SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Dario Belinić

ARITMETIKA I ALGEBRA GEORGEA SPENCERA BROWNA

ZAVRŠNI RAD

Varaždin, 2014.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE

V A R A Ž D I N

Dario Belinić

Matični broj: 37075/08-IZ

Studij: Informacijski sustavi

ARITMETIKA I ALGEBRA GEORGEA SPENCERA BROWNA

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Doc.dr.sc. Markus Schatten

Varaždin, rujan 2012.

Zahvala

Zahvaljujem Doc.dr.sc. Markusu Schattenu koji mi je omogučio pisanje ove teme, pružio mi potrebne materijale, davao mi prijedloge i kritike oko izrade rada te izdvojio dio svog radnog i slobodnog vremena da bi ovaj rad bio završen u vremenskom roku.

Sadržaj

1. Uvod

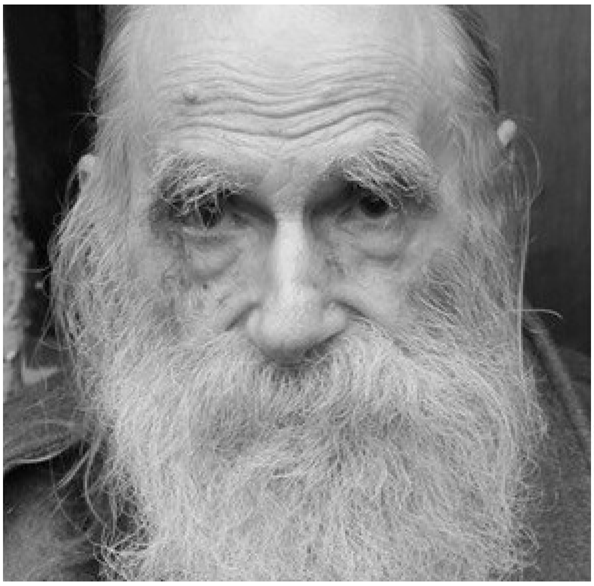
Za ličnost Georga Spencera-Browna sam čuo još prije nekoliko godina i premda mi način, vrijeme i mjesto, kako ,kada i gdje sam za njega čuo izbjegavaju sjećanje, ipak sam ga zapamtio. Doduše, ne po njegovom radu na području matematike, već po ostalim aktivnostima kojim se bavio. Jednostavno mi je to bilo fascinantno kako jedna osoba može živjeti toliko ispunjen život. Uz sav svoj rad na području filozofije, matematike, psihologije, medicine, poezije, on se stigao baviti šahom, tenisom, nogometom, streljaštvom, kriketom, istraživanjem i planinarenjem, proučavanjem pa čak i izradom geografskih karti, zrakoplovstvom, pilotiranjem, a vjerojatno još brdom stvari koje meni osobno nisu poznate.

Prilikom odabira svog završnog rada, pregledavao sam teme koje profesori na fakultetu nude, i naišao sam na temu "Aritmetika i algebra Georga Spencera Browna" kod Doc.dr.sc. Markusa Schattena koji mi je rado dodijelio temu te postao moj mentor i samim time me uveo u jedan posve drugi svijet, svijet zakona oblika.

Svoje istraživanje na ovoj temi sam počeo čitanjem knjiga. Za početak sam pročitao knjigu koja predstavlja zakon. Knjigu bez koje ova tema opće nebi postojala. *Laws of Form* Georga Spencera-Browna. Moram priznati da sam očekivao knjigu punu matematičkih formula i teorema te njihovih dokaza i stvari koje nikada neću razumjeti, ali brzo sam vidio da sam u krivu. Jedan znak. Jedan znak koji predstavlja sve. I pravila za njegvo korištenje. Naizgled sve izgleda jednostavno, ali trebao je genijalan um da se toga sjeti i prenese u oblik razumljiv nama. Pročitavši knjigu, ne mogu reći da sam u potpunosti razumio sve što je Brown želio reći svojim zakonima oblika, ali stvari su mi je bilo puno jasnije kada sam pročitao drugu knjigu, *Laws of Form – An Exploration in Mathematics and Foundations* Louis H. Kauffmana. On je Brownove zakone oblika prikazao na još razumljiviji i pristupačniji način.

U ovom radu je isto tako, na razumljiv način, prikazano sve što sam ja naučio o zakonima oblika. Od notacije zakona oblika i njegve notacije do aritmetike i algebre. Proći ćemo kroz niz primjera o određenim konceptima zakona oblika kako bismo razumjeli pojmove praznine i distinkcije nečega, od nečeg drugog te kako zakonima oblika možemo prikazati izraze iz matematike pa i iz stvarnog života.

2. **Biografija Georgea Spencera-Browna**



Slika. George Spencer Brown [Izvor : http://www.br.de/radio/bayern2/sendungen/zuendfunk/kolumnen-sendungen/]

George Spencer-Brown je rođen 02. Travnja 1923.g. u Lincolnshireu u Engleskoj gdje je i živio u društvu svojih roditelja, oca Johna Browna i majke Margery Featherston. Do 1940.g. je završio medicinski fakultet u Londonu i zatim se pridružio mornarici gdje je časno odslužio četiri godine. 1950. i 1951.g. studirao je filozofiju i psihologiju na Trinity fakultetu u Cambrigeu, a od 1952. do 1958.g. je studirao filozofiju na Oxfordu. Magistrirao je 1954.g. na oba sveučilišta te napisao doktorat na temu "Vjerojatnost i znanstveni zaključak" (eng. *"Probability and Scientific Inference"*) kod mentora Williama Kneala. Njegov doktorski rad je objavljen kao knjiga 1957.g. 1954. je, kao preporuka svog prijatelja Bertranda Russella kojeg je upoznao na Trinity fakultetu, postao predavač formalne matematike na sveučilištu u Londonu. Od 1969.g. nadalje njegov rad je uglavnom povezan s matematikom te je surađivao s odjelom matematike i statistike na sveučilištu u Cambridgeu. Od 1970. pa do 1980.g. bio je gostujuć profesor na sveučilištu Western Austraila, sveučilištu Standford te sveučilištu Maryland. Trenutno je star 91.g.

George Spencer Brown se zanimao za razna područja, te je vodio ispunjen život. Već u svojim ranim godinama je osvajao nagrade za svoj rad. 1939.g. osvojio je nagradu za fiziku, a 1941. nagradu za kemiju (nagradu Walter Knox). Radio je na području radia tijekom svog boravka u mornarici te je bio najbolji od svih kandidata na tom području. Također je uspješno prošao obuku za hipnozu u stomatologiji te ponovnu obuku za ranjenike u ortopedskom rehabilitacijskom centru mornarice. Postao je poručnik kraljevske mornarice 1946.g. Za vrijeme studija bavio se šahom gdje je također osvojio mnoge nagrade. Isto tako, bavio se nogometom, tenisom, a velika strast bila mi je letenje. 1950.g. postao je pilot te leti svime, od paraglajdera do aviona. Okušao se i u utrkivanju automobilima. 1977.g. oženio se za Katherine Lynn Parker, no ubrzo su se rastali.

Njegova objavljena djela su "Vjerojatnost i znanstveni zaključak" (eng. *"Probability and Scientific*

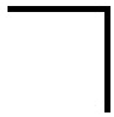
Inference"),London 1957; "Zakoni oblika" (eng. *"Laws of Form"*), London 1969; "Dvadeset i tri stupnja raja" (eng. "*Twenty-Three Degrees of Paradise*"), Cambridge, 1970; "Samo dvoje može igrat ovu igru" (eng. "*Only Two Can Play This Game*"), Cambridge, 1971; "Falklandski radovi" (eng. "*The Falkland Papers*"), Cambridge, 1982.

