

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE
V A R A Ž D I N

Martin Šoštar

APLIKACIJA ZA INTERAKTIVNO RJEŠAVANJE
MATEMATIČKIH ZADATAKA
ZAVRŠNI RAD

Varaždin, rujan 2014.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE
V A R A Ž D I N

Martin Šoštar

Redoviti student

Broj indeksa: 39342/10-R

Smjer: Informacijski sustavi

Preddiplomski studij

APLIKACIJA ZA INTERAKTIVNO RJEŠAVANJE
MATEMATIČKIH ZADATAKA

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Dr. sc. Tihomir Orehovački

Varaždin, rujan 2014.

Sadržaj

1. Uvod.....	1
2. Pregled postojećih rješenja.....	2
2.1. Online rješenja	2
2.1.1. Mathway.....	2
2.1.2. Math.com.....	3
2.1.3. WolframAlpha.....	4
2.1.4. WebMATH.....	5
2.2. Desktop rješenja	6
2.2.1. MATLAB	6
2.2.2. Sage	7
2.2.3. GeoGebra	8
3. Gradivo iz kolegija „Odabrana poglavlja matematike“	9
3.1. Opis kolegija „Odabrana poglavlja matematike“	9
3.2. Zadaci koji se obrađuju u aplikaciji.....	10
3.2.1. Vizualizacija objekata u 3D prostoru	10
3.2.2. Gaussov postupak.....	13
3.2.3. Rješavanje jednažbi trećeg stupnja	15
3.2.4. Parcijalna derivacija funkcije s dvije realne varijable.....	18
4. Opis problema i realizacija aplikacije.....	21
4.1. Opis problema.....	21
4.2. Realizacija aplikacije	22
4.2.1. Kvadratna jednažba	23
4.2.2. Kubna jednažba	24
4.2.3. Parcijalna derivacija	27
4.2.4. Analitička geometrija prostora	29
4.2.5. Gaussov postupak.....	31
5. Tehnologije koje se koriste u aplikaciji „MatkaFTW“	33
6. Zaključak	34
Literatura.....	35

Popis slika

Slika 1. Aplikacija Mathway	3
Slika 2. Prikaz računanja kvadratne jednadžbe u Math.com.....	3
Slika 3. Računanje derivacija u WolframAlphi	4
Slika 4. Postupak derivacije u aplikaciji WebMATH	5
Slika 5. Vizualizacija podataka u aplikaciji „MATLAB“	6
Slika 6. Prikaz vizualizacije i sintakse u aplikaciji „Sage“	7
Slika 7. Sučelje aplikacije „GeoGebra“	8
Slika 8. Graf ravnina i njihovih normala.....	11
Slika 9. Najčešće upotrebljavane funkcije parcijalne derivacije.....	18
Slika 10. Pravila operacija funkcija.....	19
Slika 11. Početna stranica aplikacije	22
Slika 12. Izgled programa „Kvadratna jednadžba“	23
Slika 13. Izgled programa „Kubna jednadžba“	25
Slika 14. Prikaz vizualizacije kubne jednadžbe	26
Slika 15. Izgled programa „Parcijalna derivacija“	27
Slika 16. Prikaz rješenja parcijalne derivacije	28
Slika 17. Izgled programa „Analitička geometrija prostora“	29
Slika 18. 3D prikaz unosa korisnika.....	30
Slika 19. Izgled programa „Gaussov postupak“	31

1. Uvod

Matematički kolegiji koje sadrže pojedini fakulteti nerijetko se smatraju najtežima. Razlog tome je što se od studenata traži da nauče opsežno gradivo iz matematike u jednom semestru. Od studenata se traži kontinuirani rad na koji većina njih nije naviknuta. Na većini matematičkih kolegija prvo se prikazuje postupak rješavanja jednostavnijih zadataka, a zatim se od studenata traži da na temelju jednostavnih zadataka riješe teže zadatke za koje nije dostupan postupak rješavanja. Dostupno je puno materijala u knjižnicama i na Internetu koji su povezani s gradivom koje student treba proučiti. U opsežnosti tih materijala teško je pronaći specifične zadatke koji studentu trebaju, što iziskuje puno vremena. To je problem s kojim se studenti susreću.

Studenti na različite načine pokušavaju riješiti problem. Prva skupina rješava zadatke, ali potroši jednako vrijeme rješavajući ih koliko i da nađe rješenja sa postupkom. Druga skupina riješi zadatak, ali nema volje ili nema vremena tražiti rješenja po Internetu pa pretpostavlja da je zadatak dobro riješen. Prva skupina gubi puno vremena tražeći rješenja, a druga skupina može netočno naučiti rješavati zadatak te ga netočno riješiti na kolokviju. Tema ovog završnog rada trebala bi riješiti ovaj problem.

Motivacija za odabranu temu bila je autorova muka s gore opisanim problemom. U razdoblju od dva tjedna nagomilaju se svi kolokviji svih kolegija u tom semestru. Na kraju ostane malo vremena za „Odabrana poglavlja matematike“ ako se nije kontinuirano vježbalo. Budući da većina studenata uči u zadnji trenutak, svaka im je minuta od velike važnosti. Motivacija za izradu aplikacije upravo je došla iz tog razloga da se pomogne takvim studentima. Naravno, aplikacija je namijenjena svima zato što se većina zadataka nalazi na jednom mjestu i pomaže studentima da pomoću vizualizacije zadataka lakše razumiju iste.

2. Pregled postojećih rješenja

Postoji mnoštvo različitih aplikacija namijenjenih učenju rješavanja zadataka iz matematike. Navedena su neka rješenja koja su podijeljena u dvije kategorije, online rješenja i desktop rješenja.

Tabela 1. Popis aplikacija sa sličnim rješenjima

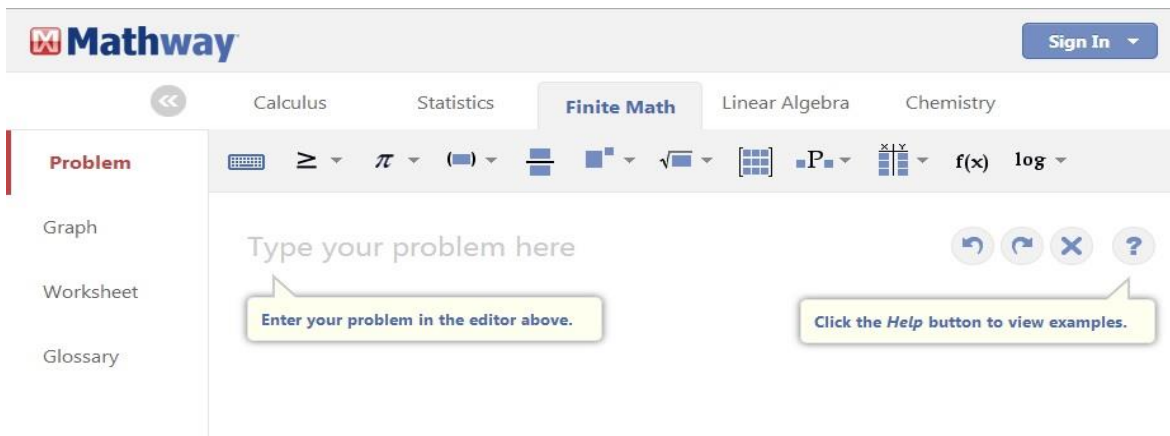
Online rješenja	Desktop rješenja
Mathway	MATLAB
Math.com	Sage
WolframAlpha	GeoGebra
WebMATH	

Prvo su analizirana online rješenja s obzirom na to da se studenti prvo oslanjaju na Internet i na rješenja koja se prva ponude. Prikazana rješenja uspoređivat će se s aplikacijom koja je obrađena u završnom radu, „MatkaFTW“, što je akronim za „Matka For The Win“.

2.1. Online rješenja

2.1.1. Mathway

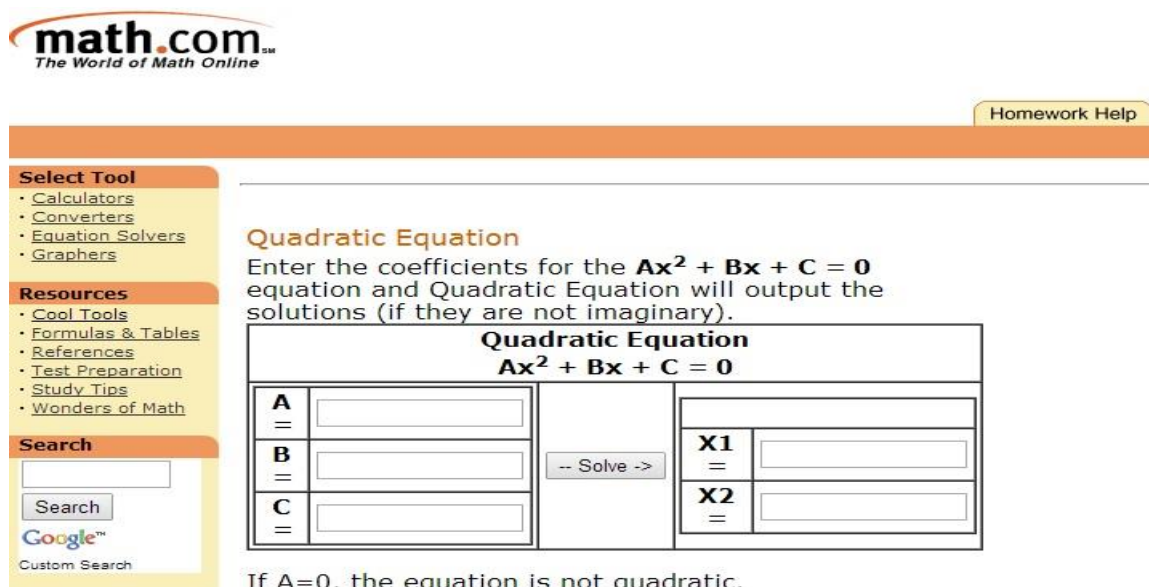
„Mathway“ je vrlo ugodnog dizajna i snalaženje u njemu nije problem. [13] Dostupni su mnogi zadaci te nije potrebno znati sintaksu aplikacije za rješavanje. Aplikacija daje mogućnost davanja rješenja korak po korak, ali se mora plaćati. Cijena je 20\$ mjesečno bez popusta za studente. Vizualizacija je također dostupna, ali korisnik mora znati napisati funkcije u sintaksi koju aplikacija razumije. Aplikacija „MatkaFTW“ naspram „Mathway-a“ ima manji obujam zadataka koje može rješavati. Međutim, ti zadaci traže od korisnika puno manje interakcije s aplikacijom, jer je potrebno samo upisati brojeve od zadataka. Na slici 1 je prikazano sučelje aplikacije „Mathway“.



Slika 1. Aplikacija Mathway

2.1.2. Math.com

Aplikacija „Math.com“ izgleda dosta grubo, a s dizajnerske strane nije nimalo privlačna. [14] S matematičke strane nema baš previše ponuđenih zadataka, ali se od korisnika ne zahtijeva da upisuje neku specifičnu sintaksu. Postoje ponuđene određene vrste zadataka. Sintaksa je unaprijed već upisana te se od korisnika samo traži da upiše brojeve. Aplikacija je fokusirana na računanje ekonomskih problema, poput hipoteke, povrata poreza, isplativost kredita itd. Aplikacija „MatkaFTW“ nudi veći obujam zadataka potrebnih studentu i nudi vizualizaciju zadataka, koja nije dostupna u navedenoj aplikaciji. Na slici 2 je prikazano sučelje aplikacije „Math.com“.



