

Tomislav Malvić

## **GEOLOGIJA LEŽIŠTA FLUIDA**

# **UPUTE ZA UPORABU PLANIMETRA**

(inačica 1,0)



**RGNF**

Rudarsko-geološko-naftni fakultet

Zagreb, siječanj 2015.

Autor

Dr. sc. Tomislav Malvić, izv. prof., nositelj kolegija

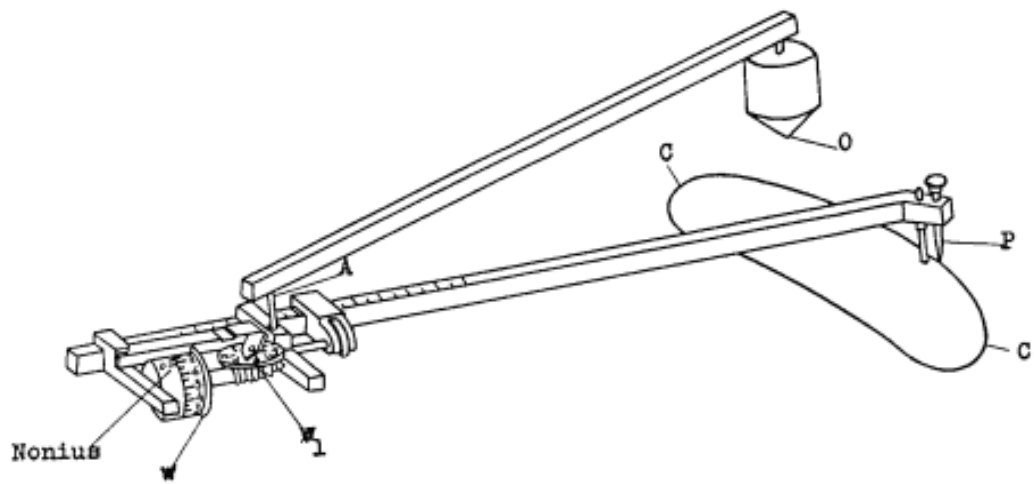
**INTERNA SKRIPTA  
IZ VJEŽBI  
GEOLOGIJE LEŽIŠTA FLUIDA**

Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet  
2015.

## 1. UVOD U POJAM PLANIMETRA I PLANIMETRIRANJA POVRŠINA

Svi praktični pristupi procjeni površina i volumena struktura u sebi sadrže aproksimacijske metode, odnosno funkcije kojima se postiže odgovarajući prostorni prikaz ili numerički izračun. Kod izračuna površina, kao osnove i za procjenu volumena omeđenog njima, numerička tehnika sastoji se od izračuna konačnog integrala  $\int_a^b f(x) dx$ , odnosno podjele zatvorenog intervala realnih brojeva ispod krivulje na konačno mnogo dijelova. Takva numerička integracija se temelji na polinomnim aproksimacijama, vrlo često Lagrangeovoj interpolacijskoj polinomnoj metodi koja je temelj za uporabu dviju čestih integracijskih metoda. To su trapezno i Simpsonovo pravilo, kao numeričke integracijske metode (npr. **Atkinson, 1989** or **Quarteroni, Sacco and Saleri, 2000**), kojima se integralom aproksimira vrijednost  $f(x)$  u konačnom broju točaka 'x'. Obje metode se često primjenjuju za izračune volumena pravilnih geoloških struktura, najčešće antiklinala gdje su volumeni često povezani s pornim prostorom dostupnim za nakupljanje ugljikovodika. Nadalje, te jednadžbe mogu poslužiti i za izračun kod manje ili više nepravilnih struktura (npr. **Malvić & Novak Zelenika, 2014**), kada volumen ne može biti računat analitičkom integracijom.

Planimetar je instrument (**slika 1**) koji omogućava jednostavno određivanje površine proizvoljnih likova, praćenjem linije koja omeđuje takav lik. Pri početku i na kraju planimetriranja očitavaju se relativne vrijednosti na obodu kotačića (**slika 1**) koji bilježe pomicanje slobodnoga kraka, odnosno šiljka na njegovom vrhu. Nakon bilježenja ta dva očitavanja njihova razlika se, obzirom na mjerilo, pretvara u apsolutnu vrijednost površine. Najčešće se koristi polarni planimetar kod kojeg polarni krak rotira oko nepomične točke (pola) na vrhu kraka s utegom. Postoji i planimetar kod kojeg je polarni krak zamijenjen parom kotača, no on ovdje nije opisan. Danas se planimetar rjeđe koristi zbog uporabe računalnih numeričkih metoda, no još uvijek omogućuje brzi i pouzdan rad s kartama koje nisu digitalizirane i to u geologiji, geodeziji, brodogradnji i još nekim znanstvenim poljima.