Za kraj bi valjalo navesti rečenicu iz biografije Georga Spencera-Browna s webstranice www.lawsofform.org koja govori mnogo o njegovom životu, a u prijevodu zvuči ovako :

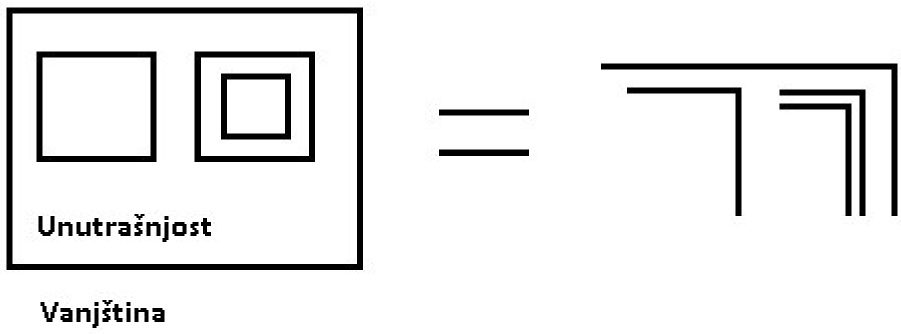
> "Rekreacija Georga Spencera Browna sadrži streljaštvo, tenis, kriket,
> nogomet, šah, pilotiranje svega što može letjeti, istraživanje, fotografija,
> izrada geografskih karti, slušanje Mozarta, kuhanje u odmoru uz reklame,
> skladanje i izvođenje pjesama i balada, konstruiranje genijalnih naprava
> koje zapravo rade i izum igri koje se zapravo mogu igrati."

3. **Zakoni oblika**

Zakone oblika možemo opisati kao matematički sustav koji se bavi pojavom bilo čega iz ničega. Oni prate kako jedna distinkcija u praznini dovodi do stvaranja prostora, gdje se na prostor gleda u njegovom najprimitivnijem obliku, bez dimenzije. Cijela notacija zakona oblika se temelji na jednom simbolu koji nazivamo "oznaka" (eng. *mark*).



Oznaka nam omogućuje razlikovanje "nečega" od "svega osim tog nečega", tj. Predstavlja razliku između svoje unutrašnojsti i vanjštine, distinkciju. Distinkcija je najjenostavniji oblik ili struktura koju možemo zamisliti (F.Heylighen, 1997). Ako zamislimo pravokutnik u ravnini, on sadrži nešto u svojoj unutrašnjosti, a također nešto se nalazi i izvan tog pravokutnika. Oznaka odvaja ta dva sadržaja te možemo reći da je skraćena inačica crtanja pravokutnika.

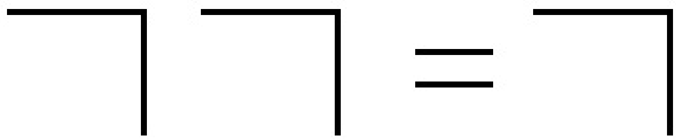


Na slici se jasno vidi ilustracija izraza na dva različita načina, pomoću pravokutnika i pomoću oznake. Ono što bi se trebalo vidjeti u izrazu je to da se oznaka ili pravokutnik nalaze jedan unutar drugoga ili se ne nalaze jedan unutar dugoga. Zato kažemo da odnos između dvije oznake može biti takav da je jedna unutar druge ili da ni jedna nije unutar druge. George Spencer-Brown u svojoj knjizi *Laws of Form* (1969) kaže :

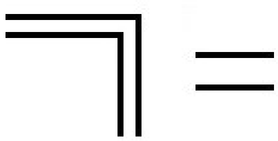
> "Uzimamo ideju distinkcije i ideju indikacije koje su nam dane, kao i činjenicu da nije moguće napraviti indikaciju bez distinkcije. Zato uzimamo formu distinkcije kao formu."

Na osnovi tih njegovih riječi proizlaze dva zakona koji difiniraju zakone oblika. To su :

1. Zakon pozivanja – ako napravimo distinkciju dva puta, efekt će biti isti kao da smo ju napravili samo jednom. Npr. Ako kažemo "Danas je lijep dan" i zatim opet kažemo "Danas je lijep dan", efekt će biti kao da smo samo jednom rekli "Danas je lijep dan".

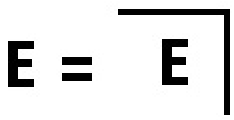


2. Zakon prijelaza – nakon prijelaza iz neoznačenog dijela (vanjština) u označeni dio (unutrašnjost), ponovni prijelaz iz označenog dijela(unutrašnjosti) vraća izraz u neoznačeni dio (vanjština). Stoga, ponovni prijelaz poništava prijelaz, tj. "Vrijednost ponovnog prijelaza nije vrijednost prijelaza" (G.Spencer-Brown, 1969).

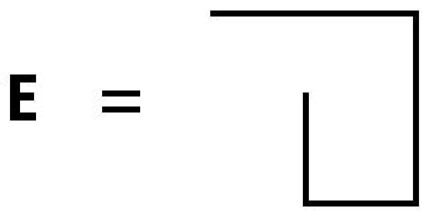


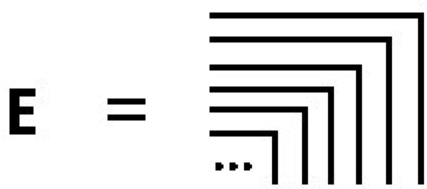
4. **Paradoks**

George Spencer Brown (1969) u svojim zakonima oblika ističe da stanje koje se u prostoru može pojaviti kontradiktorno, može se pojaviti bez paradoksa u prostoru i vremenu. To je tako s poznatim Russellovim paradoksom koji govori o skupu koji sadrži skupove koji nisu članovi samoga sebe. To su strukture koje same definicije pokreću naprijed u kreiranje novih entiteta koje moraju uključiti unutar samih sebe (A.D.Irvine, 2009). Najjednostavnija instanca tako očitog paradoksa je izraz prikazan ispod u kontekstu zakona oblika.



Ako je E jednako označenom stanju, tada jednadžba implicira da je E jednako neoznačenom stanju, a ako je E jednako neoznačenom stanju, tada jednadžba implicira da je E jednako označenom stanju.To se ponekad prikazuje na neki od sljedećih načina.





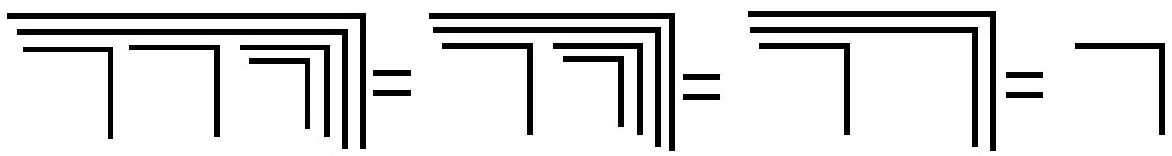
5. Račun indikacije

Do sad smo opisali kako su zakoni oblika povezani s konceptima distinkcije. Sada možemo prikazati matematički strukturu računa indikacije i njegovu algebru.Vidjet ćemo da te strukture posežu za novim pogledom na Booleovu algebru, elementarnu logiku, imaginarne vrijednosti i razne druge matematičke forme.

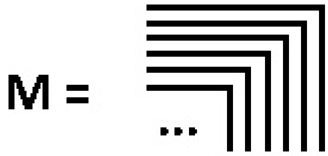
Moramo se prisjetiti zakona pozivanja i prijelaza. Zakon pozivanja kaže da se dvije oznake sažimaju u jednu oznaku, a isto tako jedna oznaka se proširuje u dvije. Zakon prijelaza govori da oznaka onutar oznake nestaje te se formira neoznačeno stanje, a isto tako i neoznačeno stanje se može pretvoriti u dvije ugniježđene oznake. Također moramo se prisjetiti da oznaka predstavlja granicu unutrašnjosti od vanjštine (Louis H. Kauffman, 1972).

Recimo nešto i od znaku jednako " = ". Uzmimo za primjer A = B. Za razliku od normalne matematike, ovdje ovaj izraz moramo shvatiti kao "A se može pobrkati s B". Pobrkati A i B znači izgubiti distinkciju koja ih čini različitim jednog od drugoga. Isto tako, u zakonima pozivanja i prijelaza, znak jednako je indikacija naše sposobnosti da vidimo dva poziva kao jedan poziv i da vidimo da ako napravimo ponovni prijelaz, da je to kao da nismo napravili prijelaz uopće.

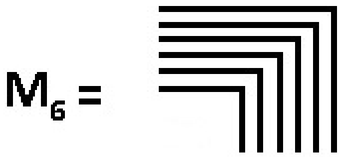
Na sljedećem primjeru se može vidjeti kako se zakoni prijelaza i pozivanja mogu primjeniti. Na prikazanom izrazu je vidljivo kako se izraz pomoću dvije aplikacije zakona prijelaza i jedne aplikacije zakona pozivanja reducira na jedno označeno stanje. Kod reduciranja izraza se moraju najprije naći dvije susjedne oznake da bi se primjenio zakon pozivanja ili pak dvije ugniježđene oznake, bez ijedne oznake između njih, da bi se primjenio zakon prijelaza.