Slika 2. Prikaz računanja kvadratne jednadžbe u Math.com

2.1.3. WolframAlpha

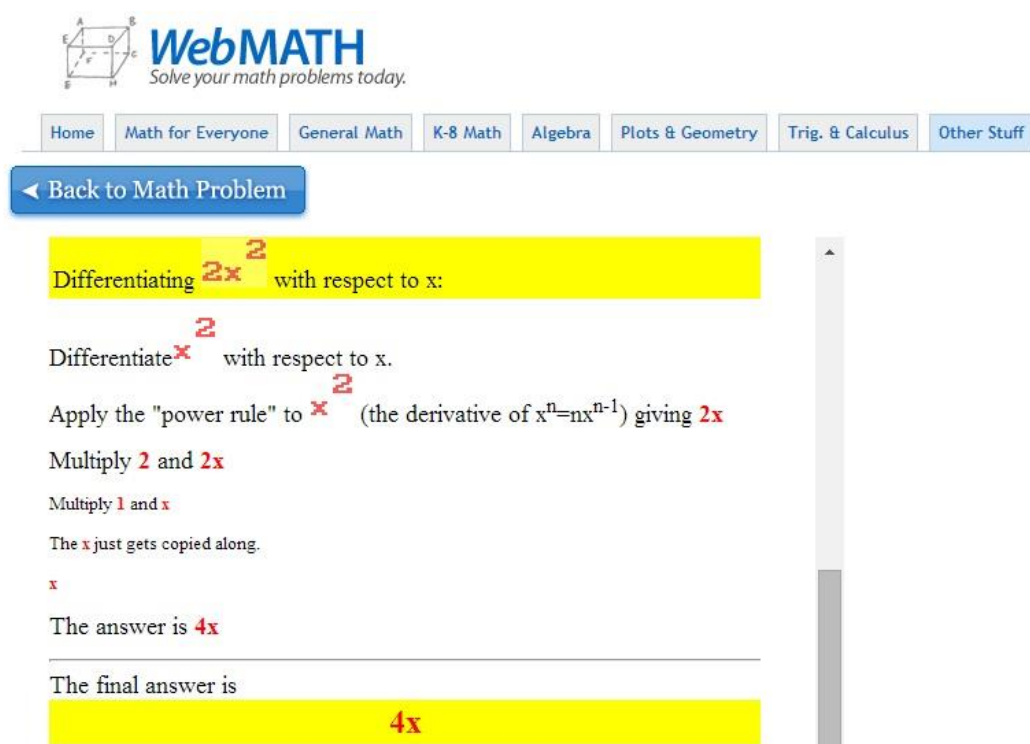
„WolframAlpha“ je vrlo dobra aplikacija jer jednostavno nudi rješenja za gotovo sve zadatke koji su potrebni studentima matematike. [15] Od svih navedenih aplikacija bolja je u smislu funkcionalnosti. Dizajn je inovativan i prikazuje sve u oblačićima. Potrebno je znati osnove sintakse da se mogu rješavati zadaci. Za svaki zadatak daje ponuđene korake rješavanja ili vizualni prikaz. Ukoliko je svrha aplikacije samo proučavanje zadatka ili pomoć prilikom rješavanja, aplikacija ispunjava sve uvjete. Međutim, ako se žele koristiti materijali s aplikacije, poput postupaka, slika ili mnogo drugih sadržaja, mora se platiti. Plaća se mala svota od 5.50\$ mjesečno te postoji poseban program za studente koji se plaća 3.75\$ mjesečno. Radi se o nižoj cijeni nego na gore navedenom „Mathway“, a dobiva se puno više. Aplikacija je u svim pogledima bolja od aplikacije „MatkaFTW“ u slučaju da se plaća pretplata. Na slici 3 je prikazano sučelje aplikacije „WolframAlpha“.

The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top, the search bar contains the word "derivative". Below it, the input field contains the function $3x^3 + 2x \ln(x^2)$. The result section shows the derivative: $\frac{d}{dx}(3x^3 + 2x \log(x^2)) = 9x^2 + 2 \log(x^2) + 4$. A note indicates that $\log(x)$ is the natural logarithm. Below the result, there is a plot of the function $y = 3x^3 + 2x \ln(x^2)$ for x from -1.5 to 1.5. The plot shows a curve that is symmetric about the y-axis, with a sharp dip at the origin. The x-axis ranges from -1.5 to 1.5, and the y-axis ranges from -30 to 30.

Slika 3. Računanje derivacija u WolframAlpha

2.1.4. WebMATH

Posljednja online aplikacija je „WebMath“. [16] Po načinu pretraživanja problema koji se traži slična je „WolframAlphi“. Sadrži dosta zadataka koji se obrađuju na kolegiju „Odabrana poglavlja matematike“, ali manje od gore navedenih alata. Velika prednost alata je da besplatno nudi postupak rješavanja zadataka, što je najvažnije za studente. Gledajući postupak različitih vrsta zadataka, primjećuje se da nešto ne odgovara na prvi pogled. Aplikacija dolazi nekim okolnim putem do rješenja te rješenje nije baš pregledno prikazano. Treba se podosta namučiti da se otkrije što je aplikacija prikazala, jer prikazuje dodatne korake kod rješavanja, koji su potpuno besmisleni. Aplikacija „MatkaFTW“, što se tiče zadataka potrebnih za kolegij „Odabrana poglavlja matematike“, nudi veći obujam zadataka nego navedena aplikacija. Na slici 4 je prikazano sučelje aplikacije „WebMATH“.



The screenshot shows the WebMATH website interface. At the top left is a logo with a cube diagram and the text "WebMATH Solve your math problems today." Below the logo is a navigation menu with buttons for "Home", "Math for Everyone", "General Math", "K-8 Math", "Algebra", "Plots & Geometry", "Trig. & Calculus", and "Other Stuff". A blue button labeled "Back to Math Problem" is positioned below the menu. The main content area displays a math problem: "Differentiating $2x^2$ with respect to x :". Below this, the solution steps are shown: "Differentiate x^2 with respect to x .", "Apply the 'power rule' to x^2 (the derivative of $x^n=nx^{n-1}$) giving $2x$ ", "Multiply 2 and $2x$ ", "Multiply 1 and x ", "The x just gets copied along.", "The answer is $4x$ ". A horizontal line separates the steps from the final answer: "The final answer is $4x$ ".

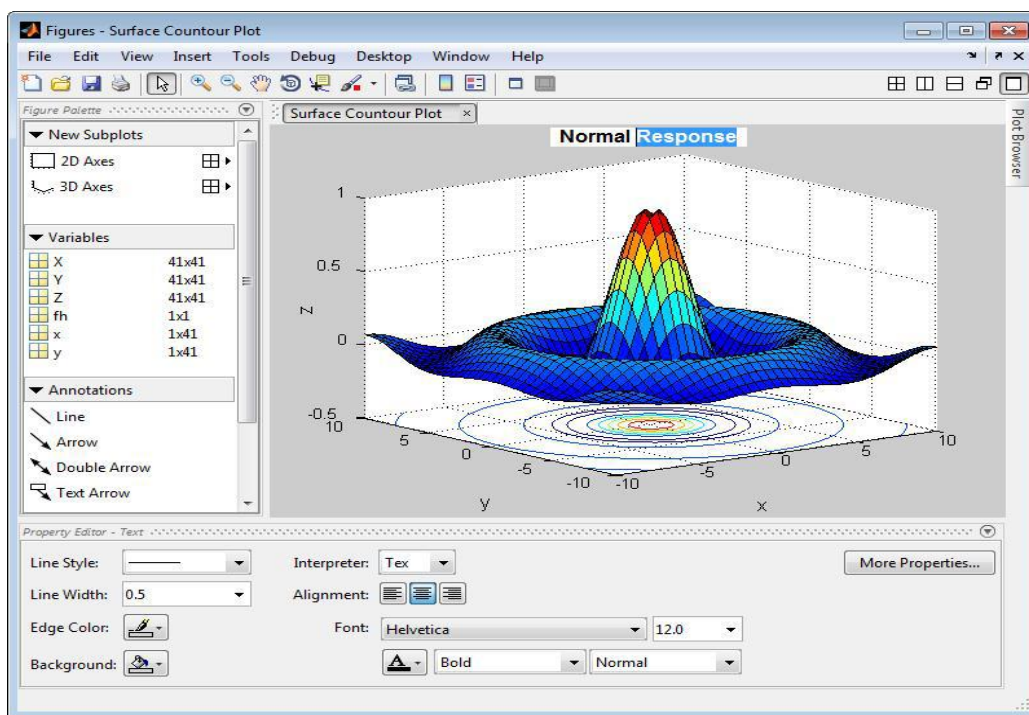
Slika 4. Postupak derivacije u aplikaciji WebMATH

2.2. Desktop rješenja

2.2.1. MATLAB

„MATLAB“ je prilično opsežna aplikacija koja nudi daleko više nego što je studentu potrebno. [17] Može riješiti sve zadatke koji se obrađuju na kolegiju „Odabrana poglavlja matematike“, s mogućnošću prikazivanja postupka rješavanja zadatka. Postupak nije na najbolji način riješen, jer se radi o tome da program prikaže sve funkcije koje je koristio prilikom rješavanja zadatka.

Budući da se radi o doista dobrom i raznolikom desktop rješenju, „MathWorks“ proizvođač „MATLAB-a“, je odlučio da se aplikacija plaća. Postoji posebna verzija za studente, čija je cijena nešto manja od standardne. Studenti bi trebali izdvojiti 89\$ za aplikaciju, što se čini prevelikom cijenom za većinu njih. Postoje jednako dobra online i desktop rješenja koja su besplatna ili imaju za studente puno prihvatljivije cijene. Na slici 5 je prikazano sučelje aplikacije „MATLAB“.

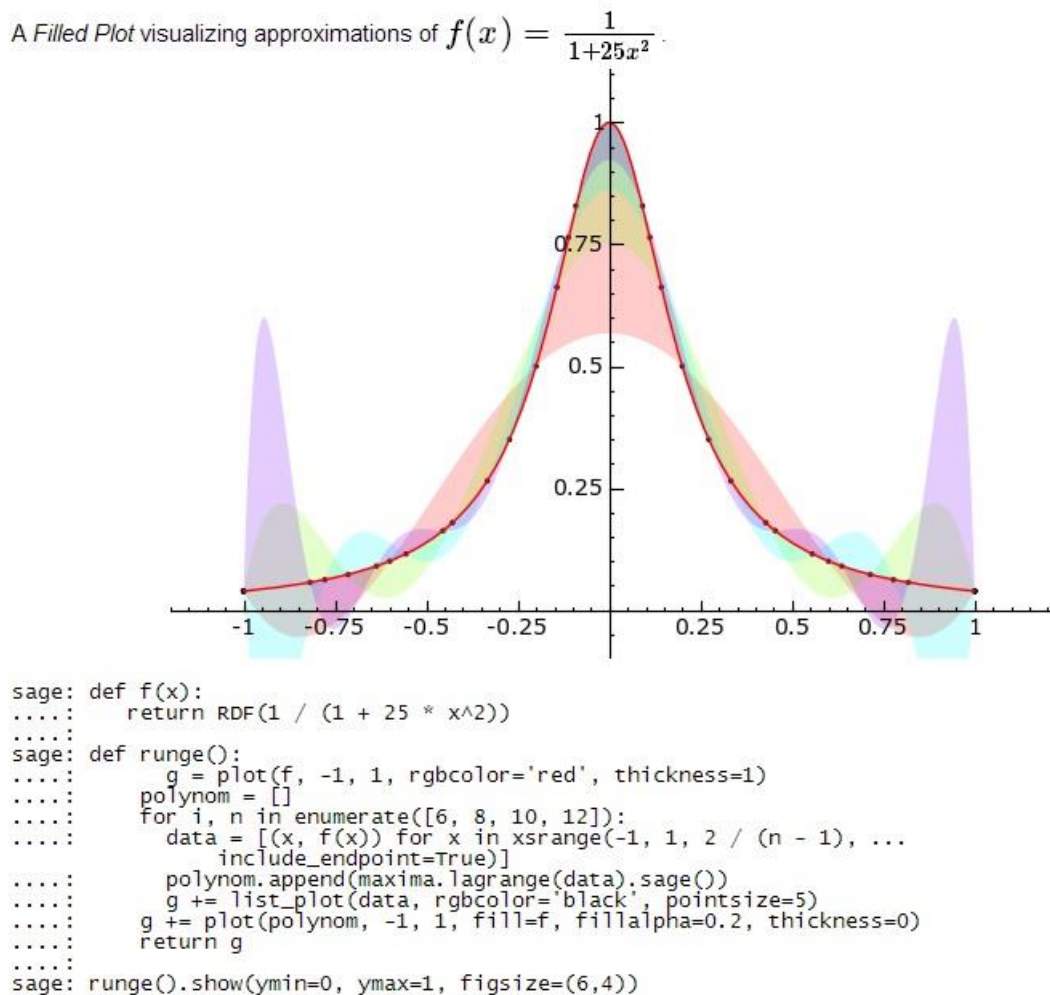


Slika 5. Vizualizacija podataka u aplikaciji „MATLAB“

[20]

2.2.2. Sage

Studentima najpoznatija aplikacija je „Sage“, iz jednostavnog razloga – besplatna je. [18] Aplikacija je besplatna jer se temelji na programskom jeziku „Python“ i njegovim paketima otvorenog koda, poput „NumPy“, „SciPy“, „matplotlib“, „SymPy“. Aplikacija se najčešće primjenjuje kao pomoć u realizaciji seminarskih radova, a ne toliko kao pomoć prilikom pripreme za kolokvij. To je iz razloga što aplikacija ima svoju specifičnu sintaksu koju treba dobro proučiti da bi se mogla koristiti pravilno. Aplikacija „MatkaFTW“ nudi manji obujam zadataka koje može aplikacija riješiti, ali nudi bolju interakciju sa korisnikom te nije potrebno znati dodatnu sintaksu za uspješno rješavanje zadataka. Na slici 6 je prikazano sučelje aplikacije „Sage“.

