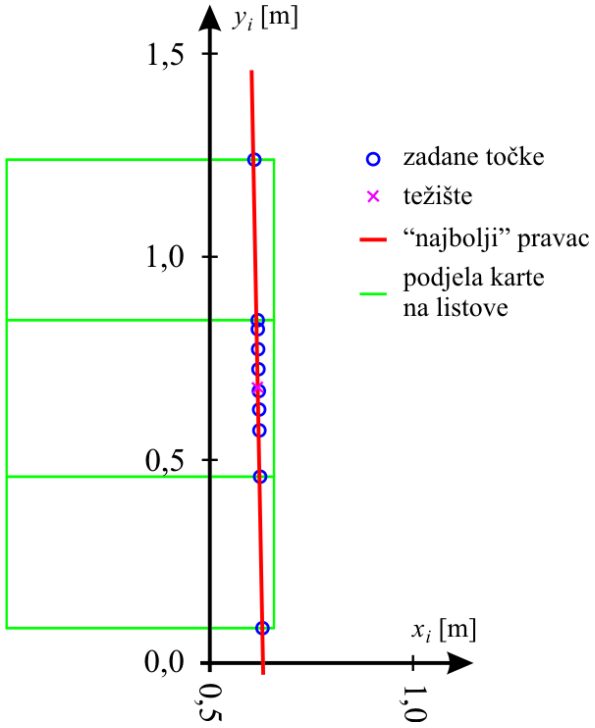
$$S_{\max} = S(\alpha_2) = d\tan\alpha_2 + a = \frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2+4d^2}}{2d}. \tag{5.49}$$

- *Primjena metode euklidskih udaljenosti na meridijanima na karti* Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico

Kartografska projekcija u kojoj je izrađena *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* J. R. Boškovića i Ch. Mairea još je uvijek nepoznata. Meridijani na toj karti podsjećaju na ravne crte, što je slučaj samo u konusnim i azimutnim projekcijama. Pravocrtnost slika meridijana na toj karti ispitala sam primjenom metode euklidskih udaljenosti. Za svaki meridijan odredila sam jednadžbu pravca najbolje prilagođenog skupu točaka čije su koordinate očitane s meridijana nacrtanih na karti.

Računanja za ispitivanje pravocrtnosti meridijana provedena su u Excelu. Za ilustraciju dan je prikaz određivanja najpovoljnijeg pravca na primjeru najistočnijeg meridijana nacrtanog na toj karti. Datoteka s računskim postupkom i vrijednosti za svih devet meridijana priložena je u ovom doktorskom radu u prilogu 1 na odgovarajućem CD-u.

Izvorna karta sastoji se od tri lista koji su najprije spojeni u cjelinu u digitalnom obliku. Spojena karta učitana je u nanoCAD na taj način da je donji lijevi rub karte postavljen u ishodište koordinatnog sustava radne površine, a odabrana je mjerna jedinica metar. Uzduž najistočnijeg meridijana na dobro vidljivim mjestima odabrano je 10 točaka, čije su vrijednosti očitane (slika 5.37). Koordinate su tih točaka (x_i, y_i) (tablica 5.2, drugi i treći stupac).



Slika 5.37. Prilagođeni pravac najistočnijem meridijanu na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Tablica 5.2. Koordinate točaka (x_i, y_i) i euklidske udaljenosti (d_i) od tih točaka do prilagođenog pravca

Broj točke	x_i [m]	y_i [m]	d_i^2[m²]	d_i [m]
1	0,60966	1,24822	3,53051E-08	0,00019
2	0,61682	0,84985	7,87289E-09	0,00009
3	0,61713	0,83005	3,65982E-09	0,00006
4	0,61783	0,77910	1,41255E-08	0,00012
5	0,61871	0,72855	1,28634E-08	0,00011
6	0,62012	0,67397	1,26953E-07	0,00036
7	0,62053	0,62872	5,64958E-10	0,00002
8	0,62151	0,57778	6,24058E-09	0,00008
9	0,62347	0,46389	4,59551E-09	0,00007
10	0,62970	0,08705	4,34244E-08	0,00021
$\sum$	6,19547	6,86719	2,55605E-07	0,00130
			$\sum d_i/n$	0,00013

Vrijednosti kvadrata euklidskih udaljenosti točaka od pravca (tablica 5.2, četvrti stupac) izračunate su primjenom izraza (5.20). Težište, pomoćne veličine i komponente vektora smjera pravca (tablica 5.3) izračunate su primjenom izraza (5.25), (5.28), (5.31) i (5.32).

Tablica 5.3. Težište, pomoćne veličine i komponente vektora smjera pravca

Parametar	Vrijednost
$\bar{x}$	0,61955 [m]
$\bar{y}$	0,68672 [m]
a	0,79738
b	0,00024
d	0,01378
λ	2,55605E-07
k	0,01728
l	–0,99985

Uvrste li se vrijednosti iz tablice 5.2 u izraz (5.17), jednadžba pravca u kanonskom obliku za promatrani meridijan glasi

$$\frac{x-0{,}61955}{0{,}01728}=\frac{y-0{,}68672}{-0{,}99985}.$$

Prosječno odstupanje točaka od pravca iznosi 0,00013 m, odnosno desetinku milimetra. Slične vrijednosti prosječnog odstupanja dobiju se i za ostale meridijane nacrtane na karti (tablica 5.4). Srednja vrijednost svih prosječnih odstupanja iznosi 0,00028 m, odnosno 0,28 mm.

S obzirom na dobivene vrijednosti i procjenu *a priori* iz poglavlja 5.2.3. može se zaključiti da su meridijani nacrtani na karti pravci, a ne krivulje.

Tablica 5.4. Komponente vektora smjera, težišta meridijana i prosječne vrijednosti odstupanja točaka od pravca za svaki meridijan na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Broj pravca	$\bar{x}$ [m]	$\bar{y}$ [m]	k_i	l_i	d_i [m]
1	0,0366	0,8847	–0,01089	–0,99994	0,00031
2	0,1089	0,8824	–0,00642	–0,99998	0,00039
3	0,1809	0,7426	–0,00379	–0,99999	0,00033
4	0,2542	0,7191	0,00040	–1,00000	0,00035
5	0,3271	0,6795	0,00426	–0,99999	0,00049
6	0,4016	0,5485	0,00760	–0,99997	0,00015
7	0,4750	0,5318	0,00981	–0,99995	0,00025
8	0,5485	0,5609	0,01484	–0,99989	0,00013
9	0,6195	0,6867	0,01728	–0,99985	0,00013
				$\sum$	0,00253
				$\sum d_i/n$	0,00028

5.5.3. Određivanje presjeka nekoliko pravaca u ravnini – određivanje presjecišta meridijana na karti

Promatraju li se meridijani nacrtani na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, može se vidjeti da oni konvergiraju. Potrebno je pronaći zajedničku točku u kojoj se meridijani sijeku.

- *Zadatak*

Za zadanih n pravaca $\frac{x-x_i}{k_i}=\frac{y-y_i}{l_i}$, $i=1,...,n$ u ravnini treba naći onu točku $S(x_S, y_S)$ koja ima svojstvo da je zbroj kvadrata euklidskih udaljenosti od nje do zadanih pravaca najmanja.

- *Rješenje*

Kvadrat euklidske udaljenosti točke $T_S(x_S, y_S)$ od pravca

$$\frac{x - x_i}{k_i} = \frac{y - y_i}{l_i} \tag{5.50}$$

je

$$d_i^2 = [(x - x_i)l_i - (y - y_i)k_i]^2, \tag{5.51}$$

uz pretpostavku da je

$$k_i^2 + l_i^2 = 1. \tag{5.52}$$

U jednadžbi (5.50) x_i i y_i su koordinate bilo koje zadane točke na pravcu, a k_i i l_i su komponente vektora smjera toga pravca $\vec{s}_i = k_i\vec{i} + l_i\vec{j}$.

Tražimo dakle da funkcija $S = S(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [(x - x_i)l_i - (y - y_i)k_i]^2$ poprimi najmanju moguću vrijednost, minimum, uz uvjete (5.52).

Nađimo parcijalne derivacije funkcije S:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= 2\sum_{i=1}^{n} [(x - x_i)l_i - (y - y_i)k_i]l_i \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= 2\sum_{i=1}^{n} [(x - x_i)l_i - (y - y_i)k_i](-k_i). \end{aligned} \tag{5.53}$$

Izjednačimo parcijalne derivacije s nulom i sredimo po nepoznanicama x i y pa dobijemo ove dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} x\sum_{i=1}^{n} l_i^2 - y\sum_{i=1}^{n} k_i l_i &= \sum_{i=1}^{n} (x_i l_i - y_i k_i)l_i \\ -x\sum_{i=1}^{n} k_i l_i + y\sum_{i=1}^{n} k_i^2 &= -\sum_{i=1}^{n} (x_i l_i - y_i k_i)k_i. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Rješavanjem tog sustava dobijemo rješenje zadatka:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i l_i - y_i k_i) l_i \sum_{i=1}^{n} k_i^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i l_i - y_i k_i) k_i \sum_{i=1}^{n} k_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sum_{i=1}^{n} l_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} k_i l_i\right)^2}$$

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i l_i - y_i k_i) l_i \sum_{i=1}^{n} k_i l_i - \sum_{i=1}^{n}(x_i l_i - y_i k_i) k_i \sum_{i=1}^{n} l_i^2}{\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sum_{i=1}^{n} l_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} k_i l_i\right)^2}. \tag{5.55}$$

S pomoću drugih parcijalnih derivacija funkcije S dokazat ćemo da točka s koordinatama $S(x_S, y_S)$ stvarno poprima minimalnu vrijednost. Njih možemo staviti u Hesseovu matricu čija je pozitivna definitnost dovoljan uvjet minimuma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Ta je matrica pozitivno definitna ako vrijedi

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} > 0 \text{ i } \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0 \tag{5.56}$$

Druge parcijalne derivacije po x i y računamo iz izraza (5.53) i dobijemo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= 2\sum_{i=1}^{n} l_i^2 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= 2\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} = -2\sum_{i=1}^{n} k_i l_i . \end{aligned} \tag{5.57}$$

Iz izraza (5.57) može se zaključiti da je prvi uvjet pozitivno definitne matrice ispunjen jer je zbroj kvadrata realnih brojeva uvijek pozitivan, osim u slučaju kada bi svi l_i bili jednaki nuli. To bi tada značilo da je druga parcijalna derivacija po x jednaka nuli, što ne zadovoljava postavljeni uvjet.

Drugi je uvjet da determinanta Hesseove matrice mora biti pozitivna. Imamo:

$$\begin{vmatrix} 2\sum_{i=1}^{n} l_i^2 & -2\sum_{i=1}^{n} k_i l_i \\ -2\sum_{i=1}^{n} k_i l_i & 2\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \end{vmatrix} = 4\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sum_{i=1}^{n} l_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} k_i l_i\right)^2\right) \geq 0. \tag{5.58}$$

Lako je dokazati da će izraz (5.58) uvijek biti strogo veći od nule zbog nejednakosti Cauchy-Buniakowskoga (zvane i Cauchy-Schwarzova nejednakost, vidi Kurepa 1978). Parametri k i l su komponente vektora smjera pravaca. Ako bi u izrazu (5.58) vrijedila jednakost tada bi oni imali jednaki smjer, odnosno pravci bi međusobno bili paralelni, što u ovom primjeru nije slučaj.

Nakon što su izračunate koordinate x_S i y_S, mogu se izračunati pojedina odstupanja

$$d_i = \left|(x - x_i)l_i - (y - y_i)k_i\right|, \tag{5.59}$$

zatim zbroj svih odstupanja i srednja vrijednost odstupanja po apsolutnoj vrijednosti

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|d_i\right|. \tag{5.60}$$

- *Određivanje presjecišta meridijana na karti* Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico

Da bismo odredili točku s koordinatama $S(x_S, y_S)$, odnosno presjecište meridijana, potrebne su komponente vektora smjera svakog pravca, u ovom slučaju meridijana, te je potrebno na svakom meridijanu odabrati bilo koju točku. Jednadžbe meridijana, pa time i njihove komponente vektora smjera, dobiveni su prilikom ispitivanja pravocrtnosti meridijana u poglavlju 5.5.2., dok je za točku na pravcu uzeto težište koje ima koordinate $T(\bar{x}, \bar{y})$ (tablica 5.5).

Primjenom formule (5.55) i veličina iz tablice 5.3. dobiveno je da svi meridijani konvergiraju u točku s koordinatama $S(0{,}251,\ 21{,}427)$. Detaljan postupak računanja priložen je u ovom doktorskom radu u prilogu 1 na odgovarajućem CD-u.

Apsolutne vrijednosti odstupanja središta od pojedinog meridijana (d_i) izračunate su primjenom izraza (5.60) i prikazane u 6. stupcu tablice 5.5.

Tablica 5.5. Komponente vektora smjera i težišta meridijana na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Broj pravca	$\bar{x}$ [m]	$\bar{y}$ [m]	k_i	l_i	d_i [m]
1	0,0366	0,8847	–0,01089	–0,99994	0,0096
2	0,1089	0,8824	–0,00642	–0,99998	0,0102
3	0,1809	0,7426	–0,00379	–0,99999	0,0084
4	0,2542	0,7191	0,00040	–1,00000	0,0050
5	0,3271	0,6795	0,00426	–0,99999	0,0121
6	0,4016	0,5485	0,00760	–0,99997	0,0079
7	0,4750	0,5318	0,00981	–0,99995	0,0192
8	0,5485	0,5609	0,01484	–0,99989	0,0122
9	0,6195	0,6867	0,01728	–0,99985	0,0102
				$\sum$	0,0946
				$\sum d_i/n$	0,0105

Srednja vrijednost odstupanja pojedinog meridijana od dobivenog središta iznosi 0,0105 m. Može se primijetiti da je dobiveno odstupanje od 1 cm poprilično veliko. Daljnjim istraživanjima u ovom doktorskom radu ispitat će se utječe li takvo odstupanje na određivanje parametara kartografske projekcije u kojoj je karta izrađena.

5.5.4. Ispitivanje zakrivljenosti (kružnosti) paralela na karti

Pretpostavimo da su paralele na karti krivulje. Treba ispitati jesu li paralele na karti lukovi koncentričnih kružnica. U nastavku dajem prijedlog rješenja pronalaska „najbolje“ kružnice radijusa ρ metodom euklidskih udaljenosti.

- *Zadatak*

Za zadanih n točaka T_1, T_2,..., T_n i zajedničko središte S u ravnini treba pronaći polumjer kružnice ρ tako da je zbroj kvadrata euklidskih udaljenosti zadanih točaka $T_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2,...,n$ do te kružnice najmanji.

- *Rješenje*

Pretpostavimo da je zadano središte S s koordinatama (x_S, y_S) i n točaka koje su na kružnici (x_i, y_i), ali zbog nekog razloga manje ili više odstupaju od te kružnice. Traži se polumjer ρ kružnice tako da navedena odstupanja budu što manja. Npr. prema metodi euklidskih udaljenosti trebala bi biti što manja vrijednost funkcije

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{(x_S - x_i)^2 + (y_S - y_i)^2} - \rho \right)^2 . \tag{5.61}$$

Odredimo prvu derivaciju funkcije Σ i izjednačimo je s nulom:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{(x_S - x_i)^2 + (y_S - y_i)^2} - \rho \right)(-1) = 0 . \tag{5.62}$$

Odatle se dobije

$$\rho = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_S - x_i)^2 + (y_S - y_i)^2} . \tag{5.63}$$

Sad se mogu izračunati odstupanja pojedine točke od kružnice

$$d_i = \sqrt{(x_S - x_i)^2 + (y_S - y_i)^2} - \rho , \tag{5.64}$$

za kontrolu treba biti

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0 \tag{5.65}$$

i na kraju prosječno odstupanje po apsolutnoj vrijednosti primjenom izraza (5.60).

Da je riječ o minimumu funkcije Σ potvrđuje druga derivacija

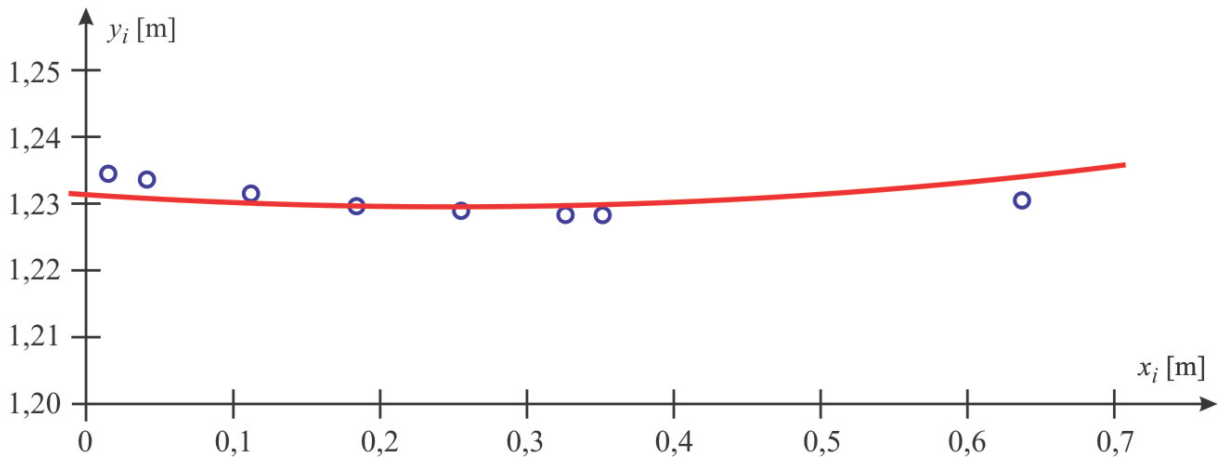
$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \rho^2} = 2n > 0 . \tag{5.66}$$

- *Primjena postupka na određivanju polumjera paralela na karti* Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico

Da bismo odredili polumjer paralela na karti potrebno je znati središte kružnica s koordinatama $S(x_S, y_S)$ i točke s koordinatama (x_i, y_i) koje se nalaze na lukovima kružnica nacrtanima na karti.

Računski postupak određivanja polumjera paralela proveden je u Excelu. Za ilustraciju dan je primjer određivanja polumjera za najsjeverniju paralelu nacrtanu na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*. Datoteka s računskim postupkom i vrijednostima za sve paralele priložena je u ovom doktorskom radu u prilogu 2 na odgovarajućem CD-u.

Uzduž najsjevernije paralele na dobro vidljivim mjestima odabrano je 8 točaka, čije su vrijednosti očitane u nanoCAD-u (slika 5.38) u metrima. Koordinate tih točaka su (x_i, y_i) (tablica 5.6, drugi i treći stupac). Za središte kružnica uzeta je točka s koordinatama S(0,251, 21,427) izračunata u poglavlju 5.5.3.



Slika 5.38. Prilagođena kružnica najsjevernijoj paraleli na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Primjenom formule (5.63) i veličina iz tablice 5.6. izračunat je polumjer najsjevernije paralele koji iznosi ρ = 20,1972.

Odstupanja (d_i) pojedinih točaka od kružnice radijusa ρ = 20,1972 izračunata su primjenom izraza (5.64) i prikazana su u 5. stupcu tablice 5.6. Pojedina odstupanja po apsolutnoj vrijednosti i prosječno apsolutno odstupanje prikazani su u tablici 5.6. u 6. stupcu.

Tablica 5.6. Koordinate točaka (x_i, y_i) uzduž najsjevernije paralele, polumjeri paralela od tih točaka do središta S, odstupanja točaka do kružnice (d_i) i apsolutne vrijednosti tih odstupanja

Broj točke	x_i [m]	y_i [m]	ρ_i [m]	d_i [m]	$\lvert d_i \rvert$ [m]
1	0,0143	1,2346	20,1941	–0,0031	0,0031
2	0,0406	1,2337	20,1947	–0,0025	0,0025
3	0,1115	1,2318	20,1960	–0,0012	0,0012
4	0,1833	1,2301	20,1974	0,0002	0,0002
5	0,2546	1,2294	20,1979	0,0007	0,0007
6	0,3257	1,2288	20,1986	0,0014	0,0014
7	0,3510	1,2288	20,1988	0,0015	0,0015
8	0,6367	1,2307	20,2003	0,0031	0,0031
		$\sum$		0,0000	0,0137
		$\sum/n$	20,1972		0,0017

Prosječno odstupanje točaka od kružnice za najsjeverniju paralelu iznosi 0,0017 m, odnosno oko 2 mm. Najsjevernija paralela ujedno je i paralela s najvećim prosječnim odstupanjem točaka od kružnice.

U tablici 5.7. prikazani su izračunati polumjeri svih paralela nacrtanih na karti, razlika između tih polumjera i prosječne vrijednosti apsolutnih odstupanja točaka od kružnice za svaku paralelu. Srednja vrijednost svih prosječnih odstupanja iznosi 0,0010 m. Prema postavljenim uvjetima dopuštenog srednjeg odstupanja, odnosno prema procjeni *a priori* danoj u poglavlju 5.2.3., može se zaključiti da su paralele nacrtane na karti lukovi koncentričnih kružnica.

U zadnjem stupcu tablice 5.7. prikazane su izračunate udaljenosti između paralela dobivene iz mjerenih podataka na karti, o čemu se može više pročitati u poglavlju 5.6.1. ovog doktorskog rada.

Iz dokaza da su na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* meridijani pravci a paralele lukovi koncentrične kružnice, može se zaključiti, na osnovi opisa oblika kartografske mreže iz poglavlja 5.1.3., da je karta izrađena u azimutnoj ili konusnoj kartografskoj projekciji.

Tablica 5.7. Polumjeri paralela i razlike između njih

Broj paralele	Geografska širina paralele (φ_i)	ρ_i [m]	Razlika	$\sum\|d_i\|/n$ [m]	Razlika prema (5.67) [m]
1	45°00’	20,1972		0,0017	
2	44°50’	20,2473	0,0501	0,0013	0,0501
3	44°40’	20,2970	0,0497	0,0009	0,0497
4	44°30’	20,3466	0,0497	0,0013	0,0495
5	44°20’	20,3964	0,0497	0,0013	0,0495
6	44°10’	20,4468	0,0504	0,0012	0,0506
7	44°00’	20,4979	0,0511	0,0010	0,0506
8	43°50’	20,5481	0,0501	0,0011	0,0501
9	43°40’	20,5995	0,0514	0,0008	0,0517
10	43°30’	20,6498	0,0503	0,0010	0,0500
11	43°20’	20,7005	0,0507	0,0009	0,0508
12	43°10’	20,7505	0,0500	0,0011	0,0500
13	43°00’	20,8008	0,0503	0,0010	0,0502
14	42°50’	20,8515	0,0507	0,0010	0,0508
15	42°40’	20,9017	0,0502	0,0012	0,0505
16	42°30’	20,9520	0,0503	0,0008	0,0506
17	42°20’	21,0028	0,0508	0,0007	0,0514
18	42°10’	21,0531	0,0503	0,0005	0,0500
19	42°00’	21,1031	0,0499	0,0007	0,0498
20	41°50’	21,1537	0,0506	0,0007	0,0505
21	41°40’	21,2040	0,0503	0,0008	0,0502
22	41°30’	21,2539	0,0499	0,0006	0,0496
23	41°20’	21,3039	0,0500	0,0008	0,0503
		$\sum/n$	0,0503	0,0010	0,0503

5.6. Provjera hipoteze o uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana

Pokazano je da su svi meridijani u projekciji u kojoj je izrađena *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* pravocrtni, tj. dijelovi pravaca, a paralele lukovi koncentričnih kružnica, što dovodi do zaključka da je karta izrađena u azimutnoj ili konusnoj projekciji.

5.6.1. Određivanje kartografske projekcije na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* prema vrstama deformacije

Osim prema obliku normalne kartografske mreže, kartografske projekcije dijele se i prema vrstama deformacija. S obzirom na to da nisu poznati koeficijenti projekcije iz kojih bi se izračunalo mjerilo površine (p), mjerilo u smjeru meridijana (m) i mjerilo u smjeru paralela (n) o kojima ovisi vrsta deformacije, najjednostavniji je postupak taj da ispitamo npr. je li udaljenost između paralela jednaka i je li udaljenost između meridijana jednaka. U prvom slučaju projekcija će biti ekvidistantna uzduž meridijana, dok će u drugom slučaju ona biti ekvidistantna uzduž paralela.

Udaljenosti između meridijana i paralela izračunala sam iz koordinata presjecišta meridijana i paralela primjenom poznate formule za računanje duljine

$$d_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \ . \tag{5.67}$$

Rezultati upućuju na zaključak da je riječ o ekvidistantnoj projekciji uzduž meridijana, jer je udaljenost između paralela konstantna na cijelom području karte i iznosi u prosjeku 0,0503 m (tablica 5.7., šesti stupac), dok to nije slučaj kod meridijana.

U tablici 5.8. prikazan je računski primjer za četvrti meridijan od zapada, a detaljan postupak računanja udaljenosti za meridijane i paralele priložen je u ovom doktorskom radu u prilogu 3 na odgovarajućem CD-u.

Vrijednosti svih udaljenosti između paralela prikazane su u 6. stupcu u tablici 5.7. Usporede li se vrijednosti iz 4. i 6. stupca tablice 5.7., može se vidjeti da je prosječno srednje odstupanje udaljenosti između paralela jednako prosječnom srednjem odstupanju izračunatih polumjera paralela u poglavlju 5.5.4.

Iz toga također možemo zaključiti da su paralele u projekciji koncentrične kružnice.

Tablica 5.8. Koordinate točaka (x_i, y_i) i udaljenosti između paralela uzduž četvrtog meridijana na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Broj paralele	x_i [m]	y_i [m]	d_i [m]
1	0,2546	1,2294	
2	0,2543	1,1798	0,0497
3	0,2543	1,1307	0,0491
4	0,2542	1,0805	0,0502
5	0,2541	1,0320	0,0486
6	0,2540	0,9807	0,0512
7	0,2540	0,9301	0,0506
8	0,2539	0,8801	0,0500
9	0,2534	0,8286	0,0515
10	0,2535	0,7789	0,0497
11	0,2536	0,7277	0,0512
12	0,2538	0,6785	0,0492
13	0,2539	0,6280	0,0506
14	0,2540	0,5766	0,0514
15	0,2540	0,5268	0,0498
16	0,2540	0,4757	0,0511
17	0,2542	0,4241	0,0516
18	0,2545	0,3742	0,0500
19	0,2546	0,3247	0,0495
20	0,2543	0,2742	0,0505
21	0,2547	0,2241	0,0501
		$\sum$	1,0053
		$\sum d_i/n$	0,0503

5.6.2. Određivanje kuta pod kojim se sijeku meridijani u projekciji

Potrebno je odrediti kutove između tih pravaca da bi se, ovisno o njihovu iznosu, moglo zaključiti je li riječ o azimutnoj ili konusnoj projekciji.

- *Zadatak*

Za zadanih n točaka T_1, T_2,..., T_n, koje definiraju pravce i zajedničke točke sjecišta $S(x_S, y_S)$ u ravnini, potrebno je pronaći kut δ pod kojim se pravci sijeku.

- *Rješenje*

Svaki meridijan u projekciji određen je dvjema točkama. Neka to bude sjecište svih meridijana $S(x_S, y_S)$ i težište točaka na temelju kojih je meridijan definiran $T(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, $i = 1,...,n$.

Kut između dva susjedna nacrtana meridijana neka je kut δ_i koji možemo odrediti kao kut između vektora $\overrightarrow{ST}_i$ i $\overrightarrow{ST}_{i+1}$:

$$\cos\delta_i = \frac{\overrightarrow{ST}_i \overrightarrow{ST}_{i+1}}{\left|\overrightarrow{ST}_i\right|\left|\overrightarrow{ST}_{i+1}\right|}. \tag{5.68}$$

Budući da je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ST}_i &= (\bar{x}_i - x_S)\vec{i} + (\bar{y}_i - y_S)\vec{j} \\ \overrightarrow{ST}_{i+1} &= (\bar{x}_{i+1} - x_S)\vec{i} + (\bar{y}_{i+1} - y_S)\vec{j} \end{aligned} \tag{5.69}$$

to se može napisati

$$\cos\delta_i = \frac{(\bar{x}_i - x_S)(\bar{x}_{i+1} - x_S) + (\bar{y}_i - y_S)(\bar{y}_{i+1} - y_S)}{\sqrt{(\bar{x}_i - x_S)^2 + (\bar{y}_i - y_S)^2}\sqrt{(\bar{x}_{i+1} - x_S)^2 + (\bar{y}_{i+1} - y_S)^2}} \tag{5.70}$$

odakle se može izračunati δ_i. Ili ako nemamo na raspolaganju funkciju arkus kosinus, a imamo arkus tangens, onda vrijedi

$$\delta_i = \arctan(\tan\delta_i) = \arctan\left(\frac{\sin\delta_i}{\cos\delta_i}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2\delta_i}}{\cos\delta_i}\right). \tag{5.71}$$

Nakon toga može se izračunati srednja vrijednost kuta prema formuli

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i, \tag{5.72}$$

pojedina odstupanja od srednje vrijednosti $\delta_i - \delta$, apsolutne vrijednosti odstupanja $|\delta_i - \delta|$ i njihova srednja vrijednost.

- *Određivanje kuta pod kojim se sijeku meridijani na karti* Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico

Svi meridijani sijeku se u točki s koordinatama S(0,251, 21,427), a računski postupak za njihovo određivanje opisan je u poglavlju 5.5.3. Da bismo mogli odrediti kut pod kojim se meridijani sijeku, potrebno je još znati koordinate težišta na osnovi kojih su definirani meridijani nacrtani na karti (tablica 5.9., drugi i treći stupac).

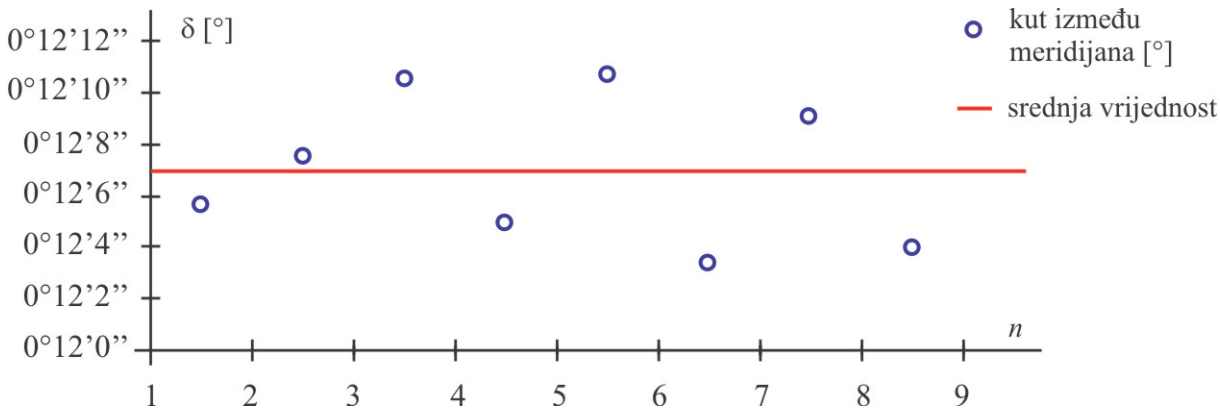
Prema formuli (5.70) izračunati su kutovi između dva susjedna nacrtana meridijana koji su zajedno sa srednjom vrijednosti, dobivenom prema formuli (5.72), prikazani u tablici 5.9. Kutne vrijednosti dane su u stupnjevima, minutama i sekundama.

Na slici 5.39. prikazani su kutovi između dva susjedna meridijana iz koje se mogu iščitati i odstupanja u odnosu na srednju vrijednost kuta.

Datoteka s računskim postupkom određivanja pod kojim se kutom sijeku meridijani priložena je u ovom doktorskom radu u prilogu 4 na odgovarajućem CD-u.

Tablica 5.9. Težišta kojima su definirani meridijani, kutovi između dva nacrtana susjedna meridijana i apsolutne vrijednosti odstupanja od srednje vrijednosti uz pretpostavku da se svi meridijani u projekciji sijeku u točki S s koordinatama S(0,251, 21,427).

Broj meridijana	$\bar{x}$ **[m]**	$\bar{y}$ **[m]**	δ_i **[°]**	$\lvert\delta_i - \delta\rvert$ **['']**
1	0,0366	0,884673	–	–
2	0,1089	0,882379	0°12'05,76''	1,39
3	0,1809	0,742568	0°12'07,72''	0,58
4	0,2542	0,719095	0°12'10,78''	3,63
5	0,3271	0,679495	0°12'05,05''	2,09
6	0,4016	0,548514	0°12'10,96''	3,82
7	0,4750	0,531791	0°12'03,47''	3,67
8	0,5485	0,560924	0°12'09,30''	2,16
9	0,6195	0,686719	0°12'04,09''	3,05
		$\sum/n$	0°12'07,14''	2,55



Slika 5.39. Kutovi između dva susjedna meridijana [°] na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Dakle, iz opisanog postupka može se vidjeti da u projekciji meridijani zatvaraju kut od oko 12', dok se na karti može pročitati da na sferi oni zatvaraju kut od 20'.

U azimutnim se projekcijama meridijani uspravnih projekcija sijeku u zajedničkom središtu pod kutovima *jednakim* odgovarajućim razlikama geografskih dužina. U konusnim se projekcijama meridijani uspravnih projekcija preslikavaju kao pravci koji se sijeku u jednoj točki pod kutovima *proporcionalnim* razlikama njihovih geografskih dužina (Frančula 2000).

S obzirom na to zaključujem da je karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* izrađena u nekoj konusnoj projekciji.

Iz poznatih vrijednosti prema općim jednadžbama uspravnih konusnih projekcija (vidi poglavlje 5.1.2.) može se odrediti prvi koeficijent projekcije i to konstanta proporcionalnosti prema izrazu

$$\delta = k(\lambda - \lambda_0) \Leftrightarrow k = \frac{\delta}{\lambda - \lambda_0}. \tag{5.73}$$

Iz izraza (5.73) dobije se da konstanta proporcionalnosti iznosi k = 0,6056615.

Opisanim postupkom i postupcima koji su provedeni u poglavlju 5.5. pokazano je da je karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* izrađena u uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana.

5.6.3. Određivanje parametara uspravne ekvidistantne konusne projekcije

5.6.3.1. Rotacija i translacija koordinatnog sustava skenirane slike u koordinatni sustav uspravne konusne projekcije

Kartu učitanu u nanoCAD potrebno je translatirati i rotirati tako da se slika srednjeg meridijana poklopi s koordinatnom osi x, a presjek slike srednjeg meridijana i slike najjužnije paralele dođe u ishodište koordinatnog sustava uspravne konusne projekcije.

- *Zadatak*

U pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y) zadane su dvije točke $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$. Taj sustav treba translatirati i rotirati tako da u novom sustavu (x', y') točka T_1' ima koordinate $(0,0)$, a točka T_2' koordinate $(0, q)$, gdje je

$$q = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

- *Rješenje*

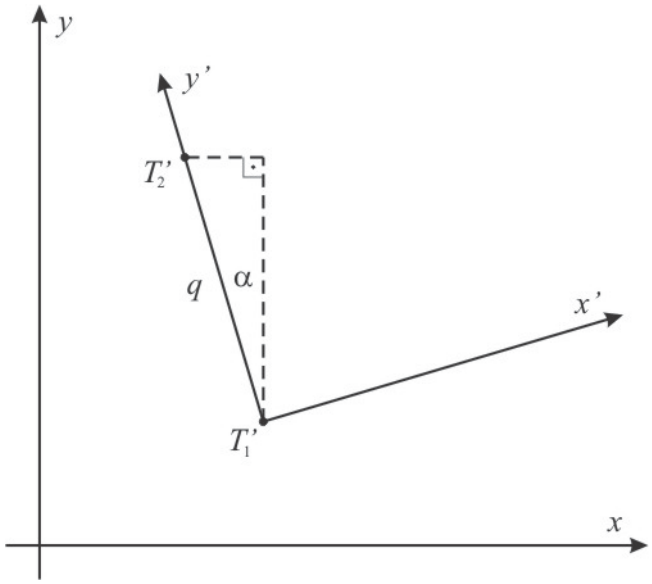
Formule za transformaciju glase

$$\begin{aligned} x' &= (x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\sin\alpha \\ y' &= -(x - x_1)\sin\alpha + (y - y_1)\cos\alpha, \end{aligned} \tag{5.74}$$

gdje je

$$\cos\alpha = \frac{y_2 - y_1}{q},\ \sin\alpha = -\frac{x_2 - x_1}{q}. \tag{5.75}$$

Pomoću formula (5.74) mogu se transformirati sve točke iz sustava (x, y) u sustav (x', y').



Slika 5.40. Translacija i rotacija koordinatnog sustava

- *Rotacija i translacija karte* Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico

Za točku T_1 u konusnim projekcijama obično se uzima presjek najjužnije paralele i srednjeg meridijana (npr. vidi Frančula 2000). Međutim, kako taj presjek nije nacrtan na karti za točku T_1, uzeto je presjecište iduće paralele (paralela s geografskom širinom 41°30') i srednjeg meridijana. Za točku T_2 uzeta je točka s koordinatama $T_2(x_1 - k, y_1 - l)$, gdje su k i l komponente vektora smjera srednjeg meridijana koji su izračunati u poglavlju 5.5.3.

Primjenom formula (5.74) i (5.75) transformirane su sve točke koje su upotrijebljene pri ispitivanju pravocrtnosti meridijana i kružnosti paralela. Postupak transformacije točaka priložen je u ovom doktorskom radu u prilogu 5 na odgovarajućem CD-u.

5.6.3.2. Parametri ekvidistantne konusne projekcije za kartu Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico

Prema izrazu (5.9) iz poglavlja 5.1.2., za preslikavanje sfere jednadžbe uspravne ekvidistantne konusne projekcije s dvije standardne paralele φ_1, φ_2 u pravokutnim koordinatama imaju oblik (Snyder i Voxland 1989)

$$y = \rho \sin \delta$$
$$x = q - \rho \cos \delta$$
$$q = \rho_j$$
$$\rho = R\left(\frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} - \varphi \right).$$
$$\delta = k(\lambda - \lambda_0)$$
$$k = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}.$$

Izraz za ρ još se može pisati u obliku

$$\rho = R\left(\frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} - \varphi \right) = K - R\varphi. \tag{5.76}$$

Da bismo iz formula (5.9) i (5.76) odredili parametre projekcije, potrebno je odrediti veličine:

- k – konstanta proporcionalnosti
- K – konstanta integracije
- R – radijus sfere.

Iz izraza za δ prema formuli (5.73) izračunata je konstanta proporcionalnosti (k)

$$\delta = k(\lambda - \lambda_0) \Leftrightarrow k = \frac{\delta}{\lambda - \lambda_0}$$

koja iznosi k = 0,6056615.

U poglavlju 5.5.4. opisan je postupak za računanje polumjera svih paralela (ρ_i) na karti čije su vrijednosti prikazane u tablici 5.6. Svakoj paraleli odgovara geografska širina (φ_i). Iz izraza (5.76) može se iščitati ovisnost tih dviju veličina.

Dakle, potrebno je uzeti točke s parovima koordinata (φ_i, ρ_i), gdje je φ geografska širina u radijanima, a ρ izračunati polumjer odgovarajuće paralele u projekciji te odrediti najbolji pravac kroz te točke primjenom metode najmanjih kvadrata. Iz dobivene jednadžbe pravca moći će se, prema izrazu (5.76), iščitati veličine R i K.

U tom slučaju geografske širine (φ_i) su teorijske (bespogrešne) vrijednosti koje nisu rezultat mjerenja već su očitane iz opisa koordinatne mreže s rubova karte, dok su polumjeri paralela (ρ_i) izračunate vrijednosti koje su dobivene iz koordinata točaka

izmjerenih na karti. S obzirom na to da se traži međusobni odnos (ovisnost) između varijabli φ i ρ te da varijable slijede linearan odnos, za rješenje ovog problema predlažem postupak pronalaska "najboljeg" pravca primjenom jednostavne linearne regresije.

Dakle, tražimo onaj pravac $\rho_i = K - R\varphi_i$ za koji će za dane točke (φ_1, ρ_1), (φ_2, ρ_2),..., (φ_n, ρ_n) zbroj kvadrata svih vertikalnih odstupanja točaka od pravca biti minimalan.

Da bismo na taj način odredili najbolji pravac traži se onaj par *R*, *K* za koji funkcija

$$S = S(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} (\rho_i - R\varphi_i - K)^2 \tag{5.77}$$

ima minimum.

Vrijednost funkcije *S* uvijek je veća ili jednaka od 0, bez obzira na to kakvi su nepoznati parametri, jer je riječ o zbroju kvadrata. Da bi funkcija *S* poprimila najmanju vrijednost nužan je uvjet da parcijalne derivacije te funkcije po *R* i *K* budu jednake nuli, tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial R} &= -2\sum_{i=1}^{n} \varphi_i (\rho_i - R\varphi_i - K) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial K} &= -2\sum_{i=1}^{n} (\rho_i - R\varphi_i - K) = 0. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Uz te uvjete nakon raspisivanja dobije se sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice *R* i *K* koji znamo riješiti. Rješavanjem sustava dviju jednadžbi (5.78) dobije se

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i - \overline{\varphi})(\rho_i - \overline{\rho})}{\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i - \overline{\varphi})^2} \\ K &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i - R\sum_{i=1}^{n} \varphi_i}{n} = \overline{\rho} - R\overline{\varphi} \end{aligned} \tag{5.79}$$

gdje su

$$\overline{\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i}{n} \text{ i } \overline{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i}{n} \tag{5.80}$$

koordinate težišta koje zadovoljavaju linearnu vezu $\rho_i = K - R\varphi_i$, tj. točka s koordinatama $(\overline{\varphi}, \overline{\rho})$ leži na pravcu.

- *Računanje parametara uspravne ekvidistantne projekcije za kartu* Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico

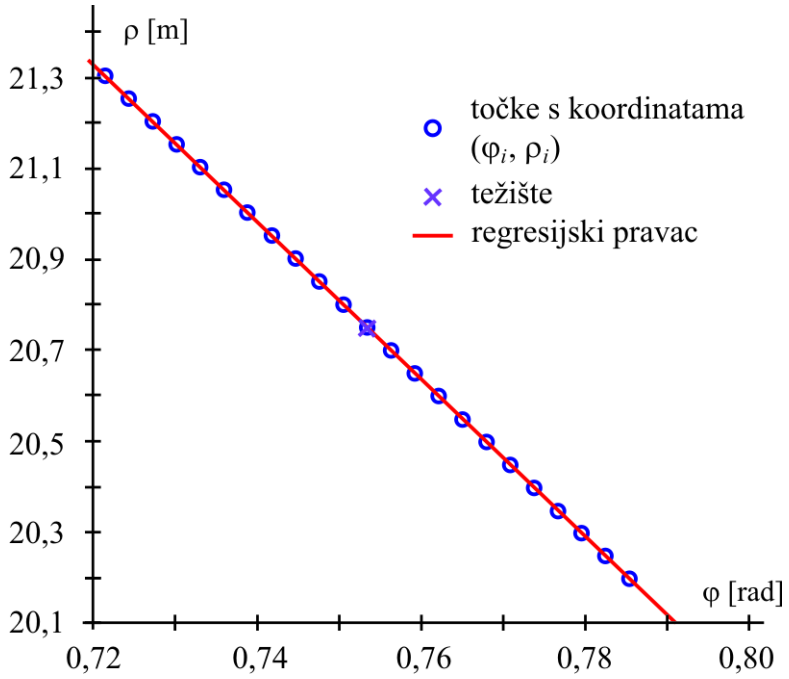
Uzete su točke s parovima koordinata (φ_i, ρ_i), gdje je φ geografska širina u radijanima, a ρ izračunati polumjer odgovarajuće paralele u projekciji. Vrijednosti za φ i ρ te popravci za radijuse paralela opisanom metodom prikazane su u tablici 5.10. Pomoću izraza (5.79) i (5.80) određen je najbolji pravac (slika 5.41) kroz te točke. Jednadžba pravca glasi

$$\rho = -17{,}3228\varphi + 33{,}8014,$$

gdje je 17,3228 koeficijent smjera tog pravca, a 33,8014 odsječak tog pravca na osi ρ.

Usporedimo li jednadžbu pravca s formulom (5.76) za računanje ρ, iz općih jednadžbi ekvidistantne konusne projekcije može se iščitati da je $K = 33{,}8014$ koji predstavlja polumjer ekvatora u projekciji, a radijus sfere R koji ulazi u jednadžbe projekcije i iznosi 17,3228 m.

Postupak određivanja najpovoljnijeg pravca s parovima koordinata (φ_i, ρ_i) priložen je u ovom doktorskom radu u prilogu 6 na odgovarajućem CD-u.



Slika 5.41. Regresijski pravac $\rho = K - R\varphi$ za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Srednja apsolutna vrijednost popravaka polumjera paralela iznosi 0,0005 m, što prema procjeni *a priori* danoj u poglavlju 5.2.3. zadovoljava traženu razinu točnosti. Iz toga proizlazi da se standardne paralele kartografske projekcije u kojoj je karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* mogu odrediti iz dobivenih vrijednosti za k = 0,6056615, K = 33,8014, R = 17,3228.

Tablica 5.10. Geografske širine φ_i [rad] i polumjeri paralela ρ_i [m] te popravci polumjera paralela na primjeru karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Broj paralele	φ_i **[rad]**	ρ_i **[m]**	$\lvert v_i \rvert$ **[m]**
1	0,7854	20,1972	0,0012
2	0,7825	20,2473	0,0008
3	0,7796	20,2970	0,0001
4	0,7767	20,3466	0,0006
5	0,7738	20,3964	0,0012
6	0,7709	20,4468	0,0012
7	0,7679	20,4979	0,0005
8	0,7650	20,5481	0,0007
9	0,7621	20,5995	0,0003
10	0,7592	20,6498	0,0002
11	0,7563	20,7005	0,0005
12	0,7534	20,7505	0,0002
13	0,7505	20,8008	0,0001
14	0,7476	20,8515	0,0004
15	0,7447	20,9017	0,0001
16	0,7418	20,9520	0,0001
17	0,7389	21,0028	0,0005
18	0,7359	21,0531	0,0005
19	0,7330	21,1031	0,0000
20	0,7301	21,1537	0,0003
21	0,7272	21,2040	0,0001
22	0,7243	21,2539	0,0004
23	0,7214	21,3039	0,0008
		$\sum/n$	0,0005

5.6.3.3. Određivanje standardnih paralela uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana

Nakon što znamo parametre k, K i R uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana mogu se odrediti standardne paralele projekcije.

- *Zadatak*

Treba odrediti standardne paralele kojima odgovaraju geografske širine φ_1 i φ_2 uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana ako su poznati parametri k, K i R.

- *Rješenje*

Neka je zadana uspravna konusna projekcija ekvidistantna uzduž meridijana sfere polumjera R jednadžbom

$$\rho = K - R\varphi = R(C - \varphi), \tag{5.81}$$

gdje je $C = \dfrac{K}{R}$.

Ako su za tu projekciju zadane paralele s geografskim širinama φ_1 i φ_2 uzduž kojih nema deformacija duljina, onda se može pokazati da su konstante k, K i C određene izrazima

$$k = \frac{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_2} \tag{5.82}$$

i

$$K = \frac{R}{k}(\cos\varphi_1 + k\varphi_1) = \frac{R}{k}(\cos\varphi_2 + k\varphi_2), \tag{5.83}$$

odnosno

$$C = \frac{K}{R} = \frac{\cos\varphi_1}{k} + \varphi_1 = \frac{\cos\varphi_2}{k} + \varphi_2 . \tag{5.84}$$

Zbog ekvidistantnosti projekcije uzduž meridijana i uvjeta da je linearno mjerilo uzduž paralela s geografskim širinama φ_1 i φ_2

$$n = n(\varphi) = \frac{k\rho}{R\cos\varphi} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k\rho = R\cos\varphi \tag{5.85}$$

slijedi da su paralele s geografskim širinama φ_1 i φ_2 ujedno i standardne paralele projekcije.

Naš je zadatak odrediti one geografske širine φ_1 i φ_2 koje zadovoljavaju jednadžbe (5.82) i (5.83) ako su poznate vrijednosti *k* i *K*, odnosno *C*.

