



6. INTERNACIONALNI NAUČNO-STRUČNI SKUP GRAĐEVINARSTVO - NAUKA I PRAKSA

ŽABLJAK, 7-11. MART 2016.

Dalibor Gelo¹, Mladen Meštrović², Željko Lebo³

MODELIRANJE ZIDANIH KONSTRUKCIJA POMOĆU NSCD METODE

Rezime

Modeliranje zidanih konstrukcija pomoću teorija kontinuuma predstavlja problem zbog nehomogenosti materijala. Devedesetih godina 20. st. razvija se diskretna metoda pod nazivom Non-smooth contact dynamic method (NSCD). Ova metoda nam omogućava da opišemo blokove (ispuna) zidane konstrukcije pomoću diskretnih elemenata i definiramo kontakte između pojedinih diskretnih elemenata. Cilj rada je prikazati numeričku formulaciju NSCD metode i njenu primjenu na realnim primjerima.

Ključne riječi

Diskretni elementi, NSCD, modeliranje zidanih konstrukcija

MODELING OF MASONRY CONSTRUCTIONS BY NSCD METHOD

Summary

The masonry constructions is hard to model by continuous methods because that kind of constructors are not homogeneous. At the end of the 20 century it has been develop the Non-smooth contact dynamic (NSCD). This method give us an opportunity to describe the block elements of the masonry constructions by discrete elements and define the contacts between the discrete elements. The goal of this paper is to present the numerical formulation of NSCD method and the use in real examples.

Key words

Discrete elements, NSCD, modelling of masonry constructions

¹ Mag. ing. aedif, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Avenija Većeslava Holjevca 15, 10010 Zagreb, Hrvatska, dgelo@tvz.hr

² Prof.dr.sc., dipl.ing.građ., dipl.ing.mat., Građevinski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, Hrvatska, mestar@grad.hr

³ Mr.sc., dipl.ing.građ., Tehničko veleučilište u Zagrebu, Avenija Većeslava Holjevca 15, 10010 Zagreb, Hrvatska, zlebo@tvz.hr

1. UVOD

Od samih početaka ljudske civilizacije zidane konstrukcije su prisutne u graditeljskoj praksi. Današnje kapitalne građevine su izgrađene korištenjem betona i čelika ali kroz veći dio ljudske povijesti zidane konstrukcije su predstavljale glavni konstruktivni sistem. Zanimljiva je činjenica da je analiza i dimenzioniranje zidanih konstrukcija najslabije razvijeno područje unatoč svojoj dugoj povijesti.

Specifičnosti zidanih konstrukcija zadaju velike probleme prilikom modeliranja. Veliki problem predstavlja nehomogenost materijala odnosno razlika u fizikalnim karakteristikama ispune i veziva. Budući da su zidane konstrukcije izvedene pretežno od krhkih materija odnosno da im je naglašena tlačna čvrstoća a vlačna zanemariva, dovodi se u pitanje opravdanost primjene teorije kontinuuma.

Navedeni problemi mogu se izbjeći primjenom diskretnih metoda. Cilj rada je prezentirati primjenu diskretne metode pod nazivom non smooth contact dynamic (NSCD) pri proračunu zidnih konstrukcija.

2. NON-SMOOTH CONTACT DYNAMIC METHOD (NSCD)

J.J. Moreou je devedesetih godina 20 st. razvio Non-smooth contact dynamic method (NSCD). Metoda ima široku primjenu, pokazala se jako uspješnom u modeliranju grupe krutih i deformabilnih elemenata. Prednost ove metode je u formiranju kontaktnih odnosa između diskretnih elemenata. Metoda ima jako dobro konvergira što je inače veliki problem kod modela s velikim brojem elemenata [3]. Metoda je implementirana u program LMGC90 koji je baziran na open source kodeksu. Kod LMGC90 je pisan u Fortran-u i C-u a za interface se koriste Python. Važno je napomenuti da program radi isključivo na operativnom sistemu Linux i podržava OpenMP što mu omogućava paralelno računanje.