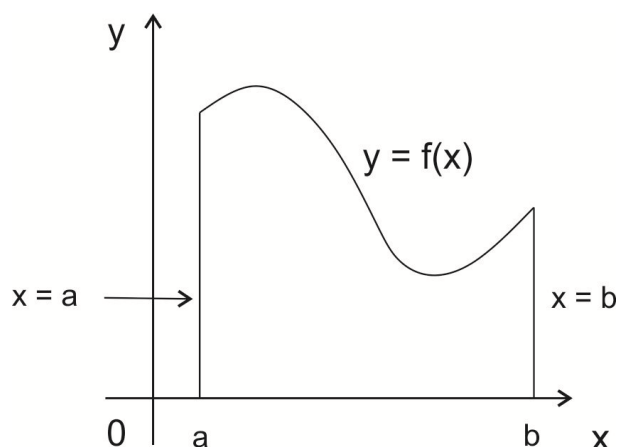
**Slika 1:** Skica planimetra (poveznica 1)

## 2. NUMERIČKA INTEGRACIJA UPORABOM TRAPEZNOG I SIMPSONOVOG PRAVILA

Izračun volumena 'V' nekoga tijela čije se granice pružaju od 'x=a' do 'x=b' uporabom određenog integrala  $V = \int_a^b A(x)dx$  na površini 'A(x)' koja je ujedno presjek ravnine paralelne s bazom tijela zahtjeva da je u svakoj točki poznat  $x \in [a, b]$ . Često je integrand 'A' određen tabličnim vrijednostima, a u tom slučaju približna vrijednost određenog integrala može se izračunati numerički bilo jednadžbama ili uporabom planimetra kao mehaničke naprave za mjerenje zatvorenih površina.

### 2.1. Trapezno pravilo

Želi se odrediti integral  $\int_a^b f(x)dx$  te ako je funkcija pozitivna i kontinuirana integral predstavlja površinu omeđenu krivuljom  $y = f(x)$  te linijama  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  (slika 2).



**Slika 2:** Procjena volumena zbrajanjem volumena niza malih valjaka na intervalu a-b  
(modificirano prema **Waltham, 2000**; preuzeto iz **Malvić et al., 2014**)

Prva aproksimacija može se napraviti tako da se odsječak krivulje  $y = f(x)$  između 'x=a' i 'x=b' zamijeni ravnom crtom, tj. polinomom 1. stupnja. Tada se površina aproksimira trapezom s vrhovima u točkama (a,0), (b,0), (a,f(a)) i (b,f(b)) te vrijedi:

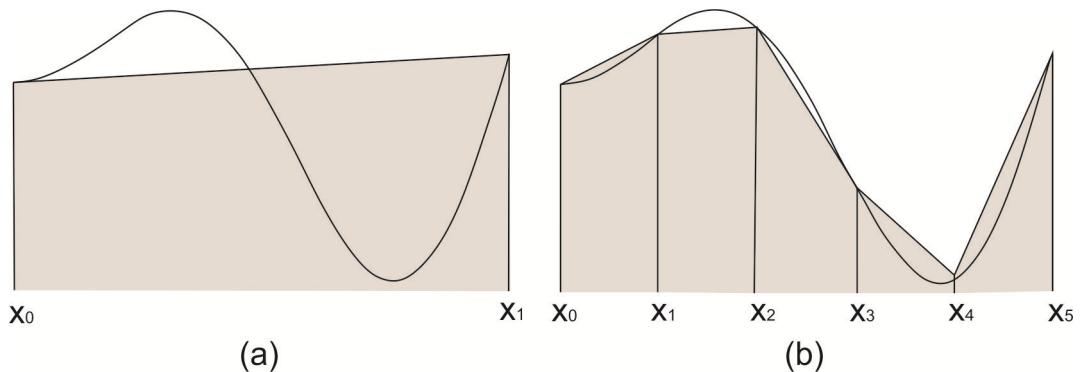
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} (b-a) (f(a) + f(b)).$$

Bolja točnost postiže se podjelom  $[a,b]$  u 'n' podintervala te ponovnom uporabom trapeznog pravila (**slika 3**) u svakom podintervalu. Ako se primjeni jednolika raspodjela gdje vrijedi ' $a=x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$ ' uz korak ' $h=(b-a)/n$ ' dobiva se sljedeća ukupna aproksimacija:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (f(x_{i-1}) + f(x_i)),$$

odnosno,

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{trapez} = \frac{h}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].$$



**Slika 3:** Trapezno pravilo s jednim (pod)intervalom (a) i s pet podintervala (b)  
(poveznica 3; preuzeto iz **Malvić et al., 2014**)

Označimo li drugu derivaciju od  $f$  ( $f^{(ii)}$ ) kao kontinuiranu na  $[a,b]$  tada je pogreška procjene izražena kao:

$$|I - I_{trapez}| \leq \frac{1}{12} (b-a) h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

## 2.2. Simpsonovo pravilo

Razlikuje se od trapeznog pravila u stupnju aproksimacijskog polinoma. Tu se vrijednost integrala  $\int_a^b f(x) dx$  aproksimira ( $y = f(x)$ ) parabolom, tj. polinomom 2. stupnja koji prolazi kroz sljedeće točke  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$ ,  $(c, f(c))$  i vrijedi  $c = \frac{1}{2}(a + b)$ . Iz toga proizlazi:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{6}(b-a) \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

U radu se interval  $[a, b]$  obično dijeli u '2n' podintervala ( $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$ ) jednake dužine ( $h = (b-a)/2n$ ), kako je prikazano na **slici 4**. Ako se Simpsonovo pravilo primijeni na uzastopne parove intervala  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  tako da vrijedi  $i=1, \dots, n$  dobiva se:

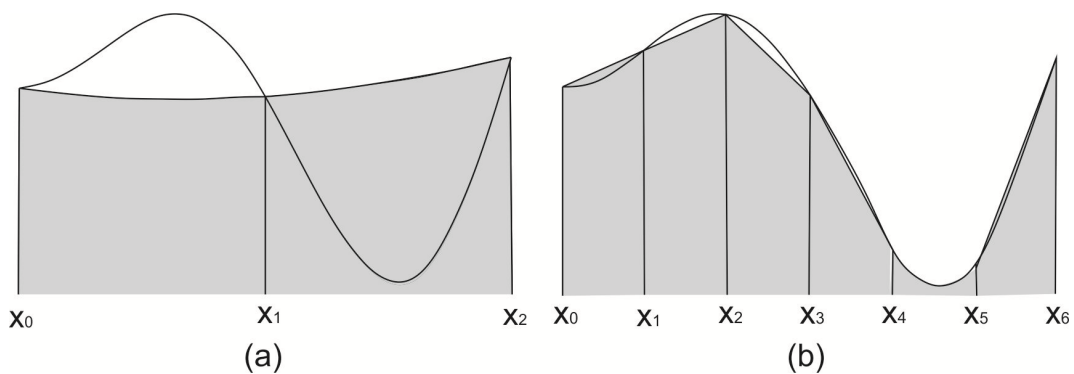
$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \frac{1}{6}(x_{2i} - x_{2i-2}) [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})],$$

odnosno,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (x_{2i} - x_{2i-2}) [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})],$$

to jest:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{Simp} = \frac{h}{3} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right].$$



**Slika 4:** Simpsonovo pravilo s dva podintervala (a) i s  $2n = 6$  podintervala (b)  
(poveznica 3; preuzeto iz **Malvić et al., 2014**)

Pogrješka se definira tako da se uporabi četvrta derivacija od 'f' ( $f^{(iv)}$ ) na kontinuiranom intervalu  $[a,b]$  te ona iznosi:

$$|I - I_{Simp}| \leq \frac{1}{2880} (b - a) h^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{(iv)}(x)|.$$

Tako ona ovisi o vrijednosti  $h^4$  (za razliku od trapeznog gdje je  $h^2$ ). Iz jednadžbe je vidljivo kao pogrješka ovisi o ' $f^{(iv)}$ ', a kako je četvrta derivacija polinoma do 3. stupnja 0, izračun Simpsonom se može smatrati praktički točnim.



### 3. PRIMJENA TRAPEZNE I SIMPSONOVE JEDNADŽBE

Geološke strukture, kada je to moguće i potrebno, aproksimiraju se pravilnim geometrijskim tijelima koja pripadaju skupini prizmatoida. To je poliedar čiji svi vrhovi leže u jednoj od dvije paralelne ravnine te u svakoj od njih broj im je jednak. Ako su im bočne plohe paralelogrami ili trapezoidi tijelo je prizmoid. Takvo tijelo može biti presječeno poligonom na polovici udaljenosti od baza, te određeno okomitom visinom između njih. Obitelj prizmoida sadrži niz oblika poput piramida, prizmi i drugih (npr. **Nelson, ed., 1998**). Volumen prizmatoida određen je jednadžbom:

$$V = \frac{1}{6}h(A_1 + A_2 + 4M),$$

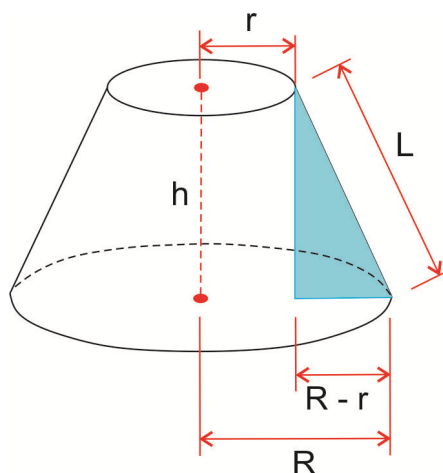
Gdje su:

$h$  - visina,

$A_1, A_2$  - površine baza,

$M$  - površina simetralnog presjeka.

Dokaz ove jednadžbe može se naći, npr., u radovima **Day Bradley (1979)** ili **Halsted (1907)**. Kao jedno od tijela koje pripada toj geometrijskoj obitelji je i krnji stožac (**slika 5**).



