Osječki matematički list 13 (2013), 1-13

O nultočkama polinoma oblika $x^n - x - 1$

Luka Marohnić * Bojan Kovačić † Bojan Radišić ‡

Sažetak

U članku se najprije za svaki prirodan broj $n \geq 2$ pokazuje da polinom $\pi_n(x) = x^n - x - 1$ ima jedinstvenu pozitivnu realnu nultočku φ_n. Zatim se dokazuju neka svojstva niza brojeva $(\varphi_n)_{n \geq 2}$ i daje se jedna moguća formula za približno izračunavanje brojeva φ_n.

Ključne riječi: *polinom, nultočka, niz, zlatni rez, plastična konstanta, aproksimacija, Newtonova metoda*

On the roots of polynomials $x^n - x - 1$

Abstract

In this article it is firstly shown that for every natural number $n \geq 2$ the polynomial $\pi_n(x) = x^n - x - 1$ has unique positive real root φ_n. Then some properties of the sequence $(\varphi_n)_{n \geq 2}$ are proved and one possible approximation for the numbers φ_n is given.

Keywords: *polynomial, root, sequence, golden ratio, plastic number, approximation, Newton method*

*Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, Zagreb, e-mail: luka.marohnic@tvz.hr
†Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, Zagreb, e-mail: bojan.kovacic@tvz.hr
‡Veleučilište u Požegi, Vukovarska 17, Požega, e-mail: bradisic@vup.hr

1 Uvod

Jedan od najpoznatijih nizova prirodnih brojeva svakako je Fibbonaccijev niz prirodnih brojeva $(F_n)_n \in \mathbb{N}$ definiran rekurzivno izrazom:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & \text{za } n \geq 3, \\ F_1 = F_2 = 1. \end{cases}$$

Prvih nekoliko članova toga niza su:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots .$$

Binetova formula za opći član Fibbonaccijevog niza glasi:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Iz Binetove formule slijedi:

$$\lim_n \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988 \cdots = \varphi.$$

gdje je φ poznat kao zlatni rez. Lako se pokazuje da je φ rješenje jednadžbe

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Više o Fibonaccijevom nizu može se pronaći u [7].

Osim Fibonaccijevog niza, promatra se i Padovanov niz. To je niz prirodnih brojeva $(P_n)_n \in \mathbb{N}$ definiran rekurzivno izrazom:

$$\begin{cases} P_n = P_{n-2} + P_{n-3} & \text{za } n \geq 4, \\ P_1 = P_2 = P_3 = 1. \end{cases}$$

Prvih nekoliko članova toga niza su:

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, \ldots .$$

Opći član dan je formulom:

$$P_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + C_3 x_3^n$$

pri čemu su C_1, C_2 i C_3 konstante, a x_1, x_2 i x_3 rješenja jednadžbe:

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Jedino realno rješenje gornje jednadžbe

$$x_1 = 1.324717957 \cdots = \psi$$

naziva se plastična konstanta ili plastični broj koji se često interpretira kao:

$$\psi = \lim_n \frac{P_{n+1}}{P_n}$$

Više o Padovanovom nizu može se pronaći u [6].

U ovom ćemo članku promatrati nultočke polinoma oblika $x^n - x - 1$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Primijetimo da se za $n = 2$ dobije polinom $p_2(x) = x^2 - x - 1$ kojemu je jedna od realnih nultočaka upravo zlatni rez, dok se za $n = 3$ dobije polinom $p_3(x) = x^3 - x - 1$ kojemu je jedina realna nultočka upravo plastična konstanta. Te dvije konstante bit ce prva dva člana niza realnih brojeva čiji će opći član biti jedinstvena strogo pozitivna nultocka polinoma $p_n(x) = x^n - x - 1$. Navest cemo i postupak kojim se efektivno može približno izračunati svaki član navedenoga niza.

Napomenimo da je nužno postaviti uvjet $n \geq 2$ jer za $n = 1$ dobivamo konstantnu funkciju $p_1(x) = -1$ koja nema niti jednu realnu nultočku.