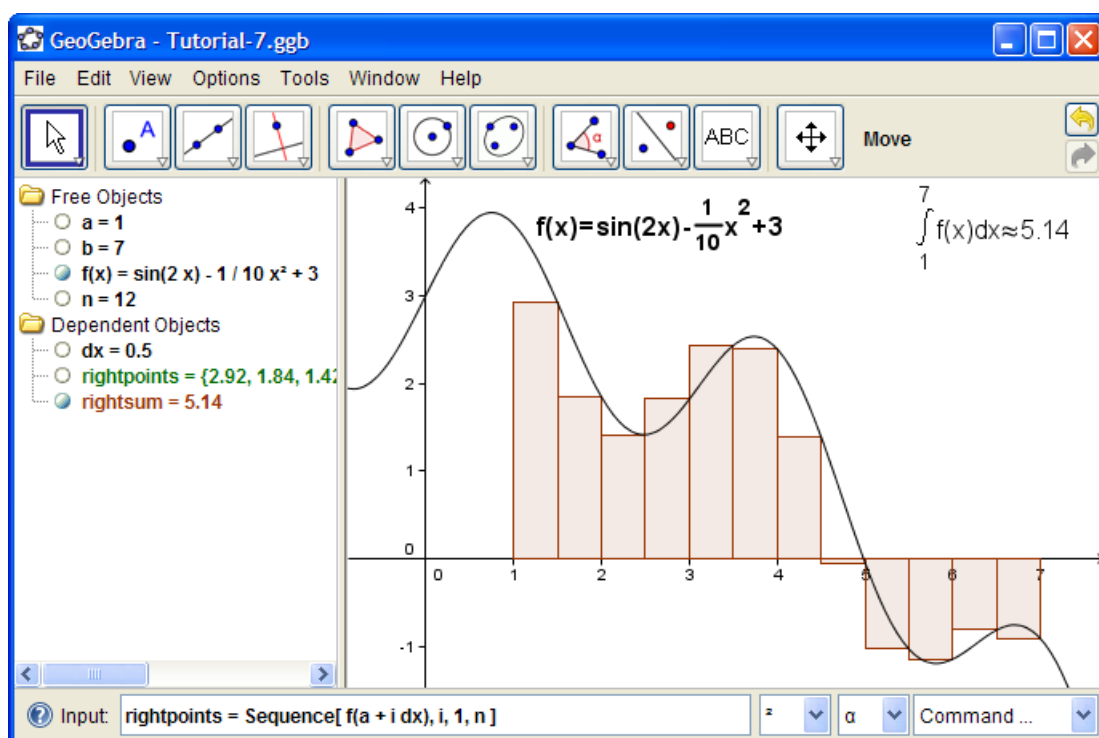


Slika 6. Prikaz vizualizacije i sintakse u aplikaciji „Sage“

[21]

2.2.3. GeoGebra

Posljednja desktop aplikacija koja se koristi i u kolegiju „Odabrana poglavlja matematike“ je „GeoGebra“. [19] Aplikacija je potpuno besplatna i dostupna je na svim platformama. Za razliku od ostalih desktop aplikacija, „GeoGebra“ je više vizualno orijentirana. Ima mogućnost rješavanja zadataka koji se mogu vizualizirati. Aplikacija je jednostavna i usmjerena je na srednjoškolsku i osnovnoškolsku publiku. Aplikacija „MatkaFTW“ nudi više zadataka računskog tipa koji su potrebni studentima matematičkih kolegija, ali ako korisnik želi vizualizirati neki objekt, navedena aplikacija ima više mogućnosti. Na slici 7 je prikazano sučelje aplikacije „GeoGebra“.



Slika 7. Sučelje aplikacije „GeoGebra“

[22]

3. Gradivo iz kolegija „Odabrana poglavlja matematike“

Za kvalitetnije razumijevanje zadataka koji se pojavljuju u aplikaciji, potrebno je znati neke osnove o kolegiju i gradivu koje se obrađuje. Prvo će biti obrađen kolegij općenito, njegovi ciljevi te gradivo koje se pojavljuje unutar pojedine cjeline. Zatim će se u drugom poglavlju obraditi zadaci koji se pojavljuju u aplikaciji i bit će riješeno nekoliko primjera.

3.1. Opis kolegija „Odabrana poglavlja matematike“

Kolegij „Odabrana poglavlja matematike“ upoznaje studente s naprednim konceptima linearne algebre i matematičke analize. Studenti prvo trebaju savladati vektorski račun u Euklidskom prostoru. To znanje kasnije primjenjuju na analitičku geometriju prostora, što je preduvjet za viši nivo apstraktnog razmišljanja. Za kompjutersku grafiku je vrlo važno da se studenti znaju koristiti s pojmom linearnog operatora i njegovom matičnom reprezentacijom. Zatim slijedi jedan od najvažnijih dijelova kolegija. To su polinomi gdje se obrađuju dva najvažnija algoritma, Hornerov i Euklidov algoritam. Studenti na temelju teorije trebaju znati primijeniti algoritme u praksi. Pod tim se podrazumijeva računanje polinoma u točki, razvijanje polinoma po potencijama i promjena brojevnih baza. Nakon toga studenti uče rješavati algebarske jednadžbe trećeg i četvrtog stupnja, a i neke specijalne vrste jednadžbi. Na kraju, studenti se upoznaju s funkcijama više varijabli i s nekim specijalnim vrstama tih funkcija. Moraju naučiti kako se traže ekstremi realnih funkcija više varijabli i uvjetni ekstremi. Naučene pojmove trebaju povezati s analognim pojmovima funkcija jedne varijable kao što su parcijalne derivacije ili totalni diferencijal. Osim znanja vezanih uz matematiku, studenti će na seminarima usvajati znanja i vještine kao što su timski rad, prezentacijske vještine, razumijevanje modela, upotreba literature i ICT vještina, a posebno strategije rješavanja problemskih zadataka. Konceptija rada na ovom kolegiju omogućava razvoj vještina apstrakcije kod studenata.

U kolegiju se pojavljuje 7 glavnih poglavlja. To su:

- 1) Klasična algebra vektora
- 2) Analitička geometrija prostora
- 3) Vektorski ili linearni prostori
- 4) Linearni operatori
- 5) Polinomi
- 6) Funkcije više varijabli
- 7) Plohe

Svaki kolokvij obuhvaća po dva poglavlja, osim zadnjeg, koji obuhvaća tri poglavlja. Da bi se kolokvirao kolegij, potrebno je sakupiti 25 od 60 mogućih bodova iz kolokvija. Postoje još dodatne aktivnosti pomoću kojih se skupljaju bodovi: seminari, zadaće, programski zadaci itd.

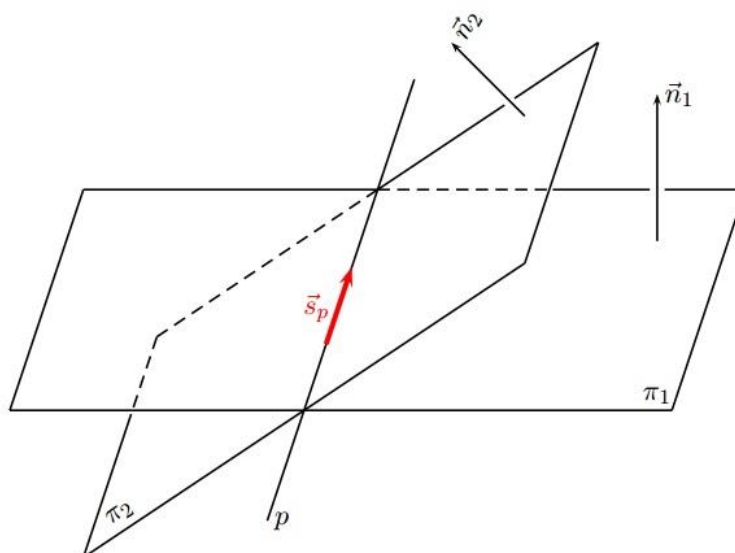
3.2. Zadaci koji se obrađuju u aplikaciji

U kolegiju „Odabrana poglavlja matematike“ pojavljuje se mnogo različitih zadataka, koje ovaj završni rad ne obuhvaća. Ovaj dio je fokusiran na pojašnjenje zadataka koji se rješavaju u aplikaciji „MatkaFTW“. U nastavku zadaci će biti objašnjavani po poretku kolokvija, a ne kako se pojavljuju unutar aplikacije.

3.2.1. Vizualizacija objekata u 3D prostoru

Prvi zadatak koji je obrađen u aplikaciji obuhvaća dva poglavlja iz kolegija. To su klasična algebra vektora i analitička geometrija prostora. Obrađeni zadatak obuhvaća vizualizaciju različitih objekata u trodimenzionalnom prostoru. Korisnik može u jednom trodimenzionalnom prostoru dodavati koliko mu je točaka, vektora i ravnina potrebno. Pomoću toga si korisnik može lakše predočiti zadatke koje će rješavati. Riješen je jedan primjer zadatka koji je preuzet sa službene stranice kolegija. [9]

1. Pravac p je zadan kao presjek ravnina $2x + 3y - 16z - 7 = 0$ i $3x + y - 17z = 0$. Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca p .



Slika 8. Graf ravnina i njihovih normala

[9]

Ovdje treba uočiti da ako pravac leži u ravnini, tada je njegov vektor smjera okomit na normalu te ravnine. Pravac p leži u obje ravnine π_1 i π_2 pa je vektor smjera s_p pravca p okomit na normale n_1 i n_2 ravnina π_1 i π_2 . Iz definicije vektorskog produkta vektora tada slijedi da je $s_p = \lambda(n_1 \times n_2)$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$. Kako treba samo smjer vektora s_p (nije bitna duljina tog vektora), može se uzeti da je $\lambda = 1$, tj. $s_p = n_1 \times n_2$. Iz jednadžbi zadanih ravnina očituju se njihove normale

$$\pi_1 \cdots 2x + 3y - 16z - 7 = 0, \quad \vec{n}_1 = (2, 3, -16)$$

$$\pi_2 \cdots 3x + y - 17z = 0, \quad \vec{n}_2 = (3, 1, -17)$$

pa se dobije

$$\vec{s}_p = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = (-35, -14, -7) = -7 \cdot (5, 2, 1)$$

Može se zapravo uzeti da je $s_p = (5, 2, 1)$ jer ovdje nije bitna duljina i orijentacija vektora, već samo smjer (usput se dobivaju i manji brojevi). Da bi se mogao napisati kanonski oblik jednadžbe pravca p , treba još neka točka koja leži na zadanom pravcu. Kako je pravac p zadan kao presjek ravnina π_1 i π_2 , treba se uzeti jedna točka T koja leži u obje ravnine π_1 i π_2 .