**Slika 5:** Pravilni krnji stožac (poveznica 2; preuzeto iz **Malvić et al., 2014**)

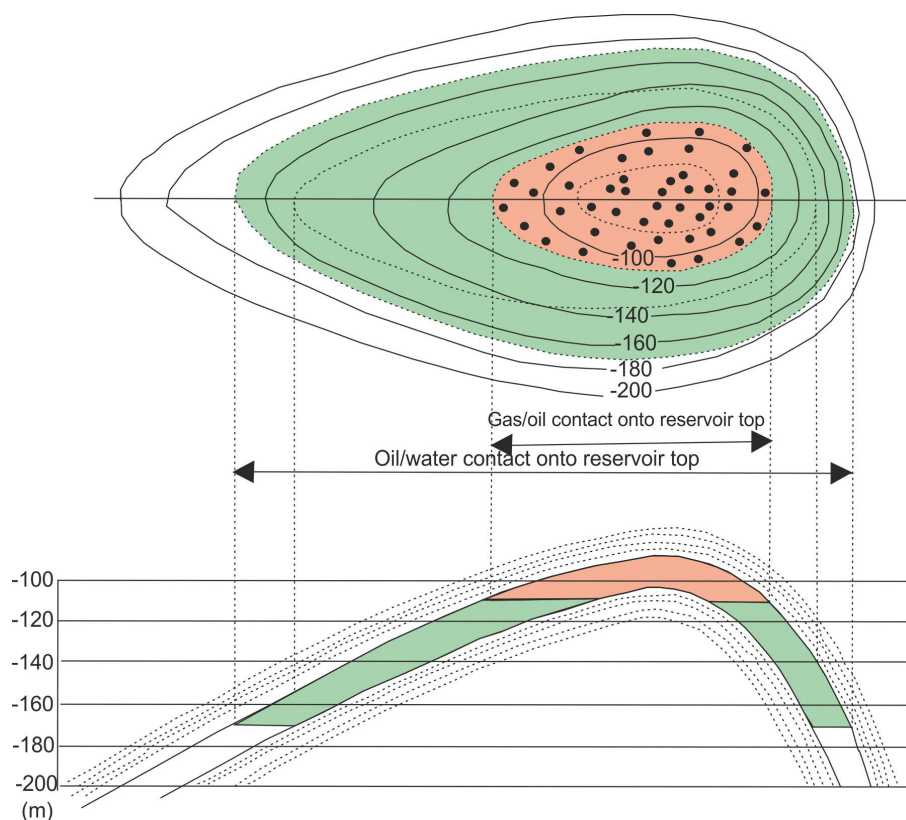
Budući se površine presjecišta mogu prikazati kvadratnom funkcijom (polinomom 2. stupnja, parabolom), volumen takvoga tijela može se izračunati prizmoidalnom jednadžbom (jer to vrijedi za sva takva tijela). U tom slučaju, ako je 'R' radijus donje, a 'r' gornje baze, a 'h' visina između njih, površine baza i simetralnog presjecišta mogu se izraziti kao:

$$A_1 = R^2\pi, \quad A_2 = r^2\pi, \quad M = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \pi.$$

Dodajući te izraze u jednadžbu volumena prizmatoida dobiva se:

$$V = \frac{1}{3}h(R^2 + r^2 + Rr)\pi.$$

Ta jednadžba točno računa volumene svih takvih tijela gdje se površine baza i presjecišta mogu izraziti polinomnom funkcijom do 3. stupnja. Nadalje, sve pravilne (npr. **Slavinić, 2012**) pa i dio nepravilnih antiklinala (**Malvić et al., 2014; slika 6**) mogu se aproksimirati krnjim stošcem.

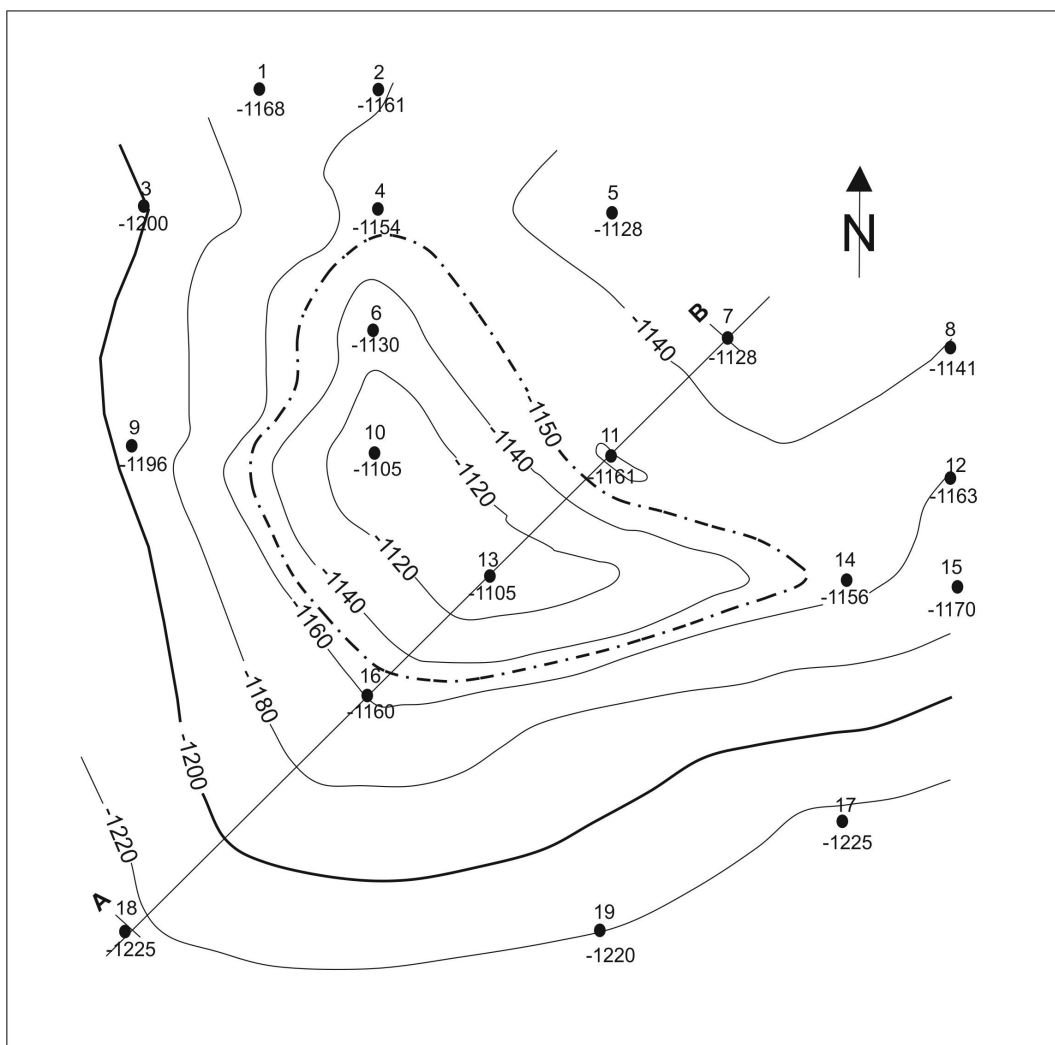


**Slika 6:** Nepravilna brahiantiklinala s različitim nagibima (iz **Malvić et al., 2014; Malvić i Novak Zelenika, 2014**, preuzeto iz **Malvić i Velić, 2008; Brod i Jeremenko, 1957**).