2 Polinomi π_n

Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ definiramo polinom π_n formulom

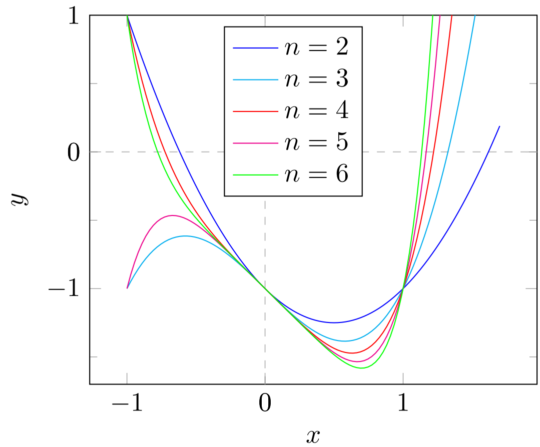
$$\pi_n(x) = x^n - x - 1. \tag{1}$$

Na slici 1 prikazani su grafovi prvih pet takvih polinoma.

Teorem 2.1. Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ polinom π_n ima jedinstvenu strogo pozitivnu jednostruku realnu nultočku $\alpha \in \langle 1, 2 \rangle$.

Dokaz. Primijetimo da za svaki $n \geq 2$ vrijedi $2^n - 3 \geq 2^2 - 3 = 1 > 0$. Polinom π_n je neprekidna funkcija na cijeloj svojoj domeni (skupu $\mathbb{R}$), pa posebno i na segmentu $[1, 2]$. Očito je $\pi_n(1) = -1$ i $\pi_n(2) = 2^n - 3$, pa prema gornjoj primjedbi slijedi $\pi_n(1) \cdot \pi_n(2) < 0$. Stoga na restrikciju polinoma π_n na segment $[1, 2]$ možemo primijeniti Teorem 5.2 (vidi Dodatak), odakle dobivamo da postoji barem jedan realan broj $\alpha \in \langle 1, 2 \rangle$ za koji vrijedi $\pi_n(\alpha) = 0$. Ovime smo dokazali egzistenciju broja α.

Ispitajmo tijek restrikcije polinoma π_n na interval $\langle 0, +\infty \rangle$. Označimo tu restrikciju s p_n. Prva derivacija te restrikcije je $p_n'(x) = nx^{n-1} - 1$, a njezina



Slika 1: Grafovi polinoma π_n za $n = 2, 3, \ldots 6$

jedinstvena realna nultočka $x_0 = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} > 0$. Koristeći Teorem 5.1, za $n \geq 2$ imamo

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} = n^{-\frac{1}{n-1}} < 1^{-\frac{1}{n-1}} = 1.$$

Dakle, $x_0 \in \langle 0, 1 \rangle$.

Druga derivacija funkcije p_n je $p_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Lako se vidi da vrijedi nejednakost $p_n''(x_0) > 0$ jer su sva tri faktora strogo pozitivni realni brojevi. Iz Teorema 5.3 tada slijedi da p_n poprima lokalni minimum za $x = x_0$. Odatle slijedi da p_n strogo raste na intervalu $\langle x_0, +\infty \rangle$, pa posebno i na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$. To znači da p_n ima najviše jednu realnu nultočku koja pripada tom intervalu. Ranije smo pokazali da p_n ima barem jednu nultočku α koja pripada intervalu $\langle 1, 2 \rangle$, a samim tim i intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$. Odatle slijedi jedinstvenost nultočke α.

Preostalo je dokazati jednostrukost. Pokazali smo da jedina moguća strogo pozitivna realna nultočka funkcije p_n' pripada intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, te da je $\alpha \in \langle 1, 2 \rangle$. To znači da mora vrijediti $p_n'(\alpha) \neq 0$, a odatle slijedi jednostrukost nultočke α. $\square$

Teorem 2.2. Za prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi sljedeće:

1. ako je n paran, polinom π_n ima jedinstvenu strogo negativnu realnu nultočku $\beta \in \langle -1, 0 \rangle$;

2. ako je n neparan, polinom π_n nema strogo negativnih realnih nultočaka.