Kako doći do jedne takve točke T ? Naime, da bi točka T ležala u obje ravnine π_1 i π_2 , njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbe tih ravnina, što dovodi do sustava linearnih jednadžbi

$$2x + 3y - 16z - 7 = 0$$

$$3x + y - 17z = 0$$

Ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja, a treba samo jedno neko njegovo rješenje. Ovdje postoji jedan stupanj slobode pa jednu nepoznanicu možemo odabrati po volji, a druge dvije se tada moraju izračunati iz pripadnog 2×2 sustava. Uzima se, npr. $x = 0$. Tada se dobije da mora biti

$$3y - 16z - 7 = 0$$

$$y - 17z = 0$$

iz čega se lagano dobije $y = \frac{17}{5}z$ i $z = \frac{1}{5}$. Stoga je $T\left(0, \frac{17}{5}, \frac{1}{5}\right)$ neka točka na pravcu p (jasno, tih točaka ima beskonačno mnogo, a koja od njih se može dobiti ovisi o izboru vrijednosti jedne od nepoznanica; ovdje se može uzeti $x = 0$). Sada se ima vektor smjera $s_p = (5, 2, 1)$ pravca p i točka $T\left(0, \frac{17}{5}, \frac{1}{5}\right)$ kojom on prolazi pa njegov kanonski oblik jednadžbe glasi

$$p \cdots \frac{x}{5} = \frac{y - \frac{17}{5}}{2} = \frac{z - \frac{1}{5}}{1}$$

dok su parametarske jednadžbe

$$p \cdots \begin{cases} x = 5t \\ y = \frac{17}{5} + 2t \\ z = \frac{1}{5} + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

U ovom zadatku bi korisnik mogao sve navedene dijelove dodati u aplikaciju. Budući da aplikacija nudi korisniku da se kreće okolo tih objekata, mogao bi lakše primijetiti kako doći do rješenja zadatka.

3.2.2. Gaussov postupak

Drugi zadatak koji je obrađen u nastavku, vrlo je važan, zato što se pojavljuje u drugom i trećem kolokviju. Zadatak koristi Gaussov postupak da bi se došlo do rješenja. Sam postupak nije toliko težak i pravila koja se moraju poštivati poprilično su jednostavna. Do problema dolazi kad studenti pogriješe u osnovnim matematičkim operacijama i stoga pogriješno riješe zadatak. U nastavku je prikazan jedan od tipova zadatka koji se pojavljuju u drugom kolokviju i njegovo rješenje pomoću Gaussovog postupka. [10]

2. Ispitajte linearnu nezavisnost sljedećeg skupa u $M_2(\mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Da bi se saznalo je li zadani skup linearno nezavisan, uvrštavaju se sve vrijednosti u matricu. Cilj je dobiti u svakom redu po jednu jedinicu i ostale nule. Mogu se koristiti bilo koja od sljedećih pravila da se to postigne:

- 1) množenje retka s brojem različitim od nule;
- 2) zamjena dva retka;
- 3) jedan redak se pribroji drugome;
- 4) zamjena dva stupca u matrici.

Najlakše se postigne traženi cilj ako se računa s jedinicama. Naravno, nitko ne brani da se radi s bilo kojim drugim brojem, ali tada se računa s razlomcima i tada postoji veća mogućnost da se pogriješi. Bit će objašnjavan postupak rješavanja korak po korak i bit će označavani brojevi s kojima se radi. Ako se u nekom retku nalazi prazni kvadratić, tada se ne radi nikakva operaciju u tom redom.

U prvom retku nalazi se jedinica u trećem stupcu. Pomoću nje bit će dobivene sve nule u tom stupcu. Da bi se dobile nule, treba se pomnožiti treći i četvrti red s -1 i -3.

$$\begin{array}{cccc|l} 0 & 3 & \boxed{1} & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 4 & 3 & 1 & 3 & /* -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & /* -3 \end{array}$$

Nakon što se pomnoži, dobivaju se novi brojevi u trećem i četvrtom redu. Nakon što se uzme jedinica za množenje iz bilo kojeg reda, više se ne može vratiti u taj isti red. Iz tog razloga se ignorira jedinica koja se nalazi u prvom redu, četvrtom stupcu. Prelazi se na drugi red u kojem se također nalazi jedinica u drugom stupcu. Da se dobiju nule, treba se pomnožiti prvi i zadnji red s -3 i -9.

$$\begin{array}{cccc|l} 0 & 3 & 1 & 1 & /* -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \\ 4 & 0 & 0 & 2 & \\ -2 & -9 & 0 & -3 & /* -9 \end{array}$$

U nastavku je prikazan rezultat nakon računanja. Može se primijetiti da u preostalim redovima više nema jedinica s kojima bi se moglo računati. U ovom slučaju može se primijetiti da treći red ima sve brojeve koji su djeljivi s dva. U sljedećem koraku bit će podijeljen taj red s dva, da se dobije jedinica u četvrtom stupcu.

$$\begin{array}{cccc|l} 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 4 & 0 & 0 & 2 & / \div 2 \\ -2 & 0 & 0 & -3 & \end{array}$$

Sada se s lakoćom može pomnožiti treći red s prvim i zadnjim. U ovom slučaju bi se mogao pribrojiti treći red četvrtom redu da se dobije nula u tom stupcu, ali bi kasnije prilikom skraćivanja trećeg reda nastao razlomak, a to se pokušava izbjeći.

$$\begin{array}{cccc|l} 0 & 0 & 1 & 1 & /* -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 2 & 0 & 0 & \boxed{1} & \\ -2 & 0 & 0 & -3 & /* 3 \end{array}$$

Može se primijetiti da zadnji red treba skratiti s četiri te pomnožiti s prvim i trećim redom da se dobiju sve nule.

$$\begin{array}{cccc|l} -2 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 2 & 0 & 0 & 1 & \\ 4 & 0 & 0 & 0 & /\div 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} -2 & 0 & 1 & 0 & /* 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 2 & 0 & 0 & 1 & /* -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Na kraju je u svakom redu po jedna jedinica i ostale nule, što je i bio cilj. Znači da je ovaj skup linearno nezavisan u $M_2(\mathbb{R})$.

3.2.3. Rješavanje jednačbi trećeg stupnja

U trećem kolokviju pojavljuju se dva zadatka, dobivanje nultočki kod jednačbi trećeg stupnja i dobivanje parcijalne derivacije. Prvo će biti obrađeno kako dobiti nultočke kod jednačbi trećeg stupnja. Prije početka objašnjavanja što treba raditi da se dobiju nultočke, prvo treba znati značenja varijabli u jednačbi.

$$x^3 + 3x^2 - 9x - 20 = 0$$

vodeći koeficijent

slobodni koeficijent

Zadana jednađba može imati dva načina rješavanja. Ako je slobodni koeficijent djeljiv s vodećim koeficijentom, tada zadana jednađba ima cjelobrojne nultočke i rješava se na poseban način. Ako slobodni koeficijent nije djeljiv s vodećim koeficijentom ili je rezultat dijeljenja razlomak, tada rješenje nije cjelobrojno i rješava se na drugačiji način. Rješavat će se jednađba koja ima cjelobrojne nultočke, zbog lakšeg prikaza postupka te sličnosti s drugim načinom rješavanja. Sam postupak je vrlo jednostavan, ali ovisno o koeficijentima može imati veliki broj iteracija te se stoga lako može pogriješiti u samom računanju. U nastavku bit će prikazan teorem čija se kontrapozicija koristi za rješavanje zadatka:

„Teorem. Ako je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima i $\alpha \in \mathbb{Z}$ korijen jednađbe $f(x) = 0$, tada je za svaki $k \in \mathbb{Z}$ broj $f(k)$ djeljiv s $\alpha - k$ „ [Divjak, Horvat, Žugec i Maretić, 2013, str. 131].

U zadacima će se zapravo koristiti kontrapoziciju tog teorema, tj. ako za neki $k \in \mathbb{Z}$ broj $f(k)$ neće biti djeljiv s $\alpha - k$, tada ćemo zaključiti da kandidat $\alpha \in \mathbb{Z}$ nije cjelobrojni korijen promatrane jednađbe. Sljedeći zadatak je preuzet sa službene stranice. [11]

3. Riješite jednađbu $x^3 + 3x^2 - 9x - 20 = 0$.

Kandidati za cjelobrojna rješenja su djelitelji broja -20 , tj. brojevi

$$1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20.$$

Sada se iskorištava prethodni teorem da se brzo eliminiraju neki kandidati iz razmatranja. Ako se uzme $k = 1$, tada je $f(k) = f(1) = -25$. Za svaki od cjelobrojnih kandidata α ispod njega se napiše broj $\alpha - k$, tj. u ovom slučaju $\alpha - 1$ pa se dobiva

$$\alpha : 1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20$$

$$\alpha - 1 : 0, -2, 1, -3, 3, -5, 4, -6, 09, -11, 19, -21$$

Sada se gleda s kojim od brojeva $\alpha - 1$ broj $f(1) = -25$ nije djeljiv. Ti brojevi su dolje označeni crvenom bojom.

$$\alpha : 1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20$$

$$\alpha - 1 : 0, -2, 1, -3, 3, -5, 4, -6, 09, -11, 19, -21$$

Za svaki od crvenih brojeva $\alpha - 1$ se eliminira njegov pripadni broj α . Eliminirani brojevi α su dolje označeni plavom bojom.

$$\alpha : 1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20$$

$$\alpha - 1 : 0, -2, 1, -3, 3, -5, 4, -6, 09, -11, 19, -21$$

Nakon ovog postupka preostaju brojevi 2 i -4 kao jedini kandidati za cjelobrojna rješenja zadane jednadžbe. Hornerovim algoritmom lagano se dobije da je $x_1 = -4$ jedno rješenje.

	1	3	-9	-20
-4	1	-1	-5	0

Stoga se početna jednadžba može faktorizirati kao

$$(x - (-4))(x^2 - x - 5) = 0,$$

odnosno

$$(x + 4)(x^2 - x - 5) = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 5 = 0$ dobivaju se preostala dva rješenja

$x_2 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$ i $x_3 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$. Dakle, sva rješenja početne jednadžbe su

$$x_1 = -4, x_2 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, x_3 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}.$$

3.2.4. Parcijalna derivacija funkcije s dvije realne varijable

Posljednji zadatak koji je obrađen u aplikaciji je parcijalna derivacija funkcije s dvije realne varijable. U trećem kolokviju ne traži se da se zasebno riješe parcijalne derivacije, nego su dio većeg zadatka. Ti se zadaci mogu vrlo lako riješiti jednom kad se dobije parcijalna derivacija te je iz tog razloga vrlo bitno da student dobro poznaje parcijalne derivacije.

Da bi se počeli rješavati zadaci, potrebno je znati određena pravila koja se primjenjuju. Bit će prikazane dvije slike koje se pojavljuju i unutar aplikacije kao objašnjenje postupka rješavanja.

$$\begin{array}{ll} f(x) = k \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0 & f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \\ f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 & f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a \\ f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = kx^{k-1} & f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \\ f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} & f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \\ f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \\ f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} & f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a} & f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Slika 9. Najčešće upotrebljavane funkcije parcijalne derivacije

[23]

Na slici 9 prikazane parcijalne derivacije gotovo se nikad ne pojavljuju same, nego se spajaju s različitim operatorima. U tom slučaju vrijede posebna pravila, koja su prikazana na slici 10.

- 1.) $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x) \quad k \in \mathbb{R}$
- 2.) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- 3.) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- 4.) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Chain rule: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Slika 10. Pravila operacija funkcija

[23]

Znajući sada sva pravila koja će biti primjenjivana na zadacima, može se riješiti prvi lakši zadatak. [12]

4. Odredite parcijalne derivacije sljedeće funkcije: $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

U zadatku se mogu primijetiti dvije varijable, x i y , pa se treba napraviti parcijalna derivacija funkcije po x , pa zatim po y . Ispod svakog reda bit će ukratko objašnjena pravila koja smo koristili u postupku rješavanja.

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x) \cdot \sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}^2} =$$

Prvo upotrebljavano pravilo je ako postoji razlomak u funkciji.

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$$

Što se može derivirati u brojniku, s time da je $\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2})$ složena derivacija pa se prvo derivira korijen te onda sve što je unutar njega.