Uvrstimo li (5.81) u (5.85), nakon manjeg sređivanja možemo dobiti jednadžbu

$$\varphi + \frac{1}{k}\cos\varphi = \frac{K}{R} \tag{5.86}$$

odnosno

$$f(\varphi) = 0 ,$$

gdje je

$$f(\varphi) = \varphi + \frac{\cos\varphi}{k} - C . \tag{5.87}$$

Jednadžba (5.86) je nelinearna jednadžba s nepoznanicom φ koja može, ali i ne mora imati rješenje, a ako ima rješenje ono ne mora biti jedinstveno. Rješavanje jednadžbe (5.86) ili ekvivalentno tome traženje nul-točaka funkcije (5.87) može se provesti nekom od poznatih metoda, npr. metodom raspolavljanja ili metodom iteracije. U svakom slučaju potrebno je raspolagati odgovarajućim početnim ili približnim vrijednostima nepoznanica jer će o tome ovisiti konvergencija primijenjenog postupka.

- *Određivanje standardnih paralela uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana za kartu* Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico

Iz zadanih konstanti k i K izračunatih u poglavlju 5.6.3.2., odnosno C koje iznose

k = 0,6056615

K = 33,8013710

R = 17,3228204

C = 1,9512626

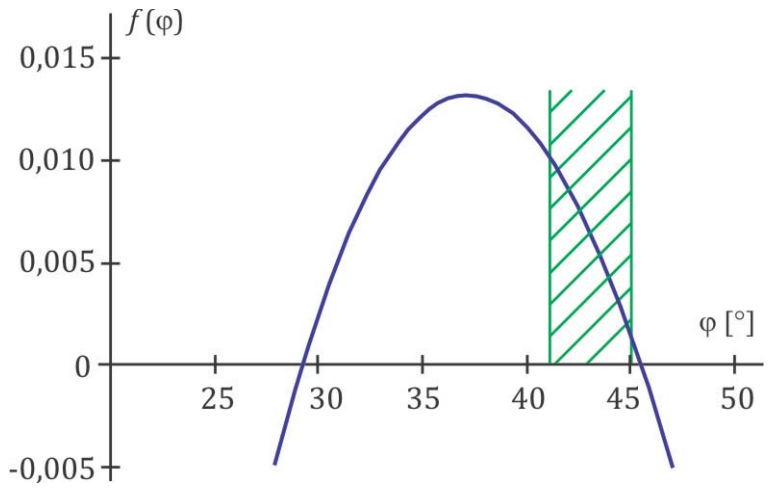
i traženjem nul-točaka jednadžbe (5.86) metodom raspolavljanja izračunate su dvije standardne paralele $\varphi_1 = 29°20'$ i $\varphi_2 = 45°30'$.

Funkcija $f(\varphi) = \varphi + \frac{\cos\varphi}{0{,}6056615} - 1{,}9512626$ prikazana je grafički na slici 5.42, dok je funkcija $n(\varphi) = \frac{0{,}6056615\rho}{R\cos\varphi}$ prikazana na slici 5.43.

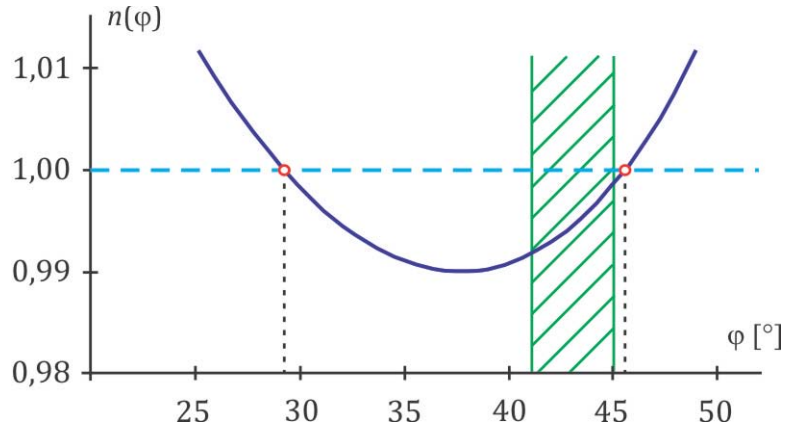
Postupak određivanja standardnih paralela iz izračunatih koeficijenata projekcije priložen je u ovom doktorskom radu u prilogu 7 na odgovarajućem CD-u.

Na raspodjelu deformacija pojedine projekcije utječe odabir standardnih paralela, a to su one paralele uzduž kojih nema deformacija. Dakle, uobičajeno je da se standardne paralele prilikom izrade bilo koje karte odabiru na taj način da se one nalaze unutar područja koje je prikazano na karti.

Područje koje je prikazano na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* proteže se približno od 41°12'N do 45°3'N geografske širine (zeleno šrafirano područje na slikama 5.42. i 5.43.). Usporedbom dobivenih vrijednosti standardnih paralela, može se primijetiti da se izračunate standardne paralele ne nalaze unutar područja koje je prikazano na karti.



Slika 5.42. Prikaz funkcije $f(\varphi)=\varphi+\dfrac{\cos\varphi}{0{,}6056615}-1{,}9512626$



Slika 5.43. Prikaz funkcije $n(\varphi)=\dfrac{0{,}6056615\rho}{R\cos\varphi}$

S obzirom na to da određivanje koeficijenta *k* ovisi o točnosti određivanja kuta (δ) pod kojim se sijeku meridijani u projekciji, a koji opet ovisi o točnosti određivanja jednadžbi pravaca meridijana i točke $S(x_S, y_S)$ njihovoga presjeka u projekciji, može se zaključiti da točnost određivanja koeficijenta *k* utječe na točnost određivanja standardnih paralela. Da vrijednosti izračunatih standardnih paralela ovise o koeficijentu *k* može se također vidjeti i iz izraza (5.82). Iz izraza (5.83) može se pak vidjeti da točnost koeficijenta *K* ovisi o veličini *k*, što nas opet može dovesti do zaključka da točnost koeficijenta *k* ovisi o točnosti određenih standardnih paralela.

Ako se sada osvrnemo na iznos srednje vrijednosti odstupanja pojedinog meridijana od središta njihova presjeka dobivenog u poglavlju 5.5.3. koje iznosi 0,0105 m, možemo zaključiti da bi upravo točnost određivanja točke presjecišta meridijana mogla tako znatno utjecati na određivanje parametra *k*, pa tako i standardnih paralela.

5.7. Određivanje parametara i standardnih paralela uspravnih konusnih projekcija

Prouče li se životopisi Ch. Mairea i Boškovića može se vidjeti da su obojica bili izvrsni matematičari. Kljajić i Lapaine (2012) navode da je Ch. Maire već sa 14 godina izradio svoju prvu kartu pokrajine Durham. S obzirom na to teško je povjerovati da su prilikom određivanja parametara zaboravili na ulogu standardnih paralela, odnosno na veličinu i raspodjelu deformacija.

Iz poznatih jednadžbi uspravne konusne projekcije (vidi (5.9) u poglavlju 5.1.2.) konstante k i K mogu se odrediti pod raznim uvjetima (npr. Murdoch 1758, Euler 1777, Close 1905, Close i Clarke 1911, Borčić 1955, Snyder 1978, 1993). Uspravna konusna projekcija ekvidistantna uzduž meridijana ili kraće jednostavna konusna projekcija prvi put se pojavljuje kod Klaudija Ptolomeja oko 100. godine po Kr. Izgleda da je Joseph Nicolas De l'Isle 1745. prvi upotrijebio takvu projekciju s unaprijed zadanim standardnim paralelama koje su smještene na 1/4 i 3/4 raspona od južne do sjeverne granične paralele karte (Snyder 1978, 1993). To bi značilo da su geografske širine standardnih paralela

$$\varphi_1 = \varphi_S + \frac{\varphi_N - \varphi_S}{4} = \frac{3\varphi_S + \varphi_N}{4}, \quad \varphi_2 = \varphi_N - \frac{\varphi_N - \varphi_S}{4} = \frac{3\varphi_N + \varphi_S}{4} \tag{5.88}$$

gdje su φ_N i φ_S najsjevernija i najjužnija geografska širina područja koje se preslikava.

Tada su parametri projekcije

$$k = \frac{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_2} \tag{5.89}$$

i

$$K = \frac{R}{k}\left(\cos\varphi_1 + k\varphi_1\right) = \frac{R}{k}\left(\cos\varphi_2 + k\varphi_2\right) = R\frac{\varphi_1\cos\varphi_2 - \varphi_2\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}, \tag{5.90}$$

odnosno

$$C = \frac{K}{R} = \frac{\cos\varphi_1}{k} + \varphi_1 = \frac{\cos\varphi_2}{k} + \varphi_2 = \frac{\varphi_1\cos\varphi_2 - \varphi_2\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}. \tag{5.91}$$

Obratno, ako iz parametara projekcije treba odrediti geografske širine standardnih paralela, tada treba riješiti jednadžbu

$$\varphi + \frac{1}{k}\cos\varphi = C \tag{5.92}$$

odnosno potražiti nul-točke funkcije

$$f(\varphi) = \varphi + \frac{\cos\varphi}{k} - C. \tag{5.93}$$

Ako su izračunane vrijednosti φ_1 i φ_2 u suglasju s (5.88), tada je riječ o De l'Isleovoj projekciji. Dakle, u načelu su moguća dva pristupa. Jedan je odabir standardnih paralela i zatim računanje parametara projekcije. Drugi, koji je obično poželjniji je postavljanje određenih uvjeta koji će posredno definirati standardne paralele. Ima mnogo takvih uvjeta (npr. Close i Clarke 1911, Hinks 1912), a ovdje će se obraditi onaj što ga predlože Close (1905).

- *Zadatak*

Odrediti konstante k i K, odnosno C uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana pod uvjetom da mjerila uzduž krajnjih paralela budu međusobno jednaka i da najveće mjerilo bude za toliko veće od jedinice koliko je najmanje manje od jedinice.

- *Rješenje*

Prema prvom uvjetu može se napisati

$$n_j = n_s. \tag{5.94}$$

Prema drugom uvjetu imamo

$$\begin{aligned} n_j &= 1 + \varepsilon \\ n_s &= 1 + \varepsilon \\ n_0 &= 1 - \varepsilon \end{aligned} \tag{5.95}$$

gdje su n_j, n_s i n_0 mjerila uzduž paralela koja odgovaraju geografskim širinama: φ_j za najjužniju paralelu, φ_s za najsjeverniju paralelu i φ_0 za paralelu uzduž koje je linearno mjerilo najmanje. Iz prvog uvjeta uzevši u obzir (5.85) slijedi

$$\frac{k\rho_j}{R\cos\varphi_j}=\frac{k\rho_s}{R\cos\varphi_s}, \tag{5.96}$$

odakle je

$$\rho_j\cos\varphi_s=\rho_s\cos\varphi_j. \tag{5.97}$$

Uvrsti li se poznati izraz za ρ

$$\rho=K-R\varphi=R(C-\varphi)$$

izraz (5.97) može se napisati ovako

$$(K-R\varphi_j)\cos\varphi_s=(K-R\varphi_s)\cos\varphi_j. \tag{5.98}$$

Iz (5.98) može se dobiti formula za računanje parametra K:

$$K=R\frac{\varphi_s\cos\varphi_j-\varphi_j\cos\varphi_s}{\cos\varphi_j-\cos\varphi_s},$$

odnosno

$$C=\frac{K}{R}=\frac{\varphi_s\cos\varphi_j-\varphi_j\cos\varphi_s}{\cos\varphi_j-\cos\varphi_s}. \tag{5.99}$$

Prema drugom uvjetu, ako zbrojimo najprije prvu i treću, a zatim drugu i treću jednadžbu iz (5.95) dobit ćemo

$$\begin{aligned} n_j+n_0&=2\\ n_s+n_0&=2 \end{aligned} \tag{5.100}$$

što se primjenom izraza (5.85) može napisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{k\rho_j}{R\cos\varphi_j}+\frac{k\rho_0}{R\cos\varphi_0}&=2\\ \frac{k\rho_s}{R\cos\varphi_s}+\frac{k\rho_0}{R\cos\varphi_0}&=2. \end{aligned} \tag{5.101}$$

Budući da je $\rho=K-R\varphi=R(C-\varphi)$ možemo (5.101) napisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{C-\rho_j}{\cos\varphi_j}+\frac{C-\rho_0}{\cos\varphi_0}&=\frac{2}{k}\\ \frac{C-\rho_s}{\cos\varphi_s}+\frac{C-\rho_0}{\cos\varphi_0}&=\frac{2}{k}. \end{aligned} \tag{5.102}$$

Iz obje jednadžbe u (5.102) izrazimo C:

$$C = \frac{2}{k}\frac{\cos\varphi_j \cos\varphi_0}{\cos\varphi_0 + \cos\varphi_j} + \frac{\varphi_j \cos\varphi_0 + \varphi_0 \cos\varphi_j}{\cos\varphi_0 + \cos\varphi_j}$$

$$C = \frac{2}{k}\frac{\cos\varphi_s \cos\varphi_0}{\cos\varphi_0 + \cos\varphi_s} + \frac{\varphi_s \cos\varphi_0 + \varphi_0 \cos\varphi_s}{\cos\varphi_0 + \cos\varphi_s}$$

i zatim nakon što izjednačimo desne strane, riješimo se razlomaka i sredimo možemo dobiti

$$\frac{2}{k}\cos\varphi_0 = \frac{\varphi_s - \varphi_j}{\cos\varphi_j - \cos\varphi_s}\cos\varphi_0 + C - \varphi_0. \tag{5.103}$$

To je jedna jednadžba s dvije nepoznanice k i φ_0. Međutim, još nismo upotrijebili uvjet da mjerilo uzduž paralele kojoj odgovara geografska širina φ_0 treba biti minimalno, odnosno linearna deformacija maksimalna. U tu svrhu uzmimo izraz za mjerilo

$$n(\varphi) = \frac{k\rho}{R\cos\varphi} = \frac{k(C-\varphi)}{\cos\varphi}$$

deriviramo

$$\frac{dn}{d\varphi} = k\frac{\cos\varphi + (C-\varphi)\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

izjednačimo s nulom i dobijemo

$$\varphi = C - \cot\varphi. \tag{5.104}$$

To je nelinearna jednadžba koju riješimo nekom od metoda za takve jednadžbe, npr. metodom raspolavljanja, i dobit ćemo rješenje φ_0. Sad to možemo uvrstiti u (5.103) i dobiti najprije

$$\frac{2}{k}\cos\varphi_0 = \frac{\varphi_s - \varphi_j}{\cos\varphi_j - \cos\varphi_s}\cos\varphi_0 + \cot\varphi_0 \tag{5.105}$$

i nakon dijeljenja s $\cos\varphi_0$

$$\frac{2}{k} = \frac{\varphi_s - \varphi_j}{\cos\varphi_j - \cos\varphi_s} + \frac{1}{\sin\varphi_0} \tag{5.106}$$

tj.

$$k = \frac{2}{\dfrac{\varphi_s - \varphi_j}{\cos\varphi_j - \cos\varphi_s} + \dfrac{1}{\sin\varphi_0}}. \tag{5.107}$$

Parametar k može se dobiti i iz izraza (5.102) na dva načina

$$k = \frac{2}{\dfrac{C-\varphi_j}{\cos\varphi_j} + \dfrac{C-\varphi_0}{\cos\varphi_0}} = \frac{2}{\dfrac{C-\varphi_s}{\cos\varphi_s} + \dfrac{C-\varphi_0}{\cos\varphi_0}}, \tag{5.108}$$

ili uzevši u obzir (5.104)

$$k = \frac{2}{\dfrac{C-\varphi_j}{\cos\varphi_j} + \dfrac{1}{\sin\varphi_0}} = \frac{2}{\dfrac{C-\varphi_s}{\cos\varphi_s} + \dfrac{1}{\sin\varphi_0}}. \tag{5.109}$$

Standardne paralele mogu se sad dobiti na uobičajeni način rješavanjem jednadžbe (5.92), odnosno traženjem nultočaka funkcije (5.93).

Uvrštavanjem iznosa za k u izraz (5.73) može se izračunati kut pod kojim se sijeku meridijani u projekciji

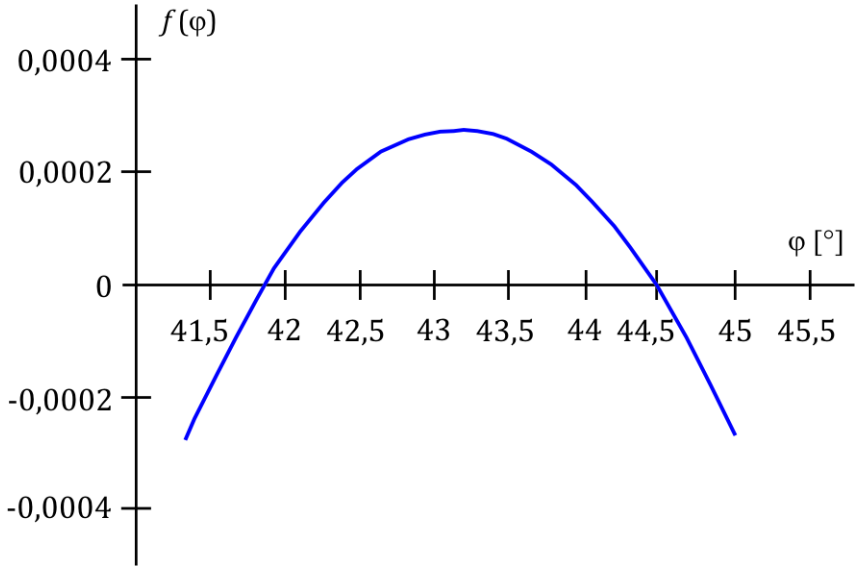
$$\delta = k(\lambda - \lambda_0).$$

- *Određivanje koeficijenata i standardnih paralela uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana za kartu* Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico

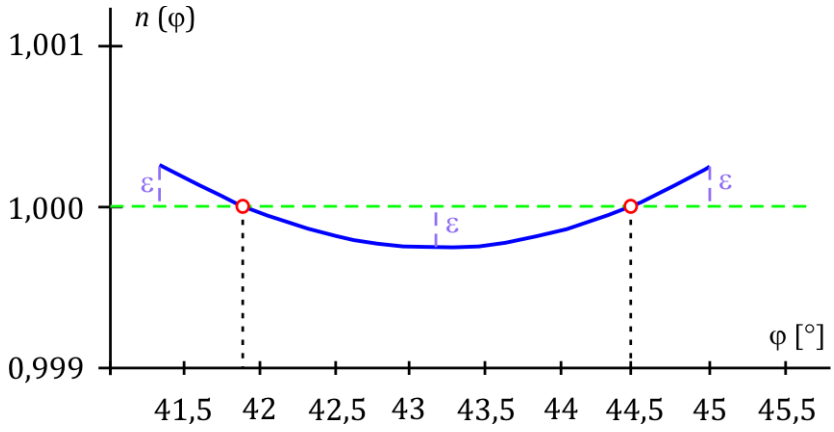
Karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* pokriva područje od 41°20'N do 45°00'N geografske širine. Pronalaženjem nul-točaka funkcije (5.104) metodom raspolavljanja izračunala sam da je geografska širina $\varphi_0 = 43°11',1$. Potom sam odredila parametre C i k primjenom formula (5.99) i (5.107) koji iznose $k = 0{,}6841813$ i $C = 1{,}8191707$.

Traženjem nul-točaka funkcije (5.87) metodom raspolavljanja dobila sam da standardne paralele iznose $\varphi_1 = 41°52',8$ i $\varphi_2 = 44°28',3$. Rijetko kad se za geografske širine standardnih paralela upotrebljavaju veličine koje nisu cjelobrojne, stoga možemo zaključiti da standardne paralele u kojima je karta izrađena vjerojatno iznose $\varphi_1 = 41°50'$ i $\varphi_2 = 44°30'$.

Funkcija $f(\varphi)=\varphi+\dfrac{\cos\varphi}{0{,}6841813}-1{,}8191707$ prikazana je grafički na slici 5.44, dok je funkcija $n(\varphi)=\dfrac{0{,}6841813\ \rho}{R\cos\varphi}$ prikazana na slici 5.45.



Slika 5.44. Prikaz funkcije $f(\varphi)=\varphi+\dfrac{\cos\varphi}{0{,}6841813}-1{,}8191707$, nul-točke određuju standardne paralele



Slika 5.45. Prikaz funkcije $n(\varphi)=\dfrac{0{,}6841813\ \rho}{R\cos\varphi}$, raspodjela linearnih mjerila uzduž paralela

Primjenom izraza (5.73) izračunala sam kut pod kojim se sijeku meridijani u projekciji i on sad iznosi $\delta=13'$.

Iz dobivene vrijednosti kuta δ vidi se da je on za 1' veći od vrijednosti kuta dobivenog u poglavlju 5.6.2., gdje je kut određen u odnosu na izračunato zajedničko presjecište meridijana (dobiveno u poglavlju 5.5.3.).

Postupak određivanja koeficijenata, standardnih paralela i kuta δ priložen je u ovom doktorskom radu u prilogu 8 na odgovarajućem CD-u.

5.7.1. Određivanje radijusa sfere s pomoću podataka očitanih s karte

Da bismo prema formulama u (5.9) mogli izračunati teorijske koordinate kartografske mreže u uspravnoj ekvidistantnoj konusnoj projekciji, potrebno je odrediti radijus Zemljine sfere *R* u mjerilu karte.

- *Zadatak*

Odrediti radijus Zemljine sfere *R* ako su nam poznate koordinate *n* točaka (x_i, y_i) u ravnini kojima odgovaraju geografske koordinate (φ_i, λ_i) na Zemljinoj sferi.

- *Rješenje*

Zadano je *n* točaka (x_i, y_i) u ravnini kojima odgovaraju geografske koordinate (φ_i, λ_i) na Zemljinoj sferi polumjera *R*. Pretpostavimo da su te točke u nekoj ekvidistantnoj uspravnoj konusnoj projekciji za koju su poznati parametri *q*, *k* i λ_0 u jednadžbama (5.9):

$$y = \rho \sin\delta = (K - R\varphi)\sin k(\lambda - \lambda_0)$$
$$x = q - \rho\cos\delta = q - (K - R\varphi)\cos k(\lambda - \lambda_0),$$

gdje smo označili

$$\rho = K - R\varphi .$$

Promotrimo posebno srednji meridijan i njegovu sliku u projekciji. Na tom je meridijanu

$$\lambda = \lambda_0 \tag{5.110}$$

i stoga

$$x = q - \rho\,. \tag{5.111}$$

Budući da je

$$q = \rho_j = K - R\varphi_j \tag{5.112}$$

imamo

$$x = q - \rho = \rho_j - \rho = (K - R\varphi_j) - (K - R\varphi) = R(\varphi - \varphi_j). \tag{5.113}$$

Dakle, potrebno je uzeti točke s parovima koordinata (x_i, φ_i), gdje su x_i koordinate točke izmjerene na karti, φ_i geografske širine u radijanima, a φ_j najjužnija geografska širina na karti u radijanima, te odrediti najbolji pravac kroz te točke primjenom metode najmanjih kvadrata. Iz dobivene jednadžbe pravca moći će se, prema izrazu (5.113), iščitati veličina *R*.

U tom slučaju geografske širine (φ_i) su teorijske (bespogrešne) vrijednosti koje nisu rezultat mjerenja već su očitane iz opisa koordinatne mreže s rubova karte. S obzirom na to da se traži međusobni odnos (ovisnost) između varijabli x_i i φ_i te da varijable slijede linearan odnos, za rješenje ovog problema predlažem postupak pronalaska ''najboljeg'' pravca primjenom jednostavne linearne regresije.

Dakle, tražimo onaj pravac $x_i = R(\varphi_i - \varphi_j)$ za koji će za dane točke (x_1, φ_1), (x_2, φ_2),..., (x_n, φ_n) zbroj kvadrata svih vertikalnih odstupanja točaka od pravca biti minimalan.

Da bismo na taj način odredili najbolji pravac traži se onaj *R* za koji funkcija

$$S = S(R) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - R(\varphi_i - \varphi_j)\right]^2 \tag{5.114}$$

ima minimum. Tu trebamo imati na umu da je najjužnija geografska širina na karti φ_j poznata pa ju možemo smatrati konstantom.

Vrijednost funkcije *S* uvijek je veće ili jednako od 0, bez obzira na to kakvi su nepoznati parametri, jer je riječ o zbroju kvadrata. Da bi funkcija *S* poprimila najmanju vrijednost nužan je uvjet da parcijalna derivacija te funkcije po *R* bude jednaka nuli, tj.

$$\frac{\partial S}{\partial R} = -2\sum_{i=1}^{n} \left[x_i - R(\varphi_i - \varphi_j)\right] (\varphi_i - \varphi_j) = 0\,. \tag{5.115}$$

Uz taj uvjet nakon raspisivanja i sređivanja izraza (5.115) dobije se

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\varphi_i - \varphi_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i - \varphi_j\right)^2}. \tag{5.116}$$

S pomoću druge parcijalne derivacije funkcije S (5.114) dokazat ćemo da je riječ o minimumu

$$\frac{\partial^2 S}{\partial R^2} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i - \varphi_j\right)^2 \geq 0. \tag{5.117}$$

Izraz (5.117) bit će uvijek veći od 0, osim u slučaju kada bi bilo $\varphi_i = \varphi_j$ za svaki i, što u ovom primjeru nije slučaj.

Iz izraza (5.113) može se vidjeti da pravac prolazi kroz točku čiju smo geografsku širinu definirali kao najjužniju $\left(\varphi_j\right)$ na karti.

Uz pomoć dobivenih vrijednosti na kraju se mogu izračunati apsolutne vrijednosti odstupanja te njihova srednja vrijednost.

- *Određivanje radijusa sfere R za kartu* Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico

Na temelju 19 točaka koje sam očitala sa srednjeg meridijana na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i transformirala u koordinatni sustav uspravne konusne projekcije (vidi poglavlje 5.6.3.1.), kojima odgovaraju koordinate $\left(x_i, \varphi_i\right)$ (vrijednosti su dane u tablici 5.11., drugi i treći stupac), primjenom izraza (5.116) izračunala sam radijus sfere R u mjerilu karte koji iznosi R = 17,3093166 m. Za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* geografska širina najjužnije paralele iznosi $41°20'$. Međutim, kako to presjecište srednjeg meridijana i paralele nije nacrtano na karti pa ga za ranija računanja (vidi poglavlje 5.6.3.1.) nisam mogla upotrijebiti, pri postupku određivanja radijusa sfere za najjužniju paralelu upotrijebila sam paralelu s geografskom širinom $\varphi_j = 41°30'$.

Uz pomoć izraza (5.113) možemo izračunati apsolutne vrijednosti odstupanja mjerenih i teorijskih vrijednosti koordinata x_i uzduž srednjeg meridijana u ravnini projekcije primjenom izraza

$$|d_i| = |x_i - R(\varphi_i - \varphi_j)|. \tag{5.118}$$

Detaljan postupak računanja radijusa sfere i apsolutnih vrijednosti odstupanja za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* priložen je u ovom doktorskom radu u prilogu 9 na odgovarajućem CD-u.

Tablica 5.11. Geografske širine φ_i [rad] i pripadne koordinate x_i [m] uzduž srednjeg meridijana te apsolutne vrijednosti odstupanja $(|d_i|)$ mjerenih i teorijskih koordinata x_i u ravnini projekcije za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Broj točke uzduž srednjeg meridijana	φ_i **[rad]**	**koordinate** x_i **očitane s karte [m]**	**teorijske** x_i **koordinate [m]**	$\lvert d_i \rvert$ **[m]**
1	0,7854	1,0552	1,0574	0,0021
2	0,7825	1,0056	1,0070	0,0014
3	0,7709	0,8070	0,8056	0,0014
4	0,7679	0,7564	0,7553	0,0012
5	0,7650	0,7064	0,7049	0,0015
6	0,7621	0,6543	0,6546	0,0003
7	0,7592	0,6048	0,6042	0,0006
8	0,7563	0,5540	0,5539	0,0002
9	0,7534	0,5042	0,5035	0,0006
10	0,7505	0,4541	0,4532	0,0009
11	0,7476	0,4036	0,4028	0,0008
12	0,7447	0,3523	0,3525	0,0002
13	0,7418	0,3017	0,3021	0,0004
14	0,7389	0,2507	0,2518	0,0011
15	0,7359	0,2007	0,2014	0,0007
16	0,7330	0,1505	0,1511	0,0005
17	0,7301	0,0998	0,1007	0,0009
18	0,7272	0,0497	0,0504	0,0007
19	0,7243	0,0000	0,0000	0,0000
		$\lvert d_i \rvert / n$		0,0008

Prisjetimo se, u poglavlju 5.6.3.2. s pomoću parova koordinata (φ_i, ρ_i), gdje je ρ_i izračunati polumjer paralela u projekciji, primjenom metode najmanjih kvadrata, izračunala sam koeficijent *K* i radijus sfere *R* za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Radijus sfere u mjerilu karte dobiven tim postupkom iznosio je 17,3228204 m, a koeficijent $K = 33{,}8013710$. Standardne paralele određene iz vrijednosti dobivenih parametara na takav način nisu se nalazile unutar područja koje karta prikazuje.

Vrijednosti radijusa sfere *R* u mjerilu karte dobivene na oba načina ne razlikuju se puno, samo 0,08%, ali se može primijetiti da preciznost određivanja vrijednosti radijusa *R* znatno utječe na točnost određivanja standardnih paralela. Sama preciznost određivanja radijusa *R*, opisana postupkom u poglavlju 5.6.3.2., ovisi o preciznosti određivanja polumjera paralela ρ_i, koja pak ovise o preciznosti određivanja točke *S*, odnosno zajedničkog sjecišta svih meridijana.

Stoga predlažem, ako nije poznat radijus sfere u kojem je karta izrađena, da se standardne paralele odrede postupkom opisanim u ovom poglavlju doktorskog rada. Postupak nije ovisan o veličini radijusa *R*, a time niti o konstanti *K*, a razlikuje se u tome što je uvedena konstanta *C* koja je omjer veličina *K* i *R*.

5.7.2. Određivanje mjerila karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Ako je mjerilo karte 1:372 000, a radijus sfere u mjerilu karte 17,3093166 m i ako nazivnik mjerila karte pomnožimo s radijusom sfere u mjerilu karte, onda polumjer Boškovićeve sfere iznosi 6 439 065,775 m. Znamo da duljina luka 1° meridijana koju su Bošković i Maire odredili iznosi 56 979 francuskih hvata, što je 111 052,071 m. Uz pretpostavku da je Zemlja sfera, odnosno da su meridijani kružnice, lako možemo izračunati da polumjer sfere iznosi 6 362 814,974 m. Te dvije vrijednosti razlikuju se samo za 1,2%. Uz pretpostavku da je Zemlja elipsoid, srednji polumjer zakrivljenosti *R* elipsoida računat ćemo prema poznatoj formuli (Frančula 2000):

$$R = \sqrt{MN}\,, \tag{5.119}$$

gdje je *M* polumjer zakrivljenosti meridijana, a *N* polumjer zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu. Veličine *M* i *N* računaju se prema izrazima u (4.4).

Bošković i Maire odredili su duljinu luka 1° meridijana na srednjoj geografskoj širini 43°. Primjenom izraza (4.4) i dimenzija Boškovićeva elipsoida prikazanih u tablici 4.10. u poglavlju 4, dobila sam da na geografskoj širini 43° polumjer zakrivljenosti meridijana iznosi M = 6 369 986,377 m, a polumjer zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu N = 6 395 297,537 m. Primjenom izraza (5.119) srednji polumjer zakrivljenosti Boškovićeva elipsoida iznosi 6 382 629,411 m. Ta se vrijednost razlikuje za 1,14% od vrijednosti radijusa sfere izračunate u poglavlju 5.7.1. ovog doktorskog rada, odnosno za 0,31% kada se radijus sfere računa iz mjerene duljine luka 1° meridijana.

Pomoću duljine luka 1° meridijana i radijusa sfere, odnosno srednjeg polumjera zakrivljenosti elipsoida, moguće je također procijeniti mjerilo u kojem je karta izrađena. Potrebna nam je neka udaljenost na karti koju možemo izmjeriti ili izračunati, a kojoj znamo udaljenost na sferi polumjera R. S karte se može očitati da je podjela geografskih širina dana svakih 10'.

Uz pretpostavku da je radijus sfere 6 362 814,974 m, lako je izračunati da duljina luka meridijana kojem odgovara kut od 10' iznosi 18 508,6785 m na sferi. Iz koordinata presjeka meridijana i paralela može se izračunati udaljenost između paralela na karti. Udaljenost između svih paralela uzduž meridijana na karti jednaka je jer je projekcija ekvidistantna uzduž meridijana. Za računanje udaljenosti između paralela uzduž srednjeg meridijana možemo upotrijebiti vrijednosti iz tablice 5.10., treći stupac. Srednja vrijednost udaljenosti između paralela iznosi 0,0504 m u mjerilu karte. Dijeljenje duljine luka meridijana kojem odgovara kut od 10' na sferi i srednje udaljenosti između paralela na karti dat će mjerilo karte koje iznosi 367 235,685 ili zaokruženo 367 000.

Uz pretpostavku da je srednji radijus zakrivljenosti elipsoida 6 382 629,411 m, duljina luka meridijana kojem odgovara kut od 10' iznosi 18 566,316 m na elipsoidu. Primijenimo li istu srednju udaljenost između paralela na karti od 0,0504 m u mjerilu karte dobije se da je mjerilo u kojem je karta izrađena 1:368 379,293, odnosno zaokruženo 1:368 000.

Iz grafičkih mjerila na karti dobiveno je numeričko mjerilo 1:372 000. Iz udaljenosti paralela za primjer sfere dobiveno je mjerilo 1:367 000. Iz udaljenosti paralela za

primjer elipsoida dobiveno je mjerilo 1:368 000. Srednja vrijednost tih numeričkih mjerila daje mjerilo karte zaokruženo 1:370 000.

5.8. Teorijske vrijednosti pravokutnih koordinata presjecišta meridijana i paralela u konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana

Kada su poznate standardne paralele projekcije lako se mogu izračunati teorijske pravokutne koordinate za bilo koju točku u projekciji. U ovom poglavlju doktorskog rada teorijske pravokutne koordinate presjecišta meridijana i paralela usporedit ću s koordinatama koje su očitane s karte. Njihovom razlikom procijenit ću točnost kartografske mreže nacrtane na karti.

5.8.1. Ocjena točnosti kartografske mreže nacrtane na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

U poglavlju 5.7. ovog doktorskog rada odredila sam parametre konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana. Iz opisanog postupka dobila sam vrijednosti koeficijenata *k*, *C* iz kojih sam odredila standardne paralele (φ_1 i φ_2) projekcije.

Pretpostavimo li da su poznate standardne paralele projekcije u kojoj je karta izrađena, tada raspolažemo svima vrijednostima koje su nam potrebne da bismo mogli izračunati teorijske koordinate presjecišta meridijana i paralela u projekciji primjenom formula u izrazu (5.9)

$$
\begin{aligned}
&y = \rho \sin \delta \\
&x = q - \rho \cos \delta \\
&q = \rho_j \\
&\rho = R\left(\frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} - \varphi \right) \\
&\delta = k(\lambda - \lambda_0) \\
&k = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}.
\end{aligned}
$$

Dobro vidljivih presjecišta meridijana i paralela na karti ima n = 112. Za svaku točku s ruba karte očitala sam geografske koordinate (φ_i, λ_i). Uz pomoć izračunatih standardnih paralela ($\varphi_1 = 41°50'$, $\varphi_2 = 44°30'$) i srednjeg meridijana preslikavanja ($\lambda_0 = 30°$) za projekciju Zemljine sfere polumjera R = 17,3093166 m u mjerilu karte izračunala sam teorijske koordinate za tih 112 točaka.

Postupak računanja teorijskih koordinata kartografske mreže pomoću formula (5.9) priložen je ovom doktorskom radu u prilogu 10 na odgovarajućem CD-u.

Dobivene teorijske vrijednosti koordinata presjecišta meridijana i paralela u uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana potom sam usporedila s koordinatama očitanima s karte koje sam transformirala u uspravnu konusnu projekciju (vidi poglavlje 5.6.3.1.). Odstupanje teorijske kartografske mreže i one nacrtane na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* izračunala sam primjenom izraza

$$d_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \ . \tag{5.120}$$

Prosječno odstupanje teorijske i nacrtane kartografske mreže na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* iznosi 0,0013 m u mjerilu karte. Usporedimo li taj iznos s vrijednosti procjene *a priori* definirane u poglavlju 5.2.3. (±1,0–2,0 mm), možemo vidjeti da prosječno odstupanje zadovoljava traženu razinu točnosti.

Detaljan postupak računanja odstupanja teorijske kartografske mreže i kartografske mreže nacrtane na karti priložen je u ovom doktorskom radu u prilogu 11 na odgovarajućem CD-u.

5.9. Preslikavanje sfere ili elipsoida područja Papinske Države u ravninu uspravne ekvidistantne konusne projekcije

Prema Snyderu (1987), ekvidistantna konusna projekcija uobičajeno je korištena u sfernom obliku u atlasima za izradu karata manjih država. Snyder (1987) navodi da su jednadžbe za preslikavanje elipsoida u ravninu ekvidistantne konusne projekcije prvi put objavljene u radu Snydera (1978). Međutim, 1955. godine Branko Borčić izdao je

knjigu na hrvatskom jeziku pod nazivom *Matematička kartografija*, u kojoj je dao izvod jednadžbi za većinu projekcija pa tako i ekvidistantne konusne.

S obzirom na to da se Bošković od ranih dana svog znanstvenog djelovanja bavio dokazivanjem da Zemlja nije pravilnog oblika, postavlja se pitanje jesu li Bošković i Maire prilikom izrade karte Papinske Države preslikavali u ravninu projekcije sferu ili elipsoid. Podsjetimo se da je Bošković mjerenjem duljine luka meridijana između Rima i Riminija te usporedbom do tada mjerenih duljina luka meridijana dokazao da je Zemlja spljoštena na polovima (vidi poglavlje 4).

Iako postoje male indicije da su u ravninu projekcije preslikavali elipsoid jer u svojim djelima (Maire i Boscovich 1755, Maire i Boscovich 1770) ne navode sve dimenzije elipsoida, već samo duljinu luka 1° meridijana i spljoštenost (ili kako su je oni zvali eliptičnost), tu tvrdnju probat ću dokazati u ovom poglavlju doktorskog rada.

Polumjer zakrivljenosti meridijana na sferi jednak je u svim točkama. Na elipsoidu, polumjer zakrivljenosti razlikuje se u svakoj točki uzduž danog meridijana (Snyder 1987). Polumjer zakrivljenosti meridijana (M) na elipsoidu može se izračunati pomoću formule (4.4). Polumjer zakrivljenosti meridijana najmanji je na ekvatoru, a najveći na polovima. Duljinu luka meridijana između dvije točke s geografskim širinama φ_1 i φ_2 računamo prema formuli (4.7). Duljina luka stupnja geografske širine povećava se od ekvatora prema polovima (detaljnije obrazloženje vidi u poglavlju 4.2.).

Jedna od mogućnosti dokazivanja je li u ravninu preslikana sfera ili elipsoid je računanje udaljenosti između paralela uzduž jednog meridijana, i to za jednake iznose razlika geografskih širina. Ako su te udaljenosti jednake, odnosno ne povećavaju se udaljavanjem od ekvatora, možemo zaključiti da je u ravninu projekcije preslikana sfera.

Za ispitivanje te tvrdnje upotrebljavala sam vrijednosti x_i iz tablice 5.10. To su x koordinate presjeka meridijana i paralela u uspravnoj ekvidistantnoj projekciji uzduž srednjeg meridijana. Vrijednosti x_i također su prikazane u tablici 5.12. u drugom stupcu. S obzirom na to da pojedina presjecišta meridijana i paralela nisu nacrtana na karti, njihove koordinate nisam mogla odrediti. Oznaka minus (–) stavljena je u tablici 5.12. za koordinate presjecišta koja nisu ucrtana na karti. Izračunala sam razlike između koordinata x_i i prikazala ih u trećem stupcu u tablici 5.12.

Teorijske pravokutne koordinate presjecišta meridijana i paralela za preslikavanje sfere u ravninu ekvidistantne konusne projekcije izračunala sam primjenom formula (5.9.) i prikazala ih u četvrtom stupcu tablice 5.12. U knjizi Snydera (1987) na stranici 114 mogu se pronaći formule za računanje teorijskih pravokutnih koordinata za preslikavanje elipsoida u ravninu ekvidistantne konusne projekcije. Formule za računanje pravokutnih koordinata za preslikavanje elipsoida u ravninu projekcije iste su kao prilikom preslikavanja sfere

$$
\begin{aligned}
y &= \rho \sin \delta \\
x &= q - \rho \cos \delta .
\end{aligned}
$$

Međutim, razlikuju se formule za računanje veličina ρ i δ, koje imaju oblik:

$$
\begin{aligned}
\rho &= aG - s_m(\varphi) \\
\delta &= k(\lambda - \lambda_0) \\
q &= \rho_j \\
\rho_0 &= aG - s_m(\varphi_0) \\
k &= \frac{a(m_1 - m_2)}{s_m(\varphi_2) - s_m(\varphi_1)} \\
m_i &= \frac{\cos \varphi_i}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_i}} \\
G &= \frac{m_1}{k} + \frac{s_m(\varphi_1)}{a},
\end{aligned}
\tag{5.121}
$$

gdje je $s_m(\varphi)$ duljina luka meridijana od ekvatora do točke s geografskom širinom φ koja se računa prema izrazu (4.8), a velika poluos elipsoida, a e prvi ekscentricitet koji se računa prema formuli (4.46).

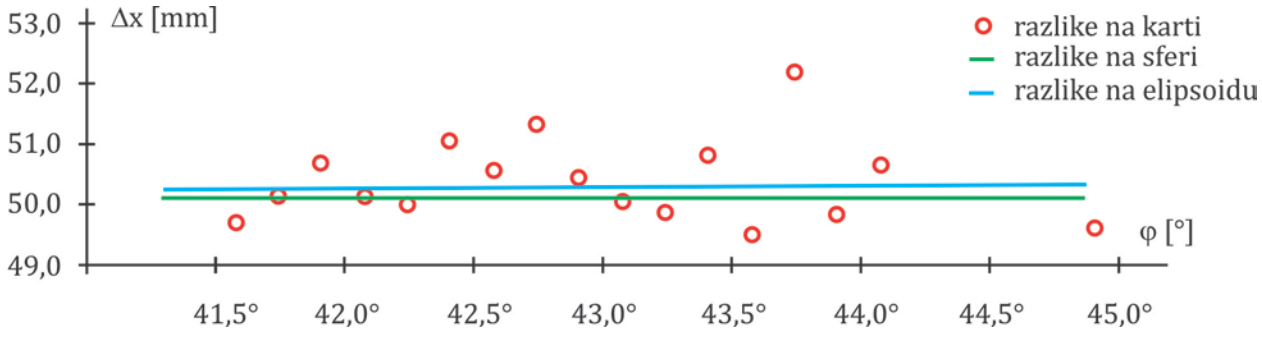
Primjenom formula (5.121) izračunala sam teorijske pravokutne koordinate za Boškovićev elipsoid i one su prikazane u šestom stupcu tablice 5.12. Za računanje teorijskih koordinata uzela sam parametre Boškovićeva elipsoida iz tablice 4.10 u poglavlju 4 ovog doktorskog rada. Iz teorijskih pravokutnih koordinata izračunala sam udaljenosti između paralela uzduž srednjeg meridijana za sferu i meridijan.

Tablica 5.12. Geografske širine φ_i i pripadne koordinate x_i [m] uzduž srednjeg meridijana te razlike između koordinata x_i očitanih s karte za preslikavanje sfere i Boškovićeva elipsoida u ravninu projekcije na primjeru srednjeg meridijana karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Geografska širina paralela φ_i	**Koordinate x_i očitane s karte [m]**	**Razlika koordinata očitanih s karte [m]**	**Teorijske koordinate x_i za sferu [m]**	**Razlika teorijskih koordinata na sferi [m]**	**Teorijske koordinate x_i za elipsoid [m]**	**Razlika teorijskih koordinata na elipsoidu [m]**
45°00'	1,0552	0,0496	1,05737	0,05035	1,05173	0,05010
44°50'	1,0056	–	1,00702	0,05035	1,00163	0,05010
44°40'	–	–	0,95666	0,05035	0,95153	0,05010
44°30'	–	–	0,90631	0,05035	0,90144	0,05009
44°20'	–	–	0,85596	0,05035	0,85134	0,05009
44°10'	0,8070	0,0506	0,80561	0,05035	0,80125	0,05009
44°00'	0,7564	0,0500	0,75526	0,05035	0,75116	0,05009
43°50'	0,7064	0,0521	0,70491	0,05035	0,70107	0,05009
43°40'	0,6543	0,0495	0,65456	0,05035	0,65099	0,05009
43°30'	0,6048	0,0508	0,60421	0,05035	0,60090	0,05008
43°20'	0,5540	0,0499	0,55386	0,05035	0,55082	0,05008
43°10'	0,5042	0,0501	0,50351	0,05035	0,50073	0,05008
43°00'	0,4541	0,0504	0,45316	0,05035	0,45065	0,05008
42°50'	0,4036	0,0513	0,40281	0,05035	0,40057	0,05008
42°40'	0,3523	0,0506	0,35246	0,05035	0,35050	0,05008
42°30'	0,3017	0,0511	0,30210	0,05035	0,30042	0,05007
42°20'	0,2507	0,0500	0,25175	0,05035	0,25035	0,05007
42°10'	0,2007	0,0501	0,20140	0,05035	0,20027	0,05007
42°00'	0,1505	0,0507	0,15105	0,05035	0,15020	0,05007
41°50'	0,0998	0,0502	0,10070	0,05035	0,10013	0,05007
41°40'	0,0497	0,0497	0,05035	0,05035	0,05007	0,05007
41°30'	0,0000	–	0,00000	0,05035	0,00000	0,05006
41°20'	–	–	–0,05035	–	–0,05006	–
	$\sum(x_i - x_{i+1})/n$	0,0504		0,05035		0,05008

Iz trećeg stupca tablice 5.12. može se vidjeti da izračunate udaljenosti variraju od paralele do paralele, ali ne ravnomjerno. Iz tih vrijednosti vidi se da se udaljenosti ne povećavaju povećanjem geografske širine. U petom stupcu tablice 5.12. mogu se iščitati teorijske vrijednosti razlika između paralela na sferi, dok se razlike istih veličina na elipsoidu mogu iščitati u sedmom stupcu tablice 5.12. S obzirom na to da vrijednosti iz trećeg stupca tablice 5.12. ne prate trend povećavanja povećanjem geografske širine, a teorijske vrijednosti koordinata za sferu i elipsoid neznatno se razlikuju, mala je vjerojatnost na taj način u potpunosti dokazati je li u ravninu projekcije preslikana sfera ili elipsoid. Područje koje je prikazano na karti pokriva malo područje.

Na slici 5.46. prikazane su udaljenosti između paralela uzduž meridijana izračunate iz koordinata x_i očitanih s karte, izračunatih za sferu i elipsoid. Prikazane vrijednosti nalaze se u trećem, petom i sedmom stupcu tablice 5.12.



Slika 5.46. Udaljenosti između paralela uzduž meridijana izračunate iz koordinata x_i očitanih s karte, izračunatih za sferu i elipsoid za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Snyder (1978) u svom radu daje osvrt na ekvidistantne konusne kartografske projekcije. Među ostalim, ispituje utjecaj preslikavanja sfere i elipsoida u ravninu ekvidistantne konusne projekcija s različitim standardnim paralelama na primjeru preslikavanja područja Sjedinjenih Američkih Država. Snyder dolazi do zaključka da preslikavanje manjih područja zakrivljenosti elipsoida ne utječe znatno na točnost prikazivanja tog područja. Stoga sam sklonija mišljenju da su Maire i Bošković u ravninu projekcije preslikavali sferu, a ne elipsoid.

5.10. Zaključak o kartografskoj projekciji na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

Osim što je kartografska mreža nacrtana na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, podaci o kartografskoj projekciji nisu poznati.

Nakon što sam dokazala da su na karti meridijani pravci, a paralele lukovi koncentričnih kružnica, metodom euklidskih udaljenosti, trebala sam definirati kartografsku projekciju u kojoj je karta izrađena.

Računajući udaljenosti između paralela uzduž meridijana dokazala sam da je projekcija ekvidistantna uzduž meridijana, dok sam računajući koeficijent proporcionalnosti k, odnosno kut pod kojim se sijeku meridijani, dokazala da je karta izrađena u konusnoj projekciji.

Postupak određivanja parametara ekvidistantne konusne projekcije nije protekao bez problema. Pokazalo se da je najveći problem stvarao postupak određivanja točke zajedničkog presjecišta meridijana, koja je ujedno i središte kružnih lukova paralela. Ta točka izravno utječe na određivanje koeficijenta proporcionalnosti k, odnosno kuta pod kojim se sijeku meridijani. Kut pod kojim se sijeku meridijani iznosi samo 13', a poznato je da se u geodeziji općenito ne preporučuju presjeci pravaca pod oštrim kutovima (npr. vidi u Macarol 1978).