Dokaz. Dokaz ovoga teorema teče analogno dokazu Teorema 2.1, pa ga prepuštamo čitatelju. □

3 Pozitivne realne nultočke polinoma π_n i njihova svojstva

Označimo s φ_n pozitivnu realnu nultočku polinoma π_n, čija je egzistencija i jedinstvenost osigurana Teoremom 2.1. Time smo zadali niz realnih brojeva $(\varphi_n)_{n\geq 2}$ u intervalu $\langle 1, 2\rangle$.

Propozicija 3.1. Broj φ_n je iracionalan za sve $n \geq 2$.

Dokaz. Prema Teoremu 2.1 vrijedi $\varphi_n \in \langle 1, 2\rangle$. Stoga je $\varphi_n \notin \mathbb{Z}$, pa iz Teorema 5.5 slijedi $\varphi_n \notin \mathbb{Q}$. □

Za $n \geq 2$ iz jednakosti $\pi_n(\varphi_n) = 0$ slijedi važno aditivno svojstvo brojeva φ_n:

$$1 + \varphi_n = \varphi_n^n, \tag{2}$$

koje ćemo često koristiti u nastavku teksta.

Propozicija 3.2. Niz $(\varphi_n)_{n\geq 2}$ je strogo padajući.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji prirodan broj $n \geq 2$ takav da vrijedi $\varphi_{n+1} \geq \varphi_n$. Odavde potenciranjem slijedi

$$\varphi_{n+1}^n \geq \varphi_n^n. \tag{3}$$

Iz (2) dijeljenjem s φ_n slijedi

$$\varphi_n^{n-1} = \frac{1}{\varphi_n} + 1. \tag{4}$$

Primjenom (2) i (4) na nejednakost (3) zaključujemo da vrijedi

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} + 1 \geq \varphi_n + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \geq \varphi_n \cdot \varphi_{n+1}. \tag{5}$$

Prema Teoremu 2.1 je $\varphi_k \in \langle 1, 2\rangle$ za svaki prirodan broj $k \geq 2$, odakle slijedi $\varphi_n \cdot \varphi_{n+1} > 1$ što je u proturječju s (5). Dakle, polazna je pretpostavka pogrešna, pa mora biti $\varphi_{n+1} < \varphi_n$ za sve $n \geq 2$ kako se i tvrdilo. □

Lema 3.1. *Za svaku nultočku $z \in \mathbb{C}$ polinoma $p_n \neq \varphi_n$ vrijedi $|z| < \varphi_n$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je n paran i da je z jednaka negativnoj realnoj nultočki $\beta \in \langle -1, 0\rangle$ koja postoji prema Teoremu 2.2. Kako prema Teoremu 2.1 vrijedi $\varphi_n \in \langle 1, 2\rangle$, imamo $|z| < 1 < \varphi_n$.

Pretpostavimo sada da je $z = x + iy \neq \varphi_n$, $y \neq 0$ kompleksna nultočka polinoma π_n i označimo

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Lako se vidi da je $x < r$, što uz $\pi_n(z) = 0$ i (1) povlači

$$\begin{aligned} r^n = |z|^n = |z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2} < \\ < \sqrt{x^2 + 2r + 1 + y^2} = \sqrt{r^2 + 2r + 1} = r + 1, \end{aligned}$$

odakle slijedi $r^n - r - 1 < 0$ odnosno $\pi_n(r) < 0$. Zbog $\pi_n(x) \geq 0$ za sve $x \geq \varphi_n$ je tada $r < \varphi_n$ što je i trebalo pokazati. □

Teorem 3.1. Neka je prirodan broj $n \geq 2$ proizvoljan, ali fiksiran. Tada za niz cijelih brojeva $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiran pravilom

$$f_k = \begin{cases} 1, & k \leq n, \\ f_{k-n} + f_{k-n+1}, & k > n, \end{cases} \tag{6}$$

vrijedi $\lim\limits_k \dfrac{f_{k+1}}{f_k} = \varphi_n$.