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

U posljednjem koraku bit će derivirano što je ostalo i skraćuje se razlomak. Derivacija po x je gotova pa se sada može prijeći na derivaciju po y.

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}^2} =$$

Prvo se upotrebljava pravilo ako postoji razlomak u funkciji.

$$= \frac{0 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} =$$

Što se može u brojniku, deriviramo, s time da je $\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2 + y^2})$ složena derivacija pa se prvo derivira korijen, a tek onda sve što je unutar njega.

$$= \frac{-x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y}{x^2 + y^2} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dobivena je derivaciju po x i po y, što znači da je zadatak gotov. U ovom je slučaju bila jednostavnija derivacija pa nije bilo potrebno rješenje ni za što dalje. Na kolokviju se pojavljuju znatno teži zadaci koji studentima predstavljaju problem pa je zato bitno da imaju pomoć u prikazivanju postupka rješavanja takvih zadataka.

4. Opis problema i realizacija aplikacije

4.1. Opis problema

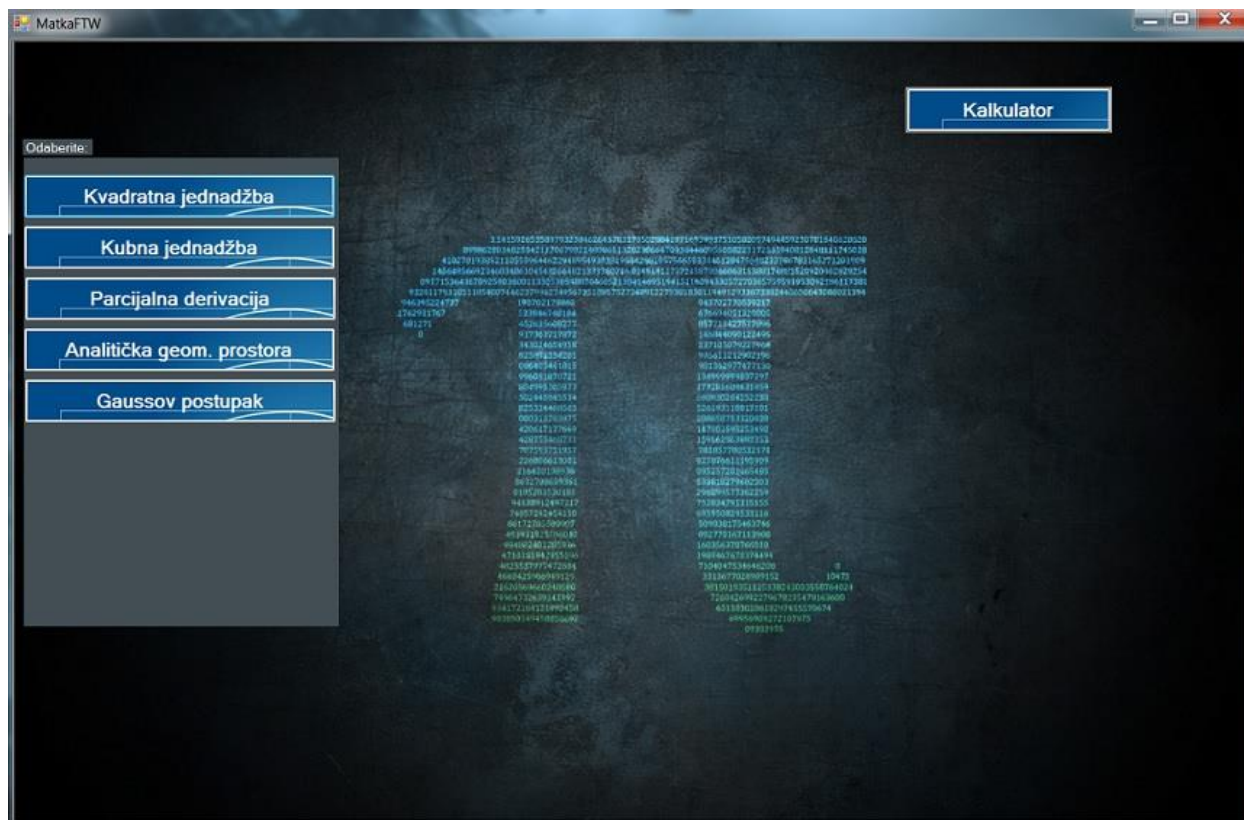
Na kolegiju „Odabrana poglavlja matematike“ obuhvaćena je velika količina gradiva za koju je potrebno izdvojiti dosta vremena. Također, vrlo je važan kontinuiran rad. Budući da uz taj kolegij ima još nekoliko zahtjevnih kolegija u semestru, potrebno je dobro organizirati vrijeme za učenje. Kao što je prije rečeno, kolegij na službenim stranicama ima puno materijala koji bi trebali studentima pomoći u rješavanju. Za većinu gradiva napravljene su službene skripte gdje nisu prikazani svi zadaci koji se mogu naći u kolokviju, s postupkom rješavanja. Međutim, većina studenata uči iz kolokvija od prijašnjih godina koji se nalaze na službenim stranicama. U rješenjima tih kolokvija ne postoji postupak rješavanja već samo krajnji rezultat.

Do problema dolazi na kolokvijima jer je moguće da se tamo neće nalaziti jednostavniji zadaci ili zadaci koje su studenti naučili rješavati šablonski iz materijala od prijašnjih godina. Zbunit će se i netočno riješiti zadatak jer si ga nisu vizualizirali prilikom učenja. Studenti koji riješe zadatak ne znaju je li rješenje točno, a drugi uopće ne znaju postupak rješavanja zadatka. Moguće je da rješenje pronađu na Internetu, da se konzultiraju s kolegama ili s asistentima, međutim to često oduzme više vremena od samog rješavanja zadatka. Iako postoje, pojedine pogodne aplikacije s postupkom rješavanja su preskupe za svakog studenta.

Za rješenje tog problema nudi se aplikacija „MatkaFTW“ koja je izrađena za potrebe kolegija „Odabrana poglavlja matematike“. U aplikaciji su obrađeni zadaci koji su po autorovom mišljenju kritični, ili zbog težine zadataka ili zbog faktora ljudske pogreške. Veliki plus aplikaciji je što za rješenja, kod kojih je moguće, vizualizira zadatak što studentima pomaže u razumijevanju zadatka. Uz rješenje ima postupak i student ga sam prouči i nauči s razumijevanjem. U nastavku bit će objašnjeno na koji je način aplikacija realizirana te kako se koristiti njome.

4.2. Realizacija aplikacije

Prvo je prikazano sučelje aplikacije i vidi se što je sve dostupno u aplikaciji. Zatim je obrađen svaki zadatak pojedinačno i detaljno objašnjena realizacija tog djela.



Slika 11. Početna stranica aplikacije

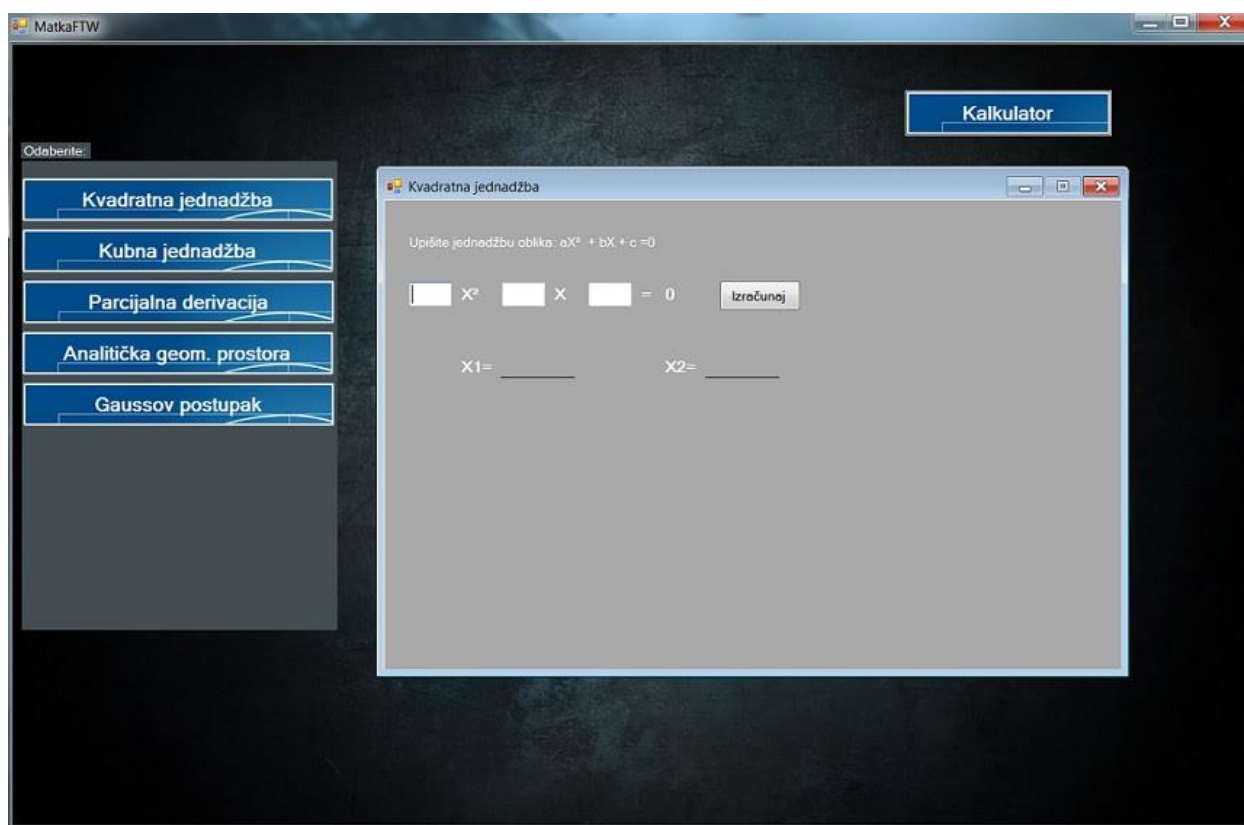
Sa slike 11 se može vidjeti da postoji sveukupno šest gumbi. Pet ih je poveznica na pojedine zadatke koje aplikacija rješava, a jedan je poveznica na kalkulator. Zbog jednostavnosti aplikacije, gumb „Kalkulator“ je poveznica na kalkulator operativnog sustava Windows. Kalkulator je dodan u svrhu pomoći prilikom samog računanja zadatka, ako studentu nije pri ruci džepni kalkulator. Dodavanje kalkulatora postignuto je na sljedeći način.

System.Diagnostics.Process.Start("calc");

Ostalih pet gumbi pojedinačno je obrađeno po sljedećem poretku: „Kvadratna jednadžba“, „Kubna jednadžba“, „Parcijalna derivacija“, „Analitička geom. prostora“, „Gaussov postupak“.

4.2.1. Kvadratna jednadžba

Zadatak služi kao nastavak na kubnu jednadžbu, kada se dobije prva nultočka. Za razliku od većine online aplikacija, „MatkaFTW“ nudi rješenje u slučaju da je nultočka imaginarni broj. Uvođenje imaginarnih brojeva nije slučajnost. U slučaju da je kod kubnih jednadžbi diskriminanta manja od nule, postoji jedno realno rješenje i dva kompleksno konjugirana rješenja. Budući da se radi o krajnje jednostavnom zadatku, za njega nije napravljen postupak te nema potrebe za prikazom nekih specifičnih dijelova koda. Od korisnika se jedino traži da upiše koeficijente uz varijable te da pritisne gumb „Izračunaj“. U slučaju da se program nastavlja s kubne jednadžbe, koeficijenti su već prepisani od kvadratne jednadžbe koja se dobije nakon pronalaska prve nultočke. Zadatak nudi vizualizaciju kvadratne jednadžbe, čiji je način prikaza identičan kao i kod kubne jednadžbe pa će se kasnije prikazati i objasniti vizualizacija.



Slika 12. Izgled programa „Kvadratna jednadžba“

4.2.2. Kubna jednadžba

Kako je već prikazano, kubne jednadžbe nemaju težak postupak rješavanja, ali u slučaju velikog slobodnog koeficijenta, mogu imati veliki broj ponavljanja. Online rješenja koja postoje prikazu sve nultočke po nasumičnom rasporedu, što znači da student i dalje ne zna koja je prva nultočka koju on traži. Aplikacija pomaže studentu da dođe do te prve nultočke, naravno, u slučaju da postoji.