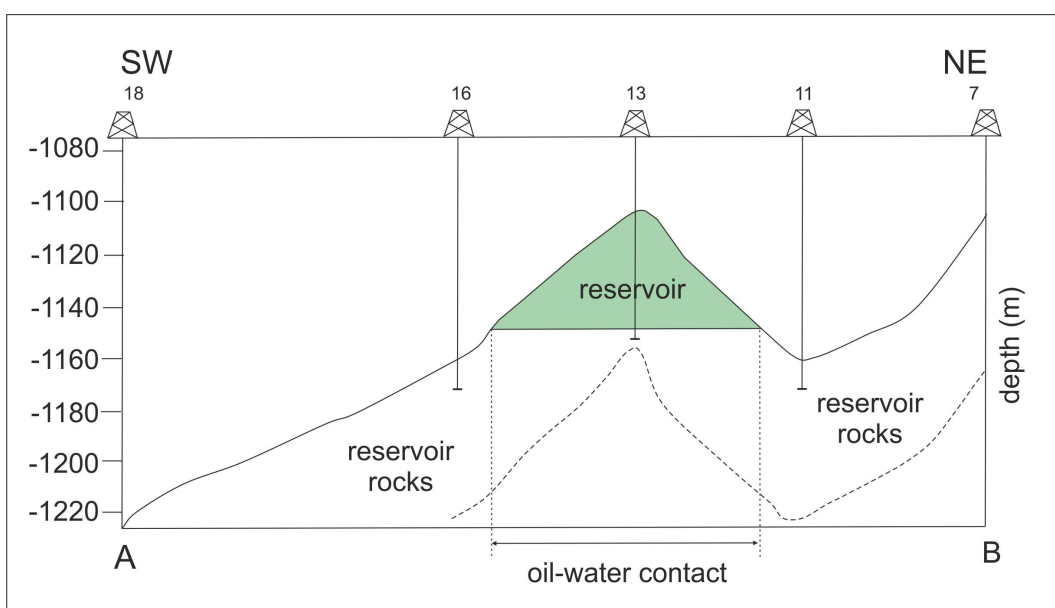
Prizmoidalne jednadžbe se mogu s “prihvatljivom pogrješkom” uporabiti za sve takve slučajeve izračuna volumena, a u nekim slučajevima se vrlo nepravilna tijela mogu rastaviti na niz pravilnijih za koje će pogrješka biti u dogovorenim granicama prihvatljive. Pod “prihvatljivim” iznosom pogrješke uzima se veličina koja zadovoljava uvjete zadatka zašto se volumen računa. Kod izračuna volumena ležišta ugljikovodika takva margina je 20 % i postavlja se upravo kako bi se mogli računati volumeni tijela poput naglašenih brahiantiklinala, antiklinala se različitim nagibima krila, uzdignutih dijelova monoklina, dijelova prebačenih krila bora ili rasjednutih antiklinala. Navedenih 20 % se kvantitativno odnosi na apsolutnu razliku volumena dobivene Simpsonovom i trapeznom jednadžbom, a koja ne smije biti već od toga iznosa.