Dokaz. Pravilo (6) ispunjava uvjete Teorema 5.6, pa vrijedi

$$f_k = \sum_{j=1}^{m} p_j(k) \cdot r_j^k, \quad k \in \mathbb{N} \tag{7}$$

gdje su $r_1, r_2, \ldots, r_m$ međusobno različite nultočke karakterističnog polinoma $\kappa(x) = x^n - x - 1$ i $\deg p_j$ je manji od kratnosti nultočke r_j za sve $j = 1, 2, \ldots, m$. Budući da je $\kappa = \pi_n$, jedan od brojeva r_j mora biti jednak φ_n. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to r_1. Prema Teoremu 2.1 kratnost nultočke r_1 jednaka je 1. Dakle, vrijedi $\deg p_1 = 0$ odnosno $p_1(k) = C_1$ za neki $C_1 \in \mathbb{R}$ i sve $k \in \mathbb{N}$. Nadalje, iz Leme 3.1 slijedi

$\left|\frac{r_j}{r_1}\right| = \frac{|r_j|}{\varphi_n} < 1$ za sve $j = 2, 3, \ldots, m$. Sada koristeći Teorem 5.4 imamo

$$\lim_k \frac{f_{k+1}}{f_k} = \lim_k \frac{\sum_{j=1}^m p_j\,(k+1)\,r_j^{k+1}}{\sum_{j=1}^m p_j\,(k)\,r_j^k} \cdot \frac{\frac{1}{r_1^{k+1}}}{\frac{1}{r_1^{k+1}}} = \lim_k \frac{\sum_{j=1}^m p_j\,(k+1)\left(\frac{r_j}{r_1}\right)^{k+1}}{\frac{1}{r_1}\sum_{j=1}^m p_j\,(k)\left(\frac{r_j}{r_1}\right)^k} =$$

$$= r_1 \cdot \frac{C_1 + \sum_{j=2}^m \lim_k p_j(k+1)\left(\frac{r_j}{r_1}\right)^{k+1}}{C_1 + \sum_{j=2}^m \lim_k p_j(k)\left(\frac{r_j}{r_1}\right)^k} = r_1 \cdot \frac{C_1}{C_1} = r_1 = \varphi_n,$$

kako se i tvrdilo. □

Niz brojeva (6) podudara se s Fibonaccijevim nizom $(F_k)_k$ za $n = 2$ odnosno s Padovanovim nizom $(P_k)_k$ za $n = 3$. Napomenimo da se nekoliko općenitih svojstava nizova $(f_k)_k$ može pronaći u [4].

4 Približno izračunavanje brojeva φ_n

Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ označimo

$$\delta_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x + 1 + \frac{\ln 2}{n},. \tag{8}$$

Tada vrijedi sljedeća lema.

Lema 4.1. *Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne brojeve $n > N$ vrijedi*

$$\delta_n(-\varepsilon) < \varphi_n < \delta_n(\varepsilon). \tag{9}$$

Dokaz. Definiramo niz funkcija $(\rho_k)_{k\geq 2}$ takav da za svaki prirodan broj $k \geq 2$ vrijedi $\rho_k : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ i

$$\rho_k(x) = \pi_k\left(1 + \frac{x}{k}\right). \tag{10}$$

Lako se provjeri da je

$$\rho_k(x) = \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k - \frac{x}{k} - 2. \tag{11}$$

Označimo

$$\rho(x) = e^x - 2. \tag{12}$$

Može se pokazati da vrijedi (vidi [2], str. 70. i 72.)

$$\lim_k \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

odakle lako dobivamo $\rho(x) = \lim_k \rho_k(x)$.

Odaberimo proizvoljan $\varepsilon > 0$ i označimo

$$a = \ln 2 - \varepsilon, \quad b = \ln 2 + \varepsilon. \tag{14}$$

Budući da je funkcija $x \mapsto e^x$ strogo rastuća, to je i funkcija ρ strogo rastuća. Pritom je $x = \ln 2$ jedina nultočka funkcije ρ, pa vrijedi

$$\rho(a) < 0 \quad \text{i} \quad \rho(b) > 0. \tag{15}$$

Označimo $r = \min\{-\rho(a), \rho(b)\}$. Iz (15) slijedi $r > 0$.