Način na koji je to ostvareno identičan je način na koji bi i student to rješavao. Aplikacija prvo traži sve djelitelje slobodnog koeficijenta i pamti ih. Budući da je to za računalo mali broj djelitelja, nema potrebe za postupkom smanjivanja broja djelitelja. Iz tog razloga računalo ulazi direktno u Hornerov algoritam sa svim djeliteljima. Prikazan je kod za Hornerov algoritam koji se koristi. [6]

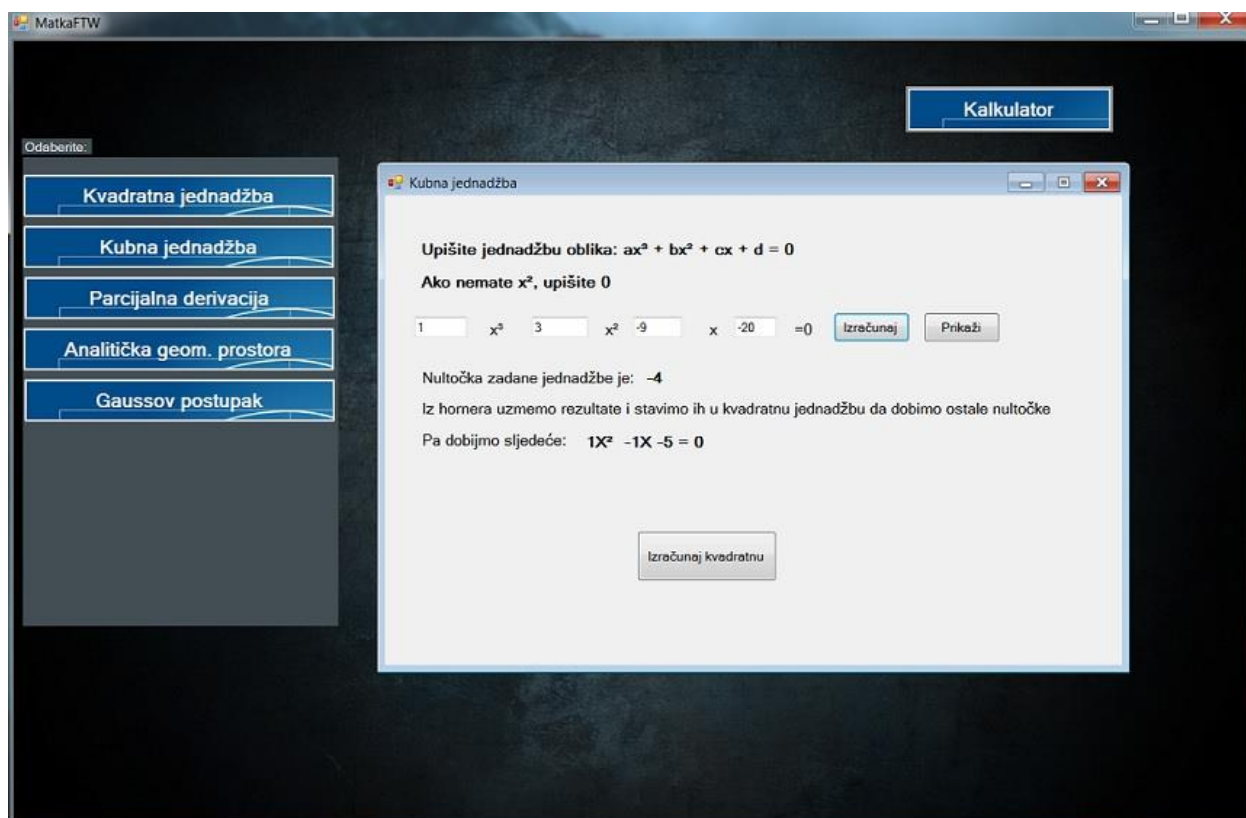
```
static double horner(double[] coefficients, double x)
{
    double result = 0;
    pom_varijable.koef2=new double [4];

    result = coefficients[0] * x;
    for (int i = 1; i < (coefficients.Length - 1); i++)
    {
        result += coefficients[i];
        if (pom_varijable.horner == true)
        {
            pom_varijable.koef2[i] = result;
        }
        result *= x;
    }
    result += coefficients[coefficients.Length - 1];

    pom_varijable.horner = false;
    return result;
}
```

Gore je prikazan izmijenjeni kod Hornerovog algoritma, koji je preuzet s Interneta. Cilj algoritma je da nakon što prođe sve koeficijente jednadžbe, dođe do nule. Izmjena u kodu koja je doručena je da pamti brojeve koji se dobiju u donjem djelu tabele. Ti brojevi, u slučaju da je rezultat Hornera nula, zapravo su koeficijenti kvadratne jednadžbe koje koristimo da dobijemo zadnje dvije nultočke.

U slučaju da Hornerov algoritam dobije nulu za nekog od djelitelja slobodnog koeficijenta, znamo da postoji cjelobrojna nultočka i program ispisuje koja je to. Ako Hornerov algoritam nije našao nulu, tada kandidat za nultočku nije cjelobrojni i kandidat se mora pronaći po drugačijem postupku. Taj postupak nije objašnjen prilikom rješavanja matematičkih zadataka zato što je vrlo sličan kao i kod cjelobrojnih nultočki. Jedina je razlika u dobivanju kandidata za nultočke. Tada se dijele djelitelji vodećeg koeficijenta s djeliteljima slobodnog koeficijenta. Tada se opet ti kandidati šalju u Hornerov algoritam i provjerava se dobiva li se nula za bilo koji od njih.

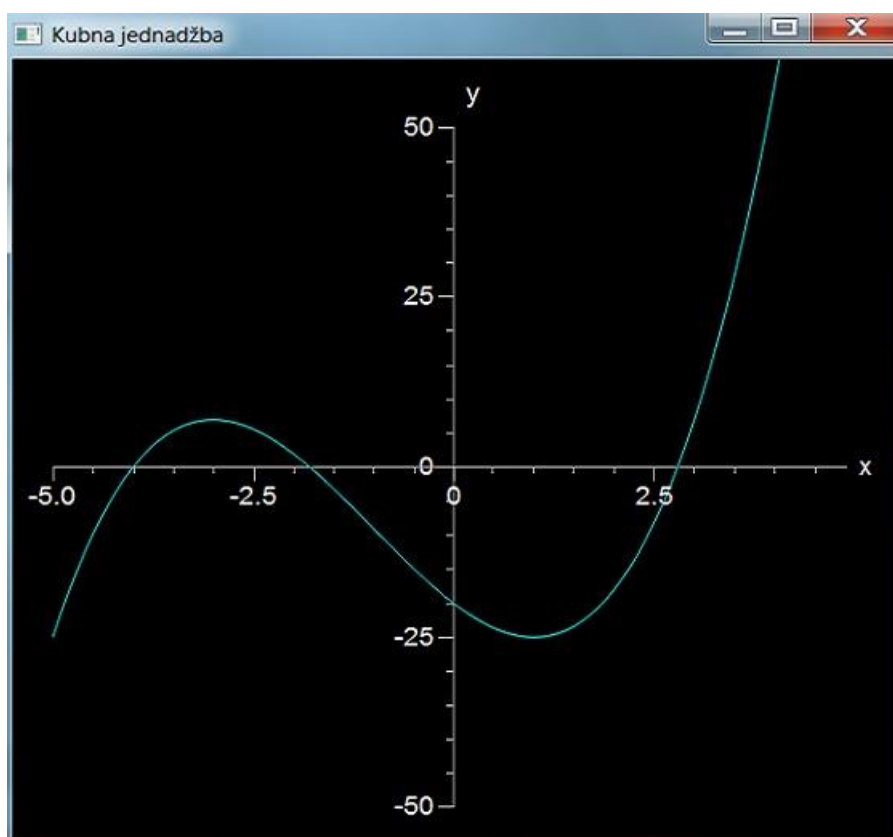


Slika 13. Izgled programa „Kubna jednadžba“

U slučaju da postoji nultočka, prikazana je na ekranu, zajedno s kvadratnom jednadžbom koja se dobije iz Hornerovog algoritma. Korisnik tada ima mogućnost ići na rješavanje kvadratne jednadžbe ili može vizualizirati riješenu kubnu jednadžbu.

Vizualizacija kubne jednadžbe odrađena je u programskom jeziku Python te se pokreće program koji prikazuje samo vizualizaciju. Na program je dodan nastavak .pyw, jer tada se ne prikazuje konzola, što nam u ovom slučaju nije potrebno. Prijenos potrebnih podataka u program Pythona postignut je preko .txt datoteke iz koje program čita podatke. Vizualizacija je postignuta pomoću sljedećeg isječka koda. [7]

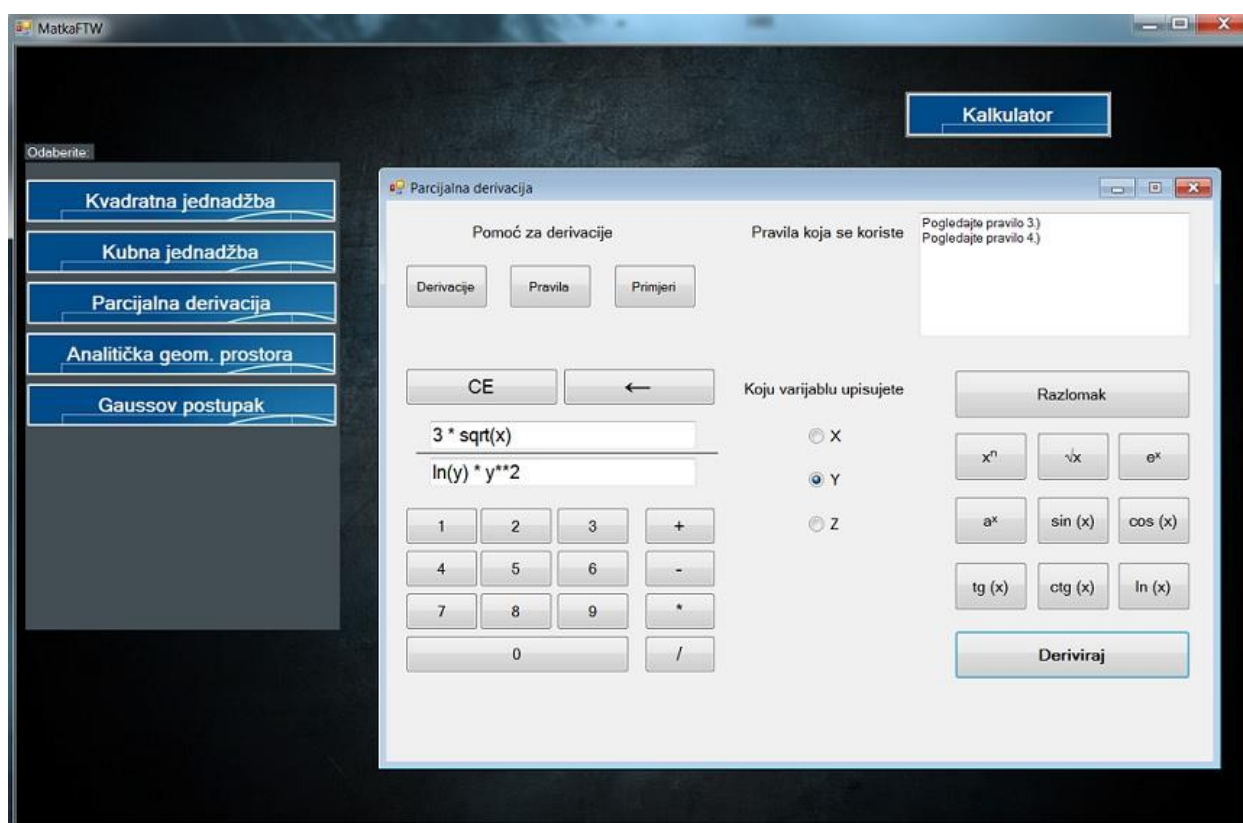
```
gd = gdisplay(x=0, y=0, width=600, height=600,  
             title='Kubna jednadžba', xtitle='x', ytitle='y', ymax=50, ymin=-50)  
f1 = gcurve(color=color.cyan)  
for x in arange(x-2, y+2, 0.1):  
f1.plot(pos=(x,a*(x*x*x)+(b*x*x)+c*x+d))
```



Slika 14. Prikaz vizualizacije kubne jednadžbe

4.2.3. Parcijalna derivacija

Većina studenata smatra parcijalne derivacije najtežim dijelom trećeg kolokvija. Prilikom rješavanja težih zadataka, studentima nedostaje postupak rješavanja. Online rješenja koja su dostupna, traže svoju posebnu sintaksu ili se mora plaćati za dobivanje postupka rješavanja. Aplikacija „MatkaFTW“ tako je dizajnirana da korisnik ne treba znati sintaksu pisanja, a ujedno prikazuje pravila koja su se koristila prilikom rješavanja zadatka.