U radu Lapainea i dr. (2014) istraženo je nekoliko pristupa procjeni položajne točnosti određivanja točke metodom presijecanja naprijed. U radu smo došli do zaključka da se optimalan položaj točke određene presijecanjem naprijed ne nalazi na presjecištu međusobno okomitih pravaca. U radu je izračunata srednja pogreška položaja presjecišta dvaju meridijana na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* kada oni s osnovicom zatvaraju kut od 89°05' i 89°46'. U prvom slučaju uzet je najzapadniji meridijan na karti i njemu simetričan u odnosu na srednji meridijan, dok su u drugom slučaju uzeta dva meridijana nacrtana na karti koji su najbliži srednjem meridijanu. Srednja pogreška položaja presjecišta meridijana u prvom slučaju iznosi 951 mm, dok u drugom slučaju iznosi 3535 mm.

Opisani postupak u poglavljima 5.6.2. i 5.6.3. rezultirao je standardnim paralelama koje se ne nalaze unutar područja koje karta prikazuje.

Postupak koji se pokazao pogodnim za određivanje parametara, točnije standardnih paralela projekcije, opisan je u poglavlju 5.7. Uvedena je konstanta C koja je omjer konstante K i veličine radijusa sfere R, koje za kartu nisu poznate. Dobivene su vrijednosti standardnih paralela $\varphi_1 = 41°50'$, $\varphi_2 = 44°30'$.

Primjenom formula (5.9)

$$y = \rho \sin \delta$$
$$x = q - \rho \cos \delta$$
$$q = \rho_j$$
$$\rho = R\left(\frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} - \varphi\right)$$
$$\delta = k(\lambda - \lambda_0)$$
$$k = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

i standardnih paralela izračunala sam ostale parametre ekvidistantne konusne projekcije za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*. Mjerilo karte izračunala sam u poglavljima 5.4. i 5.7.2. uz pomoć grafičkih mjerila i duljina luka meridijana na elipsoidu i sferi. Vrijednosti parametara prikazane su u tablici 5.13.

Tablica 5.13. Parametri uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*

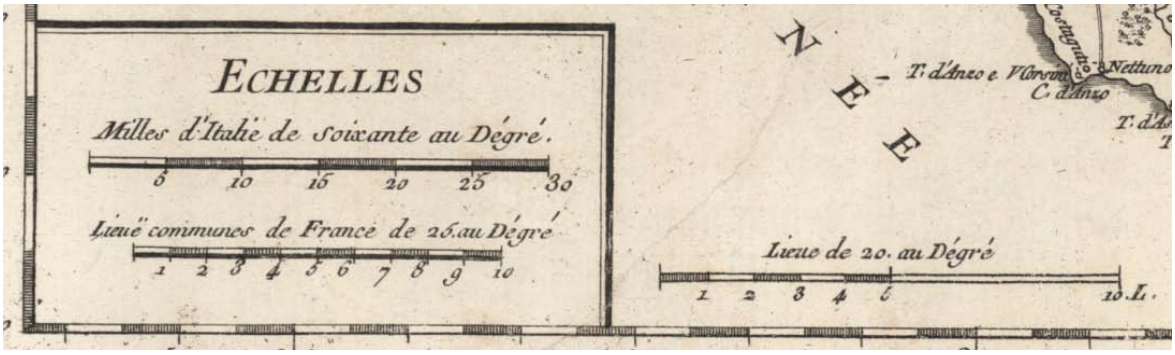
Parametar	Vrijednost
Standardne paralele	$\varphi_1 = 41°50'$ $\varphi_2 = 44°30'$
Srednji meridijan preslikavanja (λ_0)	30°
δ	13′
φ_j	41°30′
k	0,6840611
C	1,8193421
K	31,4915688 [m]
R [u mjerilu karte]	17,3093166 [m]
q	18,9542293 [m]
M	1:370 000

Ostaje još otvoreno pitanje gdje se nalazi zajednička točka presjeka svih meridijana. Os x pravokutnoga koordinatnog sustava ravnine uspravne ekvidistantne konusne projekcije podudara se s osi polarnih koordinata. Ishodište toga pravokutnoga koordinatnog sustava obično postavljamo u presjek najjužnije paralele i srednjeg meridijana. S obzirom na to da je poznata veličina q koja je polumjer paralele s najmanjom geografskom širinom φ, onda znamo da se zajedničko sjecište svih meridijana nalazi u točki s koordinatama $S(0, 18{,}954)$. U poglavlju 5.5.3. izračunala sam da se svi meridijani sijeku u točki s koordinatama $S(0{,}251, 21{,}427)$. Usporedimo li vrijednosti koordinate x u obje dobivene točke možemo primijetiti da se one razlikuju za 2,473 m.

Prisjetimo se, u poglavlju 5.5.3. zajedničko presjecište meridijana računala sam uz pomoć komponenata vektora smjera meridijana i koordinata težišta svakog meridijana primjenom metode euklidskih udaljenosti. Koristeći iste koordinate težišta za svaki meridijan i koordinate presjecišta meridijana računala sam kut pod kojim se meridijani sijeku. Dobila sam da se meridijani sijeku pod kutom od 12'. Iz tablice 5.11. može se vidjeti da se meridijani sijeku pod kutom od 13', čiju sam vrijednost izračunala primjenom formule (5.73). Upravo ta razlika u vrijednosti kuta pod kojim se sijeku meridijani i pokazanog u radu Lapainea i dr. (2014) dovode do odstupanja u vrijednostima koje su dobivene za koordinate presjecišta.

5.11. Određivanje mjerila karte *Carte de l'État de l'Église*

U donjem lijevom kutu karte nalaze se tri grafička mjerila (slika 5.47.) na kojima su jedinične mjere za duljine u talijanskoj milji (*Miles d'Italie*), francuskoj ligi (*Lieue communes de France*) te ligi (*Lieue*). S obzirom na to da brojčano mjerilo nije naznačeno na karti, ono se izvodi iz grafičkog mjerila pri čemu je potrebno znati duljinu jedne od zadanih milja i duljinu luka jednog stupnja meridijana.



Slika 5.47. Grafička mjerila na karti *Carte de l'État de l'Église*

Vrijednost duljine jednog stupnja meridijana od 56 979 francuskih hvata (111,052 km) koju su Maire i Bošković izračunali 15 godina prije upotrijebila sam za računanje numeričkog mjerila. Uz svako grafičko mjerilo piše koliki dio duljine stupnja meridijana iznosi određena milja. Primjenom izraza (5.14)

$$m = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{S}}$$

može se izračunati koliko iznosi pojedina milja, gdje je m duljina milje (treći stupac, tablica 5.13.), L duljina luka jednog stupnja meridijana (111,052 km), a S dio duljine luka stupnja meridijana (drugi stupac, tablica 5.13.). U tablici 5.14. u trećem stupcu prikazane su izračunate vrijednosti milja.

Tablica 5.14. Duljine milja i mjerila na karti *Carte de l'État de l'Église* izračunati iz grafičkih mjerila

Naziv milje	Dio duljine luka stupnja meridijana, S	Duljina milje, m [km]	Srednja duljina milje na grafičkom mjerilu, N [mm]	Mjerilo (zaokruženo)
Talijanska milja	60	1,851	1,65	1 122 000
Francuska liga	25	4,442	3,96	1 122 000
Liga	20	5,553	4,95	1 122 000
			$\sum/n$	1 122 000

Na temelju grafičkih mjerila, mjerenja duljina dužine milje na grafičkim mjerilima te duljine milja dobivenih formulom (5.14) izračunala sam numerička mjerila, čije su zaokružene vrijednosti prikazane u četvrtom stupcu tablice 5.14. Iz zadnjeg stupca u tablici 5.14. možemo zaključiti da numeričko mjerilo karte zaokruženo iznosi 1:1 122 000.

5.12. Provjera hipoteze o uspravnoj ekvidistantnoj konusnoj projekciji na karti *Carte de l'État de l'Église*

Carte de l'État de l'Église objavljena je 1770. godine u sklopu knjige *Voyage astronomique*… (Maire i Boscovich 1770). U Napomeni (*Avertissement*) koja se nalazi u gornjem kutu karte piše da je karta nastala kopiranjem karte Mairea i Boškovića iz 1755. godine i to reduciranjem mjerila na trećinu. Podaci o projekciji u kojoj je *Carte de l'État de l'Église* izrađena nisu dani. Kartografska mreža na karti nije nacrtana.

Teško je vjerovati da je karta izrađena u različitoj projekciji u kojoj je izrađena karta iz 1755. godine. U ovom poglavlju doktorskog rada pokušat ću dokazati da je *Carte de l'État de l'Église* izrađena u uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana kao i *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*.

Ispitivanje postavljene hipoteze temeljit će se na usporedbi položaja gradova na obje karte, s obzirom na činjenicu da kartografska mreža nije ucrtana na karti *Carte de l'État de l'Église*. Zbog toga neću moći dokazivati pravocrtnost ili kružnost meridijana i paralela postupkom koji je opisan na primjeru karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.*

Znamo da je mjerilo karte reducirano na trećinu. Iz grafičkih mjerila te iz poznate duljine luka 1° meridijana i radijusa sfere procijenila sam mjerilo u kojem je *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* izrađena i ono iznosi 1:370 000. Iz grafičkih mjerila na *Carte de l'État de l'Église* procijenila sam mjerilo karte 1:1 122 000. Podijelimo li vrijednosti tih dvaju mjerila dobijemo da je *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* izrađena u mjerilu približno 3,03 puta krupnijem od *Carte de l'État de l'Église,* čime sam potvrdila tvrdnju da je mjerilo karte iz 1770. godine reducirano na trećinu u odnosu na mjerilo karte iz 1755. godine.

Da bih mogla usporediti položaj gradova na obje karte, potrebno je karte međusobno preklopiti. Dakle, potrebno je kartu iz 1755. smanjiti za približno 30,3% s obzirom na razliku mjerila. Međutim, da bih odredila postotak za koji moram smanjiti kartu iz 1755., potrebna je neka udaljenost koja se može izmjeriti ili izračunati za obje karte.

Računanjem omjera tih dviju veličina mogu izračunati za koji postotak treba smanjiti kartu iz 1755.

Najsigurnija udaljenost koju mogu odrediti na obje karte, pod pretpostavkom da su u jednakom omjeru, udaljenosti su na podjeli geografskih širina ili geografskih dužina koje se nalaze na rubu karte. Računanjem omjera dobila sam da kartu iz 1755. treba smanjiti za 32,7%.

Spojeni listovi karte iz 1755. i list karte iz 1770., u originalnoj veličini, učitani su u program (nanoCAD) koji podržava rasterski format podataka, a namijenjen je ponajprije za vektorsku grafiku. Donji lijevi rub karata postavljen je u ishodište koordinatnog sustava radnog prostora nanoCAD-a, a odabrana je mjerna jedinica metar. Iscrtavanjem linije srednjeg meridijana na karti iz 1770., koji bi trebao biti ravna crta paralelna s ordinatnom osi radnog prostora nanoCAD-a, primijetila sam da je karta zarotirana za 0,7° u obrnutom smjeru od kazaljke na satu u odnosu na ordinatnu os koordinatnog sustava. Kartu iz 1755. zarotirala sam za, već prije ustanovljenih, 0,25° u obrnutom smjeru od kazaljke na satu. Potom sam kartu iz 1755. smanjila za 32,7%. Karte sam preklopila u odnosu na srednji meridijan i podjelu geografskih širina koje su nacrtane na rubovima karte.

Pravokutne koordinate (x, y) u lokalnom koordinatnom sustavu za 50 gradova očitala sam na preklopljenim kartama (vidi tablica 5.15.). Usporedbom pravokutnih koordinata na obje karte mogu odrediti njihova odstupanja te procijeniti jesu li ta odstupanja dovoljno mala da bih potvrdila pretpostavku da je *Carte de l'État de l'Église* izrađena u istoj projekciji u kojoj je i *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*.

Pravokutne koordinate za 50 gradova s karata prikazane su u tablici 5.15.

Odstupanje položaja (tablica 5.15.) gradova na kartama računala sam prema formuli (5.113)

$$d_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \ .$$

Srednje odstupanje položaja gradova na kartama iznosi 1,1 mm. Položaj grada Fermo najviše odstupa (2,5 mm) usporedimo li njegov položaj na karti iz 1755. i 1770., dok najmanje odstupa položaj grada Ravenna (0,1 mm). Vrijednost srednjeg odstupanja ukazuje na činjenicu da je *Carte de l'État de l'Église* vjerojatno izrađena u uspravnoj

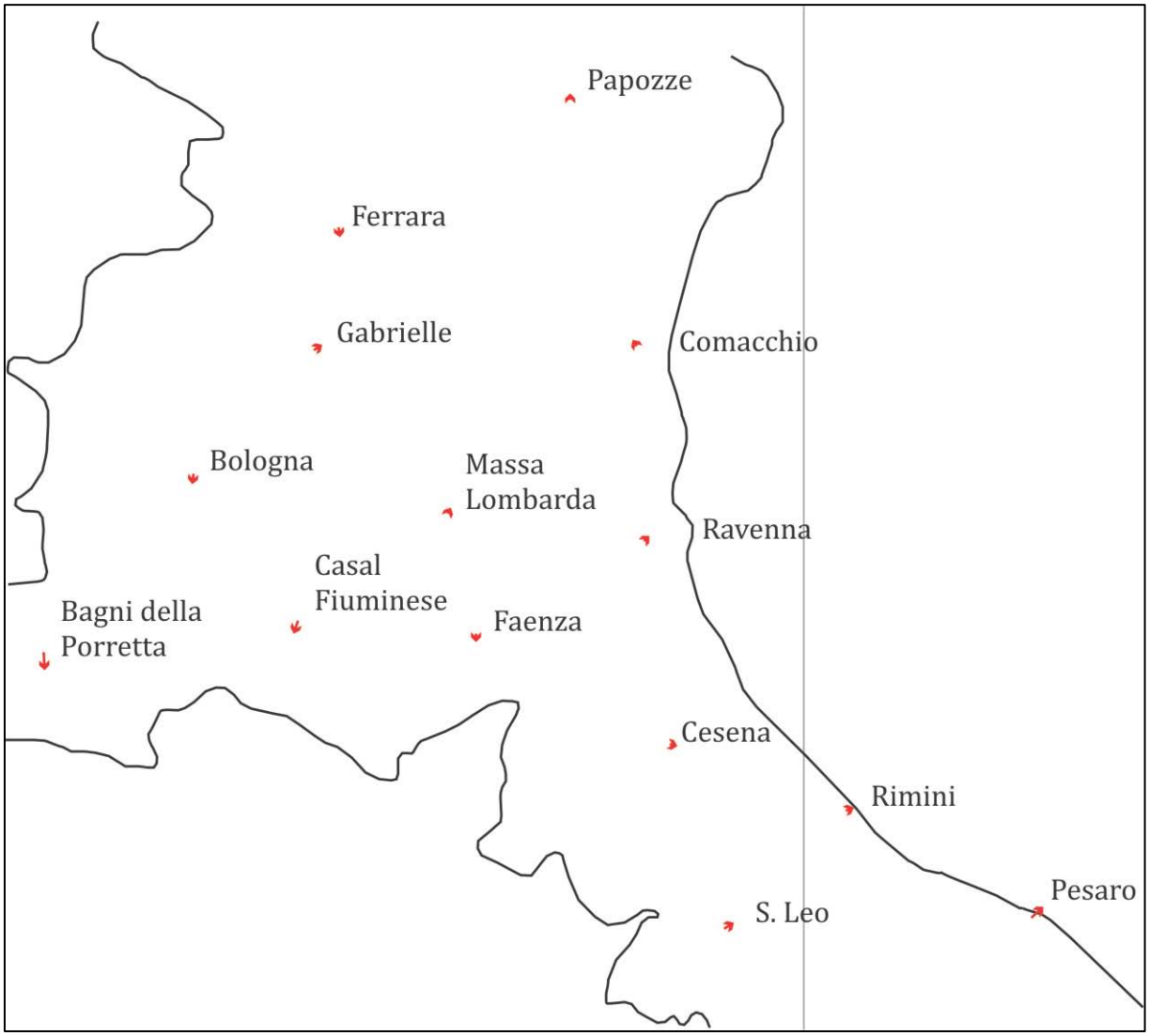
ekvidistantnoj konusnoj projekciji kao i *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* jer ono zadovoljava traženu razinu točnosti procjene *a priori* definirane u poglavlju 5.2.3.

Tablica 5.15. Koordinate položaja gradova na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* iz 1755. i karti *Carte de l'État de l'Église* iz 1770., koordinatne razlike i njihovo odstupanje

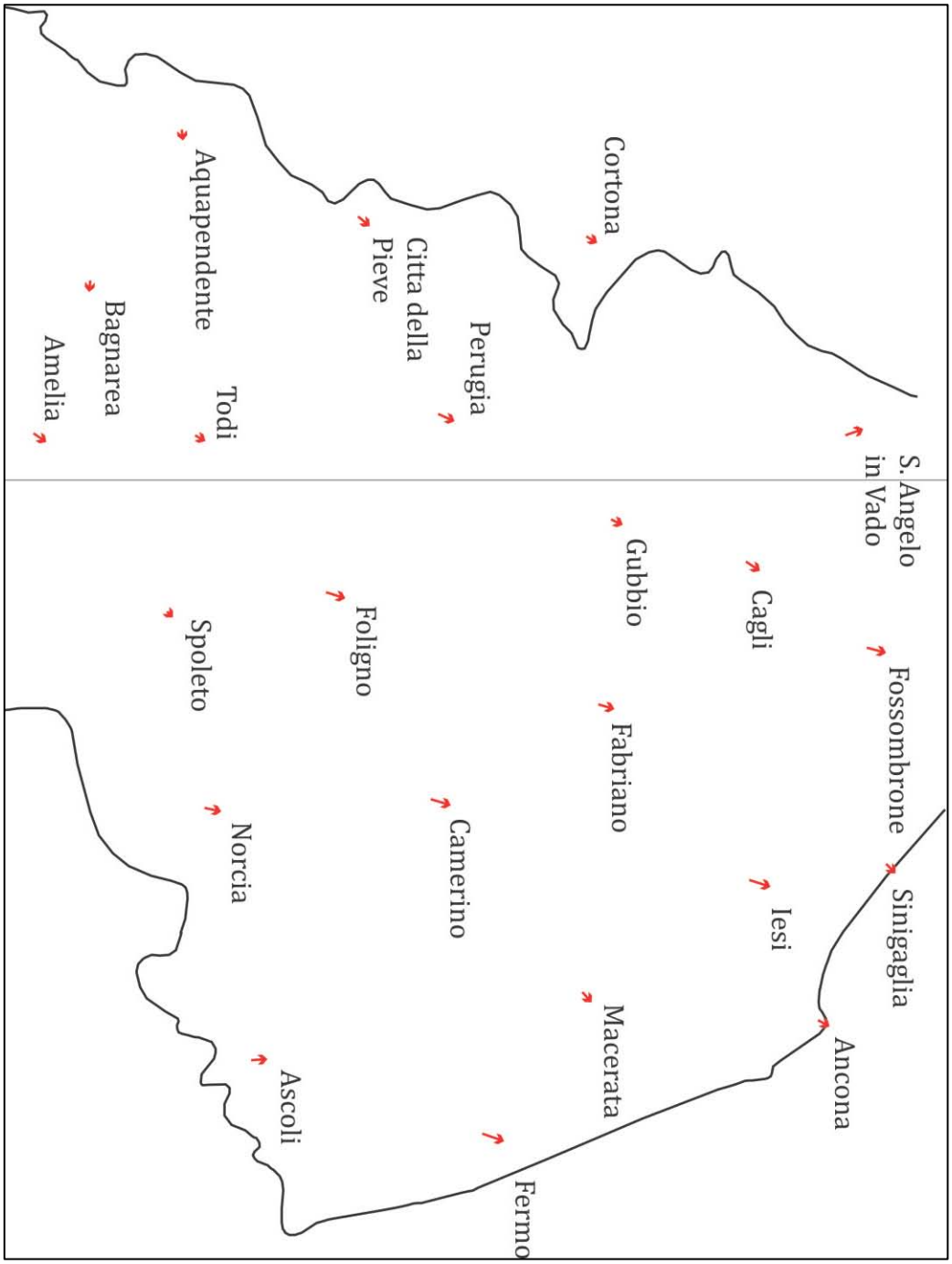
Grad	**Položaj grada na karti iz 1755.**		**Položaj grada na karti iz 1770.**		Δx_i **[m]**	Δy_i **[m]**	d_i **[m]**
	x_i **[m]**	y_i **[m]**	x_i **[m]**	y_i **[m]**			
Terracina	0,1809	0,0347	0,1805	0,0362	0,0004	–0,0015	0,0016
Piperno	0,1764	0,0513	0,1760	0,0529	0,0004	–0,0016	0,0016
Veroli	0,1942	0,0732	0,1948	0,0743	–0,0006	–0,0011	0,0013
Velletri	0,1465	0,0720	0,1468	0,0730	–0,0003	–0,0010	0,0010
Palestrina	0,1546	0,0866	0,1546	0,0878	0,0000	–0,0012	0,0012
Tivoli	0,1488	0,0994	0,1488	0,1004	0,0000	–0,0010	0,0010
Roma	0,1255	0,0924	0,1254	0,0928	0,0001	–0,0004	0,0004
Civita Vecchia	0,0726	0,1124	0,0733	0,1122	–0,0007	0,0002	0,0007
Civita Castellana	0,1194	0,1312	0,1201	0,1319	–0,0007	–0,0007	0,0010
Rieti	0,1526	0,1431	0,1525	0,1437	0,0001	–0,0006	0,0006
Toscanella	0,0803	0,1439	0,0806	0,1439	–0,0003	0,0000	0,0003
Orbetello	0,0348	0,1461	0,0358	0,1461	–0,0010	0,0000	0,0010
Bagnarea	0,0989	0,1666	0,0998	0,1665	–0,0009	0,0001	0,0009
Amelia	0,1194	0,1589	0,1202	0,1601	–0,0008	–0,0012	0,0014
Aquapendente	0,0786	0,1788	0,0794	0,1789	–0,0008	–0,0001	0,0008
Spoleto	0,1434	0,1769	0,1437	0,1772	–0,0003	–0,0003	0,0004
Norcia	0,1698	0,1819	0,1701	0,1835	–0,0003	–0,0016	0,0016
Ascoli	0,2037	0,1882	0,2036	0,1897	0,0001	–0,0015	0,0015
Fermo	0,2136	0,2192	0,2145	0,2215	–0,0009	–0,0023	0,0025
Camerino	0,1686	0,2123	0,1692	0,2144	–0,0006	–0,0021	0,0022
Perugia	0,1169	0,2133	0,1175	0,2149	–0,0006	–0,0016	0,0017
Citta della Pieve	0,0902	0,2025	0,0911	0,2036	–0,0009	–0,0011	0,0014
Gubbio	0,1310	0,2365	0,1314	0,2376	–0,0004	–0,0011	0,0012

Grad	Položaj grada na karti iz 1755.		Položaj grada na karti iz 1770.		Δx_i [m]	Δy_i [m]	d_i [m]
	x_i [m]	y_i [m]	x_i [m]	y_i [m]			
Macerata	0,1946	0,2327	0,1955	0,2335	–0,0009	–0,0008	0,0012
Fabriano	0,1559	0,2349	0,1563	0,2364	–0,0004	–0,0015	0,0016
Cortona	0,0930	0,2332	0,0935	0,2342	–0,0005	–0,0010	0,0011
Todi	0,1197	0,1806	0,1201	0,1815	–0,0004	–0,0009	0,0010
Foligno	0,1408	0,1982	0,1414	0,2002	–0,0006	–0,0020	0,0021
Ancona	0,1983	0,2644	0,1989	0,2654	–0,0006	–0,0010	0,0012
Iesi	0,1795	0,2551	0,1802	0,2574	–0,0007	–0,0023	0,0024
Cagli	0,1367	0,2547	0,1376	0,2560	–0,0009	–0,0013	0,0016
S. Angelo in Vado	0,1197	0,2680	0,1190	0,2699	0,0007	–0,0019	0,0020
Fossombrone	0,1482	0,2709	0,1488	0,2729	–0,0006	–0,0020	0,0021
Sinigaglia	0,1773	0,2735	0,1781	0,2743	–0,0008	–0,0008	0,0011
Pesaro	0,1554	0,2933	0,1565	0,2942	–0,0011	–0,0009	0,0014
S. Leo	0,1153	0,2917	0,1160	0,2922	–0,0007	-0,0005	0,0009
Rimini	0,1312	0,3072	0,1316	0,3074	–0,0004	–0,0002	0,0004
Cesena	0,1082	0,3159	0,1086	0,3158	–0,0004	0,0001	0,0004
Faenza	0,0829	0,3303	0,0828	0,3299	0,0001	0,0004	0,0004
Ravenna	0,1050	0,3426	0,1051	0,3427	–0,0001	–0,0001	0,0001
Bagni della Porretta	0,0264	0,3279	0,0265	0,3263	–0,0001	0,0016	0,0016
Bologna	0,0460	0,3513	0,0459	0,3506	0,0001	0,0007	0,0007
Comacchio	0,1039	0,3680	0,1037	0,3682	0,0002	–0,0002	0,0003
Ferrara	0,0649	0,3835	0,0651	0,3823	–0,0002	0,0012	0,0012
Papozze	0,0952	0,4002	0,0952	0,4006	0,0000	–0,0004	0,0004
Gabrielle	0,0617	0,3674	0,0622	0,3678	–0,0005	–0,0004	0,0006
Massa Lombarda	0,0792	0,3461	0,0793	0,3463	–0,0001	–0,0002	0,0002
Oriuolo	0,1000	0,1187	0,1005	0,1191	–0,0005	–0,0004	0,0006
M. Leone	0,1525	0,1256	0,1533	0,1270	–0,0008	–0,0014	0,0016
Casal Fiuminese	0,0596	0,3321	0,0592	0,3310	0,0004	0,0011	0,0012
						$\sum d_i / n$	0,0011

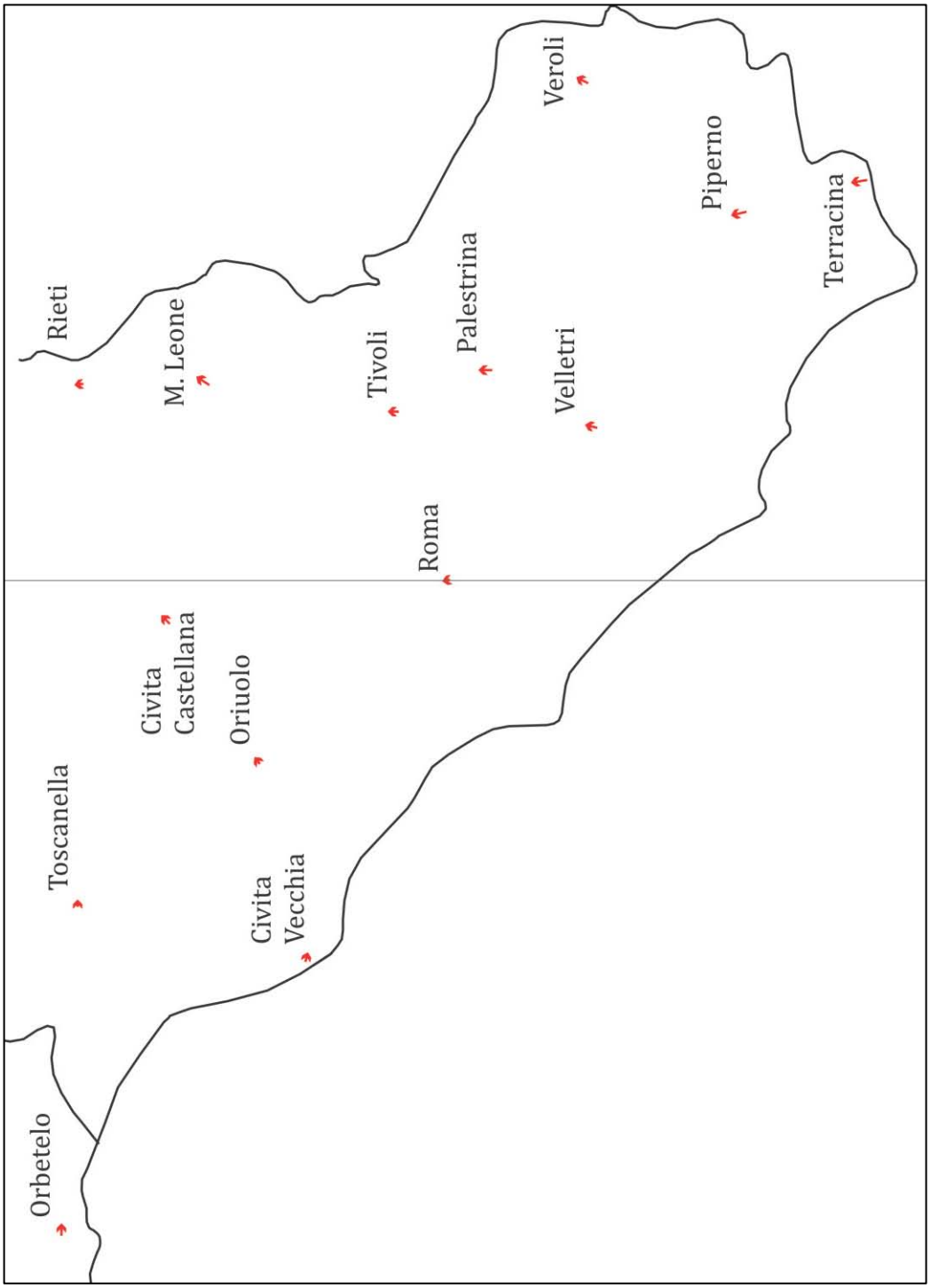
Na slikama 5.48., 5.49. i 5.50. prikazana su odstupanja položaja gradova na kartama *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église.* Iznosi vektora pomaka na tim slikama u stvarnim su veličinama u mjerilu karte 1:1 122 000.



Slika 5.48. Vektori pomaka (odstupanja) položaja gradova na kartama *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église*. Prikazano je područje prvog (sjevernog) lista *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* u smanjenom mjerilu oko 1:1 122 000. Vektori pomaka su u stvarnim veličinama na karti i mjerilu 1:1 122 000.



Slika 5.49. Vektori pomaka (odstupanja) položaja gradova na kartama *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église*. Prikazano je područje drugog (srednjeg) lista *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* u smanjenom mjerilu oko 1:1 122 000. Vektori pomaka su u stvarnim veličinama na karti i mjerilu 1:1 122 000.



Slika 5.50. Vektori pomaka (odstupanja) položaja gradova na kartama *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église*. Prikazano je područje trećeg (južnog) lista *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* u smanjenom mjerilu oko 1:1 122 000. Vektori pomaka su u stvarnim veličinama na karti i mjerilu 1:1 122 000.

Primjenom izraza

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1}} \tag{5.115}$$

možemo izračunati standardno odstupanje da bismo procijenili preciznost precrtavanja položaja gradova s karte iz 1755. na kartu iz 1770. godine. Standardno odstupanje izračunato izrazom (5.115) iznosi 0,6 mm.

Iz dobivenih razlika koordinata mogu se izračunati i srednja kvadratna odstupanja po koordinatnim osima primjenom izraza

$$\begin{aligned} m_x &= \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}{n}} \\ m_y &= \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta y_i^2}{n}}. \end{aligned} \tag{5.116}$$

Uz pomoć srednjih kvadratnih odstupanja po koordinatnim osima izračunatih primjenom izraza (5.116) možemo odrediti apsolutno srednje kvadratno odstupanje izrazom

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}\,. \tag{5.117}$$

Srednja kvadratna odstupanja po koordinatnim osima primjenom izraza (5.116) iznose $m_x = \pm 0{,}6$ mm i $m_y = \pm 1{,}1$ mm. Primjećujemo da je srednje kvadratno odstupanje po *y* osi izraženije od srednjeg odstupanja po *x* osi. Apsolutno srednje kvadratno odstupanje iznosi $M = \pm 1{,}3$ mm, koje opet zadovoljava traženu razinu točnosti procjene *a priori.*

Detaljan postupak računanja svih opisanih odstupanja priložen je u ovom doktorskom radu u prilogu 12 na odgovarajućem CD-u.

6. SMJERNICE ZA BUDUĆA ISTRAŽIVANJA

Unutar okvira karte u desnom gornjem kutu *Carte de l'État de l'Église* iz 1770. godine nalazi se kartuša s Napomenom (*Avertissement*) u kojoj piše „… *Karta je općenito točna i više nego što se otac Bošković usudio pomišljati. Naime, gospodin barun de St. Odil, toskanski ministar u Rimu, koji izuzetno poznaje Papinsku Državu, sa sigurnošću tvrdi da tijekom svojih raznih putovanja nije primijetio niti jednu osjetnu pogrešku u položajima mjesta koja je obišao…".*

Da bi karte bile geometrijski pouzdan izvor informacija, moraju što točnije predstavljati prikazano područje. Često karte nisu bile crtane s namjerom prikazivanja geometrijskih položaja s najvećom mogućom točnosti, jer na mnogim tim kartama precizna geometrija nije bila nužno potrebna ili je područje bilo namjerno deformirano kako bi se grafički naglasilo određeno područje.

Prije korištenja informacija koje se nalaze na starim kartama za npr. povijesna istraživanja, potrebno je procijeniti njihovu točnost. U radu Blakemorea i Harleya (1980) autori navode tri različita aspekta koja bi se trebala procijeniti. Prvi je aspekt topografska točnost koja označava količinu i kvalitetu informacija o objektima krajolika prikazanog na kartama. Svaka karta sadrži samo određene geografska obilježja koja su odabrana i kartograf ih je prikazao u skladu sa svrhom karte. Prilikom određivanja topografske točnosti postavlja se pitanje jesu li svi objekti pojedine klase prikazani na karti i koliko ih je kartograf točno tematski klasificirao. Drugi je aspekt kronometrijska točnost, tj. datiranje karte i informacija koje su prikazane na karti. Treći je aspekt geometrijska točnost. Laxton (1976) razlikuje geodetsku točnost i planimetrijsku točnost. Geodetska točnost opisuje točnost smještaja karte u odnosu na globalni koordinatni sustav, odnosno točnost matematičke osnove karte koja se proučava, kao što su početni meridijan, kartografska projekcija ili matematički model (elipsoid, sfera) kojim se aproksimira Zemljin oblik. Planimetrijska točnost – stupanj do kojeg udaljenosti i odnosi između objekata koji se mogu identificirati koincidiraju s njihovim stvarnim vrijednostima – određuje se usporedbom položaja, udaljenosti, površina i kutova objekata na karti i u prirodi.

U ovom doktorskom radu procijenjena je samo geodetska točnost karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, i to u 5. poglavlju. Za buduća istraživanja predlažem da se procijeni točnost karata Papinske Države ostalim aspektima koje navode Blakemore i Harley (1980).

Znamo da su na kartama Papinske Države samo položaji mjesta mjereni preciznim geodetskim metodama, dok je ostali sadržaj precrtavan s drugih, već postojećih karata. Prilikom procjene točnosti karata Papinske Države sadržaj karte potrebno je odvojeno analizirati upravo prema navedenim obilježjima. Za buduća istraživanja predlažem da se posebno ocijeni točnost izmjerenih i kartiranih položaja gradova, dok je točnost ostalog sadržaja karte, poput rijeka, prometnica i općeg pružanja planina, potrebno procjenjivati zasebno.

U trećem poglavlju ovog doktorskog rada dan je pregled mogućih kartografskih izvora iz kojih su Maire i Bošković preuzeli veći dio sadržaja prikazanog na karti iz 1755. U trećem dijelu knjige *De Litteraria…* (Maire i Boscovich 1755) ne može se pročitati iz kojih su izvora taj sadržaj preuzeli, međutim može se pročitati da su se služili kartama s kraja 17. stoljeća, u to doba novijim, kao i kartama koje su još bile u izradi. U budućim istraživanjima potrebno je ispitati s kojih je od navedenih karata u poglavlju 3.1.2. preuzet sadržaj na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*. Da bi se istražili kartografski izvori potrebno je prvo te karte nabaviti, a potom provesti sustavnu usporedbu nacrtanog sadržaja karte.

Nadalje, potrebno je i planimetrijski procijeniti točnost Boškovićevih i Maireovih karata Papinske Države. Planimetrijsku točnost stare (povijesne) karte Blakemore i Harley (1980) definirali su kao mjeru do koje se udaljenosti i položaj između objekata, koji se mogu identificirati na karti, preklapaju s njihovom stvarnom vrijednosti odnosno položajem.

S obzirom na to da su Maire i Bošković na kraju trećeg dijela svoje knjige *De Litteraria…* (Maire i Boscovich 1755) dali tablicu s popisom geografskih koordinata za 84 grada, mogle bi se te geografske koordinate usporediti s danas poznatim suvremenim koordinatama tih gradova. Usporedbom koordinata i izračunom srednjeg apsolutnog i srednjega kvadratnog odstupanja mogla bi se procijeniti planimetrijska točnost izmjerenih i kartiranih gradova na kartama.

S obzirom na to da se smatra da je *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* prva točna karta Papinske Države koja je izrađena na temelju mjerenja, nedvojbeno je da je ona bila izvor pri izradi i drugih karata koje prikazuju to područje. Stoga se uz procjenu točnosti karata Papinske Države, koje su tema ovog doktorskog rada, također mogu istražiti i srodne karte koje su izrađene prema karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* ili su izrađene na osnovi Boškovićevih i Maireovih mjerenja. Tijekom istraživanja za potrebe doktorskog rada došla sam do saznanja da je karta *Nouvelle carte de l'Etat de l'Eglise* jedna od karata nacrtanih na temelju Boškovićeve i Maireove karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Karta se sastoji od tri lista koji su uvezani u atlas P. Santinija. Istraživanjem sam utvrdila da se jedan primjerak Santinijeva atlasa čuva u Gradskome muzeju Trogir. Nacionalna i sveučilišna knjižnica u Zagrebu također posjeduje tri lista iz Santinijeva atlasa, ali uvidom u te listove utvrdila sam da oni nisu iz istog izdanja atlasa. U budućim istraživanjima bit će potrebno provesti analizu karte *Nouvelle carte de l'Etat de l'Eglise* P. Santinija kako bi se utvrdilo je li ona kopija karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* s obzirom na to da su listovi karata približnih dimenzija i izrađeni u približno istome mjerilu.

U budućim istraživanjima bit će potrebno odgovoriti na još neka pitanja koja su ostala otvorena nakon dosadašnjih istraživanja. Prvo pitanje odnosi se na autorstvo karte *Carte de l'État de l'Église*, koja je objavljena i uvezana u knjigu *Voyage astronomique...* (Maire i Boscovich 1770). Maire je umro tri godine prije izdavanja knjige *Voyage astronomique...*, a Bošković u vrijeme njezina izdanja nije boravio u Parizu. Marković (1968) navodi kako je brigu oko izdavanja knjige *Voyage astronomique…* preuzeo La Condamine, Boškovićev prijatelj.

Drugo je pitanje koja je veza između formula (4.48) i (4.49), iz poglavlja 4.6.2., koje je Bošković primjenjivao za računanje spljoštenosti, s formulama (4.41), (4.42) i (4.46), iz poglavlja 4.6.1. ovog doktorskog rada, koje mi danas upotrebljavamo za računanje parametara elipsoida.

7. ZAKLJUČAK

Na temelju rezultata provedenih istraživanja u ovom doktorskom radu mogu se donijeti sljedeći zaključci.

1. **Autori karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico,* koja je izdana 1755. godine, su Christopher Maire i Josip Ruđer Bošković.**

U sklopu trećeg dijela knjige *De litteraria…* (Maire i Boscovich 1755), koji je napisao Maire, jasno se može vidjeti da je kartu nacrtao Maire iz podataka koje su Maire i Bošković prikupili tijekom geodetske izmjere da bi odredili duljinu luka meridijana između Rima i Riminija. U sažetku Bolonjskoj akademiji (Boscovich 1757) Bošković izričito navodi da je Maire nacrtao kartu. Iz posvete uz naslov karte koji je napisan u kartuši može se potvrditi da je autor karte Maire. Ista rečenica može se pronaći i u kartuši koja se nalazi na prvom listu u desnom kutu karte.

Bošković je predložio, organizirao i vodio izmjeru za potrebe određivanja duljine luka meridijana između Rima i Riminija i za potrebe izrade nove karte toga područja pa stoga Boškovića možemo smatrati koautorom te karte.

2. **Kartu *Carte de l'État de l'Église*, koja je izdana 1770. godine, vjerojatno nisu izradili ni Josip Ruđer Bošković ni Christopher Maire.**

Iako ne raspolažem točnim informacijama o tome tko je izradio *Carte de l'État de l'Église*, mogu sa sigurnošću tvrditi da ju nije izradio Ch. Maire jer je umro tri godine prije izdavanja knjige *Voyage astronomique...* (Maire i Boscovich 1770), a Bošković u vrijeme njezina izdanja nije boravio u Parizu. Međutim, ta je karta nastala smanjivanjem i generalizacijom sadržaja karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* pa smatram da je unatoč navedenim podacima ispravno kao moguće autore navoditi Mairea i Boškovića dok se ne utvrdi stvarni autor ili autori.

3. *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église* nisu izrađene u poliedarskoj projekciji.

Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico i *Carte de l'État de l'Église* izrađene su u uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana. Primjenom metode euklidskih udaljenosti dokazala sam da su meridijani nacrtani na karti pravci, a paralele lukovi koncentričnih kružnica. Računajući udaljenosti između paralela uzduž meridijana dokazala sam da je projekcija ekvidistantna uzduž meridijana, dok sam računajući koeficijent proporcionalnosti *k*, odnosno kut pod kojim se sijeku meridijani, dokazala da je karta izrađena u konusnoj projekciji.

Ispitivanje postavljene hipoteze da je *Carte de l'État de l'Église* izrađena u uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana temeljilo se na usporedbi položaja gradova na obje karte, s obzirom na činjenicu da kartografska mreža nije nacrtana na *Carte de l'État de l'Église*. Dobivena vrijednost srednjeg odstupanja u položajima gradova na obje karte od 1,1 mm, koja je manja od zadane razine točnosti procjene *a priori* od 2 mm, upućuje na činjenicu da je *Carte de l'État de l'Église* vjerojatno izrađena u istoj uspravnoj ekvidistantnoj konusnoj projekciji kao i *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.*

4. Boškovićeve i Maireove karte ne temelje se na Zemljinu elipsoidu

Primjenom formula uspravne ekvidistantne konusne projekcije i izračunatih parametara projekcije u kojoj je izrađena *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* ,izračunala sam teorijske pravokutne koordinate kartografske mreže. Iz tih koordinata izračunala sam udaljenosti između paralela uzduž srednjeg meridijana za sferu i meridijan u mjerilu karte. Udaljenosti između paralela dobivenih za sferu i elipsoid vrlo malo se razlikuju. Iz koordinata presjeka mreže meridijana i paralela nacrtanih na karti izračunala sam udaljenosti između paralela na karti. Udaljenosti između paralela izračunatih iz koordinata s karte ne prate trend povećanja udaljenosti povećanjem geografske širine. Područje prikazano na kartama nije površinski veliko. S obzirom na to da spljoštenost elipsoida na manjim područjima ne utječe znatno na točnost karte, vjerojatno su Maire i Bošković preslikavali u ravninu projekcije sferu, a ne elipsoid.

5. Geografske dužine na kartama Papinske Države određene su u odnosu na početni meridijan Ferro

Otok Ferro u Kanarskom otočju Bošković i Maire su definirali kao početni meridijan od kojeg su određene geografske dužine. Taj podatak može se pronaći u kartuši na prvom listu karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, kao i u kartuši s napomenom i naslovom na *Carte de l'État de l'Église*. Tu tvrdnju potvrdila sam i usporedbom geografskih dužina srednjeg meridijana preslikavanja na kartama, koji prolazi kroz Rim ($\lambda_0 = 30°$), i danas poznate geografske dužine grada Rima ($\lambda = 12°30'$). Razlika geografskih dužina daje kut od $\Delta\lambda = 17°30'$. Iako danas ne možemo sa sigurnošću tvrditi kroz koju je točno točku na otoku Ferro prolazio početni meridijan, općenito se smatra da je razlika između Ferra i Greenwicha oko 17°40'.

6. Položaji gradova na kartama Papinske Države točniji su od položaja gradova na prethodnim kartama

Glavna zadaća koju su si Maire i Bošković postavili prilikom izrade karte nije bila nacrtati topografsku kartu već popraviti što je bolje moguće mnoge pogreške u položaju gradova kojima su bile opterećene karte Papinske Države objavljene do tog vremena. Taj su cilj autori i ostvarili jer su odredili točan položaj svih gradova, gotovo svih mjesta, veći dio dvoraca te mnogih manjih naselja koja su se nalazila na području tadašnje Papinske Države. Maire i Bošković su tijekom svojeg putovanja često nailazili na manja naselja koja na dotadašnjim kartama nisu postojala. Stoga su vodili veliku brigu oko toga da prikupe što više položaja naselja kroz koja su prolazili. Metode mjerenja koje su Bošković i Maire primjenjivali tijekom svojih opažanja i danas se primjenjuju u geodeziji ako izuzmemo novije GPS metode mjerenja te metode daljinskih istraživanja. U to doba to su bile najtočnije metode određivanja položaja objekata na Zemlji. Bošković je unaprijedio mjerne instrumente i metode za geodetska i astronomska mjerenja nastojeći na taj način što više smanjiti utjecaj pogrešaka koje bi mogle nastati tijekom mjerenja i dobiti bolje rezultate od svojih suvremenika, a posebno prethodnika.

Iz svega toga mogu zaključiti da su duljina luka meridijana kao i položaji gradova koji su mjereni za potrebe izrade karte, određeni točnije od položaja određenih metodama i instrumentima koji su prije korišteni za mjerenja. Samim time je i karta *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* točnija od prethodnih karata izrađenih u to doba.

Popis literature

Abakumov, N. (1950): Astronomsko-geodetski radovi Ruđera Boškovića, Almanah Bošković, Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, 192–199.

Almagià, R. (1960): *Documenti cartografici dello Stato Pontificio,* Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana.

Bayer, T. (2013): Estimation of an Unknown Map Projection and its Parameters from the Map. Proceedings ICC 2013, From pole to pole, 26th International Cartographic Conference, August 25–30, 2013, Dresden, Germany.

Beccaria, G. B. (1774): Gradus Taurinensis, Typographia Regia, 1774.

Bevis, J., Liesganig, J. (1765): A Letter from John Bevis, M. D. to the Rev. Thomas Birch, D. D. Secretary to the Royal Society; Containing Astronomical Observations, Made at Vienna, by the Rev. Father Joseph Liesganig. The Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 55, London, 130–138.

Bialas, V. (1982): Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung. Konrad Wittwer, Stuttgart.

Blakemore, M. J., Harley, J. B. (1980): Concepts in the History of Cartography: A Review and Perspective. Cartographica Monograph 26, Toronto: University of Toronto Press.

Borčić, B. (1955): Matematička kartografija, Kartografske projekcije, Tehnička knjiga, Zagreb.

Borčić, B. (1964–65): Karta Crkvene države u djelu Ruđera Boškovića »De litteraria expeditione per pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam«, Almanah Bošković, Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, 185–196.

Boscovich, J. R. (1739): Dissertatio de telluris figura: habita in seminario romano Soc. Jesu: [cum tabula]. Typis Antonii de Rubeis, Rim.

Boscovich, R. J. (1757): De litteraria expeditione per pontificiam ditionem. De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii, Tomus Quartus, 353–394. Typis Laelii a Vulpe Instituti Scientiarum Typographi, Bononiae.

Bouguer, P., La Condamine, C. M. (1749): La figure de la terre: déterminée par les observations de messieurs Bouguer, et de la Condamine, de l'Académie Royale des Sciences, envoyés par ordre du roy au Pérou, pour observer aux environs de l'equateur ; avec une relation abregée de ce voyage, qui contient la description du pays dans lequel les opérations ont été faites, Charles-Antoine Jombert, Pariz.

Bronštejn, I. N., Semendjajev, K. A. (1964): Matematički priručnik. Tehnička knjiga, Zagreb.

Butterfield, A. D. (1906): A History of the Determination of the Figure of the Earth from Arc Measurements, Worcester.

Cassini de Thury, C. F., Monnier, L. G. (1744): La méridienne de l'observatoire royal de Paris vérifiée dans toute l'étendue du royaume par de nouvelles observations: avec des observations d'histoire naturelle, faites dans les provinces traversées par la méridienne par LeMonnier, Guerin.

Chiacchella, R., Rossi, G. F. (1983): L'uomo e la storia. Studi storici in onore di Massimo Petrocchi, Volume 1. Edizioni di Storia e Letteratura, Rome.