Budući da je funkcija ρ limes niza funkcijâ $(\rho_k)_k$, prema definiciji limesa niza postoji prirodan broj k_a takav da za svaki $k > k_a$ vrijedi nejednakost

$$|\rho_k(a) - \rho(a)| < r.$$

Odatle slijedi da brojevi $\rho_k(a)$ i $\rho(a)$ imaju isti predznak, pa zbog (15) zaključujemo da vrijedi $\rho_k(a) < 0$. Analogno, postoji prirodan broj k_b takav da za svaki $k > k_b$ vrijedi

$$|\rho_k(b) - \rho(b)| < r,$$

pa su brojevi $\rho_k(b)$ i $\rho(b)$ istoga predznaka što zbog (15) znači da je $\rho_k(b) > 0$. Stavimo li $N = \max\{k_a, k_b\}$, zaključujemo da za svaki $k > N$ vrijede nejednakosti

$$\rho_k(a) < 0, \quad \rho_k(b) > 0. \tag{16}$$

Neka je zadan prirodan broj $n > N$. Iz (16) i činjenice da je polinom π_n strogo rastući na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$, koju smo dokazali u okviru dokaza Teorema 2.1, dobivamo

$$1 + \frac{a}{n} < \varphi_n < 1 + \frac{b}{n}.$$

Koristeći (8) lako se provjeri da vrijede jednakosti

$$\delta_n(-\varepsilon) = 1 + \frac{a}{n} \quad \text{i} \quad \delta_n(\varepsilon) = 1 + \frac{b}{n},$$

pa odatle slijedi tvrdnja leme. □

Teorem 4.1. Vrijede sljedeće jednakosti:

(a) $\lim\limits_{n} \varphi_n = 1$,

(b) $\lim\limits_{n} n\left(\varphi_n - 1\right) = \ln 2$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema Lemi 4.1 postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne brojeve $n > N$ vrijede nejednakosti (9). Primijetimo da je $\lim_n \delta_n(\pm\varepsilon) = 1$. Odavde i iz (9) slijedi $\lim_n \varphi_n = 1$, čime smo dokazali jednakost (a).

Dokažimo i jednakost (b). Najprije za $n \geq 2$ imamo

$$n\left(\varphi_n - 1\right) = n\left(\varphi_n - 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\ln 2}{n}\right) =$$
$$= n\left(\varphi_n - \delta_n(0) + \frac{\ln 2}{n}\right) = n\left(\varphi_n - \delta_n(0)\right) + \ln 2,$$

odakle slijedi

$$\left|n\left(\varphi_n - 1\right) - \ln 2\right| = n\left|\varphi_n - \delta_n(0)\right|. \tag{17}$$

Prema Lemi 4.1 postoji $M \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne brojeve $n > M$ vrijedi

$$\delta_n\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) < \varphi_n < \delta_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{18}$$

a budući da je δ_n strogo rastuća funkcija, iz $-\frac{\varepsilon}{2} < 0 < \frac{\varepsilon}{2}$ imamo i

$$\delta_n\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) < \delta_n\left(0\right) < \delta_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{19}$$

Po definiciji funkcije δ_n vrijedi

$$\delta_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \delta_n\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 + \frac{\ln 2 + \varepsilon/2}{n} - 1 - \frac{\ln 2 - \varepsilon/2}{n} = \frac{\varepsilon}{n},$$

što zajedno s nejednakostima (18) i (19) povlači da se φ_n i $\delta_n(0)$ nalaze u istom otvorenom intervalu $\langle \delta_n\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right), \delta_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\rangle$ širine ε/n, odnosno

$$\left|\varphi_n - \delta_n(0)\right| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{za sve } n > M. \tag{20}$$

Jednakost (17) i nejednakost (20) zajedno daju

$$\left|n\left(\varphi_n - 1\right) - \ln 2\right| < \varepsilon \quad \text{za sve } n > M,$$

pa zaključujemo da je broj $\ln 2$ limes niza $\left(n\left(\varphi_n - 1\right)\right)_{n\geq 2}$ što je i trebalo pokazati. $\square$

Za svaki prirodan broj n definiramo

$$\begin{aligned} u_n &= \delta_n(0) = 1 + \frac{\ln 2}{n}, \\ v_n &= \sqrt[n]{1 + \delta_n(0)} = \sqrt[n]{2 + \frac{\ln 2}{n}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Istaknimo dva značajna svojstva niza $(u_n)_n$. Vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 4.1. Za gore definiran niz $(u_n)_n$ i niz $(\varphi_n)_{n\geq 2}$ vrijedi:

(a) $\lim_n (\varphi_n - u_n) = 0.$

(b) $\lim_n \dfrac{\varphi_n - u_n}{\varphi_n - 1} = 0.$

Dokaz. Tvrdnja (a) slijedi izravno iz (20).
Dokažimo (b). Prema Teoremu 4.1 (b) imamo

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{\varphi_n - u_n}{\varphi_n - 1} &= \lim_n \frac{\varphi_n - 1 - \frac{\ln 2}{n}}{\varphi_n - 1} = 1 - \lim_n \frac{\ln 2}{n\,(\varphi_n - 1)} = \\ &= 1 - \frac{\ln 2}{\lim_n n\,(\varphi_n - 1)} = 1 - \frac{\ln 2}{\ln 2} = 0, \end{aligned}$$

kako se i tvrdilo. □

Iz tvrdnje (b) Propozicije 4.1 zaključujemo da udaljenost $|\varphi_n - u_n|$ između brojeva φ_n i u_n teži nuli brže nego što decimalni dio $(\varphi_n - 1)$ broja φ_n teži nuli kada $n \to \infty$. Dakle, za $n \geq 2$ vrijedi

$$\varphi_n \approx u_n,$$

pri čemu je aproksimacija to bolja što je n veći.

Propozicija 4.2. Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi $u_n < v_n < \varphi_n$.

Dokaz. Neka je x pozitivan realan broj i n prirodan broj. Označimo

$$y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Prema (13), vrijedi

$$\lim_n y_n = e^x. \tag{22}$$

Zapišimo $(n+1)$-vi korijen broja y_n u obliku:

$$\sqrt[n+1]{y_n} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)}.$$

Izraz s desne strane možemo shvatiti kao geometrijsku sredinu $(n+1)$ strogo pozitivnih realnih brojeva. Primijenimo A-G nejednakost prema kojoj aritmetička sredina n strogo pozitivnih realnih brojeva nije manja od njihove geometrijske sredine. Dobivamo:

$$\begin{aligned}\sqrt[n+1]{y_n} &\le \frac{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)+\left(1+\frac{x}{n}\right)+\dots+\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n+1} = \\ &= \frac{1+n\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n+1} = 1+\frac{x}{n+1} = \sqrt[n+1]{y_{n+1}}.\end{aligned}$$

Budući da je prema Teoremu 5.1 opća potencija $x \mapsto x^{\frac{1}{n+1}} = \sqrt[n+1]{x}$ strogo rastuća funkcija, odatle slijedi $y_n \le y_{n+1}$. Stavimo li $x = \ln 2$, zbog prve jednakosti u (21) zaključujemo da vrijedi $y_n = u_n^n = \left(1+\frac{\ln 2}{n}\right)^n$. Zbog jednakosti (22) vrijedi $\lim_n u_n^n = e^{\ln 2} = 2$. U Teoremu 2.1 dokazali smo da je $\varphi_n > 1$, pa slijedi:

$$u_n^n \le 2 < 1+\varphi_n = \varphi_n^n, \tag{23}$$

odakle je $u_n < \varphi_n$. Dalje računamo

$$u_n < \varphi_n \Rightarrow 1+u_n < 1+\varphi_n \Rightarrow v_n^n < \varphi_n^n \Rightarrow v_n < \varphi_n.$$

Analognom argumentacijom kao u slučaju nejednakosti (23) zaključujemo

$$u_n^n \le 2 < 2+\frac{\ln 2}{n} = v_n^n,$$

odakle je $u_n < v_n$. Dakle, vrijedi $u_n < v_n < \varphi_n$ kako se tvrdilo. $\square$

Prema Propoziciji 4.2, broj v_n bolje aproksimira φ_n nego u_n. Tablica 1 prikazuje φ_n, aproksimacije u_n i v_n, te odstupanje $|\varphi_n - v_n|$ za $n = 2, 3, \dots, 10$. Pri izračunavanju brojeva v_n korištena je približna vrijednost

$$\ln(2) \approx 0.69315.$$

5 Dodatak

U ovom su odjeljku navedeni iskazi nekih općih rezultata iz područja matematičke analize koji su korišteni u tekstu.