$$|I_{trap} - I_{Simp}| \leq 0.2I_{Simp}$$

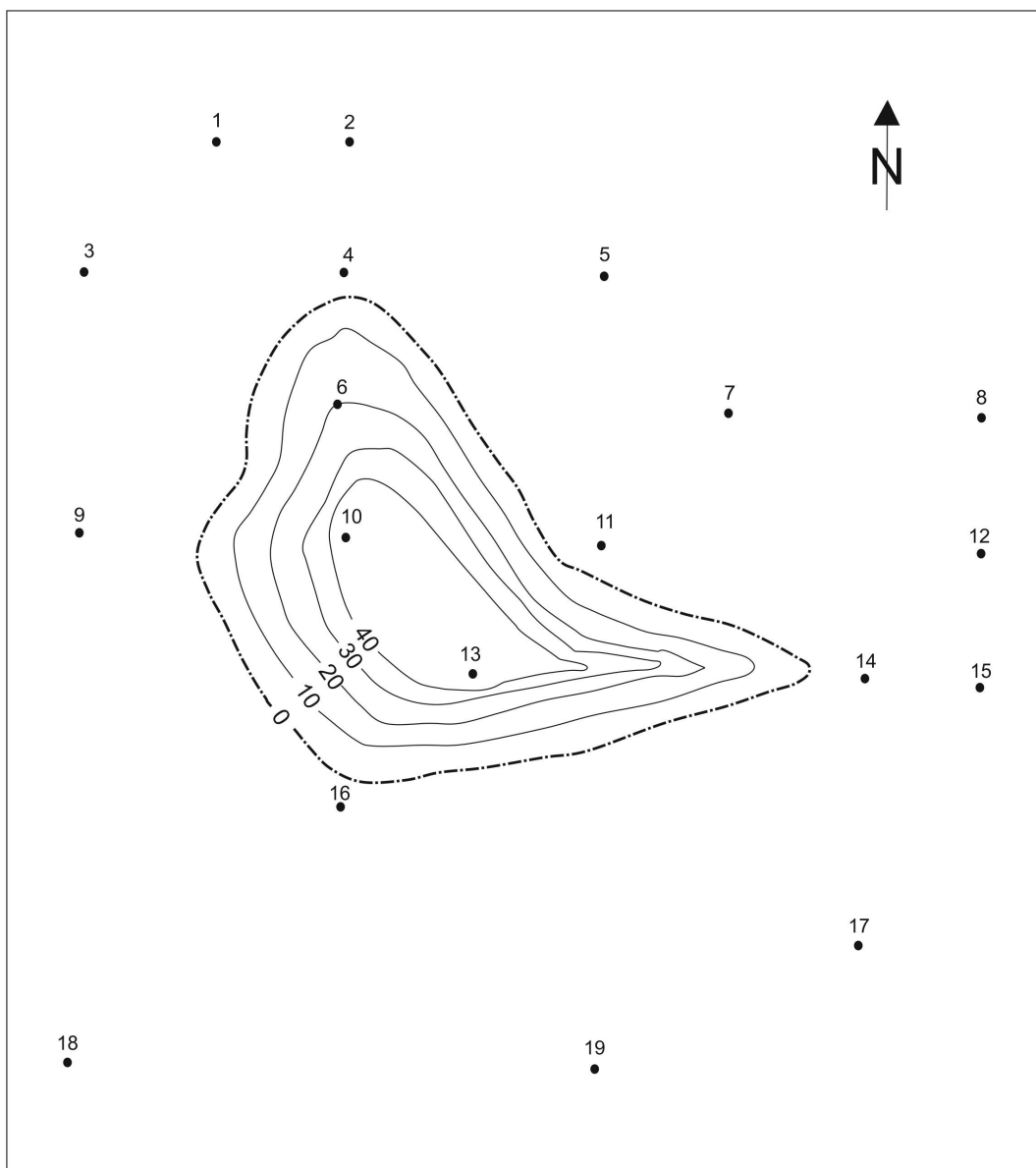
Ako je uvjet razlike volumena zadovoljen, tada je cijeli izračun ispravan i kao volumen strukture uzima se onaj dobiven Simpsonovom jednadžbom. Primjer numeričkog izračuna vezan je uz ležište prikazano **slikama 7, 8 i 9**, na kojima je opisano ležište nafte u nepravilnoj antiklinali izdignutoj u dijelu monokline kao regionalne strukture višega reda.



**Slika 7:** Strukturna karta po krovini ležišta te ucrtanim kontaktom nafte i vode (ekvidistancija je 20 m; ; preuzeto iz **Malvić et al., 2014**)



**Slika 8:** Geološki profil duž strukturne karte na **slici 10** (preuzeto iz **Malvić et al., 2014**)



**Slika 9:** Karta izopaha ležišta (ekvidistancija je 10 m; preuzeto iz **Malvić et al., 2014**)

### 3.1. Izračun volumena u slučaju parnog broja odsječaka (neparnog broja izopaha)

U danom primjeru (**slika 9**) interpolirano je 5 izopaha, a glede ležišta pretpostavljeno kako zadovoljava uvjet razlike volumena od 20 % uporabom trapezne i Simpsonove jednačbe. Stoga je aproksimirano krnjim stošcem. Površina svake izopahe, dobivena planimetrom, iznosi:  $a_0=1143200 \text{ m}^2$ ,  $a_1=238000 \text{ m}^2$ ,  $a_2=157200 \text{ m}^2$ ,  $a_3=95600 \text{ m}^2$ ,  $a_4=58800 \text{ m}^2$ . Ekvidistancija je 10 m, pa uporaba Simpsonove jednačbe daje volumen:

$$V_{Simp} = \frac{h}{3} (a_0 + 4a_1 + 2a_2 + 4a_3 + a_4) = 9502667 \text{ m}^3.$$

Međutim postoji još dio antiklinale, tjeme ili tzv. „kapa“, koji naliježe na gornju bazu krnjeg stošca (**slika 9**, područje unutar izopahe  $a_4$ ). On nije uključen u prethodni izračun te se računa kao srednja vrijednost rezultata uporabe dviju jednadžbi za volumene „kape“ ( $V_{top}$ ). Vizualno je procijenjeno da visina od zadnje izopahe do tjemena strukture iznosi 5 m ( $h_4=5$  m). Pripadajuće jednadžbe daju sljedeće vrijednosti:

$$V_{top1} = \frac{h_4 a_4}{3} = 98000 \text{ m}^3, \quad V_{top2} = \frac{h_4^3 \pi}{6} + \frac{a_4 h_4}{2} = 147065 \text{ m}^3.$$

Njihova srednja vrijednost je:

$$V_{top} = \frac{1}{2}(V_{top1} + V_{top2}) = 122533 \text{ m}^3.$$

Zbrajanjem volumena krnjega stošca i „kape“ dobiva se konačan volumen cijele strukture:

$$V = V_{Simp} + V_{top} = 9625200 \text{ m}^3.$$

Volumen „kape“ uvijek pridonosi tek neznatno ukupnom volumenu, tj. u iznosu od nekoliko postotaka. Taj udjel ovisi o visini od zadnje izopahe do tjemena, te odnosu površina najdublje i najpliće izopahe. U prikazanom slučaju „kapa“ sadrži samo 1,3 % ukupnoga volumena.