2.1. MATEMATIČKA FORMULACIJA NSCD METODE

Problem se svodi na rješavanje jednadžbe gibanja

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbb{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbb{P}(t) + \mathbf{r}. \quad (1)$$

gdje je $\mathbb{P}(t)$ ukupno poznato vanjsko i unutarnje djelovanje na diskretni element, $\mathbb{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ čine kvadratni članovi akceleracije, $\mathbf{r}$ predstavlja sile na mjestu kontakta. Brzina i akceleracija su izražene deriviranjem generaliziranih stupnjeva slobode $\mathbf{q}$. Matrica $\mathbb{M}(\mathbf{q}, t)$ je inicijalna matrica. Potpuno ponašanje sustava može se opisati samo uz uvjet da su poznati početni rubni uvjeti. Ako odlučimo proučavati kruto tijelo, mnogo je prikladnije opisati gibanje tijela promatranjem brzine translacije i rotacije centra mase. Kruto tijelo nema sposobnost deformiranja, nemogućnost deformiranja ima za posljedicu da unutarnje sile $\mathbb{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ iščezavaju. Tada translaciju tijela opisujemo Newtonovim jednadžbom gibanja

$$\mathbb{M}\dot{\mathbf{v}} = \mathbb{P}(\mathbf{t}) + \mathbf{r}. \quad (2)$$

Desnu stranu jednadžbe 2 čini suma djelovanja, rezultanta vanjskih sila $\mathbb{P}(\mathbf{t})$ i rezultanta kontaktnih sila $\mathbf{r}$. Vektor akceleracije centra mase je izražena derivacijom vektora brzine centra mase krutog tijela. $\mathbb{M}$ je dijagonalna matrica masa. [1, 2]

Budući da diskretni elementi nemaju zanemarivu površinu odnosno volumen moramo uzeti u obzir rotaciju krutog tijela. Rješavanju problema rotacije krutog tijela možemo pristupiti na dva načina. Prvi pristup je da lokalni koordinatni sustav krutog tijela vežemo uz globalni koordinatni sustav. Budući da se tijelo rotira oko lokalnih koordinatnih osi, momenti inercije tijela ovisi o vremenu što u većini slučajeva znatno otežava iznalaženje rješenja. Drugi pristup je da lokalni koordinatni sustav vežemo uz kruto tijelo, tada se lokalni koordinatni sustav giba s tijelom. Ovakav pristup nam omogućuje da imamo konstantni moment inercije tijela u svim fazama njegovog gibanja. U daljnjem razmatranju će se koristiti isključivo drugi pristup. Švicarski matematičar Leonhard Euler na temelju pretpostavke o infinitezimalnim rotacijama i koordinatnom sustavu vezanim uz tijelo izvodi jednadžbe rotacije kruto tijela

$$\begin{aligned} \sum M_x &= I_x \omega_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ \sum M_y &= I_y \omega_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x \\ \sum M_z &= I_z \omega_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Jednadžbe se mogu napisati i pomoću matričnog zapisa

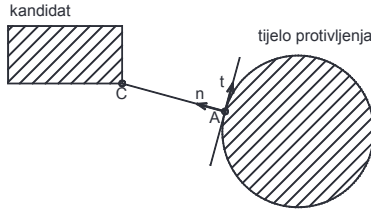
$$\sum \mathbf{M} = \mathbb{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbb{I}\boldsymbol{\omega}), \quad (4)$$

gdje je $\mathbb{I}$ matrica inercija. Matrica $\boldsymbol{\Omega}$ u jednadžbi 4 je intervalno simetrično matrica i vrijedi da je zbroj $\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^T$ jednako nuli, $\boldsymbol{\Omega}^T$ je transponirana matrica $\boldsymbol{\Omega}$. Sumu momenata u jednadžbi 4 možemo zamijeniti s momentom vanjskih sila $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\mathbf{t})$ i momentom kontaktnih sila $\mathcal{M}_{\mathbf{r}}$. Sada možemo jednadžbu 4 preformulirati u sljedeći oblik

$$\mathbb{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\Omega}(\mathbb{I}\boldsymbol{\omega}) + \mathcal{M}_{\mathbb{P}}(\mathbf{t}) + \mathcal{M}_{\mathbf{r}}. \quad [3, 2, 4] \quad (5)$$

2.2. INTERAKCIJA DISKRETNIH ELEMENATA

Svaki diskretni element mora imati definirane konture, točke interakcije, materijalne karakteristike i zakon ponašanja na mjestu kontakta. Kontakt dva diskretna elementa ostvaruje se između odabrane točke interakcije i najbliže točke potencijalnog interakcijskog tijela. Radi lakšeg razumijevanja uvodi se pojam „kandidat“ koje se odnosi na tijelo čiju točku interakcije promatramo. Također uvodimo pojam „tijelo protivljenja“ koje predstavlja potencijalno tijelo interakcije.