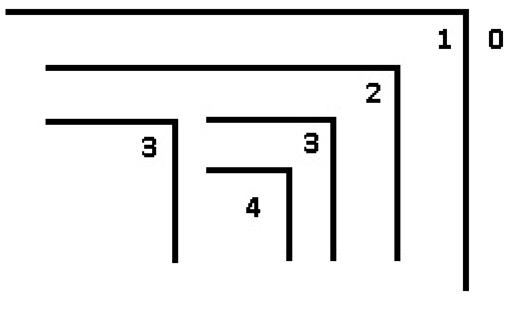
Na primjerima do sad je vidljivo da oznaka može biti ugniježđena više puta unutar druge oznake, ali koliko puta se to može dogoditi i kako znati vrijednost višestrukog prijelaza. Tu pomaže tema o kojoj govori George Spencer Brown u svojoj knjizi. U nekoliko navrata on govori da neki konačan izraz može biti reduciran na označeno ili neoznačeno stanje kroz neki konačan broj korištenja zakona pozivanja i zakona prijelaza. Tu je važno da govorimo o konačnom izrazu, jer postoje i beskonačni izraz kao na primjeru ispod.



Beskonačnim izrazom nazivamo onaj koji je nemoguće reducirati ni zakonom pozivanja ni zakonom prijelaza. U gore navedenom primjeru ne postoje dvije susjedne oznake koje bi mogli reducirati zakonom pozivanja ni dvije ugniježdene oznake makar na prvi pogled izgleda kao da postoje, ali tri točkice "..." impliciraju na to da tu nije kraj te još postoji nešto pod tom oznakom. Ispod je prikazan sličan izraz, ovaj puta konačan izraz na kojem se može dokazati da se svaki izraz može reducirati na označeno ili neoznačeno stanje.



Na tome izrazu je jasno vidljivo da je ekvivalentan neoznačenom izrazu. Možemo zaključiti da je M_n ekvivalentno označenom ili neoznačenom stanju ovisno o n. Ukoliko je n parni broj, izraz je jednak neoznačenom stanju, a ako je n neparan, izraz je ekvivalentan označenom stanju. Korisno je znati da izraz dijeli ravninu u dijelove kojima možemo dodijeliti dubinu izraženu brojevima 0,1,2,3... ovisno o tome koliko je prijelaza potrebno da bi se pristupilo odgovarajućem dijelu. Takvi dijelovi se nazivaju divizije. Primjer takve podijele je prikazan ispod.



Na navedenom izrazu je vidljivo da postoje dvije divizije dubine 3. U izrazu mogu postojati više divizija iste dubine. Maksimalna dubina ovog izraza je 4. Bilo koji konačan izraz ima neku maksimalnu dubinu i neki konačan broj divizija. Divizija maksimalne dubine mora biti prazna, inače nebi govorili o konačnom izrazu.

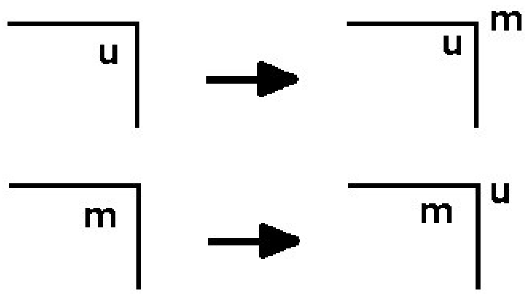
Dokažimo sada našu teoriju da se svaki konačan izraz može reducirati kroz zakone pozivanja i prijelaza na označeno ili neoznačeno stanje. Neka je E neki konačan izraz. Neka je S divizija maksimalne dubine u E .Onda znamo da je S nužno prazan i može biti okružen oznakom M .Ta oznaka može biti ugniježdena u nekoj drugoj ili pak može biti susjedna nekoj oznaci M' .Ako postoji neka oznaka M' susjedno od oznake M , onda M' mora biti prazna oznaka ili bi dubina M' bila veća od dubine M .Budući da su te oznake susjedne, zakonom pozivanja možemo ih reducirati na samo M .Ako ne postoji susjedna oznaka, a M je ugniježdena u oznaci M'' , onda se te dvije oznake mogu reducirati zakonom prijelaza na M . Znači, bilo koji izraz možemo reducirati na označeno ili neoznačeno stanje, osim ako je izraz prazan ili se pak sastoji od jedne oznake.

Prikazali smo izraze na kojima su obavljani prijelaz i pozivanje nekolika puta, uglavnom s ciljem da pojednostavimo izraz, ali kako zakonima pozivanja i prijelaza možemo pojednostaviti izraz, tako ga možemo i zakomplicirati. Morali bi se zapitati da li su neoznačeno stanje i označeno stanje uistinu različiti. George Spencer Brown (1969) kaže da ne postoji konačan broj aplikacija pozivanja i prijelaza koji bi mogli transformirati neoznačeno stanje u označeno stanje. Da bismo to dokazali koristit ćemo metodu za izračun dobro definiranih vrijednosti $V(E)$ za svaki izraz E gdje V znači vrijednost. $V(E)$ Ne ovisi o reduciranju izraza zakonima pozivanja i prijelaza, pa se tako i ne mijenja pod operacijama pozivanja i prijelaza.

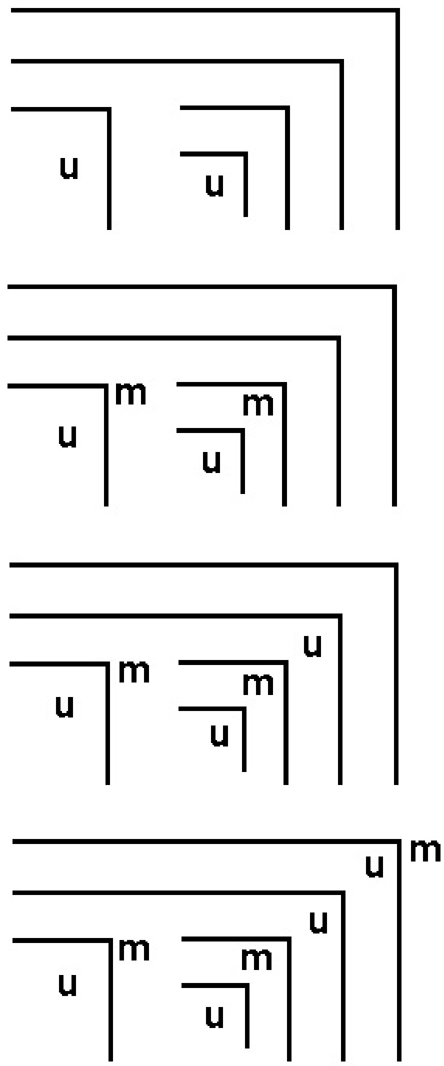
Za izračun $V(E)$ koristit ćemo vrijednosti m za označeno stanje i u za neoznačeno stanje. Te vrijednosti će predstavljati divizije izraza. Koristit ćemo pravilo da ako je divizija označena s barem jednim m i nekim brojem u tada je on označen sa m . Ako je označen samo s nekoliko u , onda ćemo ga smatrati u . Pa iz toga slijedi :

$$uu=u$$
$$mm=m$$
$$mu=um=m$$

Sada uzmimo neki izraz E i označimo sve njegove divizije s u. Pošaljimo sve oznake prema gore iz dubljih prostora prema ovim pravilima :

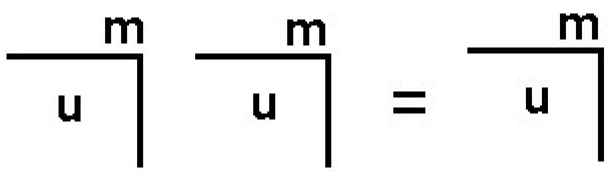


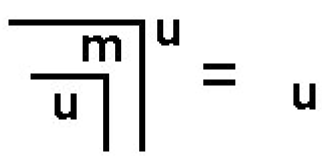
Dublje mjesto šalje suprotnu oznaku na mjesto divizije s dubinom za jedan stupanj manje. Tako svaka divizija dobiva vrijednost kombinirajući oznake koje prima iz divizija s većom dubinom od sebe. Na kraju, divizija dubine 0 dobiva oznaku m ili u, a po definiciji, ta oznaka je $V(E)$.