Close, C. F. (1905): Text Book of Topographical and Geographical Surveying, Harrison and Sons, London.

Close, C. F., Clarke, A. R. (1911): Map Projections, Encyclopaedia Britannica, 11th ed., Vol. 17, 653–663.

Collins, J. (1671): A Solution, Given by Mr. John Collins of a Chorographical Probleme, Proposed by Richard Townley Esq. Who Doubtless Hath Solved the Same Otherwise, Philosophical Transactions, Vol. 6, 69–80.

Crippa, B., Forcella, V., Mussio, L. (2013): Boscovich: his geodetic and cartographic studies, Memorie della Societa Astronomica Italiana Supplement, Vol. 23, 75–82.

Čubranić, N. (1961): Geodetski rad Ruđera Boškovića, Zavod za višu geodeziju AGG fakulteta u Zagrebu.

Čubranić, N. (1974): Viša geodezija, II dio. Tehnička knjiga, Zagreb.

Danson, E. (2002): The Work of Charles Mason and Jeremiah Dixon, FIG XXII International Congress, April 19-26, 2002, Washington, D.C. USA, 1–16.

Eisenhart, Ch. (1961): Boscovich and the Combination of Observations. In: Ed. Lancelot Law Whyte: Roger Joseph Boscovich S.J., F.R.S., 1711-1787, Studies in His Life and Work on the 250th Anniversary of His Birth, George Allen & Unwin Ltd., London.

Euler, L. (1777): De projectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii russici usita. Prijevod na njemački u: Drei Abhandlungen über Kartenprojection, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, no. 93, 3–37, Leipzig, Wilhelm Engelmann, 1898. Prijevod na ruski: O geografičeskoj proekcii Delilja, primenennoj na general'noj karte Rossijskoj Imperii, Trudy Petersburgskoj akademii nauk za 1777 g., Tom 1, str. 143–153, u: L. Ejler: Izbrannye kartografičeskie stat'i, Tri stat'i po matematičeskoj kartografii, Izdatel'stvo geodezičeskoj literatury, Moskva.

Farebrother, R. W. (1999): Fitting Linear Relationships: A History of the Calculus of Observations 1750-1900. Springer, New York.

Faričić, J. (2008): Povijesni problem određivanja geografske dužine i odabira početnog meridijana. Geografski horizont, 1, 7–22.

Fiocca, A. (2004): Studi matematici e regolazione delle acque. Annali di Storia delle Università italiane, Vol. 8, 1–22.

Frančula, N. (2000): Kartografske projekcije, skripta, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

Frančula N., Lapaine M. (ur., 2008): Geodetsko-geoinformatički rječnik. Državna geodetska uprava, Zagreb.

Gambara, V., Casati, A., Boscovich, J. R. (1739): De veterum argumentis pro telluris sphaericitate Dissertatio habita in Seminario Romano Soc. Jesu a comite Vincentio de Gambara Academico redivivo, comite Alphonso Casati redivivorum Candidato, Seminarii Romani Convictoribus, Typis Antonii de Rubeis in Via Seminarii Romani.

Glass, I. S. (2012): Nicolas-Louis De La Caille, Astronomer and Geodesist, Oxford University Press, United Kingdom.

Graeve, J. D. (2005): The Belgian Contribution to the 30th Meridian Arc in Africa, From Pharaohs to Geoinformatics, FIG Working Week 2004 and GSDI-8, April 16-21, 2005, Cairo, Egypt, 1–14.

Gregory, G. (1819): A New and Complete Dictionary of Arts and Sciences: Including the Latest Improvement and Discovery and the Present States of Every Branch of Human Knowledge, Vol. 1, Collins and Co., New York.

Hald, A. (2004): A History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713 to 1935. Department of applied mathematics and statistics University of Copenhagen, Copenhagen.

Hinks, A. R. (1912): Map Projections, The University Press, Cambridge.

Howarth, R. J. (2001): A history of regression and related model-fitting in the Earth Sciences (1636?-2000), Natural Resources Research, Vol. 10, No. 4, 241–286.

Hutton, C., Shaw, G., Pearson, R. (1809): Extract of a Letter, Dated Vienna April 4, 1767, from father Joseph Liesganig, Jesuit, to Dr. Bevis, F. R. S. Containing a Short Account of the Measurement of Three Degrees of Latitude under the Meridian of Vienna in English translation. The Philosophical Transactions of the Royal Society of London, from Their Commencement, in 1665, to the Year 1800: 1763-1769, Vol. 12, 497.

Jenny, B., Hurni, L. (2011): Studying cartographic heritage: Analysis and visualization of geometric distortions. Computers & Graphics, 35-2, 402–411.

Jovičić, D., Lapaine, M., Petrović, S. (1982): Prilagođavanje pravca skupu točaka prostora, Geodetski list, 10-12, 260-266.

Kakkuri, J. (2001): Geodetic Research in Finland in the 20th Century, Geophysica, Vol. 37, No.1-2, 33–77.

Kljajić, I., Lapaine, M. (2012): Boškovićeva i Maireova karta Papinske Države, rukopis.

Koenker, R. (2005): Quantile Regression. Econometric Society Monograph, Cambridge University Press, Cambridge.

Kurepa, S. (1975): Matematička analiza, Funkcije više varijabli. Tehnička knjiga, Zagreb.

Kurepa, S. (1978): Uvod u linearnu algebru. Školska knjiga, Zagreb.

Kutleša, S. (2011): Ruđer Josip Bošković. Tehnički muzej, Zagreb.

Lapaine, M. (1989): An Algorithm for the Least-Squares Fitting of a Straight Line to Correlated Observations. Vortragsauszuge: XII. österreichischer Mathematikerkongress, Sektion 10, Angewandte Mathematik. Wien: Österreichische Mathematische Gesellschaft. Vortragsauszug.

Lapaine, M. (1990): Duljina luka meridijana. Geodetski list 4-6, 97–108.

Lapaine, M. (1994): Osnovni geodetski zadaci uzduž meridijana i uzduž paralele na rotacijskom elipsoidu. Geodetski list 1, 43–52.

Lapaine, M., Tutek, Ž., Triplat Horvat, M. (2014): Točnost presjeka naprijed, rukopis.

Laxton, P. (1976): The geodetic and topographical evaluation of English county maps, 1740–1840. The Cartographic Journal, 24, 37–54.

Liesganig, J. (1768): Extract of a Letter, Dated Vienna April 4, 1767, from Father Joseph Liesganig, Jesuit, to Dr. Bevis, F. R. S. Containing a Short Account of the Measurement of Three Degrees of Latitude under the Meridian of Vienna. The Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 85, 15–16.

Macarol, S. (1978): Praktična geodezija, 3. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb.

Maire, C., Boscovich, R. J. (1755): De litteraria expeditione per Pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam jussu, et auspiciis Benedicti XIV. Pont. Max. suscepta a Patribus Societ. Jesu Christophoro Maire et Rogerio Josepho Boscovich, In Typographio Palladis excudebant Nicolaus et Marcus Palearini, Romae.

Maire, C., Boscovich, R. J. (1770): Voyage astronomique et geographique, dans l'État de l'Église, entrepris par l'ordre et sous les auspices du Pape Benoit XIV, Pour mesurer deux dégrés du méridien, & corriger la Carte de l'État ecclésiastique, Par les Pp. Maire & Boscovich de la Compagnie de Jesus, traduit du latin, Augmenté de Notes & d'extraits de nouvelles mesures de dégrés faites en Italie, en Allemagne, en Hongrie & en Amérique, Avec une nouvelle Carte des États du Pape levée géométriquement, N. M. Tilliard, Libraire, Quai des Augustins, à S. Benoît, Paris.

Marini, V. (2012): Immagini, percezioni e realta dell'Umbria tra eta moderna e Contemporanea (secoli XVI–XX). Instituto per la Storia dell'Umbria Contemporanea.

Marković, Ž. (1968): Ruđer Bošković, dio I, JAZU, Zagreb.

Maskelyne, N., Mason, C., Dixon, J. (1769): Introduction to the following observations, made by Messieurs Charles Mason and Jeremiah Dixon, for determining the Length of a Degree of Latitude in the provinces of Maryland and Pennsylvania, in North America. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 58, 270–273.

Mason, C., Dixon, J. (1769): Observations for determining the length of a Degree of Latitude in the provinces of Maryland and Pennsylvania, in North America. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 85, 274–328.

Maupertuis, P. L. M. (1738): La figure de la terre: déterminée par les observations de Messieurs de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier, de l'Académie royale des Sciences, & de M. l'abbé Outhier, correspondant de la même académie, accompagnés de M. Celsius, professeur d'astronomie à Upsal, faites par ordre du Roy au cercle polaire, de l'Imprimerie royale, Paris.

Maupertuis, P. L. M., Clairaut, A. C., Camus, C- E. L., Le Monnier, P. C. (1740): Degré du méridien entre Paris et Amiens déterminé par la mesure de M. Picard et par les observations de MM. de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier,... d'où l'on déduit la figure de la terre par la comparaison de ce degré avec celui qui a été mesuré au cercle polaire, Paris.

Merriman, M. (1881): The Figure of the Earth: An Introduction to Geodesy, J. Wiley and sons, New York.

Miletić Drder, M. (2011): "Nouvelle carte de l'État de l'Église" Ruđera Boškovića i Paola Santinija u Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici u Zagrebu. Kartografija i geoinformacije, No. 16, Vol. 10, 111–117.

Murdoch, P. (1758): On the best Geographical Maps, Philosophical Transactions (of the Royal Society), Vol. 50, No. 2, 553–562.

Nauenberg, M. (2012): The reception of Newton's Principia, dostupno na: http://physics.ucsc.edu/~michael/, (19.12.2012)

Newton, I. (1726): Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Prevedeno, 1846; kao Newton´s Principia the Mathematical Principles of Natural Philosophy, by Sir Isaac Newton; Translated into English by Andrew Motte, ed. Daniel Adee, New York.

Pedley, M. (1993): I Due Valentuomini Indefessi: Christopher Maire and Roger Boscovich and the mapping of the Papal States (1750–l755), Imago Mundi 45, 59–76.

Peterca, M., Radošević, N., Milisavljević, S., Racetin, F. (1974): Kartografija. Vojnogeografski institut, Beograd.

Petrović, S., Lapaine, M., Jovičić, D., Žarinac-Frančula, B. (1983): Prilagođavanje pravca, Zbornik radova 5. međunarodnog simpozija Kompjuter na sveučilištu, Cavtat: Sveučilišni računski centar Zagreb, 529–535.

Pulskamp, R. (2010): Boscovich's Example,
dostupno na:
http://www.cs.xu.edu/math/Sources/Boscovich/boscovich%20problem.pdf (22. 4. 2014)

Rajaković, M., Kljajić, I., Lapaine, M. (2014): Map Projection Reconstruction of a Map by Mercator. Cartography from Pole to Pole. Selected Contributions to the XXVIth International Conference of the ICA, Dresden 2013, Berlin : International Cartographic Association, Springer Heidelberg New York Dordrecht London, 31–44.

Roberti, A. (2000): Gli acquedotti della valle dell'Aniene nella trattatistica archeologica, AEQUA Indagini Storico-Culturali sul Terriotorio Degli Equi, 3.

Sciò, M. (2006): Diego de Revillas nella carte dell'Accademia Britannica di Roma, Il foglio di Lumen, 16, 2–7.

Scott, V. (ed.) (2003): Tooley's Dictionary of Mapmakers, Early World Press.

Senđerđi, J. (1958): Ruđer Bošković, Geodetski list 10–12, 515–517.

Slukan Altić, M. (2012): Exploring along the Rome Meridian - Roger Boscovich and the First Modern Map of the Papal States, 4th International Symposium of the ICA Commisssion on the History of Cartography titled "Exploration, Discovery, Cartography", 28-29.06.2012., Budimpešta, Mađarska.

Slukan Altić, M. (2014): Exploring along the Rome Meridian – Roger Boscovich and the First Modern Map of the Papal States. History of Cartography: Lecture Notes in Geoinfromation and Cartography/Liebenberg, Elri; Collier, Peter; Török, Zsolt (ur.). Heidelberg, New York, Dordrecht, London : Springer Verlag, 71–90.

Smith, J. R. (2002): The Meridian Arc Measurement in Peru 1735 – 1745, FIG XXII Internationa Congress, April 19-26, 2002, Washington, D.C. USA, 1–12.

Smith, J. R. (2005): The Struve Geodetic Arc,
dostupno na: www.fig.net/hsm/struve/struve_arc_smith_2005.pdf

Smith, J. R. (2006): From LaCaille to Gill and the start of the Arc of the 30th Meridian, Shaping the Change, XXIII FIG Congress, October 8-13, 2006, Munich, Germany, 1–17.

Sneeuw, N., Krumm. F. (2010): Lecture Notes Adjustment Theory, Geodäti-sches Institut, Universität Stuttgart.

Snyder, J. P. (1978): Equidistant Conic map projections. Annals of the Association of American Geographers, Vol. 68, No. 3, 373–383.

Snyder, J. R. (1985): Computer-Assisted Map Projection Research. U.S. Geological Survey bulletin; 1629, United States Government Printing Office.

Snyder, J. P. (1987): Map Projections – A Working Manual. U.S. Geological Survey Professional Paper 1395. United States Gorvenment Printing Office, Washington.

Snyder, J. R., Voxland, P. M. (1989): An Album of Map Projections. Washington: U.S. Geological Survey Professional Paper 1453.

Snyder, J. P. (1993): Flattening the Earth, Two Thousand Years of Map Projections, The University of Chicago Press, Chicago, London.

Solarić, M., Solarić, N. (2009): Prvi začeci klasičnih trigonometrijskih mreža, Kartografija i geoinformacije, Vol. 8, br. 11, 102–122.

Stay, B. (1760): Philosophiae recentioris a Benedicto Stay versibus traditae libri X Cum adnotationibus, et supplementis P. Rogerii Josephi Boscovich S. J, Tomus II. Typis, et sumptibus Nicolai et Marci Palearini, Romae.

Stigler, S. M. (1986): The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900. The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts and London, England.

Todhanter, I. (1873): A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth: from the time of Newton to that of Laplace, Vol. 1, 8–20.

Triplat Horvat, M., Lapaine, M., Tutić, D. (2011): Application of Bošković's Geometric Adjustment Method on Five Meridian Degrees, On the Occasion of 300th Anniversary of the Birth of Ruđer Josip Bošković, KoG, No. 15, 67–74.

Triplat Horvat, M., Lapaine, M. (2012): Bošković-Laplace's and Related Methods of Adjustment, Conference book „Geomathematics as geoscience“, 4th Croatian-Hungarian and 15th Hungarian geomathematical conference, 23-25 May, 2012, Opatija, 165–175.

Tutić, D. (1998): Računalni program “Kartografske projekcije”. Diplomski rad, Geodetski fakultet, Zagreb.

Varićak, V. (1910): Matematički rad Boškovićev. Rad JAZU, knjiga 181, Zagreb, 75–208.

Wilcox, R. R. (2010): Fundamentals of Modern Statistical Methods: Substantially Improving Power and Accuracy, 2nd ed. Springer New York Dordrecht Heidelberg London.

Woodward, D. (ed.) (2007): The History of Cartography, Volume 3: *Cartography in the European Renaissance,* Part 1. The University of Chicago Press, Chicago and London.

Zach, F. X. (1811): Mémoire de M. le baron de-Zach ... sur le degré du méridien: mesuré en Piémont par le p. Beccaria, Chez Félix Galetti, imprimeur de l'Académie impériale des sciences.

Popis mrežnih adresa

URL1: Nacionalna i sveučilišna knjižnica u Zagrebu, Virtualna izložba digitalne zbirke Ruđera Boškovića,
http://virtualna.nsk.hr/boskovic/, (19.4.2014.)

URL 2: Wikipedija (hrvatsko izdanje), Papinska Država,
http://hr.wikipedia.org/wiki/Papinska_Dr%C5%BEava, (4.2.2014)

URL 3: Hrvatska enciklopedija Leksikografskog zavoda Miroslav Krleža, online izdanje, www.enciklopedija.hr, (12.4.2014)

URL 4: Norman B. Leventhal Map Center at the Boston Public Library,
http://maps.bpl.org/id/15555, (21.03.2014)

URL 5: Instituto Geografico Militare, Ente Cartografico dello Stato,
http://www.igmi.org/ancient/scheda.php?cod=11691, (21.03.2014)

URL 6: Cartografia storica bolognese. Piante e vedute conservate nella Biblioteca dell'Archiginnasio,
http://badigit.comune.bologna.it/mappe/217/library.html, (25.3.2014)

URL 7: BolognArt.com, La città e il territorio nell'arte della stampa antica,
http://www.bolognart.com/joomla/index.php?option=com_content&view=article&id=212:andrea-chiesa-1762&catid=36:mappe-del-xviii-secolo&Itemid=37, (25.3.2014)

URL 8: Universitäts und Landesbibliothek, Digital Collections,
http://digital.ub.uni-duesseldorf.de/ihd/content/titleinfo/2005717, (24.3.2014)

URL 9: Archivio Storico Capitoli, Sistema di consultazione degli archivi digitali,
http://www.archiviocapitolinorisorsedigitali.it/scheda_doc.php?IDA=90&IDF=71&PS=22&PR=25&PB=3&SF=&SV=&OB=note&OM=, (24.3.2014)

URL 10: Europeana, think culture,
http://www.europeana.eu/portal/record/9200109/07938A6DFF6341DE586B50B1E74910CB4C48099F.html, (24.3.2014)

URL 11: Archivio Storico Capitoli, Sistema di consultazione degli archivi digitali, http://www.archiviocapitolinorisorsedigitali.it/scheda_doc.php?IDA=90&IDF=79&PS=1&PR=100&PB=1&SF=&SV=&OB=note&OM=DESC, (24.3.2014)

URL 12: Europeana, think culture, http://www.europeana.eu/portal/record/9200109/74159E13E77BD890BC7C7D463054A7518B708804.html, (24.3.2014)

URL 13: Ferrara, Voci di una Citta, *Rivista semestrale di cultura, informazione e attualità della Fondazione Cassa di Risparmio di Ferrara,* http://rivista.fondazionecarife.it/it/num-29/num-28/item/512-carte-preziose, (24.3.2014)

URL 14: Iuav – sistema bibliotecario e documentale SBD, Cartografia CIRCE, http://iuavbc.iuav.it/sbda/search.php?page=195&EW_T=M1&SOLOGET=1&NOPUNTOI=1&EW_HO=&EW4_TBL=1&EW_HIL=&EW_HFL=&EW_FL=limits_ca.php&EW4_DLL=50&EW4_DLP=&EW4_NVR=&EW4_NVT=&EW4_NMI=1&EW4_CJL=1&EW4_PY=KW=UMBRIA&EW_RM=0&EW_EP=AFN=0000233&EW_RP=2&&EW_P=LS_EW&EW_D=CRTW&EW=001051, (24.3.2014)

URL 15: Instituto Geografico Militare, Ente Cartografico dello Stato, http://www.igmi.org/ancient/scheda.php?cod=9121, (24.3.2014)

URL 16: Iuav – sistema bibliotecario e documentale SBD, Cartografia CIRCE, http://opac.iuav.it/sbda/search.php?page=195&EW4_CJL=1&EW4_DLL=50&EW4_NMI=1&EW4_TBL=1&EW_D=CRTW&EW_RM=50&EW_T=R&NOPUNTOI=1&SOLOGET=1&EW=KW=ARRIGONI&EW4_PY=KW=ARRIGONI&EW4_NEX=1&EW_P=TAG&, (24.3.2014)

URL 17: Instituto Geografico Militare, Ente Cartografico dello Stato, http://www.igmi.org/ancient/scheda.php?cod=10383, (24.3.2014)

URL 18: Cultura Italia, un Patrimonio da Esplorare, http://www.culturaitalia.it/opencms/opencms/system/modules/com.culturaitalia_stage.liberologico/templates/viewItem.jsp?language=it&case=&id=oai%3Aartpast.org%3A0800196677, (24.3.2014)

URL 19: Idea Rare Maps,
http://www.ideararemaps.com/article.aspx?articleID=1435, (26.3.2014)

URL 20: Archivio di Stato di Rieti,
http://www.asrieti.it/PUBBLICAZIONI/mostre150%C2%B0/mostraversol%27unit%C3%A0/sez1.htm, (31.3.2014)

URL 21: Instituto Geografico Militare, Ente Cartografico dello Stato,
http://www.igmi.org/ancient/scheda.php?cod=16423, (31.3.2014)

URL 22: Archivio Storico Capitoli, Sistema di consultazione degli archivi digitali,
http://www.archiviocapitolinorisorsedigitali.it/scheda_doc.php?IDA=90&IDF=90&PS=23&PR=25&PB=3&SF=&SV=&OB=disegnatore&OM=, (31.3.2014)

URL 23: Hutton, Charles *Mathematical and Philosophical Dictionary* 1795,
http://archimedes.mpiwg-berlin.mpg.de/cgi-bin/toc/toc.cgi?page=381;dir=hutto_dicti_078_en_1795;step=textonly, (4.01.2013)

URL 24: Words /Hutton's Dictionary, 1796/D/ DEGREE [vol. 1, p. 362],
http://words.fromoldbooks.org/Hutton-Mathematical-and-Philosophical-Dictionary/d/degree.html, (4.01.2013)

URL 25: Mason-Dixon Line,
http://en.wikipedia.org/wiki/Mason%E2%80%93Dixon_line, (14.01.2013)

URL 26: A brief history of the Mason-Dixon Line, John Mackenzie APEC/CANR, University of Delaware, http://www.udel.edu/johnmack/mason_dixon/, (14.01.2013)

URL 27: The Maryland Room, Gutman Collection, A Map of that part of America 1769,
http://www.tcfl.org/mdroom/maps/gutman/a_map_of_that_part_of_america.html, (15.01.2013)

URL 28: NYPL Digital Gallery,
http://digitalgallery.nypl.org/nypldigital/index.cfm, (15.01.2013)

URL 29: Maryland State Archives, MAP #: 269M5,
http://msa.maryland.gov/msa/speccol/1399/reports/html/269m5.html, (15.01.2013)

Popis slika

Slika 3.1. Prvi list karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, 1755. Francuska nacionalna knjižnica (Sign. GE DD-2987 (5411,1)), smanjen za 65% 14

Slika 3.2. Drugi list karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, 1755. Francuska nacionalna knjižnica (Sign. GE DD-2987 (5411,2)), smanjen za 65% 15

Slika 3.3. Treći list karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, 1755. Francuska nacionalna knjižnica (Sign. GE DD-2987 (5411,3)), smanjen za 65% 16

Slika 3.4. Područje Papinske Države u 18. stoljeću s podjelom na legacije 18

Slika 3.5. Lanac trokuta uzduž meridijana Rim-Rimini (precrtano prema slici 2, tabla 1, (Maire i Boscovich 1755)) 28

Slika 3.6. Određivanje položaja vrha uzvisine Ascensione. Prvo je određen položaj vrha Comero opažanjem kutova s vrhova Catria i Luro (crveni trokut), a potom je određen položaj vrha Ascensione opažanjem kutova s vrhova Catria i Comero (plavi trokut) 30

Slika 3.7. Popis gradova Papinske Države iz trećeg poglavlja knjige *De Litteraria…* (Maire i Boscovich 1755) 32

Slika 3.8. Barokna kartuša na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* iz 1755. s naslovom karte, imenima autora i posvetom papi Benediktu XIV. 38

Slika 3.9. Tumač znakova i kratica s karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 43

Slika 3.10. Kartografski znakovi korišteni na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico*, a ne nalaze se u tumaču znakova 45

Slika 3.11. *Tavola de' Nomi antichi di alcune e di alcune Città di alcuni Castelli e Fiumi* u ukrašenoj kartuši na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 48

Slika 3.12. Područje koje izlazi izvan okvira karte prikazano u zasebnom okviru na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 49

Slika 3.13. Kartuša s Napomenom (*Avvertimento*) i Znakovima (*Note*) na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 54

Slika 3.14. *Carte de l'État de l'Église*, 1770. Nacionalna i sveučilišna knjižnica u Zagrebu (sig. RIIF-4°-227b), smanjeno za 45% 57

Slika 3.15. Kartuša s naslovom karte i Napomenom (*Avertissement*) na karti *Carte de l'État de l'Église* iz 1770. 58

Slika 4.1. Položaj meridijanskih stupnjeva koje je Bošković razmatrao u svojim radovima 67

Slika 4.2. Elipsa izvodnica koja aproksimira Zemljin oblik 68

Slika 4.3. Granice saveznih država iz kojih je računata duljina luka meridijana u Sjevernoj Americi 77

Slika 4.4. Duljina luka meridijana između dviju točaka s geografskim širinama φ_1 i φ_2 81

Slika 4.5. Duljine luka meridijana koje odgovaraju 1° geografske širine za elipsoid GRS80 83

Slika 4.6. Proporcionalnost za stupanj u točki *e* 87

Slika 4.7. Pojednostavljena slika 7 iz Boškovićevog prvog priloga s pomoćnim veličinama koje su potrebne za računanje 88

Slika 4.8. Pet duljina luka meridijana i pravac koji zadovoljava traženi minimum 93

Slika 4.9. Devet duljina luka meridijana i pravac koji zadovoljava traženi minimum 97

Slika 4.10. Duljine luka meridijana 100

Slika 5.1. Plate Carrée – kvadratična cilindrična projekcija, $\varphi_i = 0°$, $\lambda_0 = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich 109

Slika 5.2. Italija u kvadratičnoj cilindričnoj projekciji, $\varphi_i = 0°$, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro 110

Slika 5.3. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u kvadratičnoj cilindričnoj projekciji ($\varphi_i = 0°$, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte. 111

Slika 5.4. Mercatorova trapezna projekcija, $\varphi_1 = -10°$, $\varphi_2 = 45°$, $\lambda_0 = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich 113

Slika 5.5. Italija u Mercatorovoj trapeznoj projekciji, $\varphi_1 = 41°10'$, $\varphi_2 = 44°$, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro 113

Slika 5.6. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u Mercatorovoj trapeznoj projekciji (φ_1 = 41°10', φ_2 = 44°, λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte. 114

Slika 5.7. Stereografska projekcija – perspektivna azimutna uspravna/polarna, λ_0 = 12°30' u odnosu na početni meridijan Greenwich 116

Slika 5.8. Italija u stereografskoj projekciji, φ_i = 45°, λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro 117

Slika 5.9. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u stereografskoj projekciji (φ_i = 45°, λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte. 118

Slika 5.10. Azimutna ekvidistantna projekcija uspravna/polarna, λ_0 = 12°30' u odnosu na početni meridijan Greenwich 119

Slika 5.11. Italija u azimutnoj ekvidistantnoj projekciji, λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro 120

Slika 5.12. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u azimutnoj ekvidistantnoj projekciji (λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte. 121

Slika 5.13. Mercatorova projekcija – uspravna konformna cilindrična, φ_i = 0°, λ_0 = 12°30' u odnosu na početni meridijan Greenwich 123

Slika 5.14. Italija u Mercatorovoj projekciji, φ_i = 31°10', λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro 124

Slika 5.15. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u Mercatorovoj projekciji (φ_i = 31°10', λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte. 125

Slika 5.16. Sansonova projekcija – sinusoidna pseudocilindrična projekcija, λ_0 = 12°30' u odnosu na početni meridijan Greenwich 127

Slika 5.17. Italija u sinusoidnoj pseudocilindričnoj projekciji, λ_0 = 30° u odnosu na početni meridijan Ferro 127

Slika 5.18. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u sinusoidnoj pseudocilindričnoj projekciji ($\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte. 128

Slika 5.19. Bonneova projekcija – pseudokonusna ekvivalentna projekcija, $\varphi_0 = 45°$, $\lambda_0 = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich 129

Slika 5.20. Italija u Bonneovoj projekciji, $\varphi_0 = 31°10'$, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro 131

Slika 5.21. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u Bonneovoj projekciji ($\varphi_0 = 31°10'$, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem
karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte. 132

Slika 5.22. La Hireova projekcija – perspektivna azimutna projekcija uspravna/polarna, $\lambda_0 = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich 134

Slika 5.23. Italija u La Hireovoj projekciji, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro 135

Slika 5.24. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u La Hireovoj projekciji ($\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte. 136

Slika 5.25. Ekvidistantna konusna projekcija s dvije standardne paralele, $\varphi_1 = 0°$, $\varphi_2 = 30°$, $\lambda_0 = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich 140

Slika 5.26. Italija u ekvidistantnoj konusnoj projekciji, $\varphi_1 = 42°10'$, $\varphi_2 = 44°$, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro 140

Slika 5.27. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u ekvidistantnoj konusnoj projekciji ($\varphi_1 = 42°10'$, $\varphi_2 = 44°$, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte 141

Slika 5.28. Cassinijeva projekcija – poprečna ekvidistantna cilindrična projekcija, $\lambda_0 = 12°30'$ u odnosu na početni meridijan Greenwich 143

Slika 5.29. Italija u Cassinijevoj projekciji, $\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro 144

Slika 5.30. Kartografska mreža i konture administrativnih jedinica u Cassinijevoj projekciji ($\lambda_0 = 30°$ u odnosu na početni meridijan Ferro) preklopljene sa sadržajem karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico.* Prikazano je područje srednjeg lista karte. 145

Slika 5.31. Grafička mjerila na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* .. 155

Slika 5.32. Pravac kroz zadanu točku s koordinatama (x_0, y_0) i zadanog smjera $\vec{s} = k\vec{i} + l\vec{j}$. Udaljenost točke $T_i(x_i, y_i)$ od pravca je d_i. 160

Slika 5.33. Prikaz funkcije $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha + d\sin 2\alpha$ u pravokutnom koordinatnom sustavu (a = 5, b = 3, d = 2) 165

Slika 5.34. Prikaz funkcije $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha + d\sin 2\alpha$ u polarnom koordinatnom sustavu (a = 5, b = 3, d = 2) 165

Slika 5.35. Prikaz funkcije $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\alpha$ u pravokutnom koordinatnom sustavu (a = 5, b = 3) 166

Slika 5.36. Prikaz funkcije $S = S(\alpha) = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\alpha$ u polarnom koordinatnom sustavu (a = 5, b = 3) 167

Slika 5.37. Prilagođeni pravac najistočnijem meridijanu na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 171

Slika 5.38. Prilagođena kružnica najsjevernijoj paraleli na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 179

Slika 5.39. Kutovi između dva susjedna meridijana [°] na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 186

Slika 5.40. Translacija i rotacija koordinatnog sustava 188

Slika 5.41. Regresijski pravac $\rho = K - R\varphi$ za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 191

Slika 5.42. Prikaz funkcije $f(\varphi) = \varphi + \frac{\cos\varphi}{0{,}6056615} - 1{,}9512626$ 196

Slika 5.43. Prikaz funkcije $n(\varphi) = \frac{0{,}6056615\rho}{R\cos\varphi}$ 196

Slika 5.44. Prikaz funkcije $f(\varphi)=\varphi+\frac{\cos\varphi}{0{,}6841809}-1{,}8191707$, nul-točke određuju standardne paralele 202

Slika 5.45. Prikaz funkcije $n(\varphi)=\frac{0{,}6841809\ \rho}{R\cos\varphi}$, raspodjela linearnih mjerila uzduž paralela 202

Slika 5.46. Udaljenosti između paralela uzduž meridijana izračunate iz koordinata x_i očitanih s karte, izračunatih za sferu i elipsoid za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 214

Slika 5.47. Grafička mjerila na karti *Carte de l'État de l'Église* 218

Slika 5.48. Vektori pomaka (odstupanja) položaja gradova na kartama N*uova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église*. Prikazano je područje prvog (sjevernog) lista N*uova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* u smanjenom mjerilu oko 1:1 122 000. Vektori pomaka su u stvarnim veličinama na karti i mjerilu 1:1 122 000. 223

Slika 5.49. Vektori pomaka (odstupanja) položaja gradova na kartama N*uova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église*. Prikazano je područje drugog (srednjeg) lista N*uova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* u smanjenom mjerilu oko 1:1 122 000. Vektori pomaka su u stvarnim veličinama na karti i mjerilu 1:1 122 000. 224

Slika 5.50. Vektori pomaka (odstupanja) položaja gradova na kartama N*uova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église*. Prikazano je područje trećeg (južnog) lista N*uova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* u smanjenom mjerilu oko 1:1 122 000. Vektori pomaka su u stvarnim veličinama na karti i mjerilu 1:1 122 000. 225

Popis tablica

Tablica 4.1. Duljine jednog stupnja meridijana i pripadne geografske širine. Vrijednosti u drugom i trećem stupcu preuzete su od Mairea i Boscovicha (1770) 79

Tablica 4.2. Numeričke vrijednosti koeficijenata za elipsoid GRS80 82

Tablica 4.3. Usporedba duljina luka meridijana korištenih u djelu *Voyage astronomique…* preračunatih u metre i izračunatih za elipsoid GRS80 83

Tablica 4.4. Pet mjerenih meridijanskih stupnjeva i pripadajuće im geografske širine (veličine iz drugog i četvrtog stupca preuzete iz (Maire i Boscovich 1755)). Vrijednost polovine versus sinusa dvostruke geografske širine na Rtu dobre nade popravljena je prema vrijednosti objavljenoj u (Maire i Boscovich 1755). 86

Tablica 4.5. Pomoćne računske veličine za rješavanje trećeg zahtjeva kod pet meridijanskih stupnjeva. 91

Tablica 4.6. Izračunate vrijednosti popravaka za pet meridijanskih stupnjeva. 92

Tablica 4.7. Devet mjerenih meridijanskih stupnjeva i pripadajuće im geografske širine (veličine iz drugog i četvrtog stupca preuzete iz (Maire i Boscovich 1770)). 94

Tablica 4.8. Pomoćne računske veličine za rješavanje trećeg zahtjeva kod devet meridijanskih stupnjeva (tablica sastavljena prema onoj iz Bilješke petog poglavlja *Voyage astronomique…* (Maire i Boscovich 1770)). 95

Tablica 4.9. Izračunate vrijednosti popravaka za devet meridijanskih stupnjeva 95

Tablica 4.10. Parametri Boškovićeva elipsoida 104

Tablica 4.11. Usporedba recipročnih vrijednosti spljoštenosti 105

Tablica 5.1. Duljine milja i mjerila na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* izračunatih iz grafičkih mjerila i duljine luka 1° meridijana 156

Tablica 5.2. Koordinate točaka (x_i, y_i) i euklidske udaljenosti (d_i) od tih točaka do prilagođenog pravca 171

Tablica 5.3. Težište, pomoćne veličine i komponente vektora smjera pravca 172

Tablica 5.4. Komponente vektora smjera, težišta meridijana i prosječne vrijednosti odstupanja točaka od pravca za svaki meridijan na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 173

Tablica 5.5. Komponente vektora smjera i težišta meridijana na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 177

Tablica 5.6. Koordinate točaka (x_i, y_i) uzduž najsjevernije paralele, polumjeri paralela od tih točaka do središta *S*, odstupanja točaka do kružnice (d_i) i apsolutne vrijednosti tih odstupanja 180

Tablica 5.7. Polumjeri paralela i razlike između njih 181

Tablica 5.8. Koordinate točaka (x_i, y_i) i udaljenosti između paralela uzduž četvrtog meridijana na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 183

Tablica 5.9. Težišta kojima su definirani meridijani, kutovi između dva nacrtana susjedna meridijana i apsolutne vrijednosti odstupanja od srednje vrijednosti uz pretpostavku da se svi meridijani u projekciji sijeku u točki *S* s koordinatama *S*(0,251, 21,427). 185

Tablica 5.10. Geografske širine φ_i [rad] i polumjeri paralela ρ_i [m] te popravci polumjera paralela na primjeru karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 192

Tablica 5.11. Geografske širine φ_i [rad] i pripadne koordinate x_i [m] uzduž srednjeg meridijana te apsolutne vrijednosti odstupanja $(|d_i|)$ mjerenih i teorijskih koordinata x_i u ravnini projekcije za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 206

Tablica 5.12. Geografske širine φ_i i pripadne koordinate x_i [m] uzduž srednjeg meridijana te razlike između koordinata x_i očitanih s karte za preslikavanje sfere i Boškovićeva elipsoida u ravninu projekcije na primjeru srednjeg meridijana karte *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 213

Tablica 5.13. Parametri uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* 216

Tablica 5.14. Duljine milja i mjerila na karti *Carte de l'État de l'Église* izračunatih iz grafičkih mjerila 218

Tablica 5.15. Koordinate položaja gradova na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* iz 1755. i karti *Carte de l'État de l'Église* iz 1770., koordinatne razlike i njihovo odstupanje 221-222

Popis priloga

Prilog 1. Računski postupak za ispitivanje pravocrtnosti meridijana i koordinata zajedničkog presjecišta meridijana na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.5.2. i 5.5.3.

Prilog 2. Računski postupak za ispitivanje zakrivljenosti (kružnosti) paralela na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.5.4.

Prilog 3. Računski postupak za određivanje udaljenosti između meridijana i paralela na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.6.1.

Prilog 4. Računski postupak određivanja kuta pod kojim se sijeku meridijani na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.6.2.

Prilog 5. Računski postupak za rotaciju i translaciju koordinatnog sustava skenirane slike u koordinatni sustav uspravne konusne projekcije uz poglavlje 5.6.3.1.

Prilog 6. Računanje parametara uspravne ekvidistantne projekcije za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.6.3.2.

Prilog 7. Određivanje standardnih paralela uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.6.3.3.

Prilog 8. Određivanje koeficijenata i standardnih paralela uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.7.

Prilog 9. Određivanje radijusa sfere R za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.7.1.

Prilog 10. Postupak računanja teorijskih koordinata kartografske mreže uz poglavlje 5.8.1.

Prilog 11. Postupak računanja odstupanja teorijske kartografske mreže i kartografske mreže nacrtane na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.8.1.

Prilog 12. Računanje odstupanja u položaju gradova na kartama *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église* uz poglavlje 5.12.

Životopis

Martina Triplat Horvat rođena je 16. prosinca 1980. u Zagrebu. Osnovnu školu pohađala je u Zagrebu i Velikoj Gorici. Maturirala je u Geodetskoj tehničkoj školi u Zagrebu. U razdoblju 1999.–2000., studirala je na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu.

Na Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu upisala se 2000. i diplomirala 2006. s temom *Internetska karta arheoloških nalazišta na otoku Pagu*.

Od 2007. do 2008. godine radila je u privatnoj arheološkoj tvrtki „Geoarheo“ kao voditeljica geodetskog tima na izmjeri arheoloških lokaliteta i izradi nacrtne dokumentacije te na izradi dokumentacije geofizičkih mjerenja provedenih na arheološkim lokalitetima.

Od 2008. godine asistentica je na Geodetskom fakultetu. Iste godine upisala je poslijediplomski doktorski studij.

Kao suradnica sudjelovala je na znanstvenim projektima MZOS-a *Najstariji udžbenik geodezije* i *Kartografija Jadrana*, a trenutačno je suradnica na projektu *Kartografija i geoinformacije*.

U nastavi je sudjelovala kao asistentica iz predmeta *Programiranje* i *Rukovanje geoinformacijama*, a trenutačno sudjeluje kao asistentica na predmetima *Inženjerska grafika u geodeziji i geoinformatici*, *Osnove geoinformatike* i *Osnove statistike*.

Objavila je nekoliko radova i sudjelovala na domaćim i međunarodnim znanstvenim i stručnim skupovima. Članica je *Hrvatskoga kartografskog društva*, u kojem obnaša dužnost tajnice od 2012. godine.

Prilog 1

Računski postupak za ispitivanje pravocrtnosti meridijana i koordinata zajedničkog presjecišta meridijana na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.5.2. i 5.5.3.

1. meridijan

	xi	yi	yi^2	xi^2	xi*yi	di^2	di
	0,040832	1,252235	1,568092	0,001667	0,05113126	3,7354E-08	0,000193
	0,040586	1,233728	1,522085	0,001647	0,050072085	2,2175E-08	0,000149
	0,039967	1,182879	1,399203	0,001597	0,047276125	7,0427E-09	8,39E-05
	0,039330	1,132582	1,282742	0,001547	0,04454445	2,5834E-11	5,08E-06
	0,039101	1,082967	1,172818	0,001529	0,042345093	9,3918E-08	0,000306
	0,038263	1,032688	1,066445	0,001464	0,039513741	2,6479E-10	1,63E-05
	0,037765	0,984576	0,969390	0,001426	0,037182513	1,8025E-09	4,25E-05
	0,035704	0,851697	0,725388	0,001275	0,03040899	3,2579E-07	0,000571
	0,031485	0,464716	0,215961	0,000991	0,014631583	3,2899E-07	0,000574
	0,031092	0,426752	0,182117	0,000967	0,013268573	3,0576E-07	0,000553
	0,028850	0,086587	0,007497	0,000832	0,002498035	8,3009E-07	0,000911
suma	0,402975	9,731407	10,111737	0,014943	0,372872	1,9532E-06	0,003405

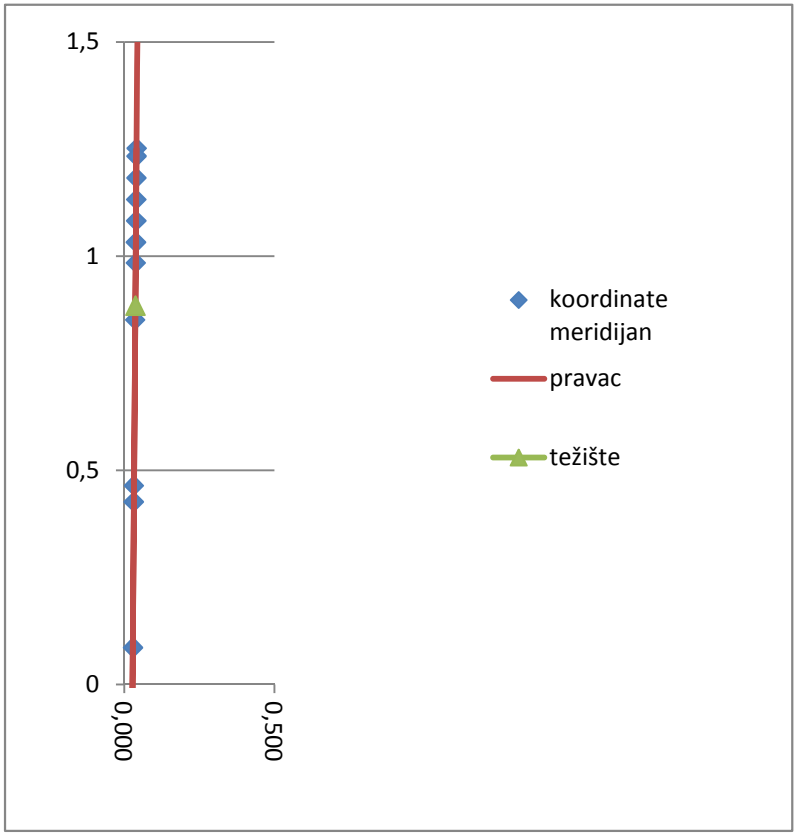
x_	y_	x_^2	y_^2		0,00031
0,036634	0,884673	0,001342	0,782647		

n=	11		
a=	1,502620672		2,257327013
b=	0,000180319		0,001072064
d=	-0,016371198		1,502797085
lambd	1,95321E-06		3,90641E-06
k=	-0,010894464		1,95321E-06
l=	-0,999940654		
		kontrole	
A=	-0,119839109	k^2+l^2=1	1
B=	-0,003257159	lambda=di^2	
C=	0,001023764		
y0=	0,884673		

Jednadžba pravca

$$\frac{x-0{,}03663}{-0{,}01089} = \frac{y-0{,}88467}{-0{,}99994}$$

y	x
1,25	0,040614
1	0,037891
0,75	0,035167
0,5	0,032443
0,25	0,029719
0	0,026995
-0,25	0,024272
1,5	0,043338



2. meridijan

	xi	yi	yi^2	xi^2	xi*yi	di^2	di
	0,111500	1,251466	1,566167	0,012432	0,139538459	5,1707E-08	0,000227
	0,111481	1,231791	1,517309	0,012428	0,137321292	1,1198E-07	0,000335
	0,111149	1,181079	1,394948	0,012354	0,13127575	1,0761E-07	0,000328
	0,110622	1,131373	1,280005	0,012237	0,125154744	1,4399E-08	0,00012
	0,110287	1,082298	1,171369	0,012163	0,1193634	9,9798E-09	9,99E-05
	0,109803	1,033367	1,067847	0,012057	0,113466797	4,9169E-09	7,01E-05
	0,109264	0,982429	0,965167	0,011939	0,107344122	7,9671E-08	0,000282
	0,108046	0,851181	0,724509	0,011674	0,091966702	4,3306E-07	0,000658
	0,105512	0,464747	0,215990	0,011133	0,049036385	5,0756E-07	0,000712
	0,105433	0,409351	0,167568	0,011116	0,043159104	1,9007E-07	0,000436
	0,104850	0,087085	0,007584	0,010994	0,009130862	1,1002E-06	0,001049
suma	1,197947	9,706167	10,078463	0,130526	1,066758	2,6111E-06	0,004318

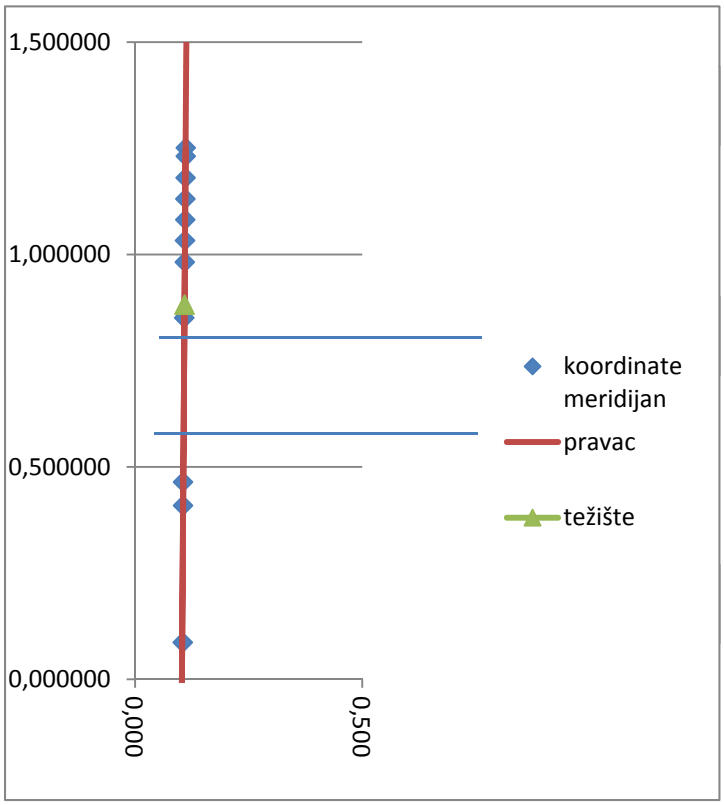
	x_	y_	x_^2	y_^2	
	0,108904	0,882379	0,011860	0,778592	0,000393

n=	11		
a=	1,513946484		2,29183731
b=	6,49468E-05		0,000377491
d=	-0,00971456		1,514006209
lambd	2,61112E-06		5,22224E-06
k=	-0,006416592		2,61112E-06
l=	-0,999979413		
		kontrole	
A=	-0,070582508	k^2+l^2=1	1
B=	-0,001165676	lambda=di^2	
C=	0,000355235		
y0=	0,882379		

Jednadžba pravca

$$\frac{x-0{,}10890}{-0{,}00642} = \frac{y-0{,}88238}{0{,}99998}$$

y	x
1,25	0,1112632
1	0,10965902
0,75	0,10805483
0,5	0,10645065
0,25	0,10484647
0	0,10324229
-0,25	0,10163811
1,5	0,11286738