Slika 1 Ravninski odnos između kandidata i tijela protivljenja

Na slici 1 prikazan je ravninski problem odnosa između kandidata i tijela protivljenja, točke C i A predstavljaju potencijalno mjesto kontakta. Lokalne osi su vezane za tijelo protivljenja, n je normala na tangencijalnu ravninu. Radi lakšeg prezentiranja problem je prikazan u dvije ravnine ali se jednostavno može proširiti u tri dimenzije. [1, 3] Svako potencijalno mjesto kontakta označavamo s α i za svaki α mora biti određeno: koordinate točke kontakta, lokalni koordinatni sustav $(t_\alpha, n_\alpha, s_\alpha)$, udaljenost između dva tijela (g_α) i relativna brzina između dva tijela (u_α) .

U diskretnoj metodi javljaju se dva seta nepoznanica, globalne nepoznanice i lokalni nepoznanice. Globalne nepoznanice vezane su uz centar mase tijela ili točke mreže. Kao globalne nepoznanice pojavljuju se pomaci (q) , brzine $(\dot{q})$, rezultirajuće sile (r) . Kontaktne prostorne nepoznanice vežu se uz udaljenost između dva tijela (g) , relativnu brzinu između dva tijela (U) i silu (R) . Globalne i lokalne nepoznanice mogu se povezati sljedećim jednadžbama

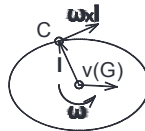
$$g = D(q), \quad (6)$$

$$U = \mathbb{H}^*(q)\dot{q} = \nabla_q D(q)\dot{q}. \quad (7)$$

U daljnjoj analizi promatrat ćemo interakciju između dva kruta tijela. Brzinu točke kontakta možemo izraziti jednadžbom

$$v(M) = v(G) + \omega \times I \quad (8)$$

gdje je $v(G)$ brzina centra mase dok je relativna brzina točke kontakta opisana izrazom $\omega \times I$. Vektor I povezuje centar mase i točku kontakta.



Slika 2 Brzina kontaktne točke krutog tijela.

Relativnu brzinu između dva kruta tijela moguće je prikazati jednadžbom

$$U_{x,y,z} = v(G_i) - v(G_j) + \omega_i \times I_i - \omega_j \times I_j, \quad (9)$$

Jednadžbu 9 možemo napisati u lokalnom koordinatnom sustavu i tada ona glasi

$$U_{t,n,s} = \begin{Bmatrix} t^T \\ n^T \\ s^T \end{Bmatrix} H_{i,j}^*(q) \dot{q} = \mathbb{H}_{i,j}^*(q) \dot{q} = \mathbb{H}_\alpha^*(q) \dot{q}. \quad (10)$$

Da bi pronašli vezu između lokalnog i globalnog sustava koristimo dvostruki uvjet snage izražen preko globalnih i lokalnih koordinata.

$$\dot{q} r = \dot{q} \mathbb{H}_\alpha(q) R \quad (11)$$

Sada lako možemo uočiti da vrijedi sljedeća veza između globalnog i lokalnog sustava

$$r_\alpha = \mathbb{H}_\alpha(q) R_\alpha. \quad (12)$$

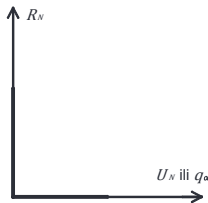
Matrica $\mathbb{H}_\alpha(q)$ je transponirana matrica $\mathbb{H}_\alpha^*(q)$. Kontaktne sile u globalnim koordinatama označavamo s r_α a u globalnim koordinatama R_α .

2.3. KONTAKTNI ZAKONI