Na kraju slijedi provjera može li se aproksimacija ležišta krnjim stošcem prihvatiti ili ne. To podrazumijeva uporabu trapezne jednadžbe na istim podacima, uz napomenu kako ta jednadžba nema dodatak kojim bi se izračunao volumen „kape“ strukture. Time se dobiva sljedeći volumen:

$$V_{trap} = \frac{h}{2}(a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) = 10918000 \text{ m}^3.$$

Usporedbom je vidljivo kako razlika volumena izračunatih Simpsonovom i trapeznom jednadžbom iznosi oko 13 %. Kako je ranije postavljen uvjet da ona ne smije prelaziti 20 %, račun volumena se prihvaća i njime se, prema potrebi, može nastaviti proračun svih ostalih ležišnih varijabli (šupljikavosti, zasićenja, udjela litologija itsl.).

### 3.2. Izračun volumena u slučaju neparnog broja odsječaka (parnog broja izopaha)

U slučaju kada je broj interpoliranih izopaha paran, među njima postoji neparan broj članova. Time se mijenja oblik Simpsonove jednadžbe koji se koristi i on glasi:

$$V_s = \frac{h}{3}(a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 2a_3 + \dots + 2a_{n-2} + 4a_{n-1} + 2a_n)$$

Na primjer u slučaju ekvidistancije  $h=10$  te izopaha s vrijednostima  $a_0=1143200 \text{ m}^2$ ,  $a_1=238000 \text{ m}^2$ ,  $a_2=157200 \text{ m}^2$ ,  $a_3=95600 \text{ m}^2$ ,  $a_4=58800 \text{ m}^2$ ,  $a_5=31200 \text{ m}^2$  volumen krnjeg stošca glasi:

$$V_s = \frac{h}{3}(a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 4a_4 + 2a_5)$$

$$V_s = \frac{10}{3}(1143200 + 2 \cdot 238000 + 4 \cdot 157200 + 2 \cdot 95600 + 4 \cdot 58800 + 2 \cdot 31200)$$

$$V_s = \frac{10}{3} \cdot 2736800$$

$$V_s = 9122666,667$$

Važno je primijetiti da, iako je broj odsječaka veći negoli u primjeru s njihovim parnim brojem, ukupan volumen je nešto manji ( $9122667$  nasuprot  $9625200 \text{ m}^3$ ). Iako je to na prvi pogled krivo i nelogično, treba imati na umu kako su oba rješenja aproksimacije. U primjeru s parnim brojem odsječaka ono očito malo precjenjuje stvarni volumen, a kod neparnog broja podcjenjuje. Promjena u ostalom dijelu postupka nema. Oba slučaja najveću preciznost imat će kod pravilnih antiklinala (doma) ili sinklinala (reverzna primjena aproksimacije).

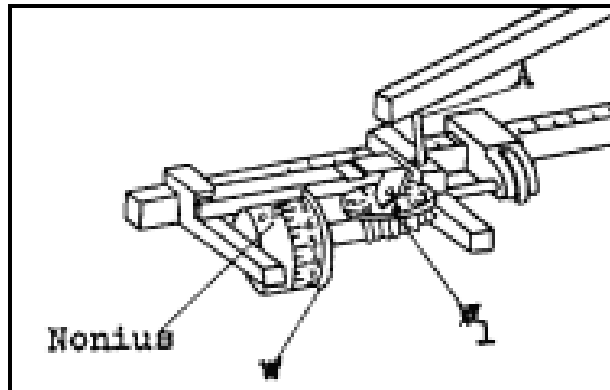
## 4. OČITANJA VRIJEDNOSTI NA PLANIMETRU I PRETVORBA U POVRŠINE

Shematski izgled planimetra prikazan je na **slici 1**. Kod pridobivanja vrijednosti micanjem kraka polarnog planimetra, važno je da kut između krakova ne prelazi (barem ne prečesto)  $120^\circ$ , jer se time znatno umanjuje točnost. Uzrok tomu je u reverznom pomicanju kotačića uređaja. Samo očitavanje vrijednosti vezano je uz skale označene na tri kotačića (**slika 10**), tj. podioke, kojih ima uvijek 10, a razdvojeni su brojevima 0-9. Kod toga se uvijek treba držati sljedećih pravila:

1. Odabere se površina koju želimo planimetrirati, odnosno točka na njoj. Postupak traje sve dok se po liniji, vodeći vrh polarnog kraka, ponovno ne vratimo u tu točku.
2. Brojevi se očitavaju dva puta. Prvi put prije početka mjerenja u početnoj točki, drugi put nakon mjerenja u toj istoj točki.
3. Svako očitavanje uvijek će imati četiri znamenke, uz napomenu da i one početne mogu biti 0.
4. Prva znamenka očitava se na najvećem, vodoravnom kotačiću (**slika 10**, broj 1). Mjeri se između koje dvije znamenke pokazuje strjelica i odabire se ona manja (**1. znamenka**).
5. Druga znamenka očitava se na okomitom kotačiću (**slika 10**, oznaka W) bližem vodoravnom. Promatra se gdje nula s drugoga okomitog kotačića (**slika 10**, nonius) pokazuje, tj. između koja dva ugravirana broja. Odabire se manji i to je **2. znamenka**.
6. Treća znamenka ponovno se očitava na istom kotačiću. Gleda se gdje 0 s noniusa pokazuje, ali sada između kojih dviju crtica na podskali smještenoj između dva ugravirana broja. Odabire se crtica bliža manjem broju i brojeći zapisuje njezina vrijednost (može biti 0-9). To je **3. znamenka**.
7. Četvrtak znamenka se očitava na noniusu (**slika 10**). Traži se koja crtica se podudara s bilo kojom crticom na suprotnom okomitom kotačiću. To se događa samo s jednom od njih deset. Kada se odredi koja je to, izbroji se njezin redni broj u nizu (ona može biti 0-9). Taj broj je **4. znamenka**.