Neka E označava početni izraz. Počinjemo s označavanjem najdubljih praznih prostora sa u. Prelaženjem granica tih prostora propagira dvije m oznake. Druga m oznaka propagira u oznaku u diviziju koja je već označena sa m .To ne mijenja vrijednost te divizije i u propagira u sljedeću diviziju koja pak propagira m u diviziju s dubinom 0 pa kažemo da je $V(E)=m$. Znači, izraz iz primjera se može reducirati na označeno stanje.

Dokažimo tvrdnju da ne postoji konačan broj aplikacija pozivanja i prijelaza koji bi mogli transformirati neoznačeno stanje u označeno stanje. Neka je E neki konačan izraz. Neka je F isto neki konačan izraz koji se od izraza E razlikuje samo po jednoj operaciji pozivanja. Razmislimo o izračunu $V(E)$. Pretpostavimo da F ima dvije prazne susjedne oznake te da E dobijemo ako iz F maknemo jednu oznaku. Onda svaka oznaka u F ima vanjski prostor označen sa u i svaka oznaka odašilje m u iste divizije s kojima je susjedna. Budući da je $mm=m$ vidimo da su F i E jednaki. Sada pretpostavimo da E sadrži dvije ugniježdene oznake i da su te oznake maknute iz F . Tada je divizija s maksimalnom dubinom označena sa u , sljedeća divizija sa m i prostor izvan oznake od njih prima u . Stoga, micanje oznaka nema efekt na F . Pokazali smo da , ako se E i F razlikuju za jednu operaciju pozivanja ili prijelaza onda je $V(E)=V(F)$ .Lagano je za vidjeti i da je $V(M)=m$ i $V(U)=u$ gdje M predstavlja jednu oznaku, a U predstavlja neoznačeno stanje. Znači, ne postoji neki konačan broj operacija pozivanja i prijelaza koji bi transformirao M u U. Pokažimo to još na najjednostavnijem primjeru izraza s jednim pozivanjem i izraza s jednim prijelazom.





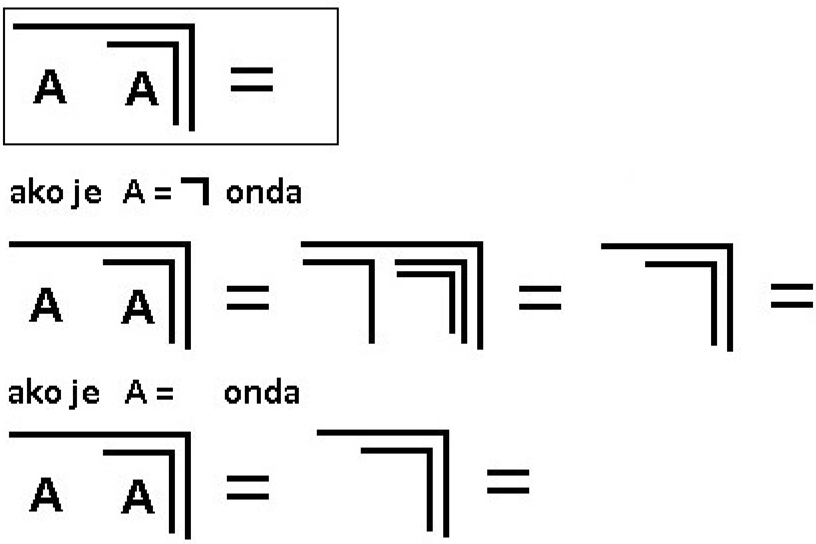
6. Primarna algebra

Sada kada su ustanovljeni zakoni prijelaza i pozivanja, možemo se dotaknuti teme primarne algebre i njezinih identiteta. Primarna algebra ima puno identiteta, a ovaj rad se u ovom dijelu dotiće nekim od njih. Instance koje su obrađene su :

- pozicija
- transpozicija
- refleksija
- generacija
- integracija
- iteracija
- okultacija

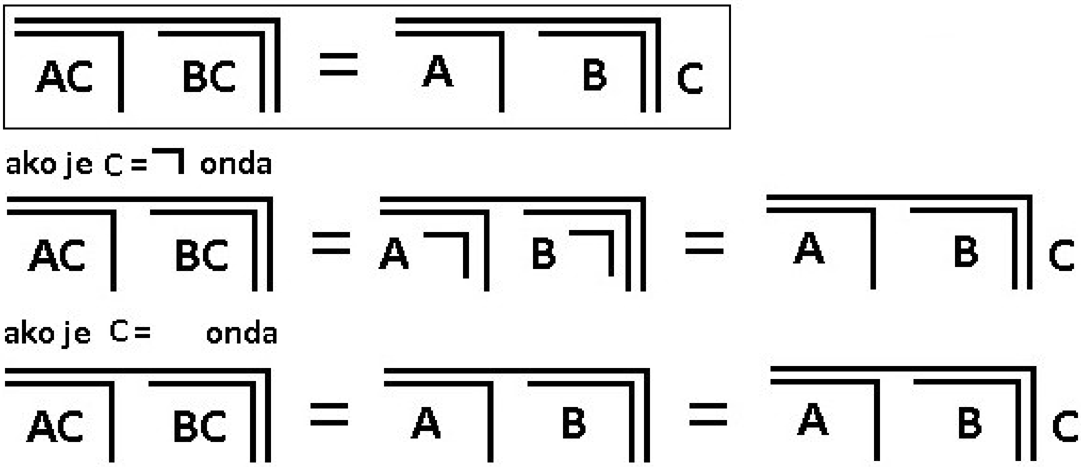
6.1.Pozicija

Pravilo pozicije kaže da neki izraz A s označenim izrazom A, zajedno pod oznakom su ekvivalentni neoznačenom stanju. Dokaz je prilično jednostavan, ako uzmemo pretpostavku da je A jednak označenom stanju prema zakonu prijelaza izraz je jednak neoznačenom. Isto se događa ako pretpostavimo da je A jednak neoznačenom stanju.



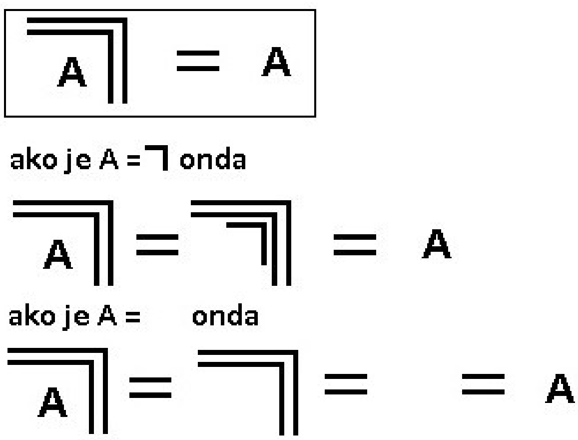
6.2.Transpozicija

Transpozicija kaže da označeni izraz AC s označenim izrazom BC, zajedno su pod izrazom ekvivalentni označenom izrazu A i označenom izrazu B pod izrazom, zajedno s izrazom C. Transpoziciju možemo shvatiti kao izlučivanje. Kod dokaza pretpostavimo da je C jednak označenom izrazu, pa zbog zakona prijelaza dobivamo traženi izraz. Ako pak pretpostavimo da je C jednak neoznačenom izrazu, dokaz je još lakši jer ni ne trebamo koristiti zakone prijelaza I pozivanja.



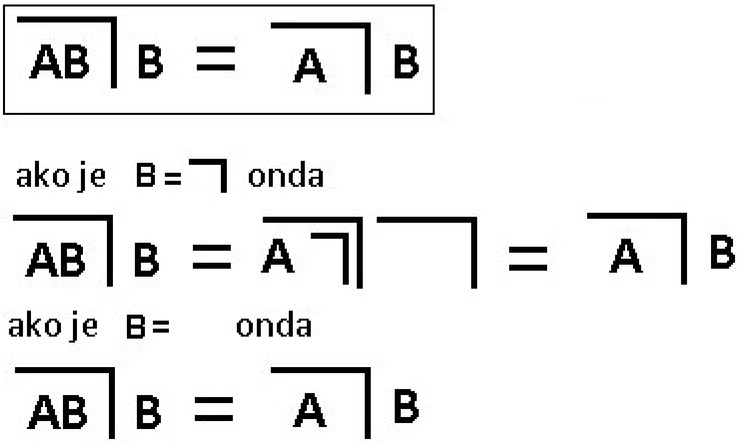
6.3.Refleksija

Refleksija kaže da ako imamo neki izraz A označen dva puta, taj izraz je jednak izrazu A. Dokaz je vrlo jednostavan, ako kažemo da je A označen izraz, prema zakonu prijelaza to je jednako izrazu A. Ako pak kažemo da je A neoznačen izraz, isto tako prema pravilu prijelaza , to je ekvivalentno izrazu A. Zaključujemo da izraz označen jednom ili pak neparnim brojem puta je ekvivalentan neoznačenom izrazu, dok izraz označen dva puta ili parnim brojem puta je ekvivalentan sam sebi.