3. meridijan

	xi	yi	yi^2	xi^2	xi*yi	di^2	di
	0,183560	1,250842	1,564606	0,033694	0,229604558	5,132E-07	0,000716
	0,183329	1,230050	1,513023	0,033610	0,225503836	3,1827E-07	0,000564
	0,182819	1,180298	1,393103	0,033423	0,2157809	5,8884E-08	0,000243
	0,182516	1,132412	1,282357	0,033312	0,206683309	1,4663E-08	0,000121
	0,182019	1,081358	1,169335	0,033131	0,196827702	3,3298E-08	0,000182
	0,181799	1,032284	1,065610	0,033051	0,187668199	4,6892E-08	0,000217
	0,181423	0,981332	0,963012	0,032914	0,178036195	1,596E-07	0,0004
	0,180491	0,850856	0,723956	0,032577	0,15357185	7,0083E-07	0,000837
	0,180230	0,627543	0,393810	0,032483	0,113102075	6,3543E-08	0,000252
	0,179974	0,577380	0,333368	0,032391	0,103913388	1,0114E-07	0,000318
	0,179864	0,527262	0,278005	0,032351	0,094835452	5,6709E-08	0,000238
	0,179806	0,476404	0,226961	0,032330	0,085660298	1,0701E-08	0,000103
	0,179674	0,464674	0,215922	0,032283	0,083489836	3,6483E-08	0,000191
	0,179689	0,424567	0,180257	0,032288	0,07629002	5,7838E-10	2,4E-05
	0,179652	0,374361	0,140146	0,032275	0,067254702	1,6684E-08	0,000129
	0,179304	0,324801	0,105496	0,032150	0,058238119	9,6469E-10	3,11E-05
	0,179455	0,087235	0,007610	0,032204	0,015654757	1,0404E-06	0,00102
suma	3,075604	12,623659	11,556578	0,556466	2,292115	3,1729E-06	0,005587
							0,000329

x_	y_	x_^2	y_^2
0,180918	0,742568	0,032731	0,551407

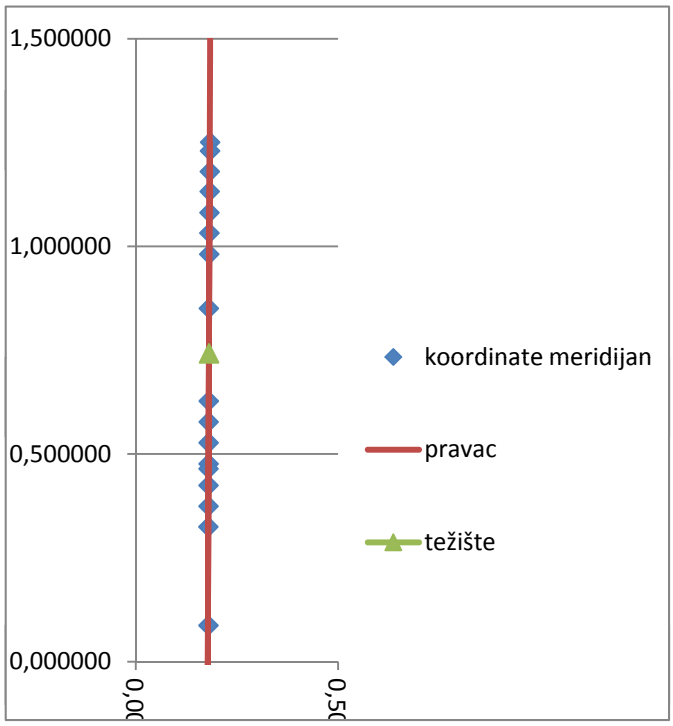
n=	17	
a=	2,182650108	4,763810873
b=	3,45042E-05	0,000273541
d=	-0,008269542	2,182678266
lambd	3,17287E-06	6,34574E-06
k=	-0,00378874	3,17287E-06
l=	-0,999992823	
		kontrole
A=	-0,064408587	k^2+l^2=1
B=	-0,000702762	lambda=di^2
C=	0,000137731	
y0=	0,742568	

Jednadžba pravca

$$\frac{x-0{,}18092}{-0{,}00379} = \frac{y-0{,}74257}{-0{,}99999}$$

1

y	x
1,25	0,18284
1	0,181893
0,75	0,180946
0,5	0,179999
0,25	0,179052
0	0,178104
-0,25	0,177157
1,5	0,183788



4. meridijan

	xi	yi	yi^2	xi^2	xi*yi	di^2	di
	0,254664	1,250515	1,563788	0,064854	0,318461152	4,5028E-07	0,000671
	0,254641	1,229410	1,511449	0,064842	0,313058192	4,0905E-07	0,00064
	0,254285	1,180731	1,394126	0,064661	0,300242182	6,973E-08	0,000264
	0,254273	1,130706	1,278496	0,064655	0,287508007	5,3831E-08	0,000232
	0,254168	1,080521	1,167526	0,064601	0,274633862	1,1428E-08	0,000107
	0,254128	1,033364	1,067841	0,064581	0,262606727	2,3041E-09	4,8E-05
	0,253906	0,982177	0,964672	0,064468	0,249380633	3,7836E-08	0,000195
	0,253995	0,930132	0,865146	0,064513	0,236248877	1,597E-08	0,000126
	0,253948	0,880139	0,774645	0,064490	0,223509539	3,7407E-08	0,000193
	0,253563	0,850784	0,723833	0,064294	0,215727343	3,4831E-07	0,00059
	0,253476	0,778941	0,606749	0,064250	0,197442849	4,9839E-07	0,000706
	0,253626	0,727720	0,529576	0,064326	0,184568713	3,3235E-07	0,000576
	0,253968	0,576563	0,332425	0,064500	0,146428552	8,7072E-08	0,000295
	0,253989	0,526790	0,277508	0,064510	0,133798865	8,6452E-08	0,000294
	0,254021	0,482019	0,232342	0,064527	0,122442948	7,8384E-08	0,00028
	0,253984	0,464717	0,215962	0,064508	0,118030683	1,0492E-07	0,000324
	0,254158	0,430151	0,185030	0,064596	0,109326318	2,6817E-08	0,000164
	0,254450	0,374179	0,140010	0,064745	0,095209847	1,1195E-08	0,000106
	0,254590	0,324712	0,105438	0,064816	0,082668428	5,1068E-08	0,000226
	0,254308	0,274234	0,075204	0,064673	0,0697399	5,8139E-09	7,62E-05
	0,254705	0,224145	0,050241	0,064875	0,057090852	9,0406E-08	0,000301
	0,255685	0,087433	0,007645	0,065375	0,022355307	1,5028E-06	0,001226
suma	5,592531	15,820083	14,069650	1,421659	4,020480	4,3118E-06	0,00764

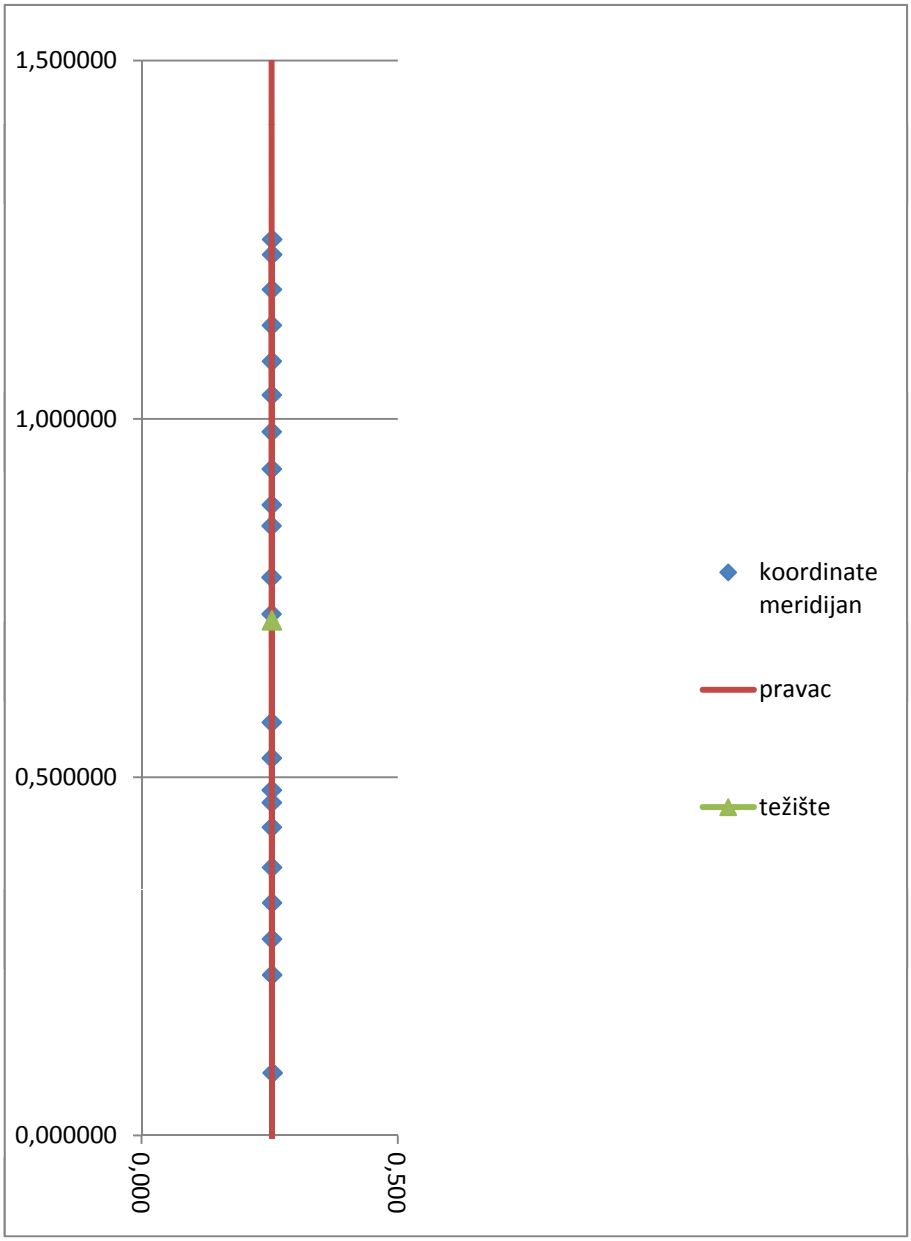
	x_	y_	x_^2	y_^2			
	0,254206	0,719095	0,064621	0,517097			0,000347

n=	22		
a=	2,693512744		7,254985344
b=	4,74446E-06		4,6615E-06
d=	0,001079525		2,693508865
lambd	4,3118E-06		8,62361E-06
k=	0,000400788		4,3118E-06
l=	-0,99999992		
		kontrole	
A=	0,008817328	k^2+l^2=1	1
B=	2,99509E-06	lambda=di^2	
C=	6,13916E-06		
y0=	0,719095		

Jednadžba pravca

$$\frac{x-0,25421}{0,0004} = \frac{y-0,71910}{-1}$$

y	x
1,25	0,25399317
1	0,25409337
0,75	0,25419357
0,5	0,25429376
0,25	0,25439396
0	0,25449416
-0,25	0,25459436
1,5	0,25389298


1,500000
1,000000
0,500000
0,000000
0,000
0,500
koordinate meridijan
pravac
težište

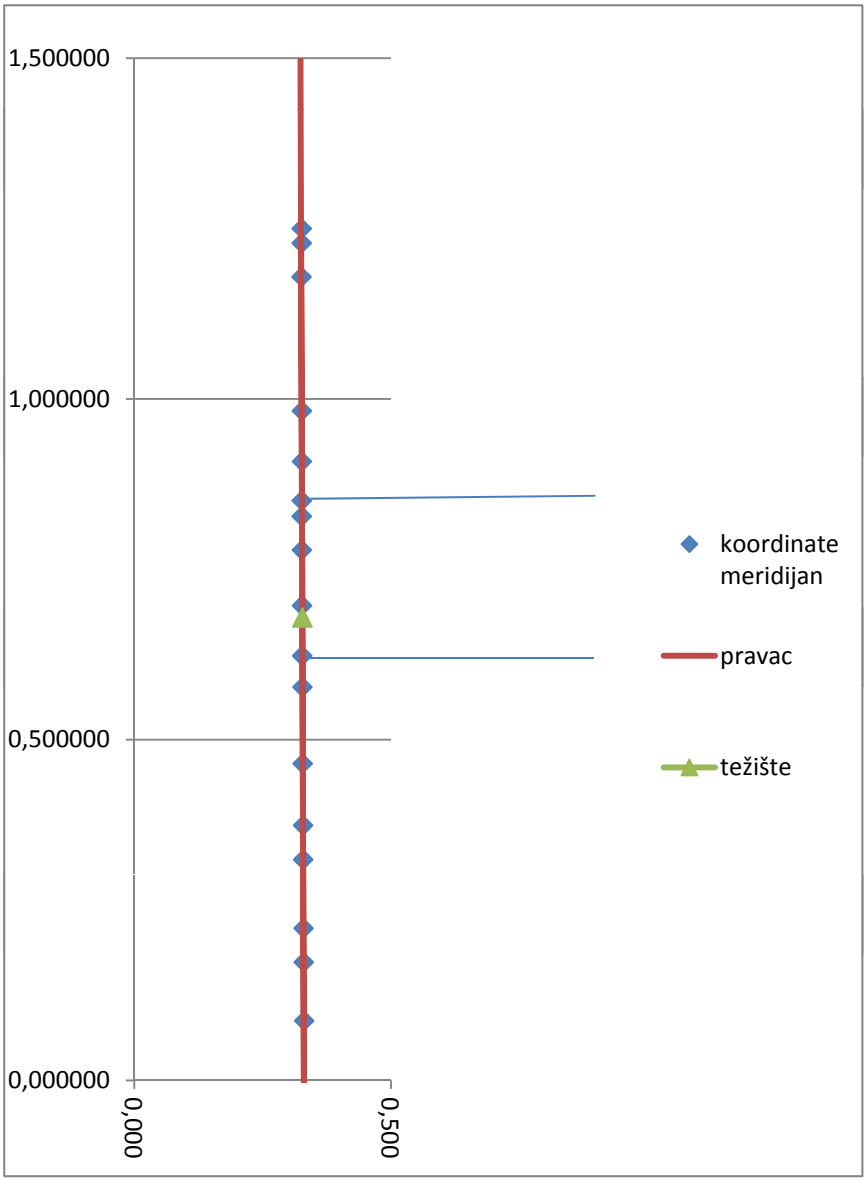
5. meridijan

	xi	yi	yi^2	xi^2	xi*yi	di^2	di
	0,325782	1,250089	1,562723	0,106134	0,407256495	1,1399E-06	0,001068
	0,325734	1,228839	1,510045	0,106103	0,400274643	8,6337E-07	0,000929
	0,325400	1,179213	1,390543	0,105885	0,38371591	1,4736E-07	0,000384
	0,326031	0,982617	0,965536	0,106296	0,320363603	3,1609E-08	0,000178
	0,326258	0,908280	0,824973	0,106444	0,296333616	7,791E-09	8,83E-05
	0,325858	0,850829	0,723910	0,106183	0,277249436	3,0953E-07	0,000556
	0,325848	0,827950	0,685501	0,106177	0,269785852	4,4059E-07	0,000664
	0,326062	0,778408	0,605919	0,106316	0,253809269	4,3654E-07	0,000661
	0,326360	0,696881	0,485643	0,106511	0,227434083	5,0389E-07	0,00071
	0,326677	0,623203	0,388382	0,106718	0,203586086	4,9924E-07	0,000707
	0,327227	0,577244	0,333211	0,107078	0,188889822	1,2409E-07	0,000352
	0,327598	0,465016	0,107320	0,107320	0,152338312	2,1079E-07	0,000459
	0,328378	0,374268	0,140077	0,107832	0,122901377	4,293E-09	6,55E-05
	0,328630	0,324135	0,105063	0,107998	0,106520485	7,2815E-10	2,7E-05
	0,329347	0,223305	0,049865	0,108469	0,073544832	6,7957E-08	0,000261
	0,329654	0,173589	0,030133	0,108672	0,057224308	1,2673E-07	0,000356
	0,330602	0,087557	0,007666	0,109298	0,028946519	8,7923E-07	0,000938
suma	5,561446	11,551423	9,916511	1,819434	3,770175	5,7936E-06	0,008402

x_	y_	x_^2	y_^2				0,000494
0,327144	0,679495	0,107023	0,461714				

n=	17			Jednadžba pravca		
a=	2,067371138	4,273852657		x-0,32714	=	y-0,67950
b=	4,13004E-05	0,000309951		0,00426		-0,99999
d=	0,008802717	2,0674048				
lambd	3,81895E-06	7,6379E-06				
k=	0,004257897	3,81895E-06				
l=	-0,999990935					
		kontrole				
A=	0,072384254	k^2+l^2=1	1			
B=	-0,000616003	lambda=di^2				
C=	0,000146121					
y0=	0,679495					

y	x
1,25	0,324715
1	0,325779
0,75	0,326844
0,5	0,327908
0,25	0,328973
0	0,330037
-0,25	0,331102
1,5	0,32365


1,500000
1,000000
0,500000
0,000000
0,000
0,500
koordinate meridijan
pravac
težište

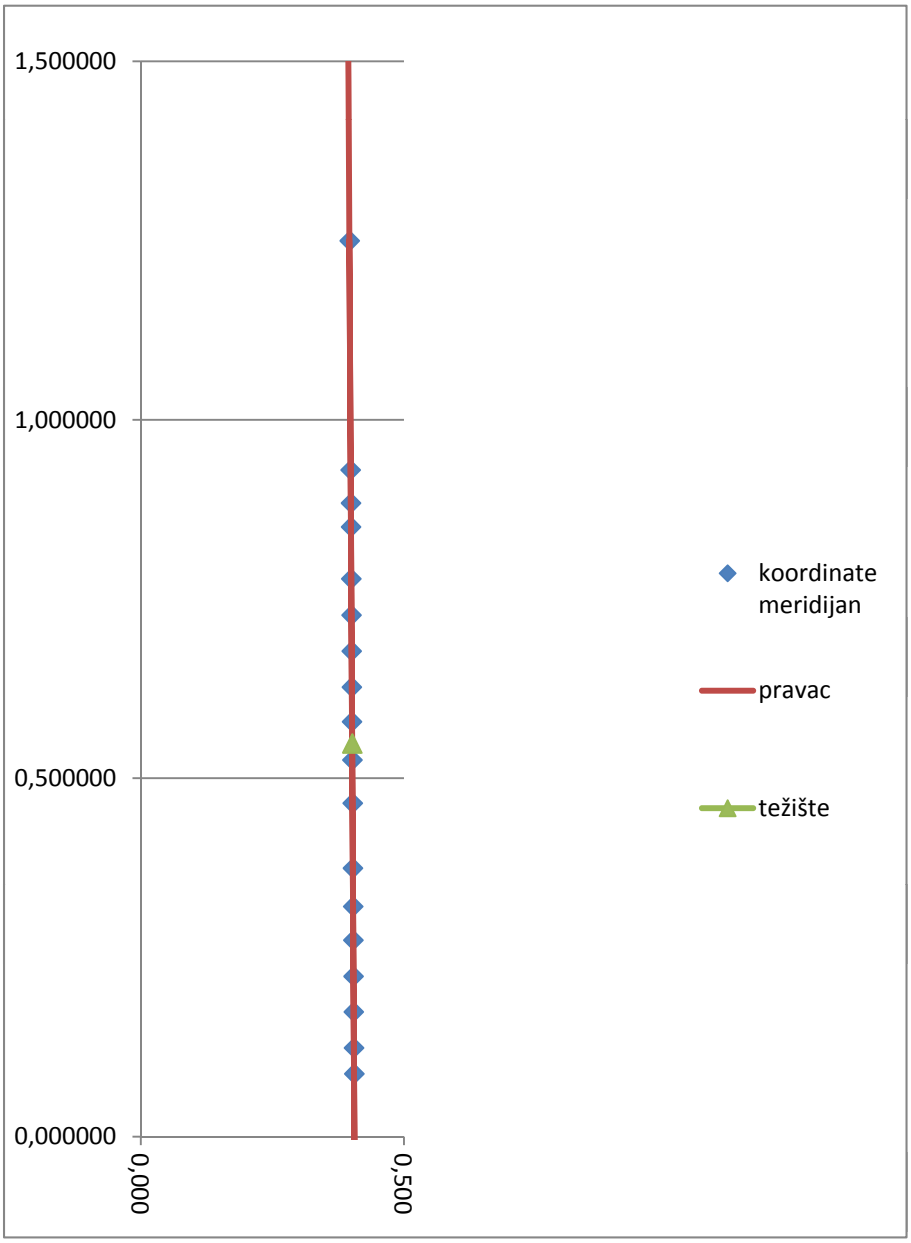
6. meridijan

	xi	yi	yi^2	xi^2	xi*yi	di^2	di
	0,396766	1,249746	1,561865	0,157423	0,495856721	2,247E-07	0,000474
	0,398499	0,930021	0,864939	0,158801	0,370612438	4,9008E-08	0,000221
	0,399159	0,883873	0,781231	0,159328	0,352805863	7,7624E-09	8,81E-05
	0,399306	0,850690	0,723673	0,159445	0,339685621	2,8658E-10	1,69E-05
	0,399709	0,778183	0,605569	0,159767	0,311046749	2,7106E-08	0,000165
	0,400215	0,727514	0,529277	0,160172	0,291162016	1,8914E-09	4,35E-05
	0,400508	0,677413	0,458888	0,160407	0,271309326	1,7167E-08	0,000131
	0,400833	0,627164	0,393335	0,160667	0,251388028	3,5223E-08	0,000188
	0,401042	0,578831	0,335045	0,160835	0,232135542	1,1956E-07	0,000346
	0,401865	0,525440	0,276087	0,161495	0,211155946	5,139E-09	7,17E-05
	0,402437	0,465177	0,216390	0,161956	0,187204436	3,4583E-08	0,000186
	0,402851	0,374528	0,140271	0,162289	0,150878979	7,8385E-09	8,85E-05
	0,403351	0,321128	0,103123	0,162692	0,1295273	3,447E-11	5,87E-06
	0,403664	0,274097	0,075129	0,162945	0,110643091	1,4702E-09	3,83E-05
	0,404015	0,223745	0,050062	0,163228	0,090396336	4,8697E-09	6,98E-05
	0,404523	0,174087	0,030306	0,163639	0,070422196	3,7264E-09	6,1E-05
	0,404900	0,123860	0,015341	0,163944	0,050150914	3,1983E-09	5,66E-05
	0,405482	0,087757	0,007701	0,164416	0,035583884	1,3274E-07	0,000364
suma	7,229125	9,873254	7,168234	2,903449	3,951965	6,763E-07	0,002615

x_	y_	x_^2	y_^2				0,000145
0,401618	0,548514	0,161297	0,300868				

n=	18			Jednadžba pravca	
a=	1,752614838	3,071302008		x-0,40162	= y-0,54851
b=	0,000101783	0,000708804		0,00760	-0,99997
d=	0,013311688	1,752715268			
lambd	6,76299E-07	1,3526E-06			
k=	0,007595114	6,76299E-07			
l=	-0,999971157				
		kontrole			
A=	0,136712048	k^2+l^2=1	1		
B=	-0,002465723	lambda=di^2			
C=	0,00031308				
y0=	0,548514				

y	x
1,25	0,39629
1	0,398189
0,75	0,400088
0,5	0,401987
0,25	0,403885
0	0,405784
-0,25	0,407683
1,5	0,394391


1,500000
1,000000
0,500000
0,000000
0,000
0,500
koordinate meridijan
pravac
težište

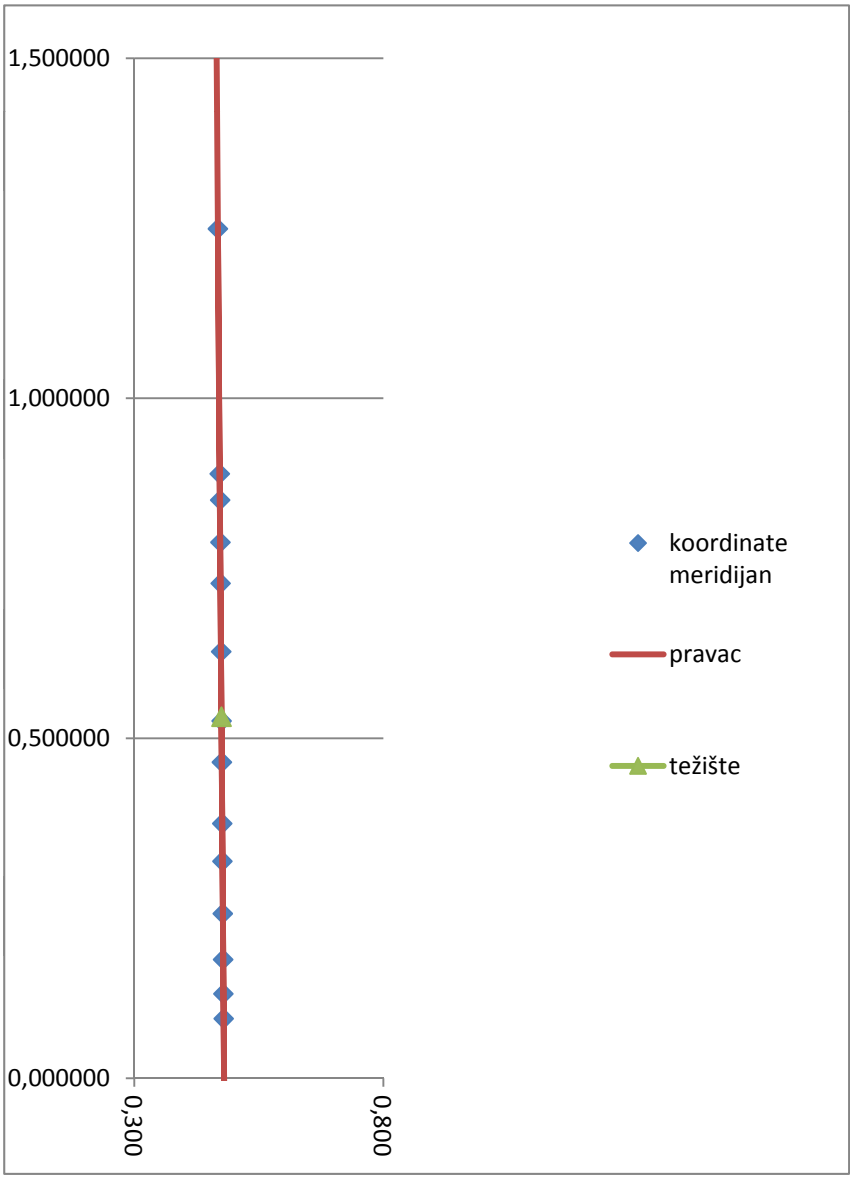
7. meridijan

	xi	yi	yi^2	xi^2	xi*yi	di^2	di
	0,467694	1,249231	1,560578	0,218738	0,584257843	9,2454E-08	0,000304
	0,471478	0,888943	0,790220	0,222292	0,419117068	2,9415E-09	5,42E-05
	0,472392	0,850347	0,723090	0,223154	0,40169712	2,315E-07	0,000481
	0,472836	0,788148	0,621177	0,223574	0,372664748	9,9238E-08	0,000315
	0,473320	0,727810	0,529707	0,224032	0,344487029	4,2913E-08	0,000207
	0,474393	0,627451	0,393695	0,225049	0,297658362	8,744E-08	0,000296
	0,475169	0,525492	0,276142	0,225049	0,249289726	4,9617E-07	0,000704
	0,475745	0,464879	0,216112	0,226333	0,22116386	2,8091E-09	5,3E-05
	0,476557	0,374617	0,140338	0,227107	0,178526354	4,1615E-10	2,04E-05
	0,476915	0,319215	0,101898	0,227448	0,152238422	4,2372E-08	0,000206
	0,477573	0,242210	0,058666	0,228076	0,115672956	9,1932E-08	0,000303
	0,478242	0,174736	0,030533	0,228715	0,083566094	8,7659E-08	0,000296
	0,478817	0,124279	0,015445	0,229266	0,059506898	4,6666E-08	0,000216
	0,479368	0,087710	0,007693	0,229794	0,042045367	5,6395E-10	2,37E-05
suma	6,650499	7,445068	5,465294	3,158625	3,521892	1,3251E-06	0,00348

x_	y_	x_^2	y_^2				0,000249
0,475036	0,531791	0,225659	0,282801				

n=	14			Jednadžba pravca		
a=	1,506077334	2,270073471		x-0,47504	=	y-0,53179
b=	-0,000598966	0,00087389		0,00981		-0,99995
d=	0,014780816	1,506966277				
lambd	-0,000743955	-0,001487909				
k=	0,009808798	-0,000743955				
l=	-0,999951893					
		kontrole				
A=	0,137323165	k^2+l^2=1	1			
B=	-0,003448876	lambda=di^2				
C=	-0,000363028					
y0=	0,531791					

y	x
1,25	0,467991
1	0,470443
0,75	0,472895
0,5	0,475347
0,25	0,4778
0	0,480252
-0,25	0,482704
1,5	0,465538


1,500000
1,000000
0,500000
0,000000
0,300
0,800
koordinate meridijan
pravac
težište

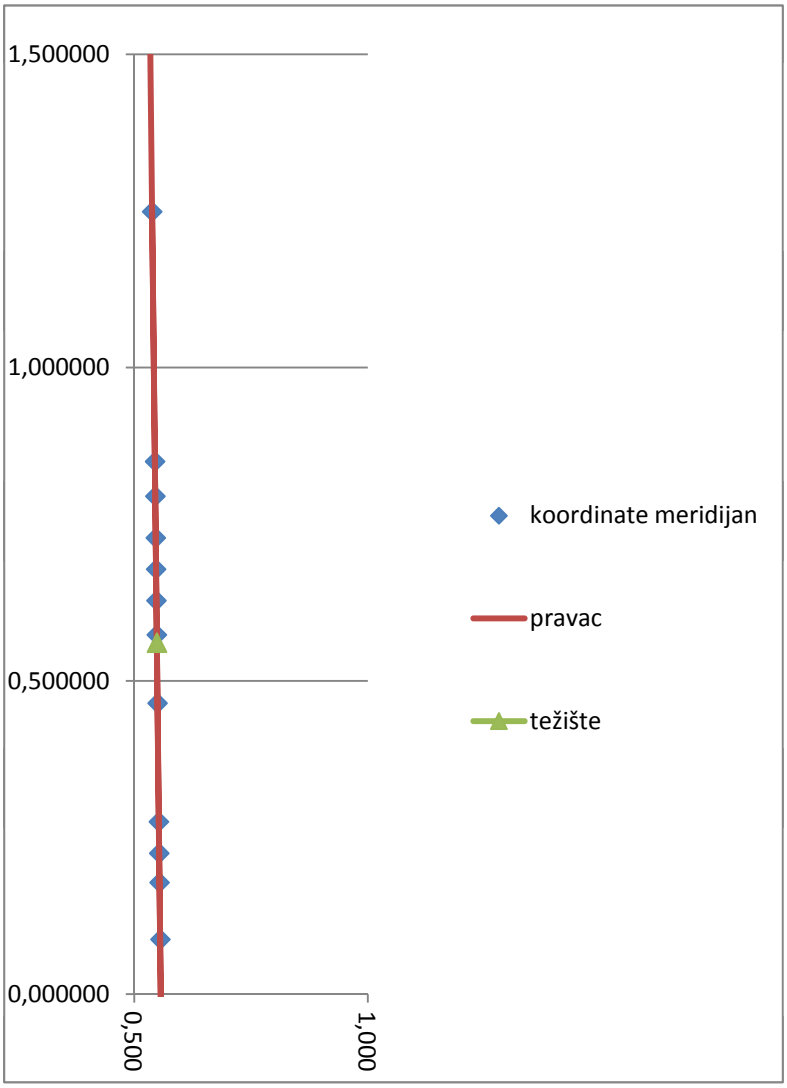
8. meridijan

	xi	yi	yi^2	xi^2	xi*yi	di^2	di
	0,538318	1,248763	1,559409	0,289786	0,672231601	2,8549E-10	1,68965E-05
	0,544489	0,850084	0,722643	0,296468	0,462861387	7,2355E-08	0,000268988
	0,545141	0,794637	0,631448	0,297179	0,433189209	9,5704E-09	9,78284E-05
	0,545971	0,728143	0,530192	0,298084	0,397544962	3,5212E-09	5,93396E-05
	0,546756	0,678162	0,459904	0,298942	0,370789142	2,681E-10	1,63737E-05
	0,547341	0,628007	0,394393	0,299582	0,343733979	3,0965E-08	0,000175969
	0,548200	0,573454	0,328849	0,300523	0,314367483	1,6099E-08	0,000126881
	0,549799	0,464381	0,215650	0,302279	0,255316209	2,1668E-08	0,000147201
	0,552673	0,275044	0,075649	0,305447	0,152009393	7,0811E-09	8,4149E-05
	0,553432	0,224880	0,050571	0,306287	0,124455788	4,8856E-09	6,98969E-05
	0,554101	0,178178	0,031747	0,307028	0,098728608	8,8817E-09	9,42428E-05
	0,555934	0,087356	0,007631	0,309063	0,048564171	1,5236E-07	0,000390339
suma	6,582155	6,731089	5,008086	3,610669	3,673792	3,2795E-07	0,001548106

	x_	y_	x_^2	y_^2			0,000129009
	0,548513	0,560924	0,300866	0,314636			

n=	12			Jednadžba pravca		
a=	1,232456481	1,518278658		x-0,54851	=	y-0,56092
b=	0,000271974	0,001339169		0,01484		-0,99989
d=	0,018297328	1,232727799				
lambd	3,27945E-07	6,5589E-07				
k=	0,014844595	3,27945E-07				
l=	-0,999889813					
		kontrole				
A=	0,178135135	k^2+l^2=1	1			
B=	-0,006598298	lambda=di^2				
C=	0,000832333					
y0=	0,560924					

y	x
1,25	0,538282737
1	0,541994294
0,75	0,545705852
0,5	0,54941741
0,25	0,553128967
0	0,556840525
-0,25	0,560552082
1,5	0,534571179


1,500000
1,000000
0,500000
0,000000
0,500
1,000
koordinate meridijan
pravac
težište

9. meridijan

	xi	yi	yi^2	xi^2	xi*yi	di^2	di
	0,60966	1,24822	1,55806	0,37168	0,76099	3,53051E-08	0,00019
	0,61682	0,84985	0,72225	0,38046	0,52420	7,87289E-09	0,00009
	0,61713	0,83005	0,68898	0,38085	0,51225	3,65982E-09	0,00006
	0,61783	0,77910	0,60700	0,38172	0,48136	1,41255E-08	0,00012
	0,61871	0,72855	0,53079	0,38280	0,45076	1,28634E-08	0,00011
	0,62012	0,67397	0,45424	0,38455	0,41795	1,26953E-07	0,00036
	0,62053	0,62872	0,39528	0,38505	0,39013	5,64958E-10	0,00002
	0,62151	0,57778	0,33383	0,38627	0,35910	6,24058E-09	0,00008
	0,62347	0,46389	0,21519	0,38871	0,28922	4,59551E-09	0,00007
	0,62970	0,08705	0,00758	0,39652	0,05481	4,34244E-08	0,00021
suma	6,19547	6,86719	5,51320	3,83863	4,24077	2,55605E-07	0,00130
							0,00013

x_	y_	x_^2	y_^2
0,61955	0,68672	0,38384	0,47158

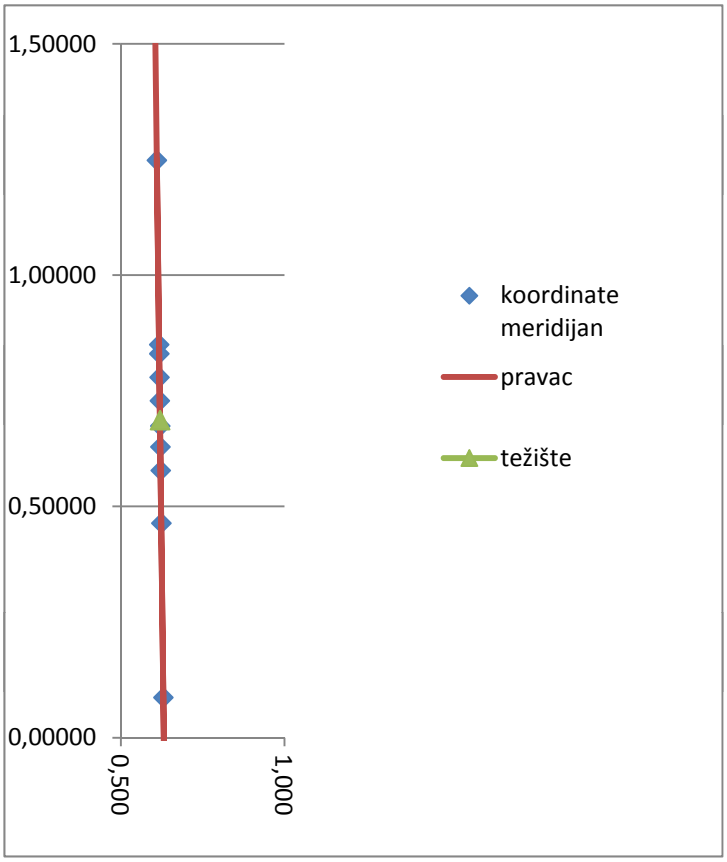
n=	10	
a=	0,797380289	0,635435215
b=	0,000238385	0,00075952
d=	0,013779692	0,797618163
lambd	2,55605E-07	5,1121E-07
k=	0,01727863	2,55605E-07
l=	-0,999850713	
		kontrole
A=	0,172786303	k^2+l^2=1
B=	-0,007518098	lambda=di^2
C=	0,00140817	
y0=	0,686719	

Jednadžba pravca

$$\frac{x-0{,}61955}{0{,}01728} = \frac{y-0{,}68672}{-0{,}99985}$$

1

y	x
1,25	0,609813
1	0,614134
0,75	0,618454
0,5	0,622774
0,25	0,627094
0	0,631415
-0,25	0,635735
1,5	0,605493



	x_	y_	k	l
1	0,03663	0,88467	-0,01089	-0,99994
2	0,10890	0,88238	-0,00642	-0,99998
3	0,18092	0,74257	-0,00379	-0,99999
4	0,25421	0,71909	0,00040	-1,00000
5	0,32714	0,67950	0,00426	-0,99999
6	0,40162	0,54851	0,00760	-0,99997
7	0,47504	0,53179	0,00981	-0,99995
8	0,54851	0,56092	0,01484	-0,99989
9	0,61955	0,68672	0,01728	-0,99985

1 meridijan

y	x
-20	-0,1909067
-10	-0,0819556
0	0,02699548
10	0,13594659
20	0,2448977
30	0,35384881

2 meridijan

y	x
-20	-0,02509218
-10	0,03907505
0	0,10324229
10	0,16740953
20	0,23157677
30	0,295744

3 meridijan

y	x
-20	0,102329
-10	0,140217
0	0,178104
10	0,215992
20	0,25388
30	0,291767

4 meridijan

y	x
-20	0,26251
-10	0,258502
0	0,254494
10	0,250486
20	0,246478
30	0,242471

5 meridijan

y	x
-20	0,415196
-10	0,372616
0	0,330037
10	0,287458
20	0,244878
30	0,202299

6 meridijan

y	x
-20	0,557691
-10	0,481738
0	0,405784
10	0,329831
20	0,253878
30	0,177924

7 meridijan

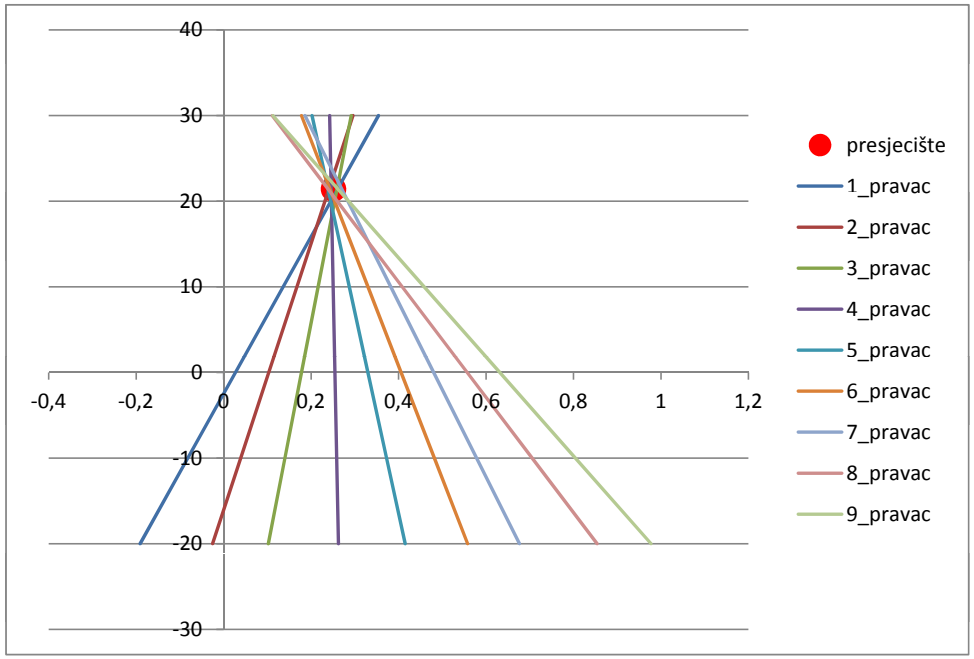
y	x
-20	0,67643751
-10	0,57834481
0	0,48025212
10	0,38215943
20	0,28406673
30	0,18597404

8 meridijan

y	x
-20	0,85376513
-10	0,70530283
0	0,55684052
10	0,40837822
20	0,25991592
30	0,11145361

9 meridijan

y	x
-20	0,977039
-10	0,804227
0	0,631415
10	0,458603
20	0,285791
30	0,112978



	x_=xi	y_=yi	ki	li		ki^2	li^2	ki*li	xi*li	yi*ki	xi*li-yi*ki	(xi*li-yi*ki)*li	(xi*li-yi*ki)*ki	x-xi	y-yi
1	0,03663	0,88467	-0,01089	-0,99994		0,00012	0,99988	0,010894	-0,03663	-0,00964	-0,026994	0,026992272	0,000294084	0,21427	20,54264
2	0,10890	0,88238	-0,00642	-0,99998		0,00004	0,99996	0,006416	-0,1089	-0,00566	-0,10324	0,103238041	0,00066245	0,14200	20,54494
3	0,18092	0,74257	-0,00379	-0,99999		0,00001	0,99999	0,003789	-0,18092	-0,00281	-0,178103	0,178101907	0,000674787	0,06999	20,68475
4	0,25421	0,71909	0,00040	-1,00000		0,00000	1,00000	-0,0004	-0,25421	0,000288	-0,254494	0,254494118	-0,000101998	-0,00330	20,70822
5	0,32714	0,67950	0,00426	-0,99999		0,00002	0,99998	-0,00426	-0,32714	0,002893	-0,330034	0,330031147	-0,001405251	-0,07624	20,74782
6	0,40162	0,54851	0,00760	-0,99997		0,00006	0,99994	-0,00759	-0,40161	0,004166	-0,405772	0,405760795	-0,003081888	-0,15071	20,87880
7	0,47504	0,53179	0,00981	-0,99995		0,00010	0,99990	-0,00981	-0,47501	0,005216	-0,480229	0,480205914	-0,004710469	-0,22413	20,89553
8	0,54851	0,56092	0,01484	-0,99989		0,00022	0,99978	-0,01484	-0,54845	0,008327	-0,556779	0,556717818	-0,008265161	-0,29761	20,86639
9	0,61955	0,68672	0,01728	-0,99985		0,00030	0,99970	-0,01728	-0,61945	0,011866	-0,63132	0,631226219	-0,010908353	-0,36864	20,74060
					suma	0,00087	8,99913	-0,03308	-2,95232	0,01464	-2,96697	2,96677	-0,02684		

		di
xS	0,250903	0,009545
yS	21,42732	0,010168
		0,008384
		0,004997
		0,012102
		0,007866
		0,019162
		0,012176
		0,01022
	zbroj svih odstupanja	0,09462
	srednja vrijednost odstupanja	0,010513

Prilog 2

Računski postupak za ispitivanje zakrivljenosti (kružnosti) paralela na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.5.4.

1. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,014292	1,234567	0,23661	20,19275	0,05598	407,74718	407,80316	20,19414	-0,00309	0,00309
2,00000	0,04059	1,23373	0,21032	20,19359	0,04423	407,78106	407,82530	20,19468	-0,00254	0,00254
3,00000	0,11148	1,23179	0,13942	20,19553	0,01944	407,85930	407,87873	20,19601	-0,00122	0,00122
4,00000	0,18333	1,23005	0,06757	20,19727	0,00457	407,92962	407,93419	20,19738	0,00015	0,00015
5,00000	0,25464	1,22941	-0,00374	20,19791	0,00001	407,95547	407,95549	20,19791	0,00068	0,00068
6,00000	0,32573	1,22884	-0,07483	20,19848	0,00560	407,97854	407,98414	20,19862	0,00139	0,00139
7,00000	0,35101	1,22880	-0,10011	20,19851	0,01002	407,97999	407,99002	20,19876	0,00154	0,00154
8,00000	0,63666	1,23069	-0,38576	20,19662	0,14881	407,90365	408,05245	20,20031	0,00308	0,00308
sum								161,57781	0,00000	0,01370
										0,00171

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,19723

2. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,013821	1,184011	0,23708	20,24331	0,05621	409,79146	409,84767	20,24469	-0,00259	0,00259
2,00000	0,039967	1,182879	0,21094	20,24444	0,04449	409,83730	409,88179	20,24554	-0,00175	0,00175
3,00000	0,111149	1,181079	0,13975	20,24624	0,01953	409,91018	409,92971	20,24672	-0,00056	0,00056
4,00000	0,182819	1,180298	0,06808	20,24702	0,00464	409,94180	409,94644	20,24713	-0,00015	0,00015
5,00000	0,214934	1,179709	0,03597	20,24761	0,00129	409,96566	409,96695	20,24764	0,00036	0,00036
6,00000	0,254258	1,179760	-0,00335	20,24756	0,00001	409,96359	409,96360	20,24756	0,00027	0,00027
7,00000	0,325400	1,179213	-0,07450	20,24810	0,00555	409,98574	409,99129	20,24824	0,00096	0,00096
8,00000	0,63633	1,18024	-0,38542	20,24708	0,14855	409,94407	410,09262	20,25074	0,00346	0,00346
sum								161,97827	0,00000	0,01010
										0,00126

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,24728

3. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,013937	1,133467	0,23697	20,29385	0,05615	411,84037	411,89653	20,29523	-0,00172	0,00172
2,00000	0,039330	1,132582	0,21157	20,29474	0,04476	411,87629	411,92106	20,29584	-0,00112	0,00112
3,00000	0,110622	1,131373	0,14028	20,29594	0,01968	411,92537	411,94505	20,29643	-0,00053	0,00053
4,00000	0,182557	1,130513	0,06835	20,29680	0,00467	411,96028	411,96495	20,29692	-0,00004	0,00004
5,00000	0,220873	1,130360	0,03003	20,29696	0,00090	411,96649	411,96739	20,29698	0,00002	0,00002
6,00000	0,254273	1,130706	-0,00337	20,29661	0,00001	411,95244	411,95246	20,29661	-0,00035	0,00035
7,00000	0,286358	1,129891	-0,03545	20,29743	0,00126	411,98553	411,98678	20,29746	0,00050	0,00050
8,00000	0,63670	1,13079	-0,38580	20,29653	0,14884	411,94912	412,09796	20,30020	0,00324	0,00324
sum								162,37567	0,00000	0,00752
										0,00094

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,29696

4. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,01385	1,083305	0,23705	20,34401	0,05619	413,87885	413,93504	20,34539	-0,00123	0,00123
2,00000	0,038773	1,083093	0,21213	20,34422	0,04500	413,88748	413,93248	20,34533	-0,00130	0,00130
3,00000	0,110287	1,082298	0,14062	20,34502	0,01977	413,91982	413,93960	20,34551	-0,00112	0,00112
4,00000	0,138370	1,081942	0,11253	20,34538	0,01266	413,93431	413,94697	20,34569	-0,00094	0,00094
5,00000	0,182019	1,081358	0,06888	20,34596	0,00475	413,95807	413,96282	20,34608	-0,00055	0,00055
6,00000	0,254168	1,080521	-0,00326	20,34680	0,00001	413,99213	413,99214	20,34680	0,00017	0,00017
7,00000	0,292674	1,080014	-0,04177	20,34730	0,00174	414,01277	414,01451	20,34735	0,00072	0,00072
8,00000	0,63676	1,08010	-0,38586	20,34722	0,14889	414,00939	414,15828	20,35088	0,00425	0,00425
sum								162,77302	0,00000	0,01028
										0,00129

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,34663

5. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,014178	1,032902	0,23673	20,39442	0,05604	415,93219	415,98823	20,39579	-0,00059	0,00059
2,00000	0,038263	1,032688	0,21264	20,39463	0,04522	415,94092	415,98613	20,39574	-0,00064	0,00064
3,00000	0,109842	1,032345	0,14106	20,39497	0,01990	415,95491	415,97481	20,39546	-0,00091	0,00091
4,00000	0,147783	1,031958	0,10312	20,39536	0,01063	415,97069	415,98133	20,39562	-0,00076	0,00076
5,00000	0,181799	1,032284	0,06910	20,39503	0,00478	415,95740	415,96217	20,39515	-0,00122	0,00122
6,00000	0,254129	1,031961	-0,00323	20,39536	0,00001	415,97057	415,97058	20,39536	-0,00102	0,00102
7,00000	0,294937	1,030780	-0,04403	20,39654	0,00194	416,01875	416,02069	20,39659	0,00021	0,00021
8,00000	0,63663	1,02966	-0,38573	20,39765	0,14879	416,06431	416,21310	20,40130	0,00493	0,00493
sum								163,17100	0,00000	0,01027
										0,00128

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,39638

6. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,014262	0,982752	0,23664	20,44457	0,05600	417,98026	418,03626	20,44594	-0,00085	0,00085
2,00000	0,037780	0,982555	0,21312	20,44476	0,04542	417,98832	418,03374	20,44587	-0,00092	0,00092
3,00000	0,109264	0,982429	0,14164	20,44489	0,02006	417,99347	418,01353	20,44538	-0,00141	0,00141
4,00000	0,14547	0,98162	0,10544	20,44570	0,01112	418,02655	418,03767	20,44597	-0,00082	0,00082
5,00000	0,18142	0,98133	0,06948	20,44599	0,00483	418,03833	418,04316	20,44610	-0,00069	0,00069
6,00000	0,25397	0,98072	-0,00307	20,44660	0,00001	418,06340	418,06340	20,44660	-0,00019	0,00019
7,00000	0,32604	0,98065	-0,07514	20,44667	0,00565	418,06630	418,07194	20,44681	0,00002	0,00002
8,00000	0,63670	0,97931	-0,38580	20,44801	0,14884	418,12098	418,26982	20,45165	0,00486	0,00486
sum								163,57431	0,00000	0,00975
										0,00122

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,44679

8. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,014225	0,882191	0,23668	20,54513	0,05602	422,10223	422,15824	20,54649	-0,00157	0,00157
2,00000	0,233204	0,879950	0,01770	20,54737	0,00031	422,19432	422,19463	20,54738	-0,00068	0,00068
3,00000	0,253948	0,880139	-0,00304	20,54718	0,00001	422,18655	422,18656	20,54718	-0,00088	0,00088
4,00000	0,326324	0,880132	-0,07542	20,54719	0,00569	422,18684	422,19253	20,54732	-0,00073	0,00073
5,00000	0,399171	0,879651	-0,14827	20,54767	0,02198	422,20660	422,22859	20,54820	0,00015	0,00015
6,00000	0,45344	0,87991	-0,20253	20,54741	0,04102	422,19596	422,23698	20,54841	0,00035	0,00035
7,00000	0,63703	0,87953	-0,38612	20,54779	0,14909	422,21158	422,36067	20,55142	0,00336	0,00336
8,00000										
sum								143,83639	0,00000	0,00771
										0,00110

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,54806

9. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,01439	0,830969	0,23651	20,59635	0,05594	424,20958	424,26552	20,59771	-0,00180	0,00180
2,00000	0,22554	0,82876	0,02536	20,59856	0,00064	424,30049	424,30114	20,59857	-0,00093	0,00093
3,00000	0,25344	0,82864	-0,00254	20,59868	0,00001	424,30573	424,30573	20,59868	-0,00082	0,00082
4,00000	0,32580	0,82795	-0,07489	20,59936	0,00561	424,33378	424,33939	20,59950	0,00000	0,00000
5,00000	0,39946	0,82814	-0,14855	20,59918	0,02207	424,32624	424,34831	20,59972	0,00021	0,00021
6,00000	0,47261	0,82860	-0,22171	20,59872	0,04915	424,30725	424,35640	20,59991	0,00041	0,00041
7,00000	0,54468	0,82887	-0,29378	20,59845	0,08630	424,29625	424,38255	20,60055	0,00105	0,00105
8,00000	0,61713	0,83005	-0,36623	20,59727	0,13412	424,24752	424,38164	20,60053	0,00102	0,00102
9,00000	0,63735	0,83059	-0,38644	20,59673	0,14934	424,22519	424,37453	20,60035	0,00085	0,00085
sum								185,39551	0,00000	0,00709
										0,00079

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,59950

10. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,015133	0,779909	0,23577	20,64741	0,05559	426,31548	426,37107	20,64875	-0,00102	0,00102
2,00000	0,21054	0,77880	0,04036	20,64852	0,00163	426,36128	426,36291	20,64856	-0,00121	0,00121
3,00000	0,25348	0,77894	-0,00257	20,64838	0,00001	426,35546	426,35546	20,64838	-0,00139	0,00139
4,00000	0,32603	0,77844	-0,07513	20,64888	0,00564	426,37631	426,38196	20,64902	-0,00075	0,00075
5,00000	0,39971	0,77818	-0,14881	20,64913	0,02214	426,38676	426,40890	20,64967	-0,00010	0,00010
6,00000	0,47290	0,77874	-0,22199	20,64858	0,04928	426,36372	426,41300	20,64977	0,00000	0,00000
7,00000	0,54526	0,77885	-0,29436	20,64847	0,08665	426,35917	426,44582	20,65056	0,00079	0,00079
8,00000	0,61783	0,77910	-0,36693	20,64821	0,13464	426,34873	426,48336	20,65147	0,00170	0,00170
9,00000	0,63709	0,77917	-0,38618	20,64815	0,14914	426,34600	426,49514	20,65176	0,00199	0,00199
sum								185,84794	0,00000	0,00896
										0,00100

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,64977

11. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,015546	0,729422	0,23536	20,69790	0,05539	428,40288	428,45828	20,69923	-0,00127	0,00127
2,00000	0,20441	0,72800	0,04649	20,69931	0,00216	428,46158	428,46375	20,69937	-0,00114	0,00114
3,00000	0,25363	0,72772	-0,00272	20,69960	0,00001	428,47334	428,47335	20,69960	-0,00091	0,00091
4,00000	0,32625	0,72763	-0,07534	20,69969	0,00568	428,47703	428,48270	20,69982	-0,00068	0,00068
5,00000	0,40022	0,72751	-0,14931	20,69980	0,02229	428,48187	428,50416	20,70034	-0,00016	0,00016
6,00000	0,47332	0,72781	-0,22242	20,69951	0,04947	428,46962	428,51909	20,70070	0,00020	0,00020
7,00000	0,54597	0,72814	-0,29507	20,69917	0,08706	428,45583	428,54290	20,70128	0,00077	0,00077
8,00000	0,61871	0,72855	-0,36781	20,69876	0,13528	428,43882	428,57410	20,70203	0,00153	0,00153
9,00000	0,63723	0,72876	-0,38633	20,69855	0,14925	428,43012	428,57937	20,70216	0,00165	0,00165
sum								186,30453	0,00000	0,00831
										0,00092

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,70050

12. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,01595	0,67905	0,23495	20,74827	0,05520	430,49069	430,54589	20,74960	-0,00091	0,00091
2,00000	0,17337	0,67844	0,07753	20,74888	0,00601	430,51601	430,52202	20,74902	-0,00149	0,00149
3,00000	0,25376	0,67853	-0,00286	20,74879	0,00001	430,51215	430,51215	20,74879	-0,00172	0,00172
4,00000	0,32640	0,67776	-0,07550	20,74956	0,00570	430,54427	430,54997	20,74970	-0,00081	0,00081
5,00000	0,40051	0,67741	-0,14960	20,74990	0,02238	430,55854	430,58092	20,75044	-0,00007	0,00007
6,00000	0,47377	0,67734	-0,22286	20,74998	0,04967	430,56149	430,61116	20,75117	0,00066	0,00066
7,00000	0,54676	0,67816	-0,29585	20,74916	0,08753	430,52746	430,61499	20,75126	0,00075	0,00075
8,00000	0,61959	0,67839	-0,36869	20,74893	0,13593	430,51808	430,65401	20,75220	0,00169	0,00169
9,00000	0,63785	0,67852	-0,38695	20,74880	0,14973	430,51260	430,66233	20,75241	0,00189	0,00189
sum								186,75460	0,00000	0,01001
										0,00111

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,75051

13. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,016340	0,628740	0,23456	20,79858	0,05502	432,58083	432,63585	20,79990	-0,00093	0,00093
2,00000	0,180230	0,627543	0,07067	20,79977	0,00499	432,63062	432,63562	20,79989	-0,00094	0,00094
3,00000	0,253881	0,627972	-0,00298	20,79935	0,00001	432,61278	432,61279	20,79935	-0,00148	0,00148
4,00000	0,326550	0,627687	-0,07565	20,79963	0,00572	432,62463	432,63036	20,79977	-0,00106	0,00106
5,00000	0,400833	0,627164	-0,14993	20,80015	0,02248	432,64639	432,66887	20,80069	-0,00014	0,00014
6,00000	0,474393	0,627451	-0,22349	20,79987	0,04995	432,63445	432,68440	20,80107	0,00024	0,00024
7,00000	0,547341	0,628007	-0,29644	20,79931	0,08788	432,61132	432,69920	20,80142	0,00059	0,00059
8,00000	0,620634	0,628007	-0,36973	20,79931	0,13670	432,61132	432,74802	20,80260	0,00177	0,00177
9,00000	0,63792	0,62814	-0,38701	20,79918	0,14978	432,60579	432,75557	20,80278	0,00195	0,00195
sum								187,20747	0,00000	0,00909
										0,00101

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,80083

14. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,016932	0,578356	0,23397	20,84896	0,05474	434,67920	434,73394	20,85027	-0,00122	0,00122
2,00000	0,179974	0,577380	0,07093	20,84994	0,00503	434,71990	434,72493	20,85006	-0,00143	0,00143
3,00000	0,253968	0,576563	-0,00306	20,85075	0,00001	434,75397	434,75398	20,85075	-0,00074	0,00074
4,00000	0,327161	0,577247	-0,07626	20,85007	0,00582	434,72545	434,73126	20,85021	-0,00128	0,00128
5,00000	0,401076	0,575950	-0,15017	20,85137	0,02255	434,77953	434,80208	20,85191	0,00042	0,00042
6,00000	0,474980	0,576370	-0,22408	20,85095	0,05021	434,76202	434,81223	20,85215	0,00066	0,00066
7,00000	0,548145	0,577075	-0,29724	20,85024	0,08835	434,73262	434,82097	20,85236	0,00087	0,00087
8,00000	0,621509	0,577780	-0,37061	20,84954	0,13735	434,70322	434,84057	20,85283	0,00134	0,00134
9,00000	0,63791	0,57804	-0,38700	20,84928	0,14977	434,69234	434,84211	20,85287	0,00138	0,00138
sum								187,66342	0,00000	0,00933
										0,00104

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,85149

7. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,014114	0,932388	0,23679	20,49493	0,05607	420,04214	420,09821	20,49630	-0,00164	0,00164
2,00000	0,176392	0,929852	0,07451	20,49747	0,00555	420,14610	420,15165	20,49760	-0,00033	0,00033
3,00000	0,216711	0,930108	0,03419	20,49721	0,00117	420,13560	420,13677	20,49724	-0,00070	0,00070
4,00000	0,253995	0,930132	-0,00309	20,49719	0,00001	420,13462	420,13463	20,49719	-0,00075	0,00075
5,00000	0,326040	0,929984	-0,07514	20,49733	0,00565	420,14069	420,14633	20,49747	-0,00046	0,00046
6,00000	0,364895	0,929807	-0,11399	20,49751	0,01299	420,14794	420,16094	20,49783	-0,00011	0,00011
7,00000	0,398499	0,930021	-0,14760	20,49730	0,02178	420,13917	420,16095	20,49783	-0,00011	0,00011
8,00000	0,63685	0,92893	-0,38594	20,49839	0,14895	420,18394	420,33289	20,50202	0,00409	0,00409
sum								163,98347	0,00000	0,00818
										0,00102

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,49793

15. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,017072	0,527665	0,23383	20,89965	0,05468	436,79548	436,85016	20,90096	-0,00071	0,00071
2,00000	0,147778	0,527178	0,10313	20,90014	0,01063	436,81584	436,82647	20,90039	-0,00128	0,00128
3,00000	0,179864	0,527262	0,07104	20,90006	0,00505	436,81233	436,81737	20,90018	-0,00149	0,00149
4,00000	0,253989	0,526790	-0,00309	20,90053	0,00001	436,83206	436,83206	20,90053	-0,00114	0,00114
5,00000	0,327655	0,525900	-0,07675	20,90142	0,00589	436,86926	436,87515	20,90156	-0,00011	0,00011
6,00000	0,401865	0,525440	-0,15096	20,90188	0,02279	436,88849	436,91128	20,90242	0,00075	0,00075
7,00000	0,475169	0,525492	-0,22427	20,90183	0,05030	436,88631	436,93661	20,90303	0,00136	0,00136
8,00000	0,63816	0,52661	-0,38725	20,90070	0,14997	436,83945	436,98942	20,90429	0,00262	0,00262
sum								167,21336	0,00000	0,00947
										0,00118

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,90167

16. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,016967	0,477320	0,23394	20,95000	0,05473	438,90240	438,95713	20,95130	-0,00069	0,00069
2,00000	0,129147	0,476928	0,12176	20,95039	0,01482	438,91883	438,93365	20,95074	-0,00125	0,00125
3,00000	0,179806	0,476404	0,07110	20,95091	0,00505	438,94078	438,94584	20,95103	-0,00096	0,00096
4,00000	0,254022	0,475715	-0,00312	20,95160	0,00001	438,96965	438,96966	20,95160	-0,00039	0,00039
5,00000	0,327584	0,475324	-0,07668	20,95199	0,00588	438,98604	438,99192	20,95213	0,00014	0,00014
6,00000	0,402312	0,475512	-0,15141	20,95181	0,02292	438,97816	439,00108	20,95235	0,00036	0,00036
7,00000	0,460352	0,475959	-0,20945	20,95136	0,04387	438,95943	439,00330	20,95241	0,00041	0,00041
8,00000	0,63827	0,47650	-0,38737	20,95082	0,15006	438,93676	439,08682	20,95440	0,00240	0,00240
sum								167,61597	0,00000	0,00661
										0,00083

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	20,95200

17. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,017462	0,427229	0,23344	21,00009	0,05449	441,00372	441,05822	21,00139	-0,00144	0,00144
2,00000	0,031092	0,426752	0,21981	21,00057	0,04832	441,02376	441,07207	21,00172	-0,00111	0,00111
3,00000	0,105582	0,425618	0,14532	21,00170	0,02112	441,07139	441,09251	21,00220	-0,00062	0,00062
4,00000	0,179689	0,424567	0,07121	21,00275	0,00507	441,11553	441,12061	21,00287	0,00005	0,00005
5,00000	0,254226	0,424138	-0,00332	21,00318	0,00001	441,13355	441,13357	21,00318	0,00036	0,00036
6,00000	0,328007	0,424270	-0,07710	21,00305	0,00594	441,12801	441,13395	21,00319	0,00037	0,00037
7,00000	0,402488	0,424349	-0,15158	21,00297	0,02298	441,12469	441,14767	21,00352	0,00069	0,00069
8,00000	0,455624	0,424665	-0,20472	21,00265	0,04191	441,11142	441,15333	21,00365	0,00083	0,00083
9,00000	0,638655	0,427211	-0,38775	21,00011	0,15035	441,00448	441,15483	21,00369	0,00086	0,00086
sum								189,02540	0,00000	0,00632
										0,00070

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	21,00282

18. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,017693	0,377026	0,23321	21,05029	0,05439	443,11478	443,16916	21,05158	-0,00156	0,00156
2,00000	0,120575	0,374982	0,13033	21,05234	0,01699	443,20084	443,21782	21,05274	-0,00041	0,00041
3,00000	0,17954	0,37436	0,07136	21,05296	0,00509	443,22698	443,23208	21,05308	-0,00007	0,00007
4,00000	0,25445	0,37418	-0,00355	21,05314	0,00001	443,23465	443,23466	21,05314	-0,00001	0,00001
5,00000	0,32835	0,37427	-0,07745	21,05305	0,00600	443,23086	443,23685	21,05319	0,00004	0,00004
6,00000	0,40285	0,37453	-0,15195	21,05279	0,02309	443,21995	443,24304	21,05334	0,00019	0,00019
7,00000	0,47656	0,37461	-0,22565	21,05270	0,05092	443,21633	443,26725	21,05391	0,00077	0,00077
8,00000	0,63855	0,37669	-0,38764	21,05063	0,15027	443,12888	443,27915	21,05420	0,00105	0,00105
sum								168,42518	0,00000	0,00410
										0,00051
xs	0,25090									
ys	21,42732									
ro	21,05315									

19. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,017934	0,327093	0,23297	21,10022	0,05427	445,21948	445,27375	21,10151	-0,00158	0,00158
2,00000	0,179304	0,324801	0,07160	21,10252	0,00513	445,31621	445,32133	21,10264	-0,00046	0,00046
3,00000	0,218957	0,324695	0,03195	21,10262	0,00102	445,32068	445,32170	21,10265	-0,00045	0,00045
4,00000	0,25459	0,32471	-0,00369	21,10261	0,00001	445,31996	445,31998	21,10261	-0,00049	0,00049
5,00000	0,32861	0,32414	-0,07770	21,10318	0,00604	445,34427	445,35031	21,10332	0,00023	0,00023
6,00000	0,37415	0,32456	-0,12325	21,10276	0,01519	445,32630	445,34149	21,10312	0,00002	0,00002
7,00000	0,40325	0,32454	-0,15235	21,10278	0,02321	445,32743	445,35065	21,10333	0,00024	0,00024
8,00000	0,47684	0,32469	-0,22594	21,10263	0,05105	445,32085	445,37190	21,10384	0,00074	0,00074
9,00000	0,63872	0,32603	-0,38782	21,10129	0,15040	445,26430	445,41470	21,10485	0,00175	0,00175
sum								189,92786	0,00000	0,00596
										0,00066
xs	0,25090									
ys	21,42732									
ro	21,10310									

20. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,01809	0,27706	0,23282	21,15026	0,05420	447,33340	447,38760	21,15154	-0,00219	0,00219
2,00000	0,25431	0,27424	-0,00340	21,15308	0,00001	447,45282	447,45283	21,15308	-0,00065	0,00065
3,00000	0,29468	0,27378	-0,04377	21,15354	0,00192	447,47207	447,47399	21,15358	-0,00015	0,00015
4,00000	0,32889	0,27345	-0,07799	21,15386	0,00608	447,48595	447,49203	21,15401	0,00028	0,00028
5,00000	0,40366	0,27410	-0,15276	21,15322	0,02334	447,45874	447,48208	21,15377	0,00004	0,00004
6,00000	0,47724	0,27446	-0,22633	21,15286	0,05123	447,44347	447,49470	21,15407	0,00034	0,00034
7,00000	0,51440	0,27438	-0,26349	21,15294	0,06943	447,44686	447,51628	21,15458	0,00085	0,00085
8,00000	0,55267	0,27504	-0,30177	21,15227	0,09106	447,41868	447,50974	21,15443	0,00070	0,00070
9,00000	0,63932	0,27638	-0,38842	21,15094	0,15087	447,36208	447,51295	21,15450	0,00077	0,00077
sum								190,38356	0,00000	0,00597
										0,00066

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	21,15373

21. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,01825	0,22698	0,23265	21,20034	0,05413	449,45436	449,50848	21,20162	-0,00239	0,00239
2,00000	0,25471	0,22415	-0,00380	21,20317	0,00001	449,57453	449,57454	21,20317	-0,00083	0,00083
3,00000	0,32935	0,22331	-0,07844	21,20401	0,00615	449,61015	449,61631	21,20416	0,00016	0,00016
4,00000	0,40402	0,22375	-0,15311	21,20357	0,02344	449,59149	449,61494	21,20413	0,00012	0,00012
5,00000	0,47776	0,22402	-0,22686	21,20329	0,05147	449,57966	449,63113	21,20451	0,00051	0,00051
6,00000	0,51862	0,22432	-0,26771	21,20300	0,07167	449,56728	449,63895	21,20469	0,00069	0,00069
7,00000	0,55343	0,22488	-0,30253	21,20244	0,09152	449,54336	449,63489	21,20460	0,00059	0,00059
8,00000	0,63884	0,22572	-0,38794	21,20160	0,15050	449,50778	449,65828	21,20515	0,00115	0,00115
sum								169,63201	0,00000	0,00643
										0,00080

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	21,20400

22. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,01870	0,17686	0,23220	21,25046	0,05392	451,58203	451,63595	21,25173	-0,00215	0,00215
2,00000	0,32965	0,17359	-0,07875	21,25373	0,00620	451,72098	451,72718	21,25387	-0,00001	0,00001
3,00000	0,36302	0,17367	-0,11212	21,25365	0,01257	451,71754	451,73011	21,25394	0,00006	0,00006
4,00000	0,40452	0,17409	-0,15362	21,25323	0,02360	451,69981	451,72341	21,25379	-0,00009	0,00009
5,00000	0,47824	0,17474	-0,22734	21,25258	0,05168	451,67223	451,72391	21,25380	-0,00008	0,00008
6,00000	0,55415	0,17512	-0,30325	21,25220	0,09196	451,65612	451,74808	21,25437	0,00049	0,00049
7,00000	0,61309	0,17577	-0,36219	21,25154	0,13118	451,62811	451,75929	21,25463	0,00075	0,00075
8,00000	0,63885	0,17594	-0,38795	21,25138	0,15051	451,62105	451,77156	21,25492	0,00104	0,00104
sum								170,03104	0,00000	0,00467
										0,00058

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	21,25388

23. paralela

	xi	yi	xs-xi	ys-xi	(xs-xi)^2	(ys-yi)^2	(xs-xi)^2+(ys-yi)^2	sqrt	di	abs(di)
1,00000	0,01986	0,12739	0,23104	21,29993	0,05338	453,68692	453,74030	21,30118	-0,00267	0,00267
2,00000	0,38536	0,12389	-0,13446	21,30343	0,01808	453,83611	453,85419	21,30385	0,00000	0,00000
3,00000	0,40490	0,12386	-0,15400	21,30346	0,02371	453,83731	453,86102	21,30401	0,00016	0,00016
4,00000	0,45489	0,12409	-0,20399	21,30323	0,04161	453,82755	453,86916	21,30421	0,00035	0,00035
5,00000	0,47882	0,12428	-0,22791	21,30304	0,05194	453,81945	453,87140	21,30426	0,00041	0,00041
6,00000	0,58092	0,12531	-0,33002	21,30201	0,10891	453,77570	453,88461	21,30457	0,00072	0,00072
7,00000	0,63930	0,12597	-0,38839	21,30134	0,15085	453,74724	453,89809	21,30488	0,00103	0,00103
sum								149,12696	0,00000	0,00534
										0,00076

xs	0,25090
ys	21,42732
ro	21,30385

Srednja apsolutna odstupanja za svaku paralelu

Broj paralele	Odstupanje
1	0,0017
2	0,0013
3	0,0009
4	0,0013
5	0,0013
6	0,0012
7	0,0010
8	0,0011
9	0,0008
10	0,0010
11	0,0009
12	0,0011
13	0,0010
14	0,0010
15	0,0012
16	0,0008
17	0,0007
18	0,0005
19	0,0007
20	0,0007
21	0,0008
22	0,0006
23	0,0008
	0,0224
srednja vrijednost	0,0010

Prilog 3

Računski postupak za određivanje udaljenosti između meridijana i paralela na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.6.1.

1. meridijan

	xi	yi	di^2	di	
1	0,040586	1,233728	0,002586	0,050853	0,251189
2	0,039967	1,182879	0,002530	0,050301	0,050238
3	0,039330	1,132582	0,002449	0,049492	
4	0,038773	1,083093	0,002541	0,050408	
5	0,038263	1,032688	0,002514	0,050135	
	0,037780	0,982555			

2. meridijan

	xi	yi	di^2	di	
1	0,111481	1,231791	0,002572	0,0507	0,2494
2	0,111149	1,181079	0,002471	0,0497	0,0499
3	0,110622	1,131373	0,002408	0,0491	
4	0,110287	1,082298	0,002496	0,0500	
5	0,109842	1,032345	0,002492	0,0499	
	0,109264	0,982429			

3. meridijan

	xi	yi	di^2	di	
1	0,183329	1,230050	0,002476	0,049755	0,248726
2	0,182819	1,180298	0,002479	0,049786	0,302744
3	0,182557	1,130513	0,002417	0,049158	0,050134
4	0,182019	1,081358	0,002408	0,049074	
5	0,181799	1,032284	0,002596	0,050953	
	0,181423	0,981332			
6	0,180230	0,627543	0,002516	0,050164	
7	0,179974	0,577380	0,002512	0,050118	
8	0,179864	0,527262	0,002587	0,050858	
9	0,179806	0,476404	0,002687	0,051837	
10	0,179689	0,424567	0,002521	0,050206	
11	0,179542	0,374361	0,002456	0,049561	
	0,179304	0,324801			

4. meridijan

	xi	yi	di^2	di	
1	0,2546	1,2294	0,0025	0,0497	1,0053
2	0,2543	1,1798	0,0024	0,0491	0,0503
3	0,2543	1,1307	0,0025	0,0502	
4	0,2542	1,0805	0,0024	0,0486	
5	0,2541	1,0320	0,0026	0,0512	
6	0,2540	0,9807	0,0026	0,0506	
7	0,2540	0,9301	0,0025	0,0500	
8	0,2539	0,8801	0,0027	0,0515	
9	0,2534	0,8286	0,0025	0,0497	
10	0,2535	0,7789	0,0026	0,0512	
11	0,2536	0,7277	0,0024	0,0492	

12	0,2538	0,6785	0,0026	0,0506
13	0,2539	0,6280	0,0026	0,0514
14	0,2540	0,5766	0,0025	0,0498
15	0,2540	0,5268	0,0026	0,0511
16	0,2540	0,4757	0,0027	0,0516
17	0,2542	0,4241	0,0025	0,0500
18	0,2545	0,3742	0,0024	0,0495
19	0,2546	0,3247	0,0025	0,0505
20	0,2543	0,2742	0,0025	0,0501
	0,2547	0,2241		

5. meridijan

	xi	yi	di^2	di	
1	0,325734	1,228839	0,002463	0,049627	0,049627
	0,325400	1,179213			0,807077
					0,050394
2	0,326043	0,980648	0,002567	0,050664	
3	0,326040	0,929984	0,002485	0,049853	
4	0,326324	0,880132	0,002723	0,052181	
5	0,325797	0,827954	0,002452	0,049519	
6	0,326031	0,778436	0,002581	0,050805	
7	0,326246	0,727631	0,002487	0,049874	
8	0,326403	0,677757	0,002507	0,050070	
9	0,326550	0,627687	0,002545	0,050444	
10	0,327161	0,577247	0,002637	0,051349	
11	0,327655	0,525900	0,002558	0,050576	
12	0,327584	0,475324	0,002607	0,051056	
13	0,328007	0,424270	0,002500	0,050002	
14	0,328350	0,374269	0,002513	0,050134	
15	0,328608	0,324136	0,002569	0,050683	
16	0,328891	0,273454	0,002515	0,050151	
17	0,329347	0,223305	0,002472	0,049717	
	0,329654	0,173589			

6. meridijan

	xi	yi	di^2	di	
1	0,398499	0,930021	0,002538	0,050374	0,806190
2	0,399171	0,879651	0,002654	0,051515	0,050387
3	0,399456	0,828137	0,002495	0,049955	
4	0,399709	0,778183	0,002568	0,050672	
5	0,400215	0,727514	0,002510	0,050102	
6	0,400508	0,677413	0,002525	0,050250	
7	0,400833	0,627164	0,002623	0,051215	
8	0,401076	0,575950	0,002552	0,050516	
9	0,401865	0,525440	0,002493	0,049930	
10	0,402312	0,475512	0,002618	0,051163	
11	0,402488	0,424349	0,002482	0,049822	
12	0,402851	0,374528	0,002499	0,049995	
13	0,403253	0,324535	0,002544	0,050440	
14	0,403664	0,274097	0,002535	0,050353	
15	0,404015	0,223745	0,002466	0,049661	
16	0,404523	0,174087	0,002523	0,050228	
	0,404900	0,123860			

7. meridijan

	xi	yi	di^2	di	
1	0,472611	0,828598	0,002486	0,049858	0,303118
2	0,472897	0,778741	0,002594	0,050933	0,250346
3	0,473320	0,727810	0,002547	0,050470	0,050315
4	0,473768	0,677342	0,002490	0,049895	
5	0,474393	0,627451	0,002610	0,051084	
6	0,474980	0,576370	0,002589	0,050878	
	0,475169	0,525492			
7	0,476557	0,374614	0,002492	0,049924	
8	0,476841	0,324691	0,002524	0,050235	
9	0,477238	0,274458	0,002544	0,050437	
10	0,477763	0,224024	0,002430	0,049290	
11	0,478242	0,174736	0,002546	0,050460	
	0,478817	0,124279			

8. meridijan

	xi	yi	di^2	di	
1	0,544679	0,828865	0,002502	0,050017	0,251814
2	0,545260	0,778851	0,002572	0,050713	0,099940
3	0,545971	0,728143	0,002499	0,049987	0,050251
4	0,546756	0,678162	0,002516	0,050158	
5	0,547341	0,628007	0,002595	0,050938	
	0,548145	0,577075			
6	0,552673	0,275044	0,002517	0,050170	
7	0,553432	0,224880	0,002477	0,049770	
	0,554154	0,175115			

9. meridijan

	xi	yi	di^2	di	
1	0,617131	0,830048	0,002596	0,050949	0,252307
2	0,617832	0,779104	0,002556	0,050558	0,050461
3	0,618711	0,728554	0,002517	0,050174	
4	0,619589	0,678388	0,002539	0,050392	
5	0,620634	0,628007	0,002524	0,050235	
	0,621509	0,577780			

1	0,0502	0,050238
2	0,0499	0,0499
3	0,0501	0,050134
4	0,0503	0,0503
5	0,0504	0,050394
6	0,0504	0,050387
7	0,0503	0,050315
8	0,0503	0,050251
9	0,0505	0,050461
	0,4523	
srednja vrijednost	0,0503	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	broj meridijana
1-2	0,0509	0,0507	0,0498	0,0497	0,0496					0,0501
2-3	0,0503	0,0497	0,0498	0,0491						0,0497
3-4	0,0495	0,0491	0,0492	0,0502						0,0495
4-5	0,0504	0,0500	0,0491	0,0486						0,0495
5-6	0,0501	0,0499	0,0510	0,0512						0,0506
6-7				0,0506	0,0507					0,0506
7-8				0,0500	0,0499	0,0504				0,0501
8-9				0,0515	0,0522	0,0515				0,0517
9-10				0,0497	0,0495	0,0500	0,0499	0,0500	0,0509	0,0500
10-11				0,0512	0,0508	0,0507	0,0509	0,0507	0,0506	0,0508
11-12				0,0492	0,0499	0,0501	0,0505	0,0500	0,0502	0,0500
12-13				0,0506	0,0501	0,0503	0,0499	0,0502	0,0504	0,0502
13-14			0,0502	0,0514	0,0504	0,0512	0,0511	0,0509	0,0502	0,0508
14-15			0,0501	0,0498	0,0513	0,0505	0,0509			0,0505
15-16			0,0509	0,0511	0,0506	0,0499				0,0506
16-17			0,0518	0,0516	0,0511	0,0512				0,0514
17-18			0,0502	0,0500	0,0500	0,0498				0,0500
18-19			0,0496	0,0495	0,0501	0,0500	0,0499			0,0498
19-20				0,0505	0,0507	0,0504	0,0502			0,0505
20-21				0,0501	0,0502	0,0504	0,0504	0,0502		0,0502
21-22					0,0497	0,0497	0,0493	0,0498		0,0496
22-23						0,0502	0,0505			0,0503
										0,0503

Prilog 4

Računski postupak određivanja kuta pod kojim se sijeku meridijani na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.6.2.

			xi_	yi_	xi_-xS	yi_-yS	xi+1_-xS	yi+1_-yS	(xi_-xS)^2	(yi_-yS)^2	(xi+1_-xS)^2	(yi+1_-yS)^2
xS	0,250903	1	0,036634	0,884673	-0,21427	-20,542644	-0,14199898	-20,5449388	0,045911274	422,0002335	0,02016371	422,0945108
yS	21,42732	2	0,108904	0,882379	-0,142	-20,544939	-0,06998537	-20,6847495	0,02016371	422,0945108	0,004897952	427,85886
		3	0,180918	0,742568	-0,06999	-20,684749	0,003302702	-20,7082229	0,004897952	427,85886	1,09078E-05	428,8304977
		4	0,254206	0,719095	0,003303	-20,708223	0,07624063	-20,7478222	1,09078E-05	428,8304977	0,005812634	430,4721244
		5	0,327144	0,679495	0,076241	-20,747822	0,150714803	-20,8788035	0,005812634	430,4721244	0,022714952	435,9244364
		6	0,401618	0,548514	0,150715	-20,878804	0,22413239	-20,8955271	0,022714952	435,9244364	0,050235328	436,6230511
		7	0,475036	0,531791	0,224132	-20,895527	0,297609664	-20,8663935	0,050235328	436,6230511	0,088571512	435,4063797
		8	0,548513	0,560924	0,29761	-20,866394	0,368644147	-20,740599	0,088571512	435,4063797	0,135898507	430,1724481
		9	0,619547	0,686719	0,368644	-20,740599						

			cosalfai	alfai [rad]	alfai [°]	alfai			
						°	'	'	''
20,54376	20,54543	422,0804	0,999994	0,003519	0,201599	0	12,096	12	5,76
20,54543	20,68487	424,9795	0,999994	0,003528	0,202145	0	12,129	12	7,72
20,68487	20,70822	428,3469	0,999994	0,003543	0,202993	0	12,180	12	10,78
20,70822	20,74796	429,6534	0,999994	0,003515	0,201402	0	12,084	12	5,05
20,74796	20,87935	433,2039	0,999994	0,003544	0,203046	0	12,183	12	10,96
20,87935	20,89673	436,3101	0,999994	0,003507	0,200964	0	12,058	12	3,47
20,89673	20,86852	436,0837	0,999994	0,003536	0,202583	0	12,155	12	9,30
20,86852	20,74387	432,8939	0,999994	0,003511	0,201137	0	12,068	12	4,09
					1,615869				
				srednja vrij	0,201984	0	12,119	12	7,14

20'	0,333333	0,005818	
12'	0,201984	0,003525	
k	0,605951		
fi0	0,650961	37,29731	
R	6461332		
ro0	22,74139		

arkus tangens	1,23802E-05	0,003518575
	1,24475E-05	0,003528117
	1,25521E-05	0,003542918
	1,23561E-05	0,003515143
	1,25586E-05	0,003543829
	1,23024E-05	0,003507506
	1,25014E-05	0,003535756
	1,23236E-05	0,003510515

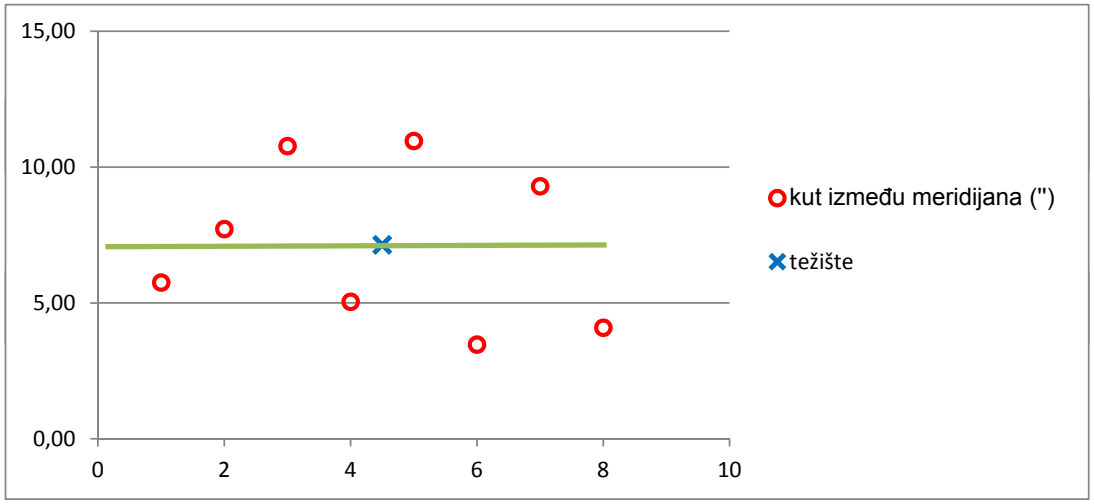
4,5

odstupanja od sr. vrijednosti

alfai_ [°]	°	'	''
-0,00039	0	0	-1,39
0,000162	0	0	0,58
0,00101	0	0	3,63
-0,00058	0	0	-2,09
0,001062	0	0	3,82
-0,00102	0	0	-3,67
0,000599	0	0	2,16
-0,00085	0	0	-3,05

apsolutne vrijednosti odstupanja

|alfai_| [°]	°	'	''
0,000385	0	0	1,39
0,0001617	0	0	0,58
0,0010097	0	0	3,63
0,0005816	0	0	2,09
0,0010619	0	0	3,82
0,0010192	0	0	3,67
0,0005994	0	0	2,16
0,0008468	0	0	3,05
0,0007082	0	0	2,55



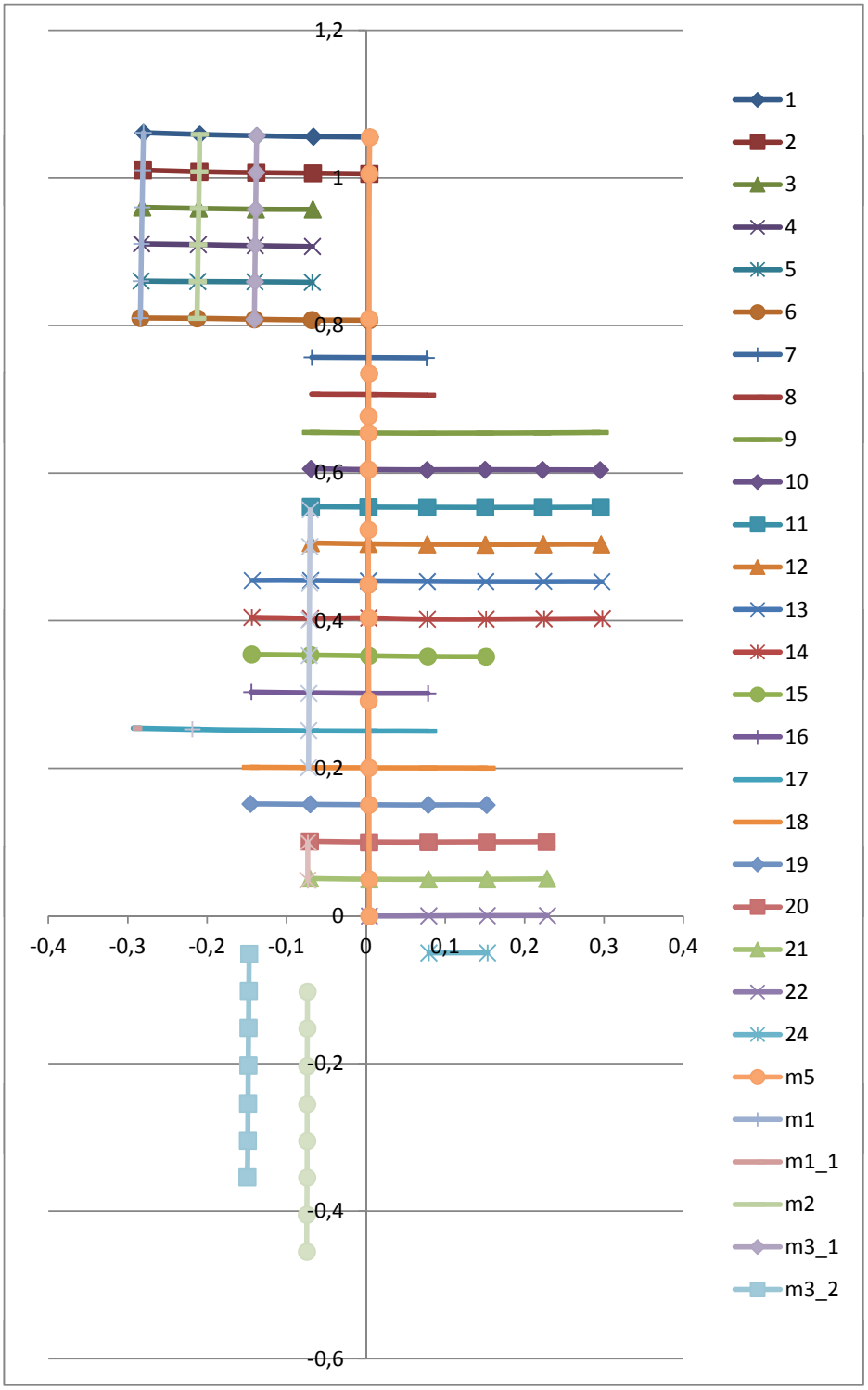
Prilog 5

Računski postupak za rotaciju i translaciju koordinatnog sustava skenirane slike u koordinatni sustav uspravne konusne projekcije uz poglavlje 5.6.3.1.

	fi	lambda	x	y	x'	y'
1	45°	28°40'	0,040662	1,233651	-0,28024	1,061256
	45°	29°	0,111523	1,231754	-0,20938	1,059057
	45°	29°20'	0,183406	1,22998	-0,13751	1,056977
	45°	29°40'	0,254702	1,229366	-0,06622	1,05606
	45°	30°	0,325724	1,228857	0,004802	1,055248
2	44°50'	28°40'	0,040015	1,182842	-0,2811	1,01045
	44°50'	29°	0,111197	1,18105	-0,20993	1,008355
	44°50'	29°20'	0,182882	1,180228	-0,13825	1,007228
	44°50'	29°40'	0,254291	1,179711	-0,06684	1,006407
	44°50'	30°	0,325393	1,179207	0,00426	1,0056
3	44°40'	28°40'	0,039392	1,132496	-0,28194	0,960107
	44°40'	29°	0,110675	1,131321	-0,21066	0,958629
	44°40'	29°20'	0,182486	1,130499	-0,13885	0,957501
	44°40'	29°40'	0,254327	1,130675	-0,06701	0,957371
4	44°30'	28°40'	0,038834	1,083104	-0,28271	0,910718
	44°30'	29°	0,110356	1,082306	-0,21119	0,909615
	44°30'	29°20'	0,18205	1,08135	-0,1395	0,908354
	44°30'	29°40'	0,254214	1,080396	-0,06734	0,907093
5	44°20'	28°40'	0,038327	1,032648	-0,28343	0,860265
	44°20'	29°	0,109846	1,032306	-0,21191	0,859618
	44°20'	29°20'	0,181882	1,032232	-0,13988	0,859237
	44°20'	29°40'	0,254182	1,031886	-0,06758	0,858584
6	44°10'	28°40'	0,03778	0,982555	-0,28419	0,810174
	44°10'	29°	0,109264	0,982429	-0,21271	0,809744
	44°10'	29°20'	0,181423	0,981332	-0,14055	0,80834
	44°10'	29°40'	0,253971	0,980719	-0,06801	0,807418
	44°10'	30°	0,326043	0,980648	0,004064	0,80704
7	44°	29°40'	0,254071	0,93011	-0,06812	0,756809
	44°	30°	0,326096	0,930052	0,003902	0,756444
	44°	30°20'	0,398494	0,929963	0,076299	0,756047
8	43°50'	29°40'	0,254027	0,880068	-0,06838	0,706768
	43°50'	30°	0,3263	0,88001	0,003893	0,706402
	43°50'	30°20'	0,399296	0,879493	0,076886	0,705574
9	43°40'	29°40'	0,25341	0,828512	-0,06922	0,655215
	43°40'	30°	0,325845	0,827896	0,003216	0,65429
	43°40'	30°20'	0,39955	0,828098	0,076921	0,654178
	43°40'	30°40'	0,472646	0,828545	0,150018	0,654314
	43°40'	31°	0,544715	0,828846	0,222088	0,654308
	43°40'	31°20'	0,617128	0,829984	0,294505	0,655138
10	43°30'	29°40'	0,253498	0,779061	-0,06934	0,605764
	43°30'	30°	0,326073	0,778444	0,003233	0,604838
	43°30'	30°20'	0,399749	0,778136	0,076907	0,604216
	43°30'	30°40'	0,47294	0,778796	0,150101	0,604564
	43°30'	31°	0,545383	0,778929	0,222543	0,604389
	43°30'	31°20'	0,61788	0,779052	0,29504	0,604203
11	43°20'	29°40'	0,253626	0,72772	-0,06943	0,554423
	43°20'	30°	0,326246	0,727631	0,00319	0,554024
	43°20'	30°20'	0,400215	0,727514	0,077158	0,553592
	43°20'	30°40'	0,47332	0,72781	0,150263	0,553577
	43°20'	31°	0,545971	0,728143	0,222915	0,553601
	43°20'	31°20'	0,618711	0,728554	0,295656	0,553702
12	43°10'	29°40'	0,253764	0,678531	-0,0695	0,505234
	43°10'	30°	0,326403	0,677757	0,003135	0,50415
	43°10'	30°20'	0,400508	0,677413	0,077238	0,503491
	43°10'	30°40'	0,473768	0,677342	0,150497	0,503108
	43°10'	31°	0,546756	0,678162	0,223487	0,503617
	43°10'	31°20'	0,619589	0,678388	0,296321	0,503533

T2	
x2	0,321157
y2	1,173589
T1	
x1	0,325415
y1	0,173598
q	1
cosalfa	0,999991
sinalfa	0,004258
k=	0,004258
l=	-0,99999

13	43°	29°20'	0,18023	0,627543	-0,14325	0,454559
	43°	29°40'	0,253881	0,627972	-0,0696	0,454674
	43°	30°	0,32655	0,627687	0,003068	0,45408
	43°	30°20'	0,400833	0,627164	0,077349	0,453241
	43°	30°40'	0,474393	0,627451	0,150909	0,453215
	43°	31°	0,547341	0,628007	0,223859	0,45346
	43°	31°20'	0,620634	0,628007	0,297151	0,453148
14	42°50'	29°20'	0,179974	0,57738	-0,14372	0,404398
	42°50'	29°40'	0,253968	0,576563	-0,06973	0,403266
	42°50'	30°	0,327161	0,577247	0,003465	0,403638
	42°50'	30°20'	0,401076	0,57595	0,077373	0,402026
	42°50'	30°40'	0,47498	0,57637	0,151279	0,402132
	42°50'	31°	0,548145	0,577075	0,224446	0,402525
	42°50'	31°20'	0,621509	0,57778	0,297812	0,402918
15	42°40'	29°20'	0,179864	0,527262	-0,14404	0,354281
	42°40'	29°40'	0,253989	0,52679	-0,06992	0,353493
	42°40'	30°	0,327655	0,5259	0,00374	0,352289
	42°40'	30°20'	0,401865	0,52544	0,077947	0,351513
	42°40'	30°40'	0,475169	0,525492	0,151251	0,351253
16	42°30'	29°20'	0,179806	0,476404	-0,14432	0,303423
	42°30'	29°40'	0,254022	0,475715	-0,07011	0,302418
	42°30'	30°	0,327584	0,475324	0,003454	0,301714
	42°30'	30°20'	0,402312	0,475512	0,078182	0,301584
17	42°20'	28°40'	0,031092	0,426752	-0,29324	0,254405
	42°20'	29°	0,105582	0,425618	-0,21876	0,252954
	42°20'	29°20'	0,179689	0,424567	-0,14466	0,251587
	42°20'	29°40'	0,254226	0,424138	-0,07012	0,250841
	42°20'	30°	0,328007	0,42427	0,003659	0,250659
	42°20'	30°20'	0,402488	0,424349	0,07814	0,250421
18	42°10'	29°20'	0,179542	0,374361	-0,14502	0,201382
	42°10'	29°40'	0,25445	0,374179	-0,07011	0,200881
	42°10'	30°	0,32835	0,374269	0,003789	0,200657
	42°10'	30°20'	0,402851	0,374528	0,078291	0,200598
	42°10'	30°40'	0,476557	0,374614	0,151997	0,200371
19	42°	29°20'	0,179304	0,324801	-0,14547	0,151824
	42°	29°40'	0,25459	0,324712	-0,07018	0,151414
	42°	30°	0,328608	0,324136	0,003834	0,150523
	42°	30°20'	0,403253	0,324535	0,07848	0,150604
	42°	30°40'	0,476841	0,324691	0,152068	0,150447
20	41°50'	29°40'	0,254308	0,274237	-0,07068	0,100941
	41°50'	30°	0,328891	0,273454	0,003901	0,09984
	41°50'	30°20'	0,403664	0,274097	0,078676	0,100165
	41°50'	30°40'	0,477238	0,274458	0,152251	0,100213
	41°50'	31°	0,552673	0,275044	0,227688	0,100477
21	41°40'	29°40'	0,254705	0,224145	-0,07049	0,050848
	41°40'	30°	0,329347	0,223305	0,004144	0,04969
	41°40'	30°20'	0,404015	0,223745	0,078813	0,049812
	41°40'	30°40'	0,477763	0,224024	0,152561	0,049777
	41°40'	31°	0,553432	0,22488	0,228233	0,050311
22	41°30'	30°	0,329654	0,173589	0,004239	-2,7E-05
	41°30'	30°20'	0,404523	0,174087	0,079109	0,000152
	41°30'	30°40'	0,478242	0,174736	0,15283	0,000487
	41°30'	31°	0,554154	0,175115	0,228743	0,000543
23	41°20'	30°20'	0,4049	0,12386	0,079273	-0,05008
	41°20'	30°40'	0,478817	0,124279	0,153191	-0,04997