S tih sedam koraka očitavanje je gotovo. Radi se dva puta, u istoj točki, prije i poslije mjerenja. Između te dvije vrijednosti računa se apsolutna razlika i dobije broj (u teoriji) između  $-/+ 1$  i 9999. Taj broj predstavlja relativnu površinu, no treba ga pretvoriti u apsolutnu vrijednost i izraziti u  $m^2$ .



**Slika 10:** Uvećani dio planimetra (prilagođeno s poveznice 1)

U kutiji svakog uređaja postoje konstante pretvorbe relativnih u apsolutne površine. Odabir ispravne konstante ovisi o mjerilu karte na kojoj je planimetrirana površina (1:5000, 1:10000 itsl.). Umnožak odgovarajuće konstante i relativne površine daje apsolutnu planimetriranu površinu izraženu u SI jedinicama,  $m^2$ .

## 5. ZAKLJUČAK

Izračun volumena geoloških struktura čest je dio izradbe različitih geoloških modela. Kada se radi bez uporabe programskih paketa koji strukture dijele u pravilne ćelije, ono najčešće uključuje uporabu mehaničkog uređaja nazvanog planimetar i vrlo je točno, posebice za pravilne strukture poput antiklinale ili sinklinale. Čak i kada se takav uređaj ne upotrebljava, poznavanje postupka numeričke integracije i aproksimacije nužnost je za svakog studenta ili inženjera koji je ikada računao opisane volumene, bilo u podzemlju ili na površini te bez obzira na metodu. Takvim znanjem izbjeći će se dobivanje velikih pogrešaka uporabom opisanog postupka, ali i razumijevanje izvora i iznosa pogreški kod uporabe drugih metoda za istu namjenu.

## 6. PUBLIKACIJE

### 6.1. Objavljene

1. ATKINSON, K. E. (1989): An introduction to Numerical Analysis. 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley and Sons, 712 p., New York.
2. BROD, I. O. & JEREMENKO, N. A. (1957): Osnovi geologije nafte i gasa. Izdanje treće, Gostoptehizdat, 480 p., Moskva.
3. DAY BRADLEY, A. (1979): Prismatoid, prismoid, generalized prismoid. Amer. Math. Monthly 86, 486-490.
4. HALSTED, G. B. (1907): Rational Geometry: A textbook for the Science of Space. Based on Hilbert's Foundations. 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley and Sons, 273 p., New York.
5. KEVO, M. (1986): Numerička integracija (Numerical integration – Slovenian, issue in Serbian). Moj mikro, 2, 7, 25-28.
6. NELSON, D. (editor) (1998): The Penguin dictionary of Mathematics. 2nd edition, Penguin Books Ltd., 461 p., London.
7. MALVIĆ, T. & NOVAK ZELENKA, K. (2014): Why we use Simpson and trapezoidal rule for hydrocarbon reservoir volume calculation? In: Cvetković, M., Novak Zelenka, K. and Geiger, J. (editors): Congress book "Geomathematics - from theory to practice", Croatian Geological Society, 37-44 pp., Opatija.
8. MALVIĆ, T., RAJIĆ, R., SLAVINIĆ, P., NOVAK ZELENKA, K. (2014): Numerical integration in volume calculation of irregular anticlines. Rudarsko-geološko-naftni zbornik. 28, 2, 1-8.
9. MALVIĆ, T. & VELIĆ, J. (2008): Geologija ležišta fluida (Geology of reservoir's fluids – in Croatian). University of Zagreb, Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering, scripts, 139 p., Zagreb.
10. QUARTERONI, A., SACCO, R. & SALERI, F. (2000): Numerical Mathematics. Springer-Verlag, 654 p., New York.
11. RAHMAN, Q. I. & SCHMEISSER, G. (1990): Characterization of the speed of convergence of the trapezoidal rule. Numerische Mathematik, 57, 1, 123-138.
12. SLAVINIĆ, P. (2012): Primjena diferencijalnog i integralnog računa u geologiji (Application of differential and integral calculus in geology - in Croatian). University of Zagreb, Faculty of Mining, Geology and Petroleum University, bachelor thesis, 31 p.

13. WALTHAM, D. (2000): Mathematics: A Simple Tool for Geologists, Blackwell Science Ltd, 201 p., Malden, USA.

## **6.2. Internetski izvori** (pristupljeno 30. prosinca 2014.)

poveznica 1:

<http://www.fsb.unizg.hr/geometrija.broda/300/370/gb375.htm>

poveznica 2:

<http://www.mathpages.com/home/kmath189/kmath189.htm>

poveznica 3: <http://azlanppd.tripod.com/topic09.pdf>