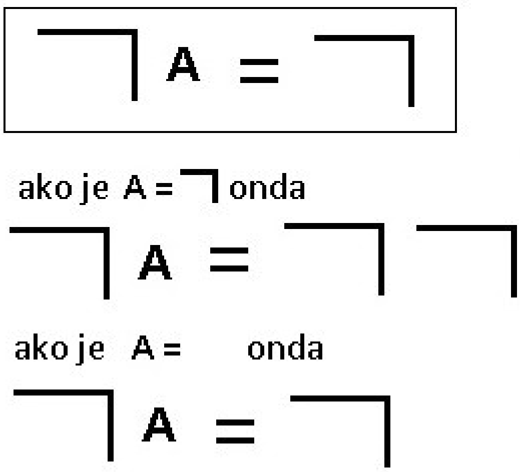
6.4.Generacija

Pravilo generacije je da je neki označeni izraz AB zajedno s izrazom B ekvivalentan označenom izrazu A zajedno s izrazom B. Ako uzmemo pretpostavku da je B jednak označenom izrazu, prema zakonu prijelaza dobijemo označeni izraz zajednom s označenim izrazom A, a budući da je označen izraz jednak našem B, dobijemo traženi izraz. Još lakši dokaz je ako pretpostavimo da je B neoznačen izraz, gdje samo zamjenimo B s neoznačenim izrazom.



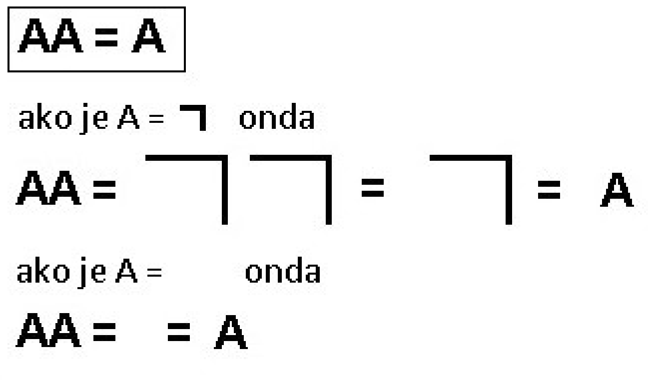
6.5.Integracija

Integracija kaže da ako imamo neki izraz A do označenog izraza, to je ekvivalentno označenom izrazu. Dokaz je jednostavan. Uzmimo da je izraz A jednak označenom izrazu. Po zakonu pozivanja, to je ekvivalentno označenom izrazu. Ako je A pak jednak neoznačenom izrazu, dokaz je sam po sebi jasan.



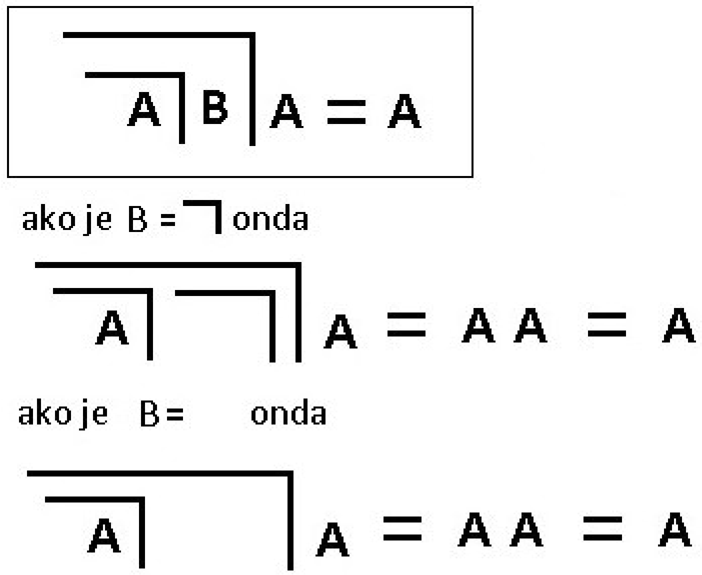
6.6.Iteracija

Pravilo iteracije je da je neki izraz AA ekvivalentan izrazu A. Prema zakonu pozivanja, ako pretpostavimo da je izraz A jednak označenom izrazu, dobijemo izraz A. Ako uzmemo da je A jednak neoznačenom izrazu, dobijemo neoznačeni izraz, što je ekvivalentno izrazu A.



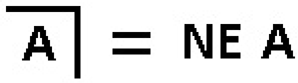
6.7.Okultacija

Oklutacija govori da su neki izraz pod oznakom A i izraz B zajedno pod oznakom i zajedno s izrazom A ekvivalentni izrazu A. Da bi to dokazali, uzmimo da je izraz B jednak označenom stanju. Pomoću pravila pozivanja i prijelaza dobijemo da je AA = A, a pogledamo li pravilo iteracije, možemo vidjeti da je to jednako A. Ista stvar je i ako pretpostavimo da je B jednak neoznačenom stanju.

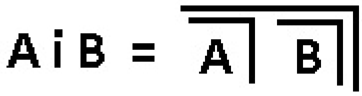


7.Elementarna logika

U ovom dijelu rada je pokazano kako se modelira elementarna logika pomoću zakone oblika. Za početak ćemo definirati stanja istinu i laž. Neka istina bude označeno stanje, a laž neoznačeno stanje kako je definirao i Louis H. Kauffman (1972). Iz toga slijedi da A pod oznakom je ekvivalento nečemu što nije A, to ćemo nazvati NE A.

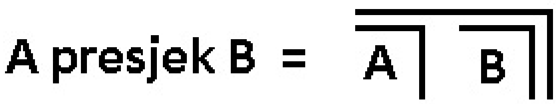


Uzimamo A ili B kao jukstapoziciju izraza AB. Prisjetimo se sada zakona pozivanja koji kaže da ovo vrijedi kao ILI gdje A ili B znači A ili B ili oboje. Uzmimo još riječ I i PODRAZUMIJEVA i imamo vokabular elementarne logike. Započnimo s I.



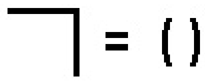
Već smo napomenuli da označeno stanje reprezentira istinu, a neoznačeno stanje laž. Iz navedenog izraza možemo vidjeti da je izraz označen ako i samo ako su oba A i B označena, tj. izraz je istinit samo ako su A istina i B istina. To možemo poistovjetiti s DeMorganovim zakonom. Prikažimo sad korištenje podrazumijevanja.

Iz navedenog izraza proizlazi da A podrazumijeva B ako i samo ako je A laž, a B istina tj. ako je A označen, a B neoznačen. Da bi završili s elementarnom logikom moramo obraditi jos pojmove unija i presjek. A UNIJA B je ekivivalentno AB, a A presjek B je ekvivalentno označenom stanju A i označenom stanju B, zajedno pod oznakom.



8.Zagrade

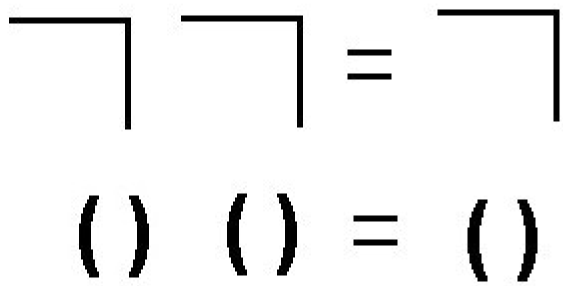
Svrha oznake je odvajanje stanja od drugog stanja. Tako da oznaku možemo poistovjetiti s jednim parom zagrada (Louis H. Kauffman, 1972). Uzmemo li to u obzir, cijelu aritmetiku i algebru Georga Spencera Browna bi mogli prepisati bez korištenja oznake, već korištenjem zagrada. Naravno, to nebi bilo previše efikasno, budući da nam oznaka pruža jednostavniji i lakši prikaz.