Slika 15. Izgled programa „Parcijalna derivacija“

Na slici 15 može se vidjeti da je program dizajniran tako da korisnik unosi sve preko gumba. Time se izbjeglo da korisnik mora naučiti sintaksu programa. Naravno, može se unositi izravno u prostore za pisanje, ali postoji vjerojatnost da dođe do pogrešne sintakse koju program ne bi shvatio. U tom slučaju program ispisuje da je došlo do pogrešne sintakse te ga vraća na početak. Ako je sintaksa u redu, korisnik treba stisnuti gumb „Deriviraj“. Program tada zapisuje podatke u .txt datoteku iz koje Python čita te podatke. Python prikazuje parcijalne derivacije od toliko varijabli koliko je zapisano. Na slici broj 15 upisane su dvije varijable pa je program prepoznao koje su to dvije varijable u pitanju te je po njima napravio derivacije.

```

C:\Python27\python.exe
Derivacija po x:
      3
-----
2*sqrt(x)*y*log(y)
Derivacija po y:
      6*sqrt(x)      3*sqrt(x)
-----
      3              3      2
y*log(y)          y*log(y)

```

Slika 16. Prikaz rješenja parcijalne derivacije

U trenutku kada se pokrene Python, aplikacija u prozoru ispisuje koja su se pravila redom koristila. Pokraj tih pravila su prikazani brojevi koje korisnik treba potražiti na priloženim slikama. U aplikaciju su ugrađene tri slike, derivacije, pravila i neki primjeri parcijalnih derivacija.

Sama derivacija događa se u Pythonu, pomoću biblioteke „SimpY“. Trebalo je importirati sve funkcije za sve radnje i simbole koji mogu naići u parcijalnim derivacijama. Posebno se ističe sljedeća linija koda.

```

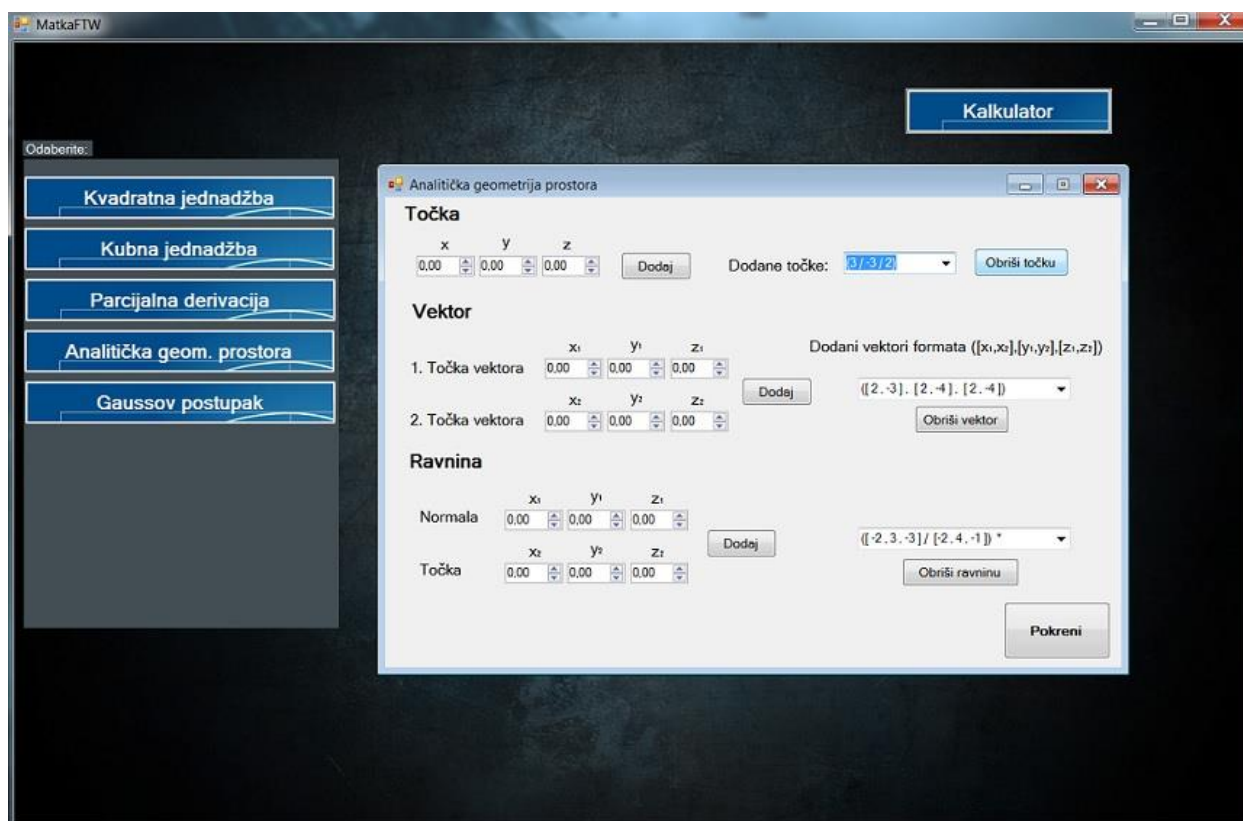
der=diff( eval(words) , x)
pprint (der)

```

Funkcija *diff* izračunava parcijalnu derivaciju i prima dvije varijable. Prva varijabla je točna sintaksa što bi trebalo derivirati. U našem slučaju to je string varijabla koju program čita iz .txt datoteke. Budući da program ne može prepoznati funkcije iz stringa, koristi se funkcija *eval*, koja pretvara string u podatke koje može program iskoristiti. Druga varijabla je simbol po kojemu će se izvršavati derivacija. U drugom redu je funkcija *pprint*, koja služi da se rezultat transparentno prikaže, pravilno, kao što bi student napisao na papiru.

4.2.4. Analitička geometrija prostora

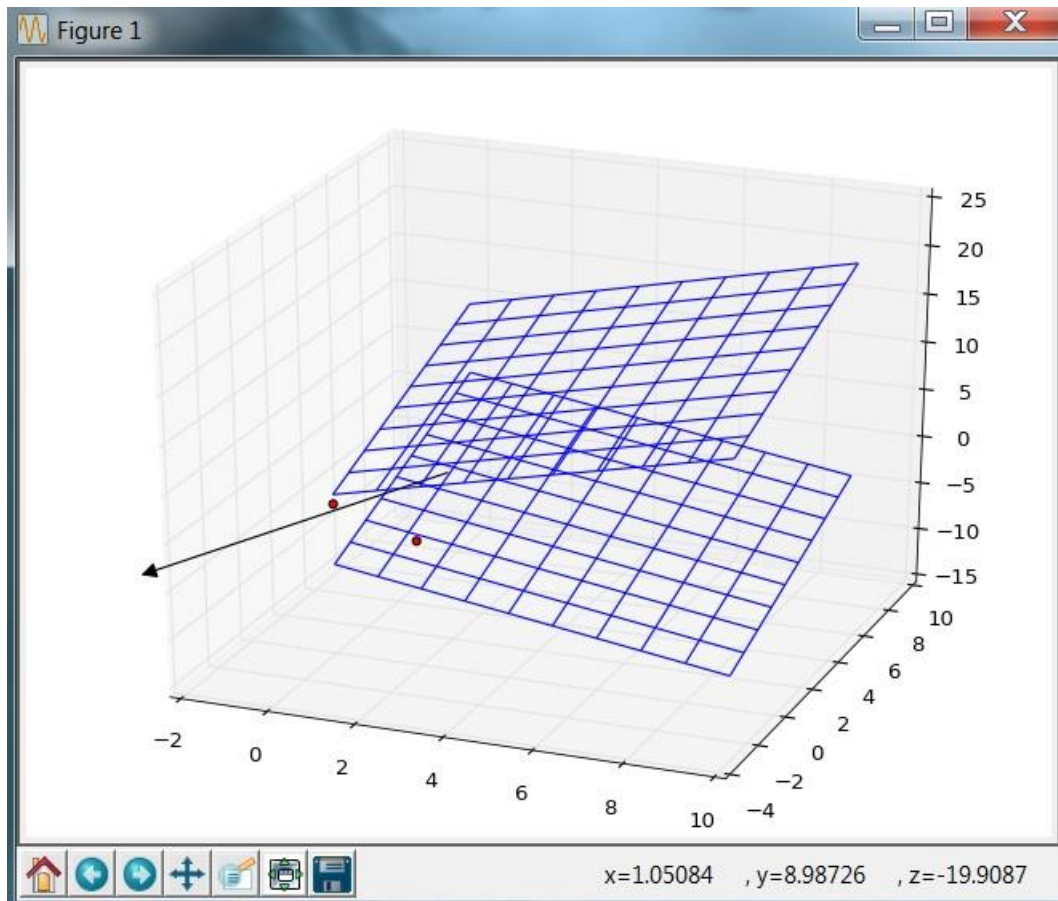
Za studenta je vrlo bitno da može vizualizirati zadatak. Upravo ovaj program tome služi, kao pomoć studentima koji imaju problema s vizualizacijom objekata. Često se u zadatku traži da se izračuna neki dio, na temelju položaja više ravnina, vektora ili naspram položaja točke. Program nudi korisniku da doda u jedan 3D prostor koliko želi točki, vektora ili ravnina. Korisnik može izraditi više 3D prostora te ih uspoređivati.



Slika 17. Izgled programa „Analitička geometrija prostora“

Iz slike 17 može se primijetiti da program nudi brisanje objekta po želji. Korisnik može višestruko kliknuti na gumb „Pokreni“ te će se svakim klikom otvoriti novi prozor s prikazom trenutačno odabranih podataka. Program ima mogućnost prikaza vrijednosti u decimalnom obliku, u slučaju da se u zadatku pojavljuju razlomci.

Vizualizacija je izvedena u Pythonu, s time da ne postoji program s određenim brojem linija koda koji se pokreće svaki put. To je izvedeno tako da se prilikom svakog pokretanja programa generira nova .txt datoteka na temelju unosa korisnika. Postoje određene linije koda koje su stalne u svim .txt datotekama, a program generira dodatne linije koda za objekte koje korisnik unosi.