1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,4
-0,3
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
24
m5
m1
m1_1
m2
m3_1
m3_2

Prilog 6

Računanje parametara uspravne ekvidistantne projekcije za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.6.3.2.

	fi		fi	fi=xi	ro=yi					
	°	'	°	rad	m		xi-x_	yi-y_	(xi-x_)(yi-y_)	(xi-x_)^2
1	45	0	45,0000	0,7854	20,1972		0,031998	-0,5531243	-0,017698707	0,00102
2	44	50	44,8333	0,7825	20,2473	0,0501	0,029089	-0,5030662	-0,014633602	0,00085
3	44	40	44,6667	0,7796	20,2970	0,0497	0,02618	-0,4533917	-0,011869768	0,00069
4	44	30	44,5000	0,7767	20,3466	0,0497	0,023271	-0,4037232	-0,009395065	0,00054
5	44	20	44,3333	0,7738	20,3964	0,0497	0,020362	-0,3539748	-0,007207696	0,00041
6	44	10	44,1667	0,7709	20,4468	0,0504	0,017453	-0,3035609	-0,005298138	0,0003
7	44	0	44,0000	0,7679	20,4979	0,0511	0,014544	-0,2524162	-0,003671245	0,00021
8	43	50	43,8333	0,7650	20,5481	0,0501	0,011636	-0,2022943	-0,002353801	0,00014
9	43	40	43,6667	0,7621	20,5995	0,0514	0,008727	-0,1508485	-0,001316401	7,6E-05
10	43	30	43,5000	0,7592	20,6498	0,0503	0,005818	-0,1005785	-0,000585142	3,4E-05
11	43	20	43,3333	0,7563	20,7005	0,0507	0,002909	-0,0498464	-0,000144997	8,5E-06
12	43	10	43,1667	0,7534	20,7505	0,0500	0	0,00016107	0	0
13	43	0	43,0000	0,7505	20,8008	0,0503	-0,002909	0,05047964	-0,000146839	8,5E-06
14	42	50	42,8333	0,7476	20,8515	0,0507	-0,005818	0,1011408	-0,000588413	3,4E-05
15	42	40	42,6667	0,7447	20,9017	0,0502	-0,008727	0,15132001	-0,001320516	7,6E-05
16	42	30	42,5000	0,7418	20,9520	0,0503	-0,011636	0,20164676	-0,002346267	0,00014
17	42	20	42,3333	0,7389	21,0028	0,0508	-0,014544	0,25247178	-0,003672053	0,00021
18	42	10	42,1667	0,7359	21,0531	0,0503	-0,017453	0,30279695	-0,005284804	0,0003
19	42	0	42,0000	0,7330	21,1031	0,0499	-0,020362	0,35274551	-0,007182666	0,00041
20	41	50	41,8333	0,7301	21,1537	0,0506	-0,023271	0,40337873	-0,009387049	0,00054
21	41	40	41,6667	0,7272	21,2040	0,0503	-0,02618	0,45365159	-0,011876571	0,00069
22	41	30	41,5000	0,7243	21,2539	0,0499	-0,029089	0,50353035	-0,014647104	0,00085
23	41	20	41,3333	0,7214	21,3039	0,0500	-0,031998	0,55350188	-0,017710789	0,00102
							2,11E-15	-6,04E-14	-0,148337634	0,00856

x_ 0,75340046
y_ 20,75035011

mi11= -0,006449462

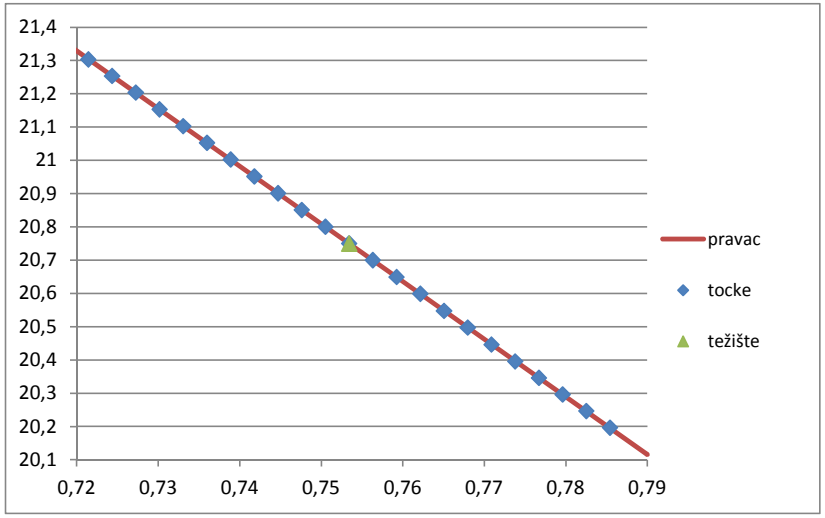
mi20=sigma 0,00037231

Koeficijent smjera
a= -17,32282037 r

odsječak na osi y
b 33,80137095 K

373000 6461411,9992 R
12607911,3655

x	y
0,71	21,5
0,73	21,16
0,75	20,81
0,77	20,46
0,79	20,12



	A	Ae	-ro	s
1	0,785398163	1,785398	-20,1972	-18,41183
1	0,782489281	1,782489	-20,2473	-18,46479
1	0,779580399	1,77958	-20,297	-18,51738
1	0,776671517	1,776672	-20,3466	-18,56996
1	0,773762635	1,773763	-20,3964	-18,62261
1	0,770853753	1,770854	-20,4468	-18,67594
1	0,767944871	1,767945	-20,4979	-18,72999
1	0,765035989	1,765036	-20,5481	-18,78302
1	0,762127107	1,762127	-20,5995	-18,83737
1	0,759218225	1,759218	-20,6498	-18,89055
1	0,756309343	1,756309	-20,7005	-18,94419
1	0,75340046	1,7534	-20,7505	-18,99711
1	0,750491578	1,750492	-20,8008	-19,05034
1	0,747582696	1,747583	-20,8515	-19,10391
1	0,744673814	1,744674	-20,9017	-19,157
1	0,741764932	1,741765	-20,952	-19,21023
1	0,73885605	1,738856	-21,0028	-19,26397
1	0,735947168	1,735947	-21,0531	-19,3172
1	0,733038286	1,733038	-21,1031	-19,37006
1	0,730129404	1,730129	-21,1537	-19,4236
1	0,727220522	1,727221	-21,204	-19,47678
1	0,72431164	1,724312	-21,2539	-19,52957
1	0,721402757	1,721403	-21,3039	-19,58245

Elementi jednadžbi popravaka **Nx-n=0**

N=AtA Ne -n=-Atro Ats s_=Ats+ε x=N-1n

At

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,785398	0,782489281	0,7795804	0,776672	0,7738	0,77085	0,768	0,765036	0,76212711	0,759218225	0,75631	0,7534005	0,7505	0,7475827	0,7447	0,7418	0,73886	0,7359	0,733	0,7301

	N	Ne	-n	n	Ats	N^-1		x
23	17,32821059	40,32821	-477,258	477,2581	-436,9298419	66,329051	-87,982	33,801
17,32821	13,06364497	30,39186	-359,418	359,4181	-329,0262433	-87,98186	116,78	-17,323

Ax	-ro	v	|v|
20,19606	-20,19723	-0,0012	0,0012
20,24645	-20,24728	-0,0008	0,0008
20,29684	-20,29696	-0,0001	0,0001
20,34723	-20,34663	0,0006	0,0006
20,39762	-20,39638	0,0012	0,0012
20,44801	-20,44679	0,0012	0,0012
20,49840	-20,49793	0,0005	0,0005
20,54879	-20,54806	0,0007	0,0007
20,59918	-20,59950	-0,0003	0,0003
20,64957	-20,64977	-0,0002	0,0002
20,69996	-20,70050	-0,0005	0,0005
20,75035	-20,75051	-0,0002	0,0002
20,80074	-20,80083	-0,0001	0,0001
20,85113	-20,85149	-0,0004	0,0004
20,90152	-20,90167	-0,0001	0,0001
20,95191	-20,95200	-0,0001	0,0001
21,00230	-21,00282	-0,0005	0,0005
21,05269	-21,05315	-0,0005	0,0005
21,10308	-21,10310	0,0000	0,0000
21,15347	-21,15373	-0,0003	0,0003
21,20386	-21,20400	-0,0001	0,0001
21,25425	-21,25388	0,0004	0,0004
21,30464	-21,30385	0,0008	0,0008
			0,01085
			0,00047

Kontrola popravaka

Atv

0,00000000

0,00000000

Kontrola izjednačenja

vtv	=	-rotv
8,1884E-06	=	8,1899E-06

vt

-0,001	-0,000834	-0,0001186	0,000602865	0,00124	0,0012207	0,0005	0,00073415	-0,0003	-0,0002	-0,0005	-0,0002	-9E-05	-4E-04

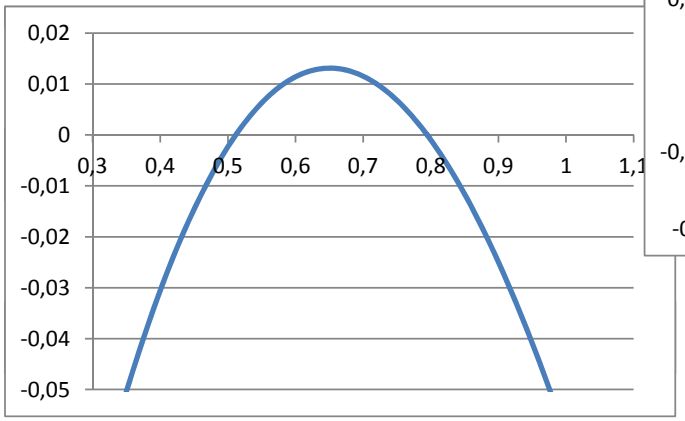
-rt

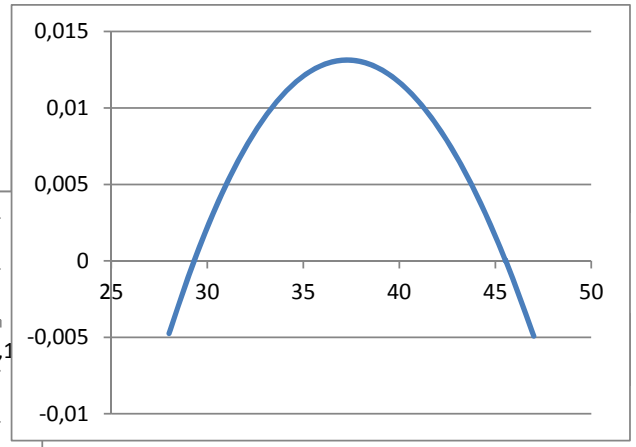
-20,2	-20,24728	-20,296958	-20,34662691	-20,3964	-20,44679	-20,498	-20,548056	-20,6	-20,65	-20,701	-20,751	-20,801	-20,85

Prilog 7

Određivanje standardnih paralela uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.6.3.3.

20'	0,33333333	0,005818		f(fi)	
12'	0,20188718	0,003524			
k	0,60566153		C	1,951262567	
K	33,801371				
R	17,3228204				
lambda0	30	0,523599			
q	33,801371				
°		rad			
20		0,349066	-0,050682252		
21		0,366519	-0,043320725		
22		0,383972	-0,036428731		
23		0,401426	-0,030003052		
24		0,418879	-0,024040329		
25		0,436332	-0,018537061		
26		0,453786	-0,01348961		
27		0,471239	-0,008894196		
28		0,488692	-0,004746902		
28	10	0,491601	-0,004098971		
28	20	0,49451	-0,003463356		
28	30	0,497419	-0,002840038		
28	40	0,500328	-0,002228999		
28	50	0,503237	-0,001630217	29°-30°	-0,00000231661698483
29	0	0,506145	-0,001043674627	29°-29°30'	-0,00000067078772874
29	15	0,510509	-0,000186765508	29°-29°15'	0,00000019492242221
29	18,3333	0,511478	-0,000000068182	29°15'-29°30'	-0,00000012003742157
29	18,75	0,5116	0,000023173790	29°15'-29°22,5'	-0,00000004321753648
29	22,5	0,51269	0,000231399988	29°15'-29°18,75'	-0,00000000432806462
29	30	0,514872	0,000642717291	29°18,333'-29°18,75'	-0,00000000000158004
30		0,523599	0,002219673570		
31		0,541052	0,005047465	45	
32		0,558505	0,007444156	10	0,16666666666666700
33		0,575959	0,009414332	20	0,33333333333333300
34		0,593412	0,010962709	30	0,50000000000000000
35		0,610865	0,012094132	9,23114E-06	30
36		0,628319	0,012813573	-6,81823E-08	20
37		0,645772	0,01312613	-9,37089E-06	10
38		0,663225	0,013037023		
39		0,680678	0,012551596	29°18'20''	





40		0,698132	0,011675314		15	0,25000000000000000	-4,7E-06
41		0,715585	0,010413759		25	0,41666666666666700	4,58E-06
42		0,733038	0,008772633				
43		0,750492	0,006757752				
44		0,767945	0,004375046				
45		0,785398	0,001630557				
45	10	0,788307	0,001138	45°-46°		-0,000002396205	
45	15	0,789761	0,000889	45°-45°30'		-0,000000000979	
45	32,4167	0,794828	-0,000001	45°30'-46		0,000000000882	
45	31,875	0,79467	0,000028				
45	33,75	0,795216	-0,000070				
45	37,5	0,796306	-0,000266	45°30'-45°45'		0,000000000397	
45	45	0,798488	-0,000661533	45°30'-45°37.5'		0,000000000160	
46		0,802851	-0,001469563	45°30'-45°33.75'		0,000000000042	
47		0,820305	-0,004919051	45°30'-45°31,875'		-0,000000000017	
48		0,837758	-0,008711542	45°31,875'-45°33.75'		-0,000000001922	
49		0,855211	-0,012840564				
50		0,872665	-0,017299542		33,75	0,5625	
51		0,890118	-0,022081802		45		
52		0,907571	-0,02718057		1,875	0,875000000000	
53		0,925025	-0,032588978		52,5		
54		0,942478	-0,038300061		50	0,833333333333	
55		0,959931	-0,044306762			-32,000000000000	-1920
56		0,977384	-0,050601937			-31	-1860
57		0,994838	-0,05717835		40	0,666666666667	
58		1,012291	-0,064028683		30	0,500000000000	
59		1,029744	-0,071145532		20	0,333333333333	
					10	0,166666666667	
					0	0,000000000000	
			45°32'25''		50	0,833333333333	
					40	0,666666666667	
					30	0,500000000000	
					20	0,333333333333	
					10	0,166666666667	
					25	0,416666666667	

k= 0,6056615

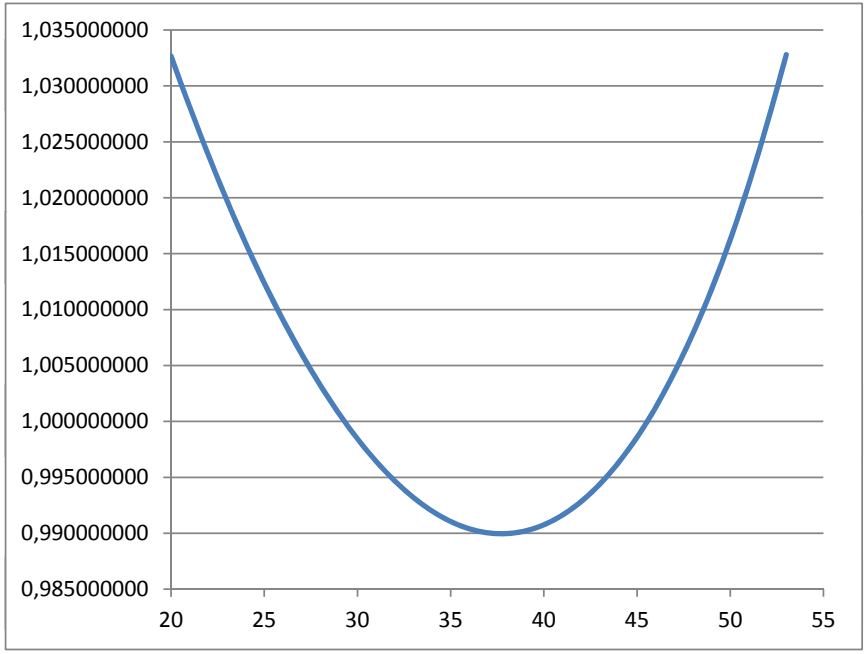
K= 33,80137

R= 17,32282

$$\rho = -17{,}3226\,\varphi + 33{,}8117$$

fi ° '		fi [rad]	ro	n(fi)	
1		0,017453	33,49903	1,171412291	
2		0,034907	33,19669	1,161370567	
3		0,05236	32,89435	1,151670628	
4		0,069813	32,59201	1,142304111	
5		0,087266	32,28967	1,133263136	
6		0,10472	31,98733	1,124540290	
7		0,122173	31,68499	1,116128606	
8		0,139626	31,38265	1,108021554	
9		0,15708	31,08031	1,100213025	
10		0,174533	30,77797	1,092697317	
11		0,191986	30,47563	1,085469126	
12		0,20944	30,17329	1,078523540	
13		0,226893	29,87095	1,071856026	
14		0,244346	29,56861	1,065462425	
15		0,261799	29,26627	1,059338949	
16		0,279253	28,96393	1,053482175	
17		0,296706	28,66159	1,047889042	
18		0,314159	28,35925	1,042556851	
19		0,331613	28,05691	1,037483265	
20		0,349066	27,75457	1,032666310	20
21		0,366519	27,45223	1,028104377	21
22		0,383972	27,14989	1,023796231	22
23		0,401426	26,84755	1,019741008	23
24		0,418879	26,5452	1,015938235	24
25		0,436332	26,24286	1,012387828	25
26		0,453786	25,94052	1,009090111	26
27		0,471239	25,63818	1,006045828	27
28		0,488692	25,33584	1,003256157	28
28	10	0,491601	25,28545	1,002816073	28,16667
28	20	0,49451	25,23506	1,002383115	28,33333
28	30	0,497419	25,18467	1,001957292	28,5

n(fi)



28	40	0,500328	25,13428	1,001538614	28,66667
28	50	0,503237	25,08389	1,001127089	28,83333
29	0	0,506145	25,0335	1,000722730	29
29	15	0,510509	24,95792	1,000129647	29,25
29	18,33333	0,511478	24,94112	1,000000047	29,30556
29	18,75	0,5116	24,93902	0,999983904	29,3125
29	22,5	0,51269	24,92013	0,999839172	29,375
29	30	0,514872	24,88233	0,999552747	29,5
30		0,523599	24,73116	0,998447654	30
31		0,541052	24,42882	0,996433537	31
32		0,558505	24,12648	0,994683510	32
33		0,575959	23,82414	0,993201266	33
34		0,593412	23,5218	0,991991086	34
35		0,610865	23,21946	0,991057887	35
36		0,628319	22,91712	0,990407262	36
37		0,645772	22,61478	0,990045532	37
38		0,663225	22,31244	0,989979803	38
39		0,680678	22,0101	0,990218030	39
40		0,698132	21,70776	0,990769089	40
41		0,715585	21,40542	0,991642861	41
42		0,733038	21,10308	0,992850322	42
43		0,750492	20,80074	0,994403651	43
44		0,767945	20,4984	0,996316349	44
45		0,785398	20,19606	0,998603372	45
45	10	0,788307	20,14567	0,999022073	45,16667
45	15	0,789761	20,12047	0,999235519	45,25
45	31,875	0,79467	20,03544	0,999976221	45,53125
45	32,41667	0,794828	20,03271	1,000000519	45,54028
45	33,75	0,795216	20,02599	1,000060468	45,5625
45	37,5	0,796306	20,0071	1,000230137	45,625
45	45	0,798488	19,9693	1,000574191	45,75
46		0,802851	19,89372	1,001281288	46
47		0,820305	19,59138	1,004368456	47
48		0,837758	19,28904	1,007885226	48
49		0,855211	18,9867	1,011854170	49
50		0,872665	18,68436	1,016300356	50
51		0,890118	18,38202	1,021251652	51
52		0,907571	18,07968	1,026739087	52
53		0,925025	17,77734	1,032797271	53

54	0,942478	17,475	1,039464878	54
55	0,959931	17,17266	1,046785223	55
56	0,977384	16,87032	1,054806930	
57	0,994838	16,56798	1,063584732	
58	1,012291	16,26564	1,073180412	
59	1,029744	15,9633	1,083663934	
60	1,047198	15,66096	1,095114797	
61	1,064651	15,35862	1,107623670	
62	1,082104	15,05628	1,121294376	
63	1,099557	14,75394	1,136246321	
64	1,117011	14,45159	1,152617482	
65	1,134464	14,14925	1,170568109	
66	1,151917	13,84691	1,190285360	
67	1,169371	13,54457	1,211989139	
68	1,186824	13,24223	1,235939528	
69	1,204277	12,93989	1,262446346	
70	1,22173	12,63755	1,291881572	
71	1,239184	12,33521	1,324695695	
72	1,256637	12,03287	1,361439508	
73	1,27409	11,73053	1,402793603	
74	1,291544	11,42819	1,449608919	
75	1,308997	11,12585	1,502963514	
76	1,32645	10,82351	1,564243669	
77	1,343904	10,52117	1,635262422	
78	1,361357	10,21883	1,718437365	
79	1,37881	9,916491	1,817065435	
80	1,396263	9,614151	1,935762569	
81	1,413717	9,311811	2,081196459	
82	1,43117	9,00947	2,263368889	
83	1,448623	8,70713	2,497997204	
84	1,466077	8,40479	2,811277254	
85	1,48353	8,10245	3,250361875	
86	1,500983	7,800109	3,909557077	
87	1,518436	7,497769	5,008910634	
88	1,53589	7,195429	7,208566419	
89	1,553343	6,893089	13,809244762	

Prilog 8

Određivanje koeficijenata i standardnih paralela uspravne konusne projekcije ekvidistantne uzduž meridijana za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.7.

Računanje fi0

	°	'	°	rad	cosfi	fij*cos(fis)	fis*cos(fij)
fis=	45	0	45	0,785398163	0,707107	0,510108782	0,58974
fij=	41	20	41,33333	0,721402757	0,75088		

C= 1,81917069857980

fi							
°	'	°	rad				
		0	0	-1,501760066			
		10	0,174533	-1,093383949	5,671282		-4,02664404623734
		20	0,349066	-0,72452463	2,747477		-1,27737257127369
20	30	20,5	0,357792	-0,707042601	2,674621		-1,21324329200586
29	0	29	0,506145	-0,423044779	1,804048		-0,49102253976998
29	10	29,16667	0,509054	-0,417717982	1,791736		-0,48161989937231
29	20	29,33333	0,511963	-0,412400192	1,779552		-0,47234492799548
29	29	29,48333	0,514581	-0,407621867	1,768694		-0,46410480910908
29	30	29,5	0,514872	-0,407091391	1,767494		-0,46319544700142
29	31	29,51667	0,515163	-0,406561004	1,766295		-0,46228731846056
30	0	30	0,523599	-0,391218733	1,732051		-0,43647888458737
41	40	41,66667	0,727221	-0,042298443	1,123691		-0,03174073315224
41	40,3125	41,67188	0,727311	-0,042151083	1,123485		-0,03162597319366
41	40,46875	41,67448	0,727357	-0,042077406	1,123382		-0,03156860896665
41	40,546875	41,67578	0,72738	-0,042040568	1,123331		-0,03153993079034
41	40,625	41,67708	0,727402	-0,042003731	1,12328		-0,03151125523846
41	41,25	41,6875	0,727584	-0,041709045	1,122869		-0,03128194527319
41	42,5	41,70833	0,727948	-0,041119753	1,122047		-0,03082382866824
41	45	41,75	0,728675	-0,039941488	1,120405		-0,02990960512841
41	50	41,83333	0,730129	-0,037586231	1,11713		-0,02808916777793
41	52,5	41,875	0,730857	-0,036409238	1,115497		-0,02718293749696
41	52,578125	41,8763	0,730879	-0,036372464	1,115446		-0,02715466051122
41	52,65625	41,8776	0,730902	-0,036335690	1,115395		-0,02712638611116
41	52,734375	41,87891	0,730925	-0,036298916	1,115344		-0,02709811429654
41	52,7734375	41,87956	0,730936	-0,036280530	1,115319		-0,02708397935869
41	52,8125	41,88021	0,730948	-0,036262143	1,115293		-0,02706984506711
41	53,125	41,88542	0,731038	-0,036115056	1,115089		-0,02695679399631
41	53,75	41,89583	0,73122	-0,035820900	1,114681		-0,02673081586809
41	55	41,91667	0,731584	-0,035232667	1,113866		-0,02627935521920
42	30	42,5	0,741765	-0,018804605	1,091309		-0,01390273458706
43	0	43	0,750492	-0,004787574	1,072369		-0,00368958980244
43	10	43,16667	0,7534	-0,000128134	1,066134		-0,00036387970763
43	10,15625	43,16927	0,753446	-0,000055381	1,066037		-0,00031222257835
43	10,234375	43,17057	0,753469	-0,000019005	1,065988	0,273438	-0,00028639754252
43	10,2734375	43,17122	0,75348	-0,000000817	1,065964	16,40625	-0,00027348590671
43	10,27587891	43,17126	0,753481	0,000000320	1,065963		-0,00027267894900
43	10,27832031	43,17131	0,753481	0,000001456	1,065961		-0,00027187199359
43	10,28320313	43,17139	0,753483	0,000003730	1,065958		-0,00027025808964
43	10,29296875	43,17155	0,753486	0,000008277	1,065952		-0,00026703030933
43	10,3125	43,17188	0,753491	0,000017371	1,06594		-0,00026057485894
43	10,46875	43,17448	0,753537	0,000090121	1,065843		-0,00020893654765
43	10,625	43,17708	0,753582	0,000162869	1,065746		-0,00015730764271
43	10,9375	43,18229	0,753673	0,000308361	1,065552		-0,00005407804479
43	11,09375	43,1849	0,753719	0,000381105	1,065455	0,101255	-0,00000247734828

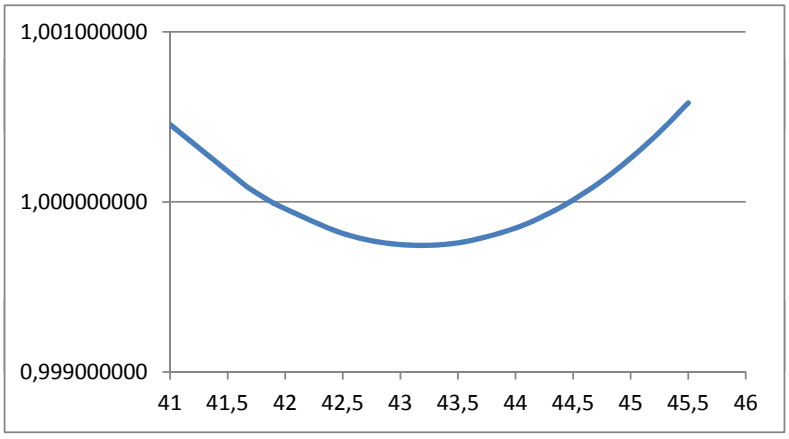
43	11,09863281	43,18498	0,75372	0,000383378	1,065452	6,075325	-0,00000086497798
43	11,10107422	43,18502	0,753721	0,000384515	1,06545		-0,00000005879627
43	11,10122681	43,18502	0,753721	0,000384586	1,06545	0,101246	-0,00000000840999
43	11,10124588	43,18502	0,753721	0,000384595	1,06545	6,074753	-0,00000000211170
43	11,10125065	43,18502	0,753721	0,000384597	1,06545		-0,00000000053713
43	11,10125542	43,18502	0,753721	0,000384599	1,06545	0,101251	0,00000000103744
43	11,10126495	43,18502	0,753721	0,000384604	1,06545	6,075039	0,00000000418658
43	11,1013031	43,18502	0,753721	0,000384622	1,06545		0,00000001678315
43	11,10137939	43,18502	0,753721	0,000384657	1,06545		0,00000004197628
43	11,10168457	43,18503	0,753721	0,000384799	1,06545		0,00000014274880
43	11,10229492	43,18504	0,753721	0,000385083	1,065449		0,00000034429373
43	11,10351563	43,18506	0,753721	0,000385652	1,065448		0,00000074738315
43	11,11328125	43,18522	0,753724	0,000390198	1,065442		0,00000397207786
43	11,1328125	43,18555	0,75373	0,000399291	1,06543		0,00001042135714
43	11,171875	43,1862	0,753741	0,000417477	1,065406		0,00002331947513
43	11,25	43,1875	0,753764	0,000453848	1,065358		0,00004911394895
43	12,5	43,20833	0,754128	0,001035730	1,064582		0,00046150616473
43	15	43,25	0,754855	0,002199197	1,063031		0,00128448988559
43	20	43,33333	0,756309	0,004524943	1,059938		0,00292327967096
43	30	43,5	0,759218	0,009171712	1,05378		0,00617234868131
44	0	44	0,767945	0,023074731	1,03553		0,01569551391173
44	20	44,33333	0,773763	0,032312913	1,023546		0,02186197302270
44	25	44,41667	0,775217	0,034618714	1,020572		0,02338128833889
44	27,5	44,45833	0,775944	0,035771058	1,019089		0,02413763706705
44	28,125	44,46875	0,776126	0,036059087	1,018718		0,02432638066503
44	28,28125	44,47135	0,776172	0,03613109	1,018626		0,02437354511810
44	28,30078125	44,47168	0,776177	0,03614009	1,018614		0,02437944007175
44	28,3203125	44,47201	0,776183	0,036149091	1,018602		0,02438533489140
44	28,359375	44,47266	0,776194	0,036167091	1,018579		0,02439712412876
44	28,4375	44,47396	0,776217	0,036203092	1,018533		0,02442070099576
44	28,75	44,47917	0,776308	0,036347092	1,018348		0,02451498703110
44	30	44,5	0,776672	0,036923033	1,017607		0,02489178847020
44	40	44,66667	0,77958	0,041527253	1,011704		0,02788654930783
44	40,15625	44,66927	0,779626	0,041599148	1,011612		0,02793306648821
44	40,234375	44,67057	0,779649	0,041635094	1,011566		0,02795632190698
44	40,3125	44,67188	0,779671	0,041671041	1,01152		0,02797957521173
44	40,625	44,67708	0,779762	0,041814822	1,011336		0,02807256729438
44	41,25	44,6875	0,779944	0,042102369	1,010968		0,02825845004542
44	42,5	44,70833	0,780308	0,042677394	1,010233		0,02862981023633
44	45	44,75	0,781035	0,04382717	1,008765		0,02937091213585
44	50	44,83333	0,782489	0,046125636	1,005835		0,03084666402940
45	10	45,16667	0,788307	0,055305144	0,994199		0,03666455947800
		50	0,872665	0,186173153	0,8391		0,10740644140536
		70	1,22173	0,762339041	0,36397		0,23346998791757
		80	1,396263	1,380260856	0,176327		0,24658031627588
		90	1,570796	3,04452E+15	6,13E-17		0,24837437178491

Računanje n(fi)

k=	0,6841813
K=	31,4886
R=	17,30932
C=	1,819171

fi ° '		fi [rad]	ro	n(fi)	
13		0,226893	27,56124	1,118062612	
14		0,244346	27,25914	1,110450654	
15		0,261799	26,95703	1,103111935	
16		0,279253	26,65493	1,096041896	
17		0,296706	26,35282	1,089236322	
18		0,314159	26,05072	1,082691345	
19		0,331613	25,74861	1,076403435	
20	30	0,357792	25,29546	1,067446680	
29	0	0,506145	22,72757	1,027129019	
29	10	0,509054	22,67722	1,026513023	
29	20	0,511963	22,62687	1,025903724	
29	29	0,514581	22,58155	1,025361083	
29	30	0,514872	22,57652	1,025301124	
29	31	0,515163	22,57148	1,025241233	
41	0	0,715585	19,10231	1,000454622	41
41	40	0,727221	18,90091	1,000089429	41,66667
41	40,3125	0,727311	18,89934	1,000087082	41,67188
41	40,46875	0,727357	18,89855	1,000085911	41,67448
41	40,54688	0,72738	18,89816	1,000085326	41,67578
41	40,625	0,727402	18,89776	1,000084742	41,67708
41	41,25	0,727584	18,89462	1,000080086	41,6875
41	42,5	0,727948	18,88832	1,000070868	41,70833
41	45	0,728675	18,87574	1,000052812	41,75
41	50	0,730129	18,85056	1,000018218	41,83333
41	52,5	0,730857	18,83797	1,000001681	41,875
41	52,57813	0,730879	18,83758	1,000001172	41,8763
41	52,65625	0,730902	18,83719	1,000000664	41,8776
41	52,73438	0,730925	18,83679	1,000000156	41,87891
41	52,75391	0,73093	18,83669	1,000000030	41,87923
41	52,76367	0,730933	18,83665	0,999999966	41,87939
41	52,77344	0,730936	18,8366	0,999999903	41,87956
41	52,8125	0,730948	18,8364	0,999999649	41,88021
41	53,125	0,731038	18,83483	0,999997626	41,88542
41	53,75	0,73122	18,83168	0,999993603	41,89583
41	55	0,731584	18,82539	0,999985651	41,91667
42	30	0,741765	18,64916	0,999814896	42,5
43	0	0,750492	18,49811	0,999749169	43
43	30	0,759218	18,34705	0,999759127	43,5
44	0	0,767945	18,196	0,999846024	44
44	20	0,773763	18,0953	0,999947354	44,33333
44	25	0,775217	18,07012	0,999978170	44,41667
44	27,5	0,775944	18,05754	0,999994404	44,45833
44	28,125	0,776126	18,05439	0,999998549	44,46875
44	28,28125	0,776172	18,0536	0,999999591	44,47135
44	28,30078	0,776177	18,0535	0,999999721	44,47168
44	28,32031	0,776183	18,05341	0,999999852	44,47201
44	28,33984	0,776189	18,05331	0,999999982	44,47233
44	28,34961	0,776191	18,05326	1,000000047	44,47249
44	28,35938	0,776194	18,05321	1,000000113	44,47266
44	28,4375	0,776217	18,05282	1,000000635	44,47396
44	28,75	0,776308	18,05124	1,000002729	44,47917

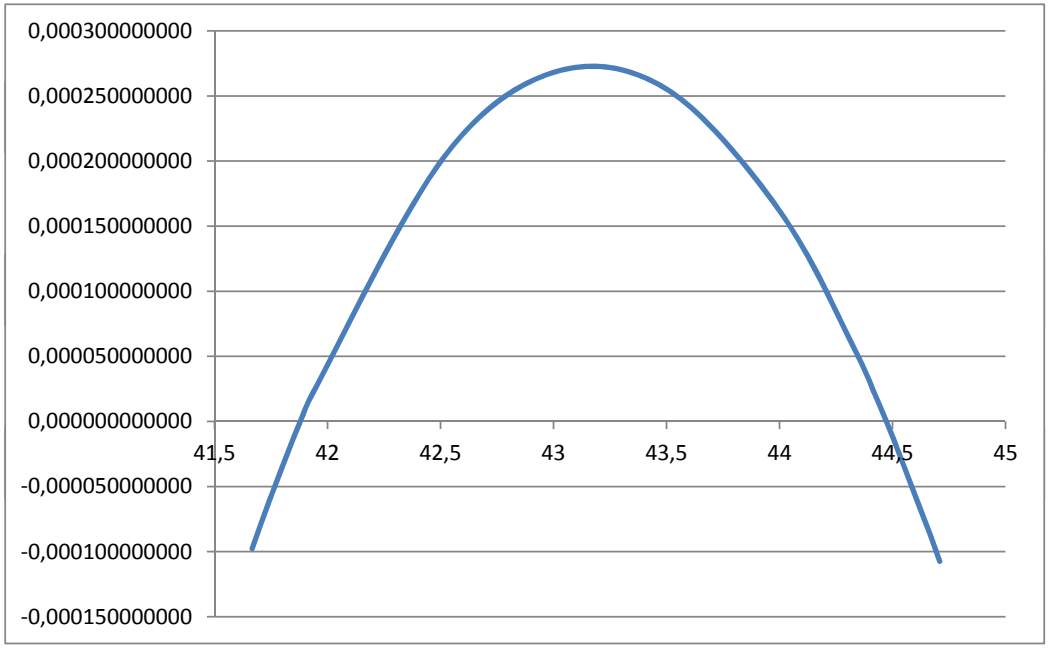
44	30	0,776672	18,04495	1,000011191	44,5
44	40	0,77958	17,9946	1,000083881	44,66667
44	40,15625	0,779626	17,99381	1,000085087	44,66927
44	40,23438	0,779649	17,99342	1,000085691	44,67057
44	40,3125	0,779671	17,99302	1,000086296	44,67188
44	40,625	0,779762	17,99145	1,000088719	44,67708
44	41,25	0,779944	17,9883	1,000093592	44,6875
44	42,5	0,780308	17,98201	1,000103443	44,70833
44	45	0,781035	17,96942	1,000123562	44,75
44	50	0,782489	17,94425	1,000165476	44,83333
45	10	0,788307	17,84355	1,000355605	45,16667
45	30	0,794125	17,74284	1,000582031	45,5
54		0,942478	15,17496	1,020469425	54
55		0,959931	14,87285	1,024929939	55
56		0,977384	14,57075	1,029938761	56
57		0,994838	14,26864	1,035535820	57
58		1,012291	13,96654	1,041766267	58
59		1,029744	13,66443	1,048681299	59
60		1,047198	13,36233	1,056339163	60
61		1,064651	13,06022	1,064806356	61
62		1,082104	12,75812	1,074159095	
63		1,099557	12,45601	1,084485101	
64		1,117011	12,15391	1,095885804	
65		1,134464	11,8518	1,108479077	
66		1,151917	11,5497	1,122402646	
67		1,169371	11,2476	1,137818402	
68		1,186824	10,94549	1,154917879	
69		1,204277	10,64339	1,173929300	
70		1,22173	10,34128	1,195126743	
71		1,239184	10,03918	1,218842195	
72		1,256637	9,737073	1,245481623	
73		1,27409	9,434968	1,275546729	
74		1,291544	9,132864	1,309664847	
75		1,308997	8,830759	1,348630813	
76		1,32645	8,528655	1,393466773	
77		1,343904	8,22655	1,445509593	
78		1,361357	7,924445	1,506541983	
79		1,37881	7,622341	1,578995132	
80		1,396263	7,320236	1,666272935	
81		1,413717	7,018132	1,773292365	
82		1,43117	6,716027	1,907429126	
83		1,448623	6,413923	2,080273867	
84		1,466077	6,111818	2,311144607	
85		1,48353	5,809713	2,634814078	
86		1,500983	5,507609	3,120828077	
87		1,518436	5,205504	3,931460519	
88		1,53589	4,9034	5,553533658	
89		1,553343	4,601295	10,421159631	



	°	'	°	rad	cosfi	sinfi		fij*cos(fis)	fis*cos(fij)	fij*cos(fi0)	fi0*cos(fij)
fis=	45	0	45	0,785398163	0,707107			0,510108782	0,5897398	0,526009066	0,5659539
fij=	41	20	41,33333333	0,721402757	0,75088						
fi0=	43	11'6''	43,18502084	0,753720801	0,729148	0,684356504		cos(fij)*cos(fi0)	fis*cos(fi0)	fi0*cos(fis)	cos(fis)*cos(fi0)
								0,54750235	0,57267116	0,53296109	0,515585189
					delta	20	0,333333333	0,228060429	13,0669001		
k=	0,6843565042	0,6841812868		0,6841812868							
C=	1,8191706986										

fi							
°	'	°	rad	cos(fi)			
		0	0	1	-0,357943993	-0,357569776007	
		10	0,174532925	0,984808	-0,205610385	-0,205241853020	
		20	0,34906585	0,939693	-0,097000896	-0,096649246705	
20	30	20,5	0,357792497	0,936672	-0,092687785	-0,092337265967	
29	0	29	0,506145483	0,87462	-0,035007542	-0,034680244646	
29	10	29,16666667	0,509054365	0,873206	-0,034164765	-0,033837996643	
29	20	29,33333333	0,511963247	0,871784	-0,033332785	-0,033006547984	
29	29	29,48333333	0,514581241	0,870499	-0,032593219	-0,032267463102	
29	30	29,5	0,514872129	0,870356	-0,032511583	-0,032185881089	
29	31	29,51666667	0,515163018	0,870212	-0,032430055	-0,032104406717	
30	0	30	0,523598776	0,866025	-0,030112475	-0,029788393838	0,46875
41	40	41,66666667	0,727220522	0,747025	-0,000377193	-0,000097643604	28,125
41	40,3125	41,671875	0,727311424	0,746965	-0,000374599	-0,000095072505	
41	40,46875	41,67447917	0,727356876	0,746934	-0,000373306	-0,000093790338	
41	40,546875	41,67578125	0,727379601	0,746919	-0,000372660	-0,000093150101	1,39116E-07
41	40,625	41,67708333	0,727402327	0,746904	-0,000372015	-0,000092510427	1,38875E-07
41	41,25	41,6875	0,727584132	0,746783	-0,000366872	-0,000087413333	
41	42,5	41,70833333	0,727947742	0,746541	-0,000356696	-0,000077327371	
41	45	41,75	0,728674963	0,746057	-0,000336776	-0,000057588189	
41	50	41,83333333	0,730129404	0,745088	-0,000298664	-0,000019839486	
41	52,5	41,875	0,730856624	0,744603	-0,000280472	-0,000001829214	0,65625
41	52,578125	41,87630208	0,73087935	0,744588	-0,000279913	-0,000001275669	39,375
41	52,65625	41,87760417	0,730902076	0,744573	-0,000279354	-0,000000722686	2,13518E-08
41	52,734375	41,87890625	0,730924801	0,744557	-0,000278796	-0,000000170265	
41	52,75390625	41,87923177	0,730930483	0,744554	-0,000278657	-0,000000032248	
41	52,76367188	41,87939453	0,730933323	0,744552	-0,000278587	0,000000036748	
41	52,7734375	41,87955729	0,730936164	0,74455	-0,000278518	0,000000105734	

41	52,8125	41,88020833	0,730947527	0,744542	-0,000278239	0,000000381594		
41	53,125	41,88541667	0,731038429	0,744482	-0,000276014	0,000002583409		
41	53,75	41,89583333	0,731220235	0,74436	-0,000271592	0,000006960066		
41	55	41,91666667	0,731583845	0,744117	-0,000262856	0,000015605504	7,343E-08	
42	30	42,5	0,741764932	0,737277	-0,000076433	0,000199469192	7,13896E-08	
43	0	43	0,750491578	0,731354	-0,000005560	0,000268124792		
43	30	43,5	0,759218225	0,725374	-0,000016072	0,000255375920		
44	0	44	0,767944871	0,71934	-0,000107301	0,000161888116		
44	20	44,33333333	0,773762635	0,715286	-0,000212633	0,000055039397	5,92347E-08	
44	25	44,41666667	0,775217076	0,714269	-0,000244501	0,000022790445	5,1989E-08	
44	27,5	44,45833333	0,775944297	0,71376	-0,000261264	0,000005837613		
44	28,125	44,46875	0,776126102	0,713633	-0,000265540	0,000001513184		
44	28,28125	44,47135417	0,776171553	0,713601	-0,000266615	0,000000426690		
44	28,30078125	44,47167969	0,776177234	0,713597	-0,000266749	0,000000290727		
44	28,3203125	44,47200521	0,776182916	0,713593	-0,000266884	0,000000154730		
44	28,33984375	44,47233073	0,776188597	0,713589	-0,000267018	0,000000018699		
44	28,34960938	44,47249349	0,776191438	0,713587	-0,000267086	-0,000000049329		
44	28,359375	44,47265625	0,776194279	0,713585	-0,000267153	-0,000000117365		
44	28,4375	44,47395833	0,776217004	0,713569	-0,000267692	-0,000000661959	0,4375	
44	28,75	44,47916667	0,776307907	0,713505	-0,000269852	-0,000002845720	26,25	
44	30	44,5	0,776671517	0,71325	-0,00027858	-0,000011666933	6,81125E-08	
44	40	44,66666667	0,779580399	0,711209	-0,00035334	-0,000087194364		
44	40,15625	44,66927083	0,779625851	0,711177	-0,00035458	-0,000088444337	0,234375	
44	40,234375	44,67057292	0,779648576	0,711161	-0,00035520	-0,000089070129	14,0625	
44	40,3125	44,671875	0,779671302	0,711145	-0,00035582	-0,000089696457		
44	40,625	44,67708333	0,779762204	0,711081	-0,00035831	-0,000092207140		
44	41,25	44,6875	0,779944009	0,710953	-0,00036331	-0,000097254269		
44	42,5	44,70833333	0,78030762	0,710697	-0,00037341	-0,000107451561		
44	45	44,75	0,78103484	0,710185	-0,00039402	-0,000128258103		
44	50	44,83333333	0,782489281	0,709161	-0,00043690	-0,000171517643		
45	10	45,16666667	0,788307045	0,705047	-0,00063029	-0,000366450361	53,75	27,5
		50	0,872664626	0,642788	-0,007247651	-0,007007109246	53,125	28,75
		70	1,221730476	0,34202	-0,097671255	-0,097543265160	52,8125	28,125
		80	1,396263402	0,173648	-0,169167942	-0,169102960303	52,65625	28,4375
		90	1,570796327	6,13E-17	-0,248374372	-0,248374371785	52,578125	28,28125
							52,734375	28,359375
							52,7734375	28,3203125
								28,30078125


0,000300000000
0,000250000000
0,000200000000
0,000150000000
0,000100000000
0,000050000000
0,000000000000
-0,000050000000
-0,000100000000
-0,000150000000
41,5
42
42,5
43
43,5
44
44,5
45

Prilog 9

Određivanje radijusa sfere R za kartu *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.7.1.