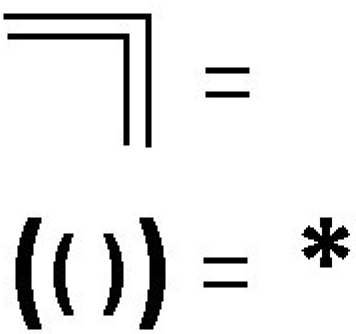
8.1.Zakoni oblika i zagrade

Pokušajmo prikazati zakone oblika pomoću zagrada. Na slici su prikazani zakoni pozivanja i prijelaza pomoću zagrada s napomenom da znak * predstavlja mjesto rezervirano za neoznačeno stanje i može se obrisati gdje je to prikladno. Kod prikaza zakona oblika zagradama, pretpostavljamo da su sve zagrade dobro strukturirane tj. da svaka otvorena zagrada ima svoju zatvorenu zagradu (William Bricken, 1986).

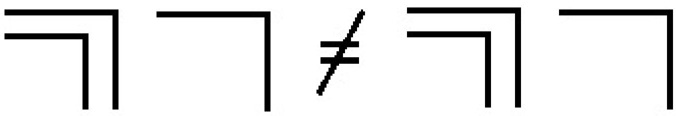
Zakon pozivanja :



Zakon prijelaza :



U ovom dijelu rada ćemo uzeti u obzir zagrade kao nekomutativne što znači da da neki izraz AB nije jednak izrazu BA tako da $()(())$ nije jednako $(())()$. Prikažimo to u zakonima oblika.



Prikažimo nekoliko izraza zagradama.

1. ( )
2. ( )( ), (( ))
3. ( ) ( ) ( ), (( )) ( ), ( ) (( )), ((( )))

Nabrojali smo nekoliko izraza izraženih s jednom, dvije ili tri zagrade. Neka C_n predstavlja izraz s n parovima zagrada. U ovom slučaju možemo reći da je $C_1=1$, $C_2=2$, $C_3=5$, a da smo nastavili, vidjeli bi da je $C_4=14$. To su Catalanovi brojevi i prvih par katalonskih brojeva su 1, 2, 5, 14, 132, 429, 1430, 4862, 16796 … (M.Gardner, 1976).Pogledajmo kako bismo formirali izraz koji prikazuje sumu svih mogućih zagrada.

P = * + ( ) + ( ) ( ) + (( )) + ( ) ( ) ( ) + (( )) ( ) + ( ) (( )) + (( ) ( )) + . . .

Ako koristimo sljedeće konvencije :

(*) = ( )

*A = A * = A

(A + B) = (A) + (B)

A + B = B + A

Onda je jasno vidljivo da P zadovaljava sljedeću jednadžbu ponovog unosa.

P = * + P(P).

Svaki izraz prikazan zagradama možemo izraziti kao X (Y) gdje su X i Y manji izrazi, po mogućnosti prazni. Ako je to tako onda vrijedi i da C_n zadovoljava sljedeće :

$$C_{n+1}=C_0C_n+C_1C_n+\ldots+C_{n-1}C_1+C_nC_0$$

gdje je $C_0=C_1=1$.

Na primjer,

$$C_4=C_0C_3+C_1C_3+C_2C_1+C_3C_2=5+2+2+5=14$$.

Definirajmo funkciju $C(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\dots$ tako da

$C(x)=1+x+2x^2+5x^3+14x^4+\dots$

$C(x)$ je generirajuća funkcija za Catalanove brojeve.

$C(x)$ se dobiva iz P tako da zamijenimo sve parove zagrada s zamjenskom varijablom x. Stoga slijedi da iz jednadžbe ponovog unosa za P vrijedi $C(x)=1+xC(x)^2$. Tada se ta kvadratna jednadžba rješi djelomičnim binomnim teoremom i dobiju se koeficjenti koji ispadaju da su dani formulom za C_n koju smo pokazali maloprije. Ali da bi pojasnio, evo prikaza izračuna.

Djelomični binomni teorem kaže da

$\sqrt{1+x}=1+C_1^{1/2}x+C_2^{1/2}x^2+C_2^{1/2}x^3+...$

Gdje je

$C_n^a=a(a-1)(a-2)...(a-n+1)/n!$

gdje je a bilo koji realan broj , a n bilo koji pozitivan cijeli broj. Rješimo sada kvadratu jednadžbu.

$C(x)=(1-\sqrt{1-4x})/2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n+1}C_{n+1}^{1/2}x^n$

$(-1)^n 2^{2n+1}C_{n+1}^{1/2}=C_n^{2n}/(n+1)$.

8.2.Anti-oznaka

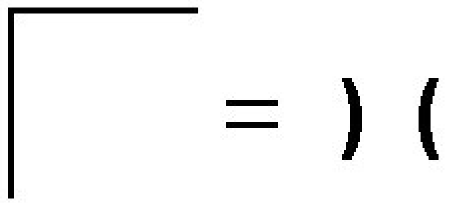
S druge strane, željeli bismo drukčije razumijevanje formule za Catalanove brojeve u terminima strukture samih zagrada. Ako pogledamo koeficjent $C(2n,n)$ u formuli za C_n vidimo da sugerira na to da izabiremo n stvari iz 2n stvari. Ustvari, takav izbor je struktura zagrada. Ako je neki izraz prikazan sekvencom lijevih i desnih zagrada, te zagrade možemo označiti kao L za lijevu zagradu i D za desnu zagradu. Na primjer,

(( )) ( ) = L L D D L D.

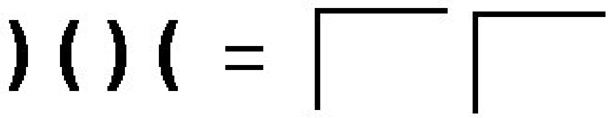
Tako možemo reći da je svaki izraz ima definiran svoj stupanj ovisno o tome koliko lijevih L zagrada ukoliko su zagrade pravilno strukturirane, tj. ako svaka lijeva zagrada ima svoj par desne zagrade. Ali što se događa kad imamo neki izraz tipa :

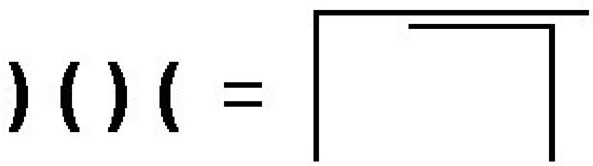
))) (((= D D D L L L.

Vidimo da se izraz sastoji od šest zagrada. Od toga su 3 zagrade lijeve , a tri desne, što je u redu ali raspored zagrada je pogrešan te se narušava pravilna struktura izraza. Iako nam se to čini pogrešnim, formula $C_n=(1/(n+1))C(2n,n)$ nam govori da bi trebali gledati veći skup svih sekvenci lijevih i desnih zagrada pa da bi vidjeli da za svaku lošu zagradu , negdje postoji par dobre zagrade koje zajedno čine skup zagrada. Znači da postoji šira domena za istraživanje. Neka S_n predstavlja skup svih lijevih i desnih zagrada i zovimo ga n-niz. Da bismo detaljnije proveli ovo istraživanje, definirat ćemo anti-oznaku (eng. *anti-mark*) koja predstavlja anti-zagradu “) (”.

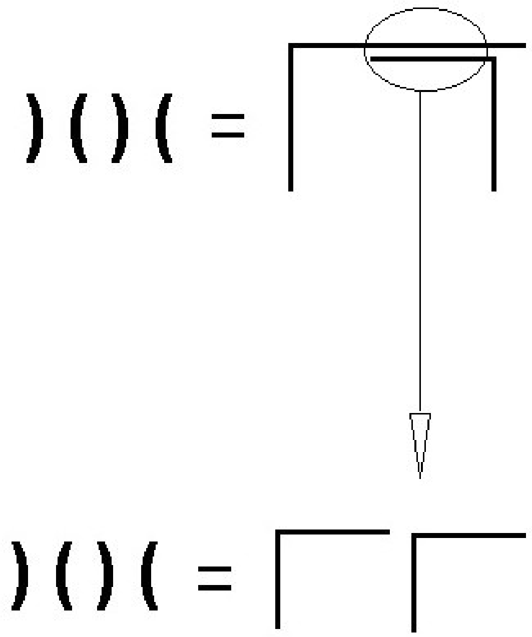


Pomoću anti-oznake lagano možemo prikazati n-nizove kao dobro formirane izraze koristeći I oznaku i anti-oznaku. Ali takve dekompozicije nisu jedinstvene.