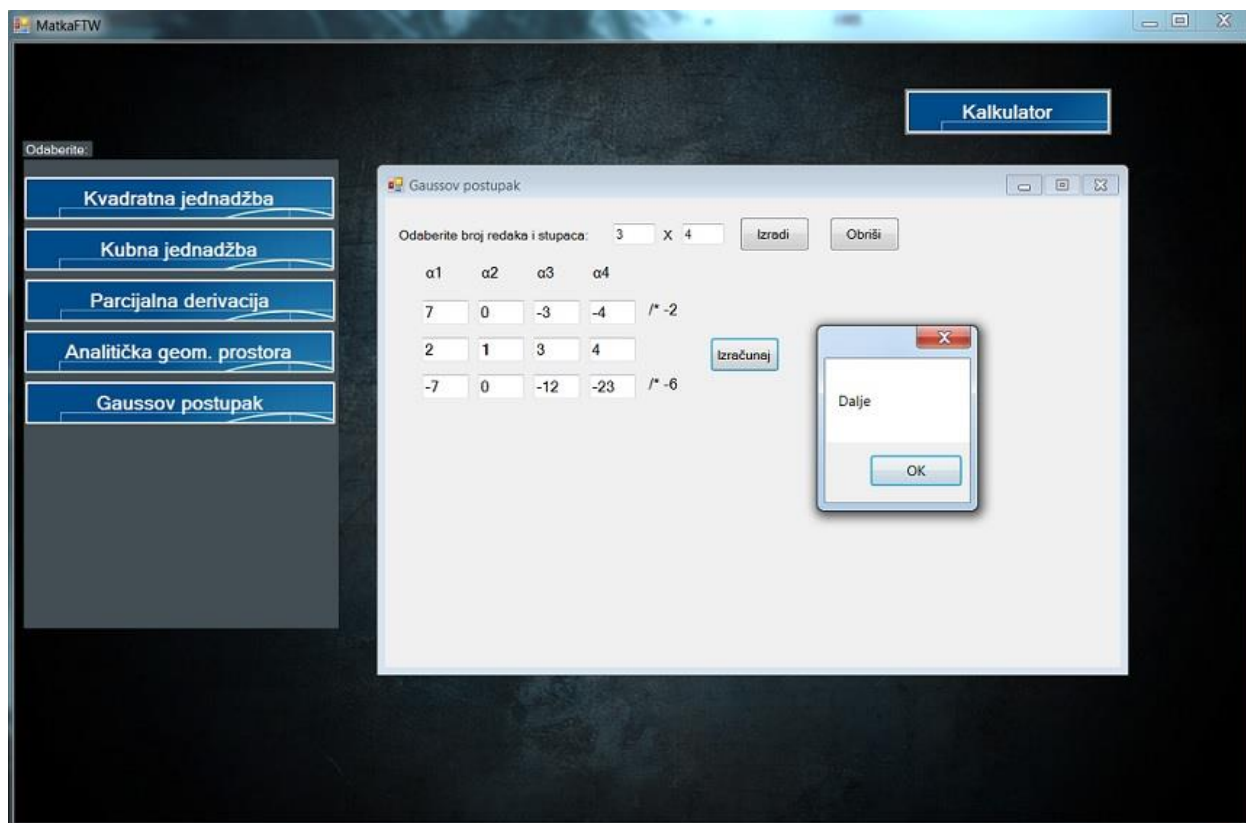


Slika 18. 3D prikaz unosa korisnika

Na slici 18 može se vidjeti da je korisnik unio dvije ravnine, dvije točke i jedan vektor. [8] Korisnik može manipulirati s perspektivom gledanja, tj. može se slobodno kretati po 3D prikazu. Pomoću lijevog klika miša korisnik mijenja perspektivu gledanja, a pomoću desnog klika miša korisnik može uvećavati i smanjivati prikaz po potrebi. Ukoliko korisnik želi, može spremi trenutnu sliku prikaza te ju koristiti za daljnju upotrebu.

4.2.5. Gaussov postupak

Posljednji program koji je obrađen u aplikaciji je Gaussov postupak. Sam postupak rješavanja vrlo je jednostavan, kao što je prikazano ranije. Problem se nalazi u faktoru ljudske pogriješke i u tome koliko je student koncentriran na zadatak. Većina online rješenja koja su dostupna nemaju mogućnost računanja s nulom, a ona koja imaju, naplaćuju se. Isto tako se naplaćuje postupak rješavanja zadatka.



Slika 19. Izgled programa „Gaussov postupak“

Sa slike 19 se mogu primijetiti tri bitna dijela programa. Prvi dio je odabir broja redaka i stupaca. Drugi dio su izrađeni redci i stupci u koje korisnik upisuje podatke za računanje. Treći dio je prozorčić koji prikazuje svaki zasebni korak Gaussovog postupka. Prozorčić može označavati kraj koraka ili može pokazati korisniku da se dogodio postupak skraćivanja retka. S desne strane prozorčića za upis nalaze se brojevi s kojima se množi odabrani red. Program podeblja odabrani broj, ispod kojeg je cilj dobiti nule. Nakon što se program izvrši i prikaže sve korake postupka, korisnik ima mogućnost obrisati sve retke i stupce te početi iznova.

Program radi na principu puno petlji. Glavna petlja vrti redove u koje ulaze petlje nižeg nivoa. Postoji puno petlji nižeg nivoa, od kojih svaka obavlja neki zadatak. Postoji jedna petlja koja briše Labele i podebljane brojke nakon svakog koraka. Bitna petlja nižeg nivoa je za skraćivanje i uređivanje retka. Zadnja petlja nižeg nivoa je sam Gaussov postupak. Nakon što se izvrši svaka od petlji nižeg nivoa, glavnoj petlji se resetira brojač. To se događa zato jer se nakon skraćivanja mijenjaju brojevi u retku te se mijenja u koji će red krenuti Gaussov postupak.

5. Tehnologije koje se koriste u aplikaciji „MatkaFTW“

Aplikacija je izrađena u alatu „Microsoft Visual Studio Ultimate 2012“ i kao programski jezik se koristio C#. Za izradu vizualizacije i parcijalnih derivacija koristio se „Vpython 6.05“ kao alat i Python kao programski jezik. Da bi se program uspješno pokrenuo, potrebno je preuzeti dodatne izvršne datoteke:

- 1) matplotlib-1.3.1.win32-py2.7
- 2) numpy-MKL-1.8.1.win32-py2.7
- 3) pyparsing-2.0.2.win32-py2.7
- 4) python-dateutil-2.2.win32-py2.7
- 5) pytz-2014.4.win32-py2.7
- 6) scipy-0.14.0.win32-py2.7
- 7) six-1.7.2.win32-py2.7
- 8) sympy-0.7.5.win32-py2.7

Navedene izvršne datoteke dostupne su na linku: <http://www.lfd.uci.edu/~gohlke/pythonlibs/>. Svaka od tih datoteka ima svoje službene stranice te se moraju instalirati preko konzole. Pomoću navedene stranice mogu se preuzeti izvršne datoteke te time izbjeći komplikacije s konzolom.

Kombinacija programskih jezika C# i Python korištena je zato što korisnik dobiva najbolje iz obaju svjetova. C# nudi ugodno grafičko korisničko sučelje te se korisnik lako snalazi u interakciji s aplikacijom. Mana mu je što nema tolike matematičke mogućnosti pa se mora koristiti neki drugi jezik ako su u pitanju veliki matematički zahtjevi. Ovdje uskače Python. S navedenim izvršnim datotekama je u mogućnosti izvršiti sve potrebe aplikacije.

6. Zaključak

Do sad nije razvijena aplikacija koja bi mogla rješavati zadatke umjesto studenata. Budući da nisu dostupna rješenja s postupkom za sve zadatke, student se okreće Internetu i ostalim izvorima da dođe do toga. Online rješenja grafički su orijentirana na korisnika te ne zahtijevaju neko posebno poznavanje sintakse za rješavanje zadataka. Postoji ih podosta pa se korisnik zbuni tražeći odgovarajuću stranicu koja će zadovoljiti njegove potrebe. Ako student želi naći postupak rješavanja nekog zadatka, vjerojatno će trebati platiti određenom servisu za to. Student može također preuzeti određenu desktop aplikaciju te imati daleko više mogućnosti nego što mu nude online rješenja. Postoje besplatne aplikacije i one koje se plaćaju. Sve imaju jednake mogućnosti u izvedbi zadataka, ali se razlikuju u grafičkom korisničkom sučelju te u samoj interakciji s korisnikom. Velika mana im je što je korisnik primoran naučiti dodatnu sintaksu i potrošiti podosta vremena na Internetu tražeći odgovarajuće funkcije koje će riješiti korisnikove zadatke.

Najbolje iz online i desktop rješenja pokušalo se implementirati u aplikaciju „MatkaFTW“. Aplikacija ima grafičko sučelje koja izgledom podsjeća na online rješenja. Svrha toga je da korisnik ne treba brinuti kako će upisati pojedini zadatak. Iz desktop rješenja postigla se neovisnost prema Internetu, da korisnik može na bilo kojoj lokaciji raditi u miru. Veliku korist od aplikacije imaju studenti koji pohađaju kolegij „Odabrana poglavlja matematike“, jer im se svi važniji zadaci nalaze na jednom mjestu. Zadaci nisu namijenjeni samo navedenim studentima već i svima ostalima koji imaju želju naučiti sljedeće tipove zadataka: kvadratna jednadžba, kubna jednadžba, parcijalna derivacija, analitička geometrija prostora i Gaussov postupak. Ukoliko korisnik želi naučiti ostale tipove zadatka, koji nisu obrađeni u aplikaciji, primoran je obratiti se Internetu ili knjigama.

Aplikacija je napravljena tako da pomogne korisniku u rješavanju zadataka. Ovisno o tipu zadataka, aplikacija nudi više ili manje opširna rješenja. Pod tim se misli je li rješenje zadatka vizualno prikazano te koliko je to rješenje dobro objašnjeno. Aplikacija je napravljena u nadi da će studenti pomoću nje s manje muke položiti kolokvije i uspješno okončati ispitne rokove.

Literatura

- 1) Barker, Visual C# 2005 Express , Kompjuter biblioteka, Čačak, 2007
- 2) Divjak, Horvat, Žugec i Maretić, http://elfarchive.foi.hr/12_13/pluginfile.php/5097/mod_page/content/6/PolinomiOPM.pdf , dostupno 3.9.2014.
- 3) Leo B., Napredno rješavanje problema programiranjem u Pythonu , Element, Zagreb 2013
- 4) Lončar I., Matematičke metode za informatičare I, TIVA - Fakultet organizacije i informatike, Varaždin 2001
- 5) Lončar I., Matematičke metode za informatičare II, TIVA - Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 2001
- 6) Hornerov algoritam, dostupno 1.8.2014. na <http://fiuadyprojectcsharp.blogspot.com/2011/07/implementing-horner-algorithm-for.html>
- 7) Ravnina u matplotlib, dostupno 1.8.2014. na <http://stackoverflow.com/questions/3461869/how-to-plot-a-plane-in-matlab-or-scipy-matplotlib>
- 8) Vektor u matplotlib, dostupno 1.8.2014. na <http://stackoverflow.com/questions/11140163/python-matplotlib-plotting-a-3d-cube-a-sphere-and-a-vector>
- 9) Prvi zadatak, dostupno 22.8.2014. na http://elfarchive.foi.hr/12_13/pluginfile.php/5108/mod_page/content/1/rijeseni_zadaci/analitickaGeometrija3D_drugi2.pdf
- 10) Drugi zadatak, dostupno 23.8.2014. na http://elfarchive.foi.hr/12_13/pluginfile.php/5103/mod_page/content/2/vjezbanje/vektorski_prostor.pdf
- 11) Treći zadatak, dostupno 23.8.2014. na http://elfarchive.foi.hr/12_13/pluginfile.php/5095/mod_page/content/2/polinomiPDF.pdf
- 12) Četvrti zadatak, dostupno 23.8.2014. na http://elfarchive.foi.hr/12_13/pluginfile.php/5090/mod_page/content/1/rijeseni_zadaci/funkcije_vise_varijabliPDF_2.pdf
- 13) Mathway, dostupno 3.9.2014. na <https://www.mathway.com/>
- 14) Math.com, dostupno 3.9.2014. na <http://www.math.com/students/tools.html>
- 15) WolframAlpha, dostupno 3.9.2014. na <http://www.wolframalpha.com/>
- 16) WebMATH, dostupno 3.9.2014. na <http://www.webmath.com/>
- 17) MATLAB, dostupno 3.9.2014. na <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
- 18) Sage, dostupno 3.9.2014. na <http://www.sagemath.org/>
- 19) GeoGebra, dostupno 3.9.2014. na <http://www.geogebra.org/cms/en/>

20) Slika 5, dostupno 21.8.2014. na

<http://www.mathworks.com/products/matlab/features.html>

21) Slika 6, dostupno 21.8.2014. na <http://www.sagemath.org/tour-graphics.html>

22) Slika 7, dostupno 21.8.2014. na <http://webpace.ship.edu/msrenault/tutorial/images/7-1.png>

23) Slike derivacija, dostupno 24.8.2014. na

http://www.mathspadilla.com/matII/Unit3Derivatives/derivation_rules.html