n	φ_n	u_n	v_n	$\lvert\varphi_n - v_n\rvert$
2	1.6180	1.3466	1.5319	8.62×10^{-2}
3	1.3247	1.2310	1.3067	1.81×10^{-2}
4	1.2207	1.1733	1.2142	6.57×10^{-3}
5	1.1673	1.1386	1.1642	3.11×10^{-3}
6	1.1347	1.1155	1.1330	1.71×10^{-3}
7	1.1128	1.0990	1.1117	1.04×10^{-3}
8	1.0970	1.0866	1.0963	6.77×10^{-4}
9	1.0851	1.0770	1.0846	4.67×10^{-4}
10	1.0758	1.0693	1.0754	3.35×10^{-4}

Tablica 1: Aproksimacija nekih vrijednosti brojeva φ_n brojevima u_n i v_n, te pripadna apsolutna pogreška aproksimacije v_n

Teorem 5.1. Funkcija opće potencije $f(x) = x^c$ je strogo rastuća za $c > 0$, a strogo padajuća za $c < 0$.

Dokaz. Vidi [1], str. 193. □

Teorem 5.2. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $f(a) \cdot f(b) < 0$. Tada postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da vrijedi $f(c) = 0$.

Dokaz. Vidi [2], str. 31. □

Teorem 5.3. Neka je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ dvaput derivabilna u točki $c \in \langle a, b\rangle$ i neka je $f'(c) = 0$.

(a) Ako je $f''(c) < 0$, tada funkcija f ima lokalni maksimum za $x = c$.

(b) Ako je $f''(c) > 0$, tada funkcija f ima lokalni minimum za $x = c$.

Dokaz. Vidi [1], str. 141. □

Teorem 5.4. Neka je P bilo koji polinom s realnim koeficijentima. Tada za svaki $a \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} P(x) \cdot a^x = 0.$$

Dokaz. Tvrdnja se može dokazati primjenom L'Hôpitalovog pravila. Za detalje vidjeti [2], str. 220. □

Teorem 5.5. Polinom s cjelobrojnim koeficijentima kojemu je vodeći koeficijent jednak 1 ima racionalnu nultočku ako i samo ako ima cjelobrojnu nultočku.

Dokaz. Vidi [3]. □

Teorem 5.6. Neka su prvih n članova niza $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljni ali fiksirani i neka za $k > n$ vrijedi rekurzivna relacija s konstantim koeficijentima

$$a_k = c_1 a_{k-1} + c_2 a_{k-2} + \cdots + c_n a_{k-n}.$$

Ako s $r_1, r_2, \ldots, r_m$ označimo sve međusobno različite (kompleksne) nultočke *karakterističnog polinoma* $\kappa(x) = x^n - c_1 x^{n-1} - \cdots - c_n$, tada za svaki $j = 1, 2, \ldots, m$ postoji jedinstveni polinom p_j s kompleksnim koeficijentima takav da je deg p_j manji od kratnosti nultočke r_j i vrijedi

$$a_k = p_1(k) \cdot r_1^k + p_2(k) \cdot r_2^k + \cdots + p_m(k) \cdot r_m^k$$

za sve $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Vidi [8]. □

Literatura

[1] S. Kurepa: *Matematička analiza 1 - diferenciranje i integriranje*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[2] S. Kurepa, *Matematička analiza 2 - funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[4] V. Krčadinac, *A new generalization of the Golden ratio*, The Fibonacci Quarterly 44 (2006), 335–340, javno dostupno na `http://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/pub/golden.pdf`

[5] L. Marohnić, T. Strmečki, *Plastic Number: Construction and Applications*, zbornik radova konferencije ARSA (Advanced Research in Scientific Areas) 2012, 1523–1528, javno dostupno na: `http://arsa-conf.com/archive/?vid=1&aid=3&kid=60101-209&q=f1`

[6] B. Kovačić, L. Marohnić, R. Opačić, *O Padovanovu nizu*, Osječki matematički list 13/1 (2013), 1-19, javno dostupno na `http://hrcak.srce.hr/file/155996`

[7] A. Dujella: *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[8] `http://en.wikipedia.org/wiki/Recurrence_relation`, javno dostupno 24. 2. 2014.