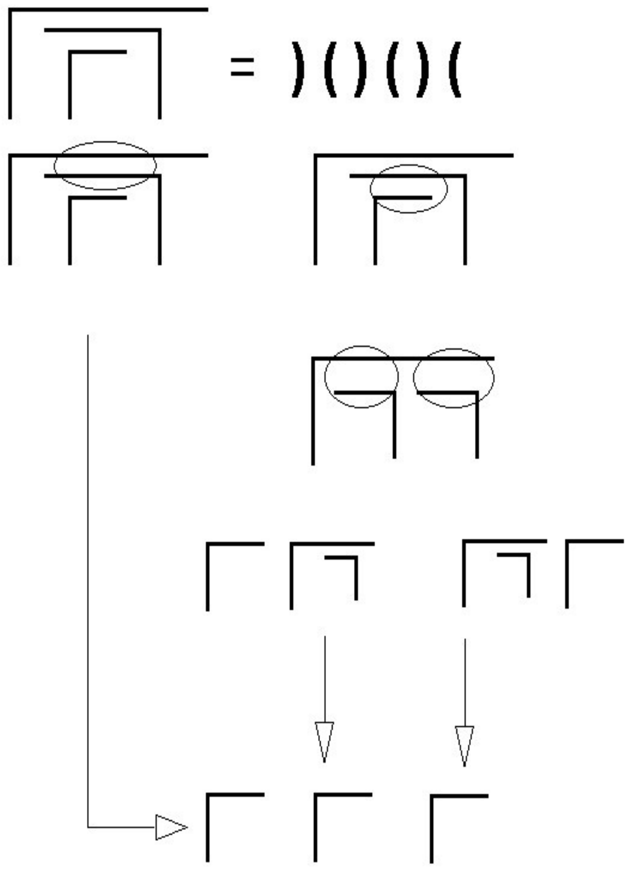




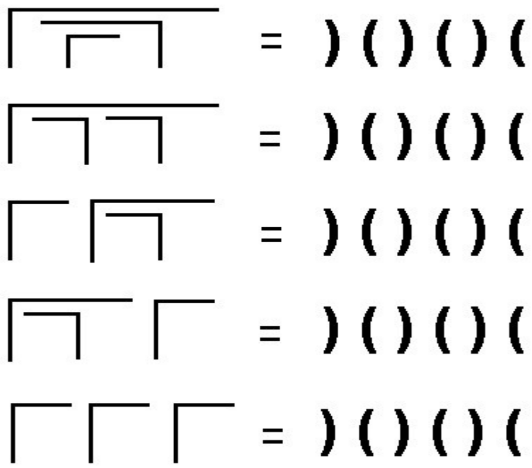
U ovom dijelu si možemo olakšati tako da anti-oznaku i oznaku nazivamo primarnim oznakama. Izraz iz primjera možemo prikazati na dva različita načina, jedan pomoću dvije oznake, i jedan pomoću oznake i anti-oznake. Ova dva prikaza su prilično slična, zapravo, da obrišemo dio horizontalne linije gdje su oznaka i anti-oznaka jednake na drugom primjeru te spojimo vertikalne linije, dobili bismo prvi.



Tu operaciju poništavanja i rekonstrukcije izraza ćemo nazivati poništavanje horizontalne granice. Da bi mogli izvršiti operaciju poništavanja horizontalne granice, dvije primarne oznake moraju biti susjedne jedna drugoj i moraju biti suprotnog tipa, znači oznaka i anti-oznaka.



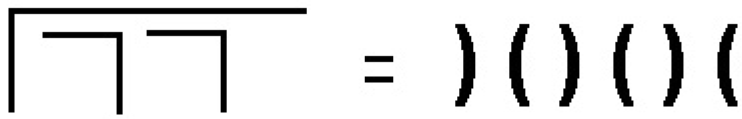
Iz ovog primjera možemo vidjeti da postoje 5 distinkcija izraza u dvije primarne oznake koje predstavljaju niz) ( ) ( ) (. One su napravljene jedna iz druge pomoću poništavanja horizontalne granice. Izrazi koje smo skupili kroz ponavljanje operacije poništavanja horizontalne granice su :



Ako dva izraza izražena s dvije primarne oznake opisuju isti n-niz, tada oni mogu biti dobiveni jedan iz drugoga sekvencom poništavanja horizontalne granice. Izraz u dvije primarne oznake može biti specijalan u dva slučaja :

1. Ako za svaku anti-oznaku u izrazu, sve oznake koje ju sadrže su isto anti-oznake.
2. Ako su u izrazu dvije antioznake, onda jedna sadrži drugu.

Od navedenih primjera jedino je jedan specijalan izraz i to je :



U knjizi Georga Spencera-Browna , *Laws of Form*, se spominje teorem koji govori da za svaki n-niz postoji jedinstveni specijalan izraz u dvije primarne oznake. Da bi dokazali taj teorem, uzmimo da je S neki n-niz. S smatramo nekom sekvencom lijevih i desnih zagrada (L , D). Tada je L = (, D =), DL =)(, LD = ( ). Pregledajmo S i precrtajmo sve pojave LD. Ono što nam ostane, nazovimo S_1 .Ponovimo proces za S_1 i rezultirajući niz nazovimo S_2 .Ponavljamo isti proces do nekog niza S_k gdje više nema pojave LD. Možemo zapaziti da S_k može biti ili prazan ili u obliku $S_k = DD...DL...L$ pa kažemo da je S_k specijalan izraz. Pogledajmo postupak na primjeru. Recimo da imamo neki n-niz :

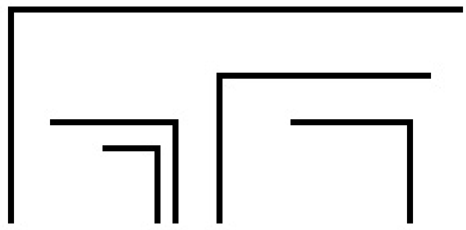
S =) (( ))) ( ) ((= D L L D D D L D L L

Tada , ako maknemo sve LD i zamjenimo ih sa [] za potrebe primjera , imamo

S_1 = D L [] D D [] L L

S_2 = D [[]] D L [] L .

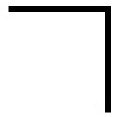
Na kraju možemo vidjeti da smo dobili specijalan izraz koji korespondira S_k .



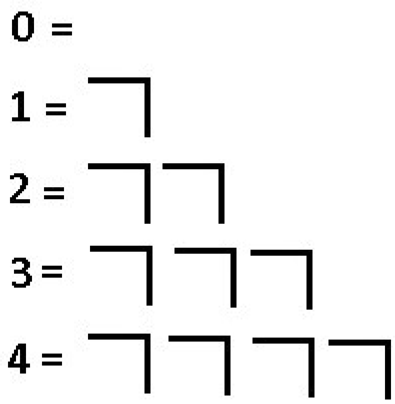
9.Formalna aritmetika

9.1.Prikaz brojeva

Pogledajmo sad malo formalnu aritmetiku prikazanu zakonima oblika. Istražit ćemo načine za prikaz brojeva i operacija s njima pomoću termina distinkcije. U početku nije bilo ničega, svijet bez distinkcija, praznina (eng *void*). Tada se iz ničega rađa sve(G.Spencer-Brown, 1969). Nazovimo tu tranziciju jedan i označimo ju s oznakom.

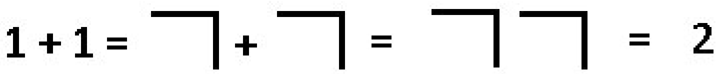


Ako jedan prikazujemo oznakom, sigurno možemo nekako prikazati i ostale brojeve, npr.