Računanje radijusa sfere u mjerilu karte

	fi		fi [°]	fi [rad]	x	x'
1	45	0	45	0,7854	1,228857	1,0552
2	44	50	44,83333	0,7825	1,179207	1,0056
3	44	10	44,16667	0,7709	0,980648	0,8070
4	44	0	44	0,7679	0,930052	0,7564
5	43	50	43,83333	0,7650	0,88001	0,7064
6	43	40	43,66667	0,7621	0,827896	0,6543
7	43	30	43,5	0,7592	0,778444	0,6048
8	43	20	43,33333	0,7563	0,727631	0,5540
9	43	10	43,16667	0,7534	0,677757	0,5042
10	43	0	43	0,7505	0,627687	0,4541
11	42	50	42,83333	0,7476	0,577247	0,4036
12	42	40	42,66667	0,7447	0,5259	0,3523
13	42	30	42,5	0,7418	0,475324	0,3017
14	42	20	42,33333	0,7389	0,42427	0,2507
15	42	10	42,16667	0,7359	0,374269	0,2007
16	42	0	42	0,7330	0,324136	0,1505
17	41	50	41,83333	0,7301	0,273454	0,0998
18	41	40	41,66667	0,7272	0,223305	0,0497
19	41	30	41,5	0,7243	0,173589	0,0000
				14,27679	12,20968	8,91109952

fi-fj	xi*(fi-fj)	(fi-fj)^2	fi-fj	xi*(fi-fj)	(fi-fj)^2	di	|di|
0,061087	0,075067	0,003732	0,061087	0,06446144	0,00373156	-0,0021179	0,0021
0,058178	0,068603	0,003385	0,058178	0,05850344	0,00338464	-0,0014152	0,0014
0,046542	0,045641	0,002166	0,046542	0,03756135	0,00216617	0,0014278	0,0014
0,043633	0,040581	0,001904	0,043633	0,03300611	0,00190386	0,0011828	0,0012
0,040724	0,035838	0,001658	0,040724	0,02876775	0,00165847	0,0014912	0,0015
0,037815	0,031307	0,00143	0,037815	0,02474229	0,00143001	-0,0002697	0,0003
0,034907	0,027173	0,001218	0,034907	0,02111282	0,00121847	0,0006286	0,0006
0,031998	0,023283	0,001024	0,031998	0,01772751	0,00102385	0,0001661	0,0002
0,029089	0,019715	0,000846	0,029089	0,01466514	0,00084616	0,0006426	0,0006
0,02618	0,016433	0,000685	0,02618	0,01188779	0,00068539	0,0009232	0,0009
0,023271	0,013433	0,000542	0,023271	0,00939308	0,00054154	0,0008318	0,0008
0,020362	0,010708	0,000415	0,020362	0,00717338	0,00041462	-0,0001661	0,0002
0,017453	0,008296	0,000305	0,017453	0,0052659	0,00030462	-0,0003905	0,0004
0,014544	0,006171	0,000212	0,014544	0,00364568	0,00021154	-0,0010951	0,0011
0,011636	0,004355	0,000135	0,011636	0,00233475	0,00013539	-0,0007464	0,0007
0,008727	0,002829	7,62E-05	0,008727	0,00131356	7,6154E-05	-0,0005292	0,0005
0,005818	0,001591	3,38E-05	0,005818	0,00058085	3,3846E-05	-0,0008612	0,0009
0,002909	0,00065	8,46E-06	0,002909	0,00014454	8,4616E-06	-0,0006610	0,0007
0	0	0	0	0	0	-0,0000270	0,0000
	0,431673	0,019775		0,34228737	0,01977475	-0,0009852	0,0156
							0,0008
		21,82952		R=	17,3093166		
			373000		6456375		

Prilog 10

Postupak računanja teorijskih koordinata kartografske mreže uz poglavlje 5.8.1.

$$y = \rho \sin \delta$$
$$x = q - \rho \cos \delta$$
$$q = \rho_j$$
$$\rho = R\left(\frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} - \varphi\right)$$
$$\delta = k(\lambda - \lambda_0)$$
$$k = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

$$\rho = R\left(\frac{\varphi_2 \cos\varphi_1 - \varphi_1 \cos\varphi_2}{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2} - \varphi\right) = K - R\varphi$$

			370000		
R=	6404447		17,30932	C=	1,819342
K=	11651880		31,49157		
k=	0,684181	0,684181	0,684061	17,30932	
lambda0=	30	0,523599			
	20	0,333333	0,005818		
q=	18,95423		18,95423	18,95423	

fi		lambda		fi [°]	lambda [°]	fi [rad]	lambda [ra	ro	delta	iz koeficijenata y	x
45	0	28	40	45	28,66667	0,785398	0,500328	17,89686	-0,01592	-0,28494	1,059634
45	0	29	0	45	29	0,785398	0,506145	17,89686	-0,01194	-0,21371	1,058642
45	0	29	20	45	29,33333	0,785398	0,511963	17,89686	-0,00796	-0,14247	1,057933
45	0	29	40	45	29,66667	0,785398	0,517781	17,89686	-0,00398	-0,07124	1,057508
45	0	30	0	45	30	0,785398	0,523599	17,89686	0	0	1,057366
44	50	28	40	44,83333	28,66667	0,782489	0,500328	17,94721	-0,01592	-0,28574	1,00929
44	50	29	0	44,83333	29	0,782489	0,506145	17,94721	-0,01194	-0,21431	1,008295
44	50	29	20	44,83333	29,33333	0,782489	0,511963	17,94721	-0,00796	-0,14287	1,007584
44	50	29	40	44,83333	29,66667	0,782489	0,517781	17,94721	-0,00398	-0,07144	1,007157
44	50	30	0	44,83333	30	0,782489	0,523599	17,94721	0	0	1,007015
44	40	28	40	44,66667	28,66667	0,77958	0,500328	17,99756	-0,01592	-0,28654	0,958946
44	40	29	0	44,66667	29	0,77958	0,506145	17,99756	-0,01194	-0,21491	0,957948
44	40	29	20	44,66667	29,33333	0,77958	0,511963	17,99756	-0,00796	-0,14327	0,957235
44	40	29	40	44,66667	29,66667	0,77958	0,517781	17,99756	-0,00398	-0,07164	0,956807
44	30	28	40	44,5	28,66667	0,776672	0,500328	18,04792	-0,01592	-0,28734	0,908601
44	30	29	0	44,5	29	0,776672	0,506145	18,04792	-0,01194	-0,21551	0,9076
44	30	29	20	44,5	29,33333	0,776672	0,511963	18,04792	-0,00796	-0,14367	0,906886
44	30	29	40	44,5	29,66667	0,776672	0,517781	18,04792	-0,00398	-0,07184	0,906457
44	20	28	40	44,33333	28,66667	0,773763	0,500328	18,09827	-0,01592	-0,28814	0,858257
44	20	29	0	44,33333	29	0,773763	0,506145	18,09827	-0,01194	-0,21611	0,857253
44	20	29	20	44,33333	29,33333	0,773763	0,511963	18,09827	-0,00796	-0,14408	0,856536
44	20	29	40	44,33333	29,66667	0,773763	0,517781	18,09827	-0,00398	-0,07204	0,856106
44	10	28	40	44,16667	28,66667	0,770854	0,500328	18,14862	-0,01592	-0,28894	0,807912
44	10	29	0	44,16667	29	0,770854	0,506145	18,14862	-0,01194	-0,21671	0,806906
44	10	29	20	44,16667	29,33333	0,770854	0,511963	18,14862	-0,00796	-0,14448	0,806187
44	10	29	40	44,16667	29,66667	0,770854	0,517781	18,14862	-0,00398	-0,07224	0,805756
44	10	30	0	44,16667	30	0,770854	0,523599	18,14862	0	0	0,805612
44	0	29	40	44	29,66667	0,767945	0,517781	18,19897	-0,00398	-0,07244	0,755406
44	0	30	0	44	30	0,767945	0,523599	18,19897	0	0	0,755261
44	0	30	20	44	30,33333	0,767945	0,529417	18,19897	0,00398	0,072439	0,755406
43	50	29	40	43,83333	29,66667	0,765036	0,517781	18,24932	-0,00398	-0,07264	0,705055
43	50	30	0	43,83333	30	0,765036	0,523599	18,24932	0	0	0,704911
43	50	30	20	43,83333	30,33333	0,765036	0,529417	18,24932	0,00398	0,072639	0,705055
43	40	29	40	43,66667	29,66667	0,762127	0,517781	18,29967	-0,00398	-0,07284	0,654705
43	40	30	0	43,66667	30	0,762127	0,523599	18,29967	0	0	0,65456
43	40	30	20	43,66667	30,33333	0,762127	0,529417	18,29967	0,00398	0,07284	0,654705
43	40	30	40	43,66667	30,66667	0,762127	0,535234	18,29967	0,007961	0,145679	0,65514
43	40	31	0	43,66667	31	0,762127	0,541052	18,29967	0,011941	0,218515	0,655865
43	40	31	20	43,66667	31,33333	0,762127	0,54687	18,29967	0,015922	0,291348	0,656879
43	30	29	40	43,5	29,66667	0,759218	0,517781	18,35002	-0,00398	-0,07304	0,604354
43	30	30	0	43,5	30	0,759218	0,523599	18,35002	0	0	0,604209
43	30	30	20	43,5	30,33333	0,759218	0,529417	18,35002	0,00398	0,07304	0,604354
43	30	30	40	43,5	30,66667	0,759218	0,535234	18,35002	0,007961	0,146079	0,604791
43	30	31	0	43,5	31	0,759218	0,541052	18,35002	0,011941	0,219116	0,605517
43	30	31	20	43,5	31,33333	0,759218	0,54687	18,35002	0,015922	0,29215	0,606535
43	20	29	40	43,33333	29,66667	0,756309	0,517781	18,40037	-0,00398	-0,07324	0,554004

fi1	41	50	41,83333	0,730129	0,745088
fi2	44	30	44,5	0,776672	0,71325
				rad	cos
fij	41	30	41,5	0,724312	

G	n	ro0
1,819342	0,684061	18,95423

17,31402	6406186	6461330
		17,46305
17,30932		

iz "zaokruženih" standardnih paralela

ro	delta	y	x	
17,89686	-0,01592	-0,28489	1,059634	1,000246
17,89686	-0,01194	-0,21367	1,058642	1,000246
17,89686	-0,00796	-0,14245	1,057933	1,000246
17,89686	-0,00398	-0,07122	1,057508	1,000246
17,89686	0	0	1,057366	1,000246
17,94721	-0,01592	-0,28569	1,009289	1,000155
17,94721	-0,01194	-0,21427	1,008294	1,000155
17,94721	-0,00796	-0,14285	1,007584	1,000155
17,94721	-0,00398	-0,07142	1,007157	1,000155
17,94721	0	0	1,007015	1,000155
17,99756	-0,01592	-0,28649	0,958945	1,000073
17,99756	-0,01194	-0,21487	0,957947	1,000073
17,99756	-0,00796	-0,14325	0,957235	1,000073
17,99756	-0,00398	-0,07162	0,956807	1,000073
18,04792	-0,01592	-0,28729	0,9086	1
18,04792	-0,01194	-0,21547	0,9076	1
18,04792	-0,00796	-0,14365	0,906885	1
18,04792	-0,00398	-0,07183	0,906457	1
18,09827	-0,01592	-0,28809	0,858256	0,999936
18,09827	-0,01194	-0,21607	0,857253	0,999936
18,09827	-0,00796	-0,14405	0,856536	0,999936
18,09827	-0,00398	-0,07203	0,856106	0,999936
18,14862	-0,01592	-0,28889	0,807912	0,99988
18,14862	-0,01194	-0,21667	0,806906	0,99988
18,14862	-0,00796	-0,14445	0,806187	0,99988
18,14862	-0,00398	-0,07223	0,805756	0,99988
18,14862	0	0	0,805612	0,99988
18,19897	-0,00398	-0,07243	0,755406	0,999833
18,19897	0	0	0,755261	0,999833
18,19897	0,00398	0,072426	0,755406	0,999833
18,24932	-0,00398	-0,07263	0,705055	0,999795
18,24932	0	0	0,704911	0,999795
18,24932	0,00398	0,072627	0,705055	0,999795
18,29967	-0,00398	-0,07283	0,654705	0,999766
18,29967	0	0	0,65456	0,999766
18,29967	0,00398	0,072827	0,654705	0,999766
18,29967	0,007959	0,145653	0,65514	0,999766
18,29967	0,011939	0,218477	0,655864	0,999766
18,29967	0,015919	0,291297	0,656878	0,999766
18,35002	-0,00398	-0,07303	0,604354	0,999745
18,35002	0	0	0,604209	0,999745
18,35002	0,00398	0,073028	0,604354	0,999745
18,35002	0,007959	0,146054	0,60479	0,999745
18,35002	0,011939	0,219078	0,605517	0,999745
18,35002	0,015919	0,292098	0,606534	0,999745
18,40037	-0,00398	-0,07323	0,554004	0,999733

43	20	30	0	43,33333	30	0,756309	0,523599	18,40037	0	0	0,553858
43	20	30	20	43,33333	30,33333	0,756309	0,529417	18,40037	0,00398	0,073241	0,554004
43	20	30	40	43,33333	30,66667	0,756309	0,535234	18,40037	0,007961	0,14648	0,554441
43	20	31	0	43,33333	31	0,756309	0,541052	18,40037	0,011941	0,219718	0,55517
43	20	31	20	43,33333	31,33333	0,756309	0,54687	18,40037	0,015922	0,292951	0,556191
43	10	29	40	43,16667	29,66667	0,7534	0,517781	18,45072	-0,00398	-0,07344	0,503654
43	10	30	0	43,16667	30	0,7534	0,523599	18,45072	0	0	0,503508
43	10	30	20	43,16667	30,33333	0,7534	0,529417	18,45072	0,00398	0,073441	0,503654
43	10	30	40	43,16667	30,66667	0,7534	0,535234	18,45072	0,007961	0,146881	0,504092
43	10	31	0	43,16667	31	0,7534	0,541052	18,45072	0,011941	0,220319	0,504823
43	10	31	20	43,16667	31,33333	0,7534	0,54687	18,45072	0,015922	0,293753	0,505846
43	0	29	20	43	29,33333	0,750492	0,511963	18,50107	-0,00796	-0,14728	0,453743
43	0	29	40	43	29,66667	0,750492	0,517781	18,50107	-0,00398	-0,07364	0,453303
43	0	30	0	43	30	0,750492	0,523599	18,50107	0	0	0,453157
43	0	30	20	43	30,33333	0,750492	0,529417	18,50107	0,00398	0,073642	0,453303
43	0	30	40	43	30,66667	0,750492	0,535234	18,50107	0,007961	0,147282	0,453743
43	0	31	0	43	31	0,750492	0,541052	18,50107	0,011941	0,22092	0,454476
43	0	31	20	43	31,33333	0,750492	0,54687	18,50107	0,015922	0,294555	0,455502
42	50	29	20	42,83333	29,33333	0,747583	0,511963	18,55142	-0,00796	-0,14768	0,403394
42	50	29	40	42,83333	29,66667	0,747583	0,517781	18,55142	-0,00398	-0,07384	0,402953
42	50	30	0	42,83333	30	0,747583	0,523599	18,55142	0	0	0,402806
42	50	30	20	42,83333	30,33333	0,747583	0,529417	18,55142	0,00398	0,073842	0,402953
42	50	30	40	42,83333	30,66667	0,747583	0,535234	18,55142	0,007961	0,147683	0,403394
42	50	31	0	42,83333	31	0,747583	0,541052	18,55142	0,011941	0,221521	0,404129
42	50	31	20	42,83333	31,33333	0,747583	0,54687	18,55142	0,015922	0,295356	0,405157
42	40	29	20	42,66667	29,33333	0,744674	0,511963	18,60177	-0,00796	-0,14808	0,353045
42	40	29	40	42,66667	29,66667	0,744674	0,517781	18,60177	-0,00398	-0,07404	0,352603
42	40	30	0	42,66667	30	0,744674	0,523599	18,60177	0	0	0,352455
42	40	30	20	42,66667	30,33333	0,744674	0,529417	18,60177	0,00398	0,074042	0,352603
42	40	30	40	42,66667	30,66667	0,744674	0,535234	18,60177	0,007961	0,148084	0,353045
42	30	29	20	42,5	29,33333	0,741765	0,511963	18,65212	-0,00796	-0,14848	0,302696
42	30	29	40	42,5	29,66667	0,741765	0,517781	18,65212	-0,00398	-0,07424	0,302252
42	30	30	0	42,5	30	0,741765	0,523599	18,65212	0	0	0,302105
42	30	30	20	42,5	30,33333	0,741765	0,529417	18,65212	0,00398	0,074243	0,302252
42	20	28	40	42,33333	28,66667	0,738856	0,500328	18,70248	-0,01592	-0,29776	0,254124
42	20	29	0	42,33333	29	0,738856	0,506145	18,70248	-0,01194	-0,22332	0,253087
42	20	29	20	42,33333	29,33333	0,738856	0,511963	18,70248	-0,00796	-0,14889	0,252346
42	20	29	40	42,33333	29,66667	0,738856	0,517781	18,70248	-0,00398	-0,07444	0,251902
42	20	30	0	42,33333	30	0,738856	0,523599	18,70248	0	0	0,251754
42	20	30	20	42,33333	30,33333	0,738856	0,529417	18,70248	0,00398	0,074443	0,251902
42	10	29	20	42,16667	29,33333	0,735947	0,511963	18,75283	-0,00796	-0,14929	0,201997
42	10	29	40	42,16667	29,66667	0,735947	0,517781	18,75283	-0,00398	-0,07464	0,201552
42	10	30	0	42,16667	30	0,735947	0,523599	18,75283	0	0	0,201403
42	10	30	20	42,16667	30,33333	0,735947	0,529417	18,75283	0,00398	0,074644	0,201552
42	10	30	40	42,16667	30,66667	0,735947	0,535234	18,75283	0,007961	0,149286	0,201997
42	0	29	20	42	29,33333	0,733038	0,511963	18,80318	-0,00796	-0,14969	0,151648
42	0	29	40	42	29,66667	0,733038	0,517781	18,80318	-0,00398	-0,07484	0,151201
42	0	30	0	42	30	0,733038	0,523599	18,80318	0	0	0,151052
42	0	30	20	42	30,33333	0,733038	0,529417	18,80318	0,00398	0,074844	0,151201
42	0	30	40	42	30,66667	0,733038	0,535234	18,80318	0,007961	0,149687	0,151648
41	50	29	40	41,83333	29,66667	0,730129	0,517781	18,85353	-0,00398	-0,07504	0,100851
41	50	30	0	41,83333	30	0,730129	0,523599	18,85353	0	0	0,100702
41	50	30	20	41,83333	30,33333	0,730129	0,529417	18,85353	0,00398	0,075044	0,100851
41	50	30	40	41,83333	30,66667	0,730129	0,535234	18,85353	0,007961	0,150088	0,101299
41	50	31	0	41,83333	31	0,730129	0,541052	18,85353	0,011941	0,225129	0,102046
41	40	29	40	41,66667	29,66667	0,727221	0,517781	18,90388	-0,00398	-0,07524	0,050501
41	40	30	0	41,66667	30	0,727221	0,523599	18,90388	0	0	0,050351
41	40	30	20	41,66667	30,33333	0,727221	0,529417	18,90388	0,00398	0,075245	0,050501
41	40	30	40	41,66667	30,66667	0,727221	0,535234	18,90388	0,007961	0,150489	0,05095

18,40037	0	0	0,553858	0,999733
18,40037	0,00398	0,073228	0,554004	0,999733
18,40037	0,007959	0,146455	0,554441	0,999733
18,40037	0,011939	0,219679	0,55517	0,999733
18,40037	0,015919	0,2929	0,55619	0,999733
18,45072	-0,00398	-0,07343	0,503654	0,999729
18,45072	0	0	0,503508	0,999729
18,45072	0,00398	0,073428	0,503654	0,999729
18,45072	0,007959	0,146855	0,504092	0,999729
18,45072	0,011939	0,22028	0,504823	0,999729
18,45072	0,015919	0,293701	0,505845	0,999729
18,50107	-0,00796	-0,14726	0,453743	0,999734
18,50107	-0,00398	-0,07363	0,453303	0,999734
18,50107	0	0	0,453157	0,999734
18,50107	0,00398	0,073629	0,453303	0,999734
18,50107	0,007959	0,147256	0,453743	0,999734
18,50107	0,011939	0,220881	0,454475	0,999734
18,50107	0,015919	0,294503	0,455501	0,999734
18,55142	-0,00796	-0,14766	0,403394	0,999747
18,55142	-0,00398	-0,07383	0,402953	0,999747
18,55142	0	0	0,402806	0,999747
18,55142	0,00398	0,073829	0,402953	0,999747
18,55142	0,007959	0,147657	0,403394	0,999747
18,55142	0,011939	0,221482	0,404128	0,999747
18,55142	0,015919	0,295304	0,405157	0,999747
18,60177	-0,00796	-0,14806	0,353045	0,999769
18,60177	-0,00398	-0,07403	0,352603	0,999769
18,60177	0	0	0,352455	0,999769
18,60177	0,00398	0,074029	0,352603	0,999769
18,60177	0,007959	0,148058	0,353045	0,999769
18,65212	-0,00796	-0,14846	0,302695	0,999798
18,65212	-0,00398	-0,07423	0,302252	0,999798
18,65212	0	0	0,302105	0,999798
18,65212	0,00398	0,07423	0,302252	0,999798
18,70248	-0,01592	-0,29771	0,254123	0,999836
18,70248	-0,01194	-0,22329	0,253087	0,999836
18,70248	-0,00796	-0,14886	0,252346	0,999836
18,70248	-0,00398	-0,07443	0,251902	0,999836
18,70248	0	0	0,251754	0,999836
18,70248	0,00398	0,07443	0,251902	0,999836
18,75283	-0,00796	-0,14926	0,201997	0,999883
18,75283	-0,00398	-0,07463	0,201552	0,999883
18,75283	0	0	0,201403	0,999883
18,75283	0,00398	0,074631	0,201552	0,999883
18,75283	0,007959	0,14926	0,201997	0,999883
18,80318	-0,00796	-0,14966	0,151648	0,999937
18,80318	-0,00398	-0,07483	0,151201	0,999937
18,80318	0	0	0,151052	0,999937
18,80318	0,00398	0,074831	0,151201	0,999937
18,80318	0,007959	0,149661	0,151648	0,999937
18,85353	-0,00398	-0,07503	0,100851	1
18,85353	0	0	0,100702	1
18,85353	0,00398	0,075031	0,100851	1
18,85353	0,007959	0,150061	0,101299	1
18,85353	0,011939	0,225089	0,102045	1
18,90388	-0,00398	-0,07523	0,0505	1,000071
18,90388	0	0	0,050351	1,000071
18,90388	0,00398	0,075232	0,0505	1,000071
18,90388	0,007959	0,150462	0,05095	1,000071

41	40	31	0	41,66667	31	0,727221	0,541052	18,90388	0,011941	0,22573	0,051699
41	30	30	0	41,5	30	0,724312	0,523599	18,95423	0	0	0
41	30	30	20	41,5	30,33333	0,724312	0,529417	18,95423	0,00398	0,075445	0,00015
41	30	30	40	41,5	30,66667	0,724312	0,535234	18,95423	0,007961	0,150889	0,000601
41	30	31	0	41,5	31	0,724312	0,541052	18,95423	0,011941	0,226331	0,001351
41	20	30	20	41,33333	30,33333	0,721403	0,529417	19,00458	0,00398	0,075646	-0,0502
41	20	30	40	41,33333	30,66667	0,721403	0,535234	19,00458	0,007961	0,15129	-0,04975

18,90388	0,011939	0,22569	0,051698	1,000071
18,95423	0	0	0	1,00015
18,95423	0,00398	0,075432	0,00015	1,00015
18,95423	0,007959	0,150863	0,0006	1,00015
18,95423	0,011939	0,226291	0,001351	1,00015
19,00458	0,00398	0,075632	-0,0502	1,000237
19,00458	0,007959	0,151264	-0,04975	1,000237

Prilog 11

Postupak računanja odstupanja teorijske kartografske mreže i kartografske mreže nacrtane na karti *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* uz poglavlje 5.8.1.

		koordinate s karte			teorijske koord.				Odstupanja			
		fi	lambda	x'	y'							
1	1	45°	28°40'	-0,2845514	1,0613602	-0,28489	1,059634	3,09266E-06	0,0017586	-0,0003336	-0,0017267	0,0000001	0,0000030
2		45°	29°	-0,2136653	1,0591214	-0,21367	1,058642	2,30277E-07	0,0004799	-0,0000024	-0,0004799	0,0000000	0,0000002
3		45°	29°20'	-0,1418254	1,0570745	-0,14245	1,057933	1,12334E-06	0,0010599	-0,0006216	0,0008584	0,0000004	0,0000007
4		45°	29°40'	-0,0705167	1,0561308	-0,07122	1,057508	2,39612E-06	0,0015479	-0,0007073	0,0013769	0,0000005	0,0000019
5		45°	30°	0,0005732	1,0552571	0	1,057366	4,77582E-06	0,0021854	-0,0005732	0,0021089	0,0000003	0,0000044
6	2	44°50'	28°40'	-0,2853869	1,0105143	-0,28569	1,009289	1,59072E-06	0,0012612	-0,0002996	-0,0012251	0,0000001	0,0000015
7		44°50'	29°	-0,2142132	1,0084112	-0,21427	1,008294	1,67607E-08	0,0001295	-0,0000556	-0,0001169	0,0000000	0,0000000
8		44°50'	29°20'	-0,1425472	1,0073251	-0,14285	1,007584	1,57236E-07	0,0003965	-0,0003006	0,0002586	0,0000001	0,0000001
9		44°50'	29°40'	-0,0711111	1,0064829	-0,07142	1,007157	5,53031E-07	0,0007437	-0,0003133	0,0006744	0,0000001	0,0000005
10		44°50'	30°	0,0000279	1,0056330	0	1,007015	1,91132E-06	0,0013825	-0,0000279	0,0013822	0,0000000	0,0000019
11	3	44°40'	28°40'	-0,2862381	0,9602205	-0,28649	0,958945	1,68985E-06	0,0012999	-0,0002499	-0,0012757	0,0000001	0,0000016
12		44°40'	29°	-0,2149519	0,9587079	-0,21487	0,957947	5,85491E-07	0,0007652	0,0000819	-0,0007608	0,0000000	0,0000006
13		44°40'	29°20'	-0,1430212	0,9575416	-0,14325	0,957235	1,46E-07	0,0003821	-0,0002274	-0,0003071	0,0000001	0,0000001
14		44°40'	29°40'	-0,0713050	0,9574293	-0,07162	0,956807	4,89551E-07	0,0006997	-0,0003198	-0,0006223	0,0000001	0,0000004
15	4	44°30'	28°40'	-0,2870058	0,9107343	-0,28729	0,9086	4,63399E-06	0,0021527	-0,0002837	-0,0021339	0,0000001	0,0000046
16		44°30'	29°	-0,2154958	0,9096348	-0,21547	0,9076	4,14111E-06	0,0020350	0,0000247	-0,0020348	0,0000000	0,0000041
17		44°30'	29°20'	-0,1437685	0,9083894	-0,14365	0,906885	2,27622E-06	0,0015087	0,0001192	-0,0015040	0,0000000	0,0000023
18		44°30'	29°40'	-0,0716237	0,9072452	-0,07183	0,906457	6,62453E-07	0,0008139	-0,0002015	-0,0007886	0,0000000	0,0000006
19	5	44°20'	28°40'	-0,2877304	0,8603319	-0,28809	0,858256	4,43939E-06	0,0021070	-0,0003606	-0,0020759	0,0000001	0,0000043
20		44°20'	29°	-0,2161535	0,8596842	-0,21607	0,857253	5,91803E-06	0,0024327	0,0000813	-0,0024313	0,0000000	0,0000059
21		44°20'	29°20'	-0,1441974	0,8593168	-0,14405	0,856536	7,75317E-06	0,0027845	0,0001474	-0,0027805	0,0000000	0,0000077
22		44°20'	29°40'	-0,0718695	0,8586858	-0,07203	0,856106	6,67839E-06	0,0025843	-0,0001561	-0,0025795	0,0000000	0,0000067
23	6	44°10'	28°40'	-0,2884269	0,8102014	-0,28889	0,807912	5,45996E-06	0,0023367	-0,0004656	-0,0022898	0,0000002	0,0000052
24		44°10'	29°	-0,2169440	0,8097711	-0,21667	0,806906	8,28395E-06	0,0028782	0,0002707	-0,0028654	0,0000001	0,0000082
25		44°10'	29°20'	-0,1447904	0,8083668	-0,14445	0,806187	4,86673E-06	0,0022061	0,0003396	-0,0021798	0,0000001	0,0000048
26		44°10'	29°40'	-0,0722456	0,8074449	-0,07223	0,805756	2,85323E-06	0,0016892	0,0000197	-0,0016890	0,0000000	0,0000029
27		44°10'	30°	-0,0001746	0,8070671	0	0,805612	2,14716E-06	0,0014653	0,0001746	-0,0014549	0,0000000	0,0000021
28		44°	29°40'	-0,0724370	0,7568583	-0,07243	0,755406	2,11061E-06	0,0014528	0,0000107	-0,0014528	0,0000000	0,0000021
29		44°	30°	-0,0003933	0,7564035	0	0,755261	1,45912E-06	0,0012079	0,0003933	-0,0011421	0,0000002	0,0000013
30		44°	30°20'	0,0720652	0,7561320	0,072426	0,755406	6,5821E-07	0,0008113	0,0003612	-0,0007265	0,0000001	0,0000005
31		43°50'	29°40'	-0,0726969	0,7068659	-0,07263	0,705055	3,28382E-06	0,0018121	0,0000702	-0,0018108	0,0000000	0,0000033
32		43°50'	30°	-0,0003216	0,7065508	0	0,704911	2,7934E-06	0,0016713	0,0003216	-0,0016401	0,0000001	0,0000027
33		43°50'	30°20'	0,0725227	0,7057596	0,072627	0,705055	5,07046E-07	0,0007121	0,0001040	-0,0007044	0,0000000	0,0000005
34		43°40'	29°40'	-0,0734242	0,6553646	-0,07283	0,654705	7,91782E-07	0,0008898	0,0005971	-0,0006598	0,0000004	0,0000004
35		43°40'	30°	-0,0010707	0,6543755	0	0,65456	1,1805E-06	0,0010865	0,0010707	0,0001844	0,0000011	0,0000000
36		43°40'	30°20'	0,0725884	0,6542449	0,072827	0,654705	2,6856E-07	0,0005182	0,0002388	0,0004600	0,0000001	0,0000002
37		43°40'	30°40'	0,1457447	0,6543944	0,145653	0,65514	5,63691E-07	0,0007508	-0,0000916	0,0007452	0,0000000	0,0000006

38		43°40'	31°	0,2178131	0,6543545	0,218477	0,655864	2,7193E-06	0,0016490	0,0006636	0,0015096	0,0000004	0,0000023
39		43°40'	31°20'	0,2902695	0,6552290	0,291297	0,656878	3,77642E-06	0,0019433	0,0010274	0,0016495	0,0000011	0,0000027
40		43°30'	29°40'	-0,0735998	0,6056709	-0,07303	0,604354	2,06048E-06	0,0014354	0,0005723	-0,0013164	0,0000003	0,0000017
41		43°30'	30°	-0,0010476	0,6048569	0	0,604209	1,5171E-06	0,0012317	0,0010476	-0,0006478	0,0000011	0,0000004
42		43°30'	30°20'	0,0726287	0,6042902	0,073028	0,604354	1,63194E-07	0,0004040	0,0003988	0,0000642	0,0000002	0,0000000
43		43°30'	30°40'	0,1458184	0,6045366	0,146054	0,60479	1,19853E-07	0,0003462	0,0002355	0,0002538	0,0000001	0,0000001
44		43°30'	31°	0,2181812	0,6043385	0,219078	0,605517	2,19282E-06	0,0014808	0,0008967	0,0011785	0,0000008	0,0000014
45		43°30'	31°20'	0,2907536	0,6042825	0,292098	0,606534	6,87843E-06	0,0026227	0,0013448	0,0022516	0,0000018	0,0000051
46		43°20'	29°40'	-0,0736679	0,5544497	-0,07323	0,554004	3,92166E-07	0,0006262	0,0004400	-0,0004456	0,0000002	0,0000002
47		43°20'	30°	-0,0010489	0,5540515	0	0,553858	1,13752E-06	0,0010665	0,0010489	-0,0001931	0,0000011	0,0000000
48		43°20'	30°20'	0,0729189	0,5536195	0,073228	0,554004	2,43336E-07	0,0004933	0,0003090	0,0003845	0,0000001	0,0000001
49		43°20'	30°40'	0,1460245	0,5536043	0,146455	0,554441	8,8548E-07	0,0009410	0,0004301	0,0008370	0,0000002	0,0000007
50		43°20'	31°	0,2186763	0,5536279	0,219679	0,55517	3,38279E-06	0,0018392	0,0010027	0,0015419	0,0000010	0,0000024
51		43°20'	31°20'	0,2914174	0,5537292	0,2929	0,55619	8,25225E-06	0,0028727	0,0014826	0,0024605	0,0000022	0,0000061
52		43°10'	29°40'	-0,0737393	0,5052606	-0,07343	0,503654	2,67867E-06	0,0016367	0,0003111	-0,0016068	0,0000001	0,0000026
53		43°10'	30°	-0,0011043	0,5041773	0	0,503508	1,66787E-06	0,0012915	0,0011043	-0,0006697	0,0000012	0,0000004
54		43°10'	30°20'	0,0729986	0,5035177	0,073428	0,503654	2,0311E-07	0,0004507	0,0004297	0,0001360	0,0000002	0,0000000
55		43°10'	30°40'	0,1462576	0,5031348	0,146855	0,504092	1,27361E-06	0,0011285	0,0005977	0,0009572	0,0000004	0,0000009
56		43°10'	31°	0,2192485	0,5036440	0,22028	0,504823	2,45341E-06	0,0015663	0,0010317	0,0011786	0,0000011	0,0000014
57		43°10'	31°20'	0,2920818	0,5035599	0,293701	0,505845	7,84655E-06	0,0028012	0,0016197	0,0022854	0,0000026	0,0000052
58		43°	29°20'	-0,1474898	0,4545861	-0,14726	0,453743	7,65619E-07	0,0008750	0,0002336	-0,0008432	0,0000001	0,0000007
59		43°	29°40'	-0,0738376	0,4547015	-0,07363	0,453303	1,9985E-06	0,0014137	0,0002090	-0,0013982	0,0000000	0,0000020
60		43°	30°	-0,0011705	0,4541071	0	0,453157	2,27297E-06	0,0015076	0,0011705	-0,0009503	0,0000014	0,0000009
61		43°	30°20'	0,0731096	0,4532678	0,073629	0,453303	2,70637E-07	0,0005202	0,0005190	0,0000355	0,0000003	0,0000000
62		43°	30°40'	0,1466702	0,4532416	0,147256	0,453743	5,94607E-07	0,0007711	0,0005859	0,0005013	0,0000003	0,0000003
63		43°	31°	0,2196199	0,4534870	0,220881	0,454475	2,56807E-06	0,0016025	0,0012614	0,0009884	0,0000016	0,0000010
64		43°	31°20'	0,2929122	0,4531749	0,294503	0,455501	7,94079E-06	0,0028179	0,0015907	0,0023261	0,0000025	0,0000054
65		42°50'	29°20'	-0,1479593	0,4044247	-0,14766	0,403394	1,15432E-06	0,0010744	0,0003025	-0,0010309	0,0000001	0,0000011
66		42°50'	29°40'	-0,0739695	0,4032926	-0,07383	0,402953	1,35068E-07	0,0003675	0,0001405	-0,0003396	0,0000000	0,0000001
67		42°50'	30°	-0,0007742	0,4036650	0	0,402806	1,33711E-06	0,0011563	0,0007742	-0,0008589	0,0000006	0,0000007
68		42°50'	30°20'	0,0731346	0,4020532	0,073829	0,402953	1,29183E-06	0,0011366	0,0006945	0,0008998	0,0000005	0,0000008
69		42°50'	30°40'	0,1470397	0,4021586	0,147657	0,403394	1,90654E-06	0,0013808	0,0006172	0,0012352	0,0000004	0,0000015
70		42°50'	31°	0,2202070	0,4025520	0,221482	0,404128	4,11106E-06	0,0020276	0,0012754	0,0015762	0,0000016	0,0000025
71		42°50'	31°20'	0,2935734	0,4029446	0,295304	0,405157	7,88919E-06	0,0028088	0,0017310	0,0022119	0,0000030	0,0000049
72	15	42°40'	29°20'	-0,1482827	0,3543076	-0,14806	0,353045	1,64591E-06	0,0012829	0,0002251	-0,0012630	0,0000001	0,0000016
73		42°40'	29°40'	-0,0741604	0,3535200	-0,07403	0,352603	8,58672E-07	0,0009266	0,0001310	-0,0009173	0,0000000	0,0000008
74		42°40'	30°	-0,0004989	0,3523163	0	0,352455	2,68203E-07	0,0005179	0,0004989	0,0001390	0,0000002	0,0000000
75		42°40'	30°20'	0,0737085	0,3515403	0,074029	0,352603	1,23145E-06	0,0011097	0,0003209	0,0010623	0,0000001	0,0000011
76		42°40'	30°40'	0,1470120	0,3512802	0,148058	0,353045	4,20613E-06	0,0020509	0,0010456	0,0017643	0,0000011	0,0000031
77	16	42°30'	29°20'	-0,1485573	0,3034503	-0,14846	0,302695	5,79657E-07	0,0007614	0,0000989	-0,0007549	0,0000000	0,0000006
78		42°30'	29°40'	-0,0743449	0,3024453	-0,07423	0,302252	5,05071E-08	0,0002247	0,0001151	-0,0001930	0,0000000	0,0000000

79		42°30'	30°	-0,0007852	0,3017411	0	0,302105	7,48701E-07	0,0008653	0,0007852	0,0003635	0,0000006	0,0000001
80		42°30'	30°20'	0,0739429	0,3016109	0,07423	0,302252	4,93673E-07	0,0007026	0,0002869	0,0006414	0,0000001	0,0000004
81	17	42°20'	28°40'	-0,2974814	0,2544320	-0,29771	0,254123	1,46944E-07	0,0003833	-0,0002275	-0,0003085	0,0000001	0,0000001
82		42°20'	29°	-0,2229969	0,2529808	-0,22329	0,253087	9,47036E-08	0,0003077	-0,0002889	0,0001059	0,0000001	0,0000000
83		42°20'	29°20'	-0,1488950	0,2516143	-0,14886	0,252346	5,37056E-07	0,0007328	0,0000358	0,0007320	0,0000000	0,0000005
84		42°20'	29°40'	-0,0743605	0,2508679	-0,07443	0,251902	1,07404E-06	0,0010364	-0,0000697	0,0010340	0,0000000	0,0000011
85		42°20'	30°	-0,0005796	0,2506857	0	0,251754	1,47671E-06	0,0012152	0,0005796	0,0010681	0,0000003	0,0000011
86		42°20'	30°20'	0,0739011	0,2504476	0,07443	0,251902	2,39496E-06	0,0015476	0,0005291	0,0014543	0,0000003	0,0000021
87	18	42°10'	29°20'	-0,1492558	0,2014093	-0,14926	0,201997	3,45428E-07	0,0005877	-0,0000041	0,0005877	0,0000000	0,0000003
88		42°10'	29°40'	-0,0743492	0,2009084	-0,07463	0,201552	4,9279E-07	0,0007020	-0,0002813	0,0006432	0,0000001	0,0000004
89		42°10'	30°	-0,0004495	0,2006837	0	0,201403	7,19471E-07	0,0008482	0,0004495	0,0007193	0,0000002	0,0000005
90		42°10'	30°20'	0,0740519	0,2006255	0,074631	0,201552	1,19236E-06	0,0010920	0,0005786	0,0009260	0,0000003	0,0000009
91		42°10'	30°40'	0,1477576	0,2003977	0,14926	0,201997	4,81491E-06	0,0021943	0,0015023	0,0015994	0,0000023	0,0000026
92	19	42°	29°20'	-0,1497048	0,1518508	-0,14966	0,151648	4,31202E-08	0,0002077	0,0000441	-0,0002029	0,0000000	0,0000000
93		42°	29°40'	-0,0744199	0,1514412	-0,07483	0,151201	2,2661E-07	0,0004760	-0,0004111	-0,0002401	0,0000002	0,0000001
94		42°	30°	-0,0004050	0,1505501	0	0,151052	4,16205E-07	0,0006451	0,0004050	0,0005022	0,0000002	0,0000003
95		42°	30°20'	0,0742410	0,1506313	0,074831	0,151201	6,72782E-07	0,0008202	0,0005899	0,0005699	0,0000003	0,0000003
96		42°	30°40'	0,1478290	0,1504739	0,149661	0,151648	4,73306E-06	0,0021756	0,0018316	0,0011740	0,0000034	0,0000014
97		41°50'	29°40'	-0,0749168	0,1009679	-0,07503	0,100851	2,68269E-08	0,0001638	-0,0001145	-0,0001171	0,0000000	0,0000000
98		41°50'	30°	-0,0003378	0,0998673	0	0,100702	8,09948E-07	0,0009000	0,0003378	0,0008342	0,0000001	0,0000007
99		41°50'	30°20'	0,0744373	0,1001920	0,075031	0,100851	7,86966E-07	0,0008871	0,0005940	0,0006589	0,0000004	0,0000004
100		41°50'	30°40'	0,1480122	0,1002397	0,150061	0,101299	5,32109E-06	0,0023067	0,0020493	0,0010590	0,0000042	0,0000011
101		41°50'	31°	0,2234490	0,1005045	0,225089	0,102045	5,06414E-06	0,0022504	0,0016402	0,0015407	0,0000027	0,0000024
102		41°40'	29°40'	-0,0747331	0,0508747	-0,07523	0,0505	3,88662E-07	0,0006234	-0,0004986	-0,0003742	0,0000002	0,0000001
103		41°40'	30°	-0,0000953	0,0497169	0	0,050351	4,10919E-07	0,0006410	0,0000953	0,0006339	0,0000000	0,0000004
104		41°40'	30°20'	0,0745739	0,0498389	0,075232	0,0505	8,70337E-07	0,0009329	0,0006578	0,0006615	0,0000004	0,0000004
105		41°40'	30°40'	0,1483224	0,0498039	0,150462	0,05095	5,89118E-06	0,0024272	0,0021398	0,0011456	0,0000046	0,0000013
106		41°40'	31°	0,2239944	0,0503377	0,22569	0,051698	4,72672E-06	0,0021741	0,0016959	0,0013603	0,0000029	0,0000019
107		41°30'	30°	0,0000000	0,0000000	0	0	0	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
108		41°30'	30°20'	0,0748704	0,0001792	0,075432	0,00015	3,16273E-07	0,0005624	0,0005616	-0,0000291	0,0000003	0,0000000
109		41°30'	30°40'	0,1485915	0,0005143	0,150863	0,0006	5,1667E-06	0,0022730	0,0022714	0,0000861	0,0000052	0,0000000
110		41°30'	31°	0,2245045	0,0005701	0,226291	0,001351	3,80288E-06	0,0019501	0,0017870	0,0007808	0,0000032	0,0000006
111		41°20'	30°20'	0,0750336	-0,0500489	0,075632	-0,0502	3,81548E-07	0,0006177	0,0005989	-0,0001513	0,0000004	0,0000000
112		41°20'	30°40'	0,1489517	-0,0499447	0,151264	-0,04975	5,38377E-06	0,0023203	0,0023120	0,0001959	0,0000053	0,0000000
												0,0000728	0,0001726
									0,1437300				
									0,0012833			6,50181E-07	1,54072E-06
												0,0008	0,0012
												po x osi	po y osi

Prilog 12

Računanje odstupanja u položaju gradova na kartama *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* i *Carte de l'État de l'Église* uz poglavlje 5.12.

	1755		1770								
	x	y	x	y	dx	dy	di	dx^2	dy^2	di-d_	(di-d_)^2
Terracina	0,1809	0,0347	0,1805	0,0362	0,0004	-0,0015	0,0016	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000
Piperno	0,1764	0,0513	0,1760	0,0529	0,0004	-0,0016	0,0016	0,0000	0,0000	0,0005	0,0000
Veroli	0,1942	0,0732	0,1948	0,0743	-0,0006	-0,0011	0,0013	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000
Velletri	0,1465	0,0720	0,1468	0,0730	-0,0003	-0,0010	0,0010	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000
Palestrina	0,1546	0,0866	0,1546	0,0878	0,0000	-0,0012	0,0012	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000
Tivoli	0,1488	0,0994	0,1488	0,1004	0,0000	-0,0010	0,0010	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000
Roma	0,1255	0,0924	0,1254	0,0928	0,0001	-0,0004	0,0004	0,0000	0,0000	-0,0007	0,0000
Civita Vecchia	0,0726	0,1124	0,0733	0,1122	-0,0007	0,0002	0,0007	0,0000	0,0000	-0,0004	0,0000
Civita Castellana	0,1194	0,1312	0,1201	0,1319	-0,0007	-0,0007	0,0010	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000
Rieti	0,1526	0,1431	0,1525	0,1437	0,0001	-0,0006	0,0006	0,0000	0,0000	-0,0005	0,0000
Toscanella	0,0803	0,1439	0,0806	0,1439	-0,0003	0,0000	0,0003	0,0000	0,0000	-0,0008	0,0000
Orbetello	0,0348	0,1461	0,0358	0,1461	-0,0010	0,0000	0,0010	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000
Bagnarea	0,0989	0,1666	0,0998	0,1665	-0,0009	0,0001	0,0009	0,0000	0,0000	-0,0002	0,0000
Amelia	0,1194	0,1589	0,1202	0,1601	-0,0008	-0,0012	0,0014	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000
Aquapendente	0,0786	0,1788	0,0794	0,1789	-0,0008	-0,0001	0,0008	0,0000	0,0000	-0,0003	0,0000
Spoleto	0,1434	0,1769	0,1437	0,1772	-0,0003	-0,0003	0,0004	0,0000	0,0000	-0,0007	0,0000
Norcia	0,1698	0,1819	0,1701	0,1835	-0,0003	-0,0016	0,0016	0,0000	0,0000	0,0005	0,0000
Ascoli	0,2037	0,1882	0,2036	0,1897	0,0001	-0,0015	0,0015	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000
Fermo	0,2136	0,2192	0,2145	0,2215	-0,0009	-0,0023	0,0025	0,0000	0,0000	0,0013	0,0000
Camerino	0,1686	0,2123	0,1692	0,2144	-0,0006	-0,0021	0,0022	0,0000	0,0000	0,0010	0,0000
Perugia	0,1169	0,2133	0,1175	0,2149	-0,0006	-0,0016	0,0017	0,0000	0,0000	0,0006	0,0000
Citta della Pieve	0,0902	0,2025	0,0911	0,2036	-0,0009	-0,0011	0,0014	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000
Gubbio	0,1310	0,2365	0,1314	0,2376	-0,0004	-0,0011	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Macerata	0,1946	0,2327	0,1955	0,2335	-0,0009	-0,0008	0,0012	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000
Fabriano	0,1559	0,2349	0,1563	0,2364	-0,0004	-0,0015	0,0016	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000
Cortona	0,0930	0,2332	0,0935	0,2342	-0,0005	-0,0010	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Todi	0,1197	0,1806	0,1201	0,1815	-0,0004	-0,0009	0,0010	0,0000	0,0000	-0,0002	0,0000
Foligno	0,1408	0,1982	0,1414	0,2002	-0,0006	-0,0020	0,0021	0,0000	0,0000	0,0009	0,0000
Ancona	0,1983	0,2644	0,1989	0,2654	-0,0006	-0,0010	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Iesi	0,1795	0,2551	0,1802	0,2574	-0,0007	-0,0023	0,0024	0,0000	0,0000	0,0013	0,0000
Cagli	0,1367	0,2547	0,1376	0,2560	-0,0009	-0,0013	0,0016	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000

S. Angelo in Vado	0,1197	0,2680	0,1190	0,2699	0,0007	-0,0019	0,0020	0,0000	0,0000	0,0009	0,0000
Fossombrone	0,1482	0,2709	0,1488	0,2729	-0,0006	-0,0020	0,0021	0,0000	0,0000	0,0009	0,0000
Sinigaglia	0,1773	0,2735	0,1781	0,2743	-0,0008	-0,0008	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Pesaro	0,1554	0,2933	0,1565	0,2942	-0,0011	-0,0009	0,0014	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000
S. Leo	0,1153	0,2917	0,1160	0,2922	-0,0007	-0,0005	0,0009	0,0000	0,0000	-0,0003	0,0000
Rimini	0,1312	0,3072	0,1316	0,3074	-0,0004	-0,0002	0,0004	0,0000	0,0000	-0,0007	0,0000
Cesena	0,1082	0,3159	0,1086	0,3158	-0,0004	0,0001	0,0004	0,0000	0,0000	-0,0007	0,0000
Faenza	0,0829	0,3303	0,0828	0,3299	0,0001	0,0004	0,0004	0,0000	0,0000	-0,0007	0,0000
Ravenna	0,1050	0,3426	0,1051	0,3427	-0,0001	-0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	-0,0010	0,0000
Bagni della Porretta	0,0264	0,3279	0,0265	0,3263	-0,0001	0,0016	0,0016	0,0000	0,0000	0,0005	0,0000
Bologna	0,0460	0,3513	0,0459	0,3506	0,0001	0,0007	0,0007	0,0000	0,0000	-0,0004	0,0000
Comacchio	0,1039	0,3680	0,1037	0,3682	0,0002	-0,0002	0,0003	0,0000	0,0000	-0,0009	0,0000
Ferrara	0,0649	0,3835	0,0651	0,3823	-0,0002	0,0012	0,0012	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000
Papozze	0,0952	0,4002	0,0952	0,4006	0,0000	-0,0004	0,0004	0,0000	0,0000	-0,0007	0,0000
Gabrielle	0,0617	0,3674	0,0622	0,3678	-0,0005	-0,0004	0,0006	0,0000	0,0000	-0,0005	0,0000
Massa Lombarda	0,0792	0,3461	0,0793	0,3463	-0,0001	-0,0002	0,0002	0,0000	0,0000	-0,0009	0,0000
Oriuolo	0,1000	0,1187	0,1005	0,1191	-0,0005	-0,0004	0,0006	0,0000	0,0000	-0,0005	0,0000
M. Leone	0,1525	0,1256	0,1533	0,1270	-0,0008	-0,0014	0,0016	0,0000	0,0000	0,0005	0,0000
Casal Fiuminese	0,0596	0,3321	0,0592	0,3310	0,0004	0,0011	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
							0,0569	0,0000	0,0001		0,0000
							0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	3,49509E-07
								0,0006	0,0011	0,0013	0,0006
									0,0000		
									0,0013		