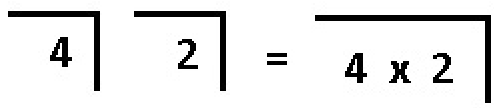


9.2.Zbrajanje i množenje

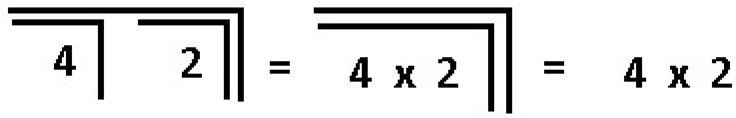
Zbrajanje možemo prikazati kao juktapoziciju formi : a + b = ab, pa tako možemo reći da je



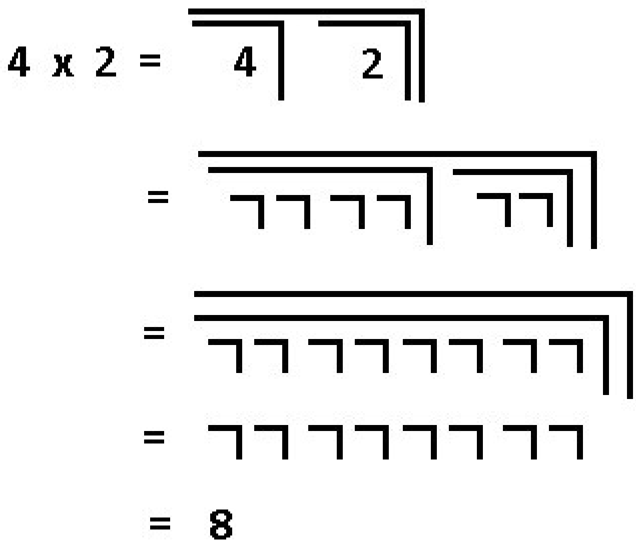
Množenje je malo kompliciranije. Kada množimo npr. 2 x 3, možemo uzeti 2 trojke i dodati ih zajedno ili možemo uzeti 3 dvojke i staviti ih zajedno. U oba slučaja radimo operator od jedne brojke i koristimo taj operator da dobijemo kopije druge brojke. Da vidimo kako taj izraz može formalizirati.



Neka označeni n predstavlja operator odgovarajuć broju n. Ako stavimo označeni m kraj operatora označenog n, kreiramo n kopija broja m ili m kopija broja n i stavljamo ih ispod oznake formirajući novi operator. Primjećujemo da je rezultat pod oznakom i htjeli bi tu oznaku maknuti. Taj problem rješavamo koristeći dodatnu oznaku u formi množenja koji se kasnije poništava prema zakonu prijelaza.

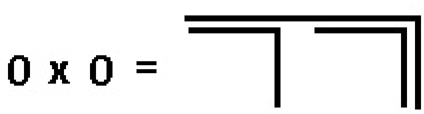


Cijelu aritmetiku bi mogli pisati u notaciji zakona oblika, pa pogledajmo kako bi to izgledalo.

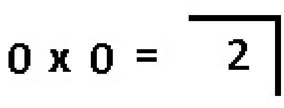


9.3.Operacije s nulom

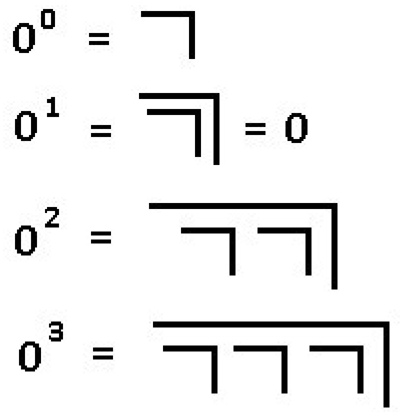
Vidjeli smo da se i brojevi i zbrajanje i množenje mogu lijepo prikazati u notaciji zakona oblika. Ali što se događa kod množenja s nulom. George Spencer Brown je lijepo rekao da zakonima oblika stvaramo nešto iz ničega. Pogledajmo jednostavni primjer množenja nula.



U oznakama nemam ništa budući da je nula reprezentacija baš ničega. Ne postoji razlog da reduciramo izraz 0 x 0 na samo 0, pa ono što vidimo je :



Pogledamo li malo bolje ovaj izraz, vidimo da množenjem dvije 0 dobijemo nešto što nije 0. Idemo još dublje pa pogledajmo potencije nule.



Iz priloženog vidimo da je 0^1 stvarno 0, budući da su dvije ugniježdene oznake stvarno jednake apsolutno ničemu, što ovdje shvaćamo kao 0. Ali ono što je najzanimljivije je da je 0^0 jednako nečemu : oznaci. Sjetimo se da smo u početku ovog poglavlja oznakom prikazali jedan. Znači, iz praznine smo dobili nešto. Ne možemo znati puno značenje toga što smo dobili, ali ostvarili smo ono što smo na samom početku ovog rada spomenuli, stvorili smo nešto iz ničega.

10.Zaključak

Nadam se da sam ovim radom prikazao barem osnovne koncepte zakona oblika. Kod izrade rada je korišten pristup vrlo sličan onome koji Louis H. Kauffman koristi u svojem radu *Laws of Form – An Exploration in Mathematics and Foundations.* Pristup kroz primjere, za razliku od pristupa Georgea Spencera Browna, čiji pristup je dosta apstraktan te se neki dijelovi moraju pročitati više puta da bi se razumijeli u potpunosti. Budući da je većina populacije, a tako i ja, najviše razvila svoj vizualni smisao za razumijevanje stvari i pojava, prikaz zakona oblika kroz primjere je najprimjereniji da prenesem svoje znanje o ovoj temi na čitatelja.

Što se tiče mog iskustva, mislim da je ova tema utjecala na moje mišljenje o svijetu oko mene barem u maloj količini. Tokom izrade ovog rada, pogledao sam na video na youtube-u gdje jedan čovjek govori o svom iskustvu nakon što je pročitao knjigu Georga Spencera Browna. Govori o raznim aspektima na koje zakoni oblika imaju utjecaj, barem po njegovom mišljenju, pa tako i o dodirnoj točci matematike i religije. Moram priznati da u početku to čudno zvuči, ali ako se sjetimo smisla zakona oblika, a to je stvaranje nečega iz ničega, praznine (“void”), moramo priznati da pomalo implicira na stvaranje svijeta. Postavljanjem distinkcije na prazninu, stvaramo nešto. I sve to samo upotrebom oznake.U navedenom videu, oznaka referencira nešto što stvara, ili nekoga tko stvara. Ne bih rekao da mi je George Spencer-Brown svojim radom promjenio život tako drastično kao čovjeku s videa, ali je difinitivno utjecao na moj pogled na svijet oko mene.

Literatura

- G.Spencer-Brown biography dostupno na http://en.wikipedia.org/wiki/G._Spencer-Brown.
- G.Spencer-Brown Vita, dostupno na http://www.lawsofform.org/gsb/vita.html.
- G. Spencer-Brown (1969) *Laws of Form.* London: The Julian Press, Inc.
- Louis H. Kauffman (1972) *Laws of Form – An Exploration in Mathematics and Foundations.* Createspace Independent Publishing Platform.
- T.Davis (2001) *Catalan Numbers,* dostupno na http://www.geometer.org/mathcircles
- M.Gardner (1976) *Mathematical games, Catalan numbers : an integer sequence that materializes in unexpected places*. Scientific American.
- Kelly LaFluer (2011) *Russell's Paradox.* Dostupno na http://scimath.unl.edu/MIM/files/MATExamFiles
- A.D.Irvine (2009) *Russell's Paradox.* Dostupno na http://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox/
- Charles Ormsby (2005) *Basic Rules of Algebra, Algebric Fractions, Laws of Exponents, and Roots/Radicals*. Dostupno na http://faculty.uml.edu/rbrent/128
- EtherDais (2014) *An Algebra of Forms* I. Dostupno na https://onarbor.com/work/158/an-algebra-of-forms-i
- Bobby Matherne (1999) *A READER'S Journal - Laws of Form* . Dostupno na http://www.doyletics.com/arj/lofmart.html
- s.n. (1996) *Formal Formulations : Non-numerical Arithmetics.* Dostupno na http://www.xenodochy.org/formal/fs_aritx.html
- F.Heylighen (1997) *Distinction*. Dostupno na http://pespmc1.vub.ac.be/DISTINCT.html
- Ranulph Glanville (s.a.) *The Self and the Other : The purpose of distinction.* Dostupno na http://www.univie.ac.at/constructivism/papers/glanville/glanville90-selfother.pdf
- William Bricken (1986) *Distribution is not axiomatic*. Dostupno na http://www.wbricken.com/pdfs/01bm/02logic/01transforms/04distribution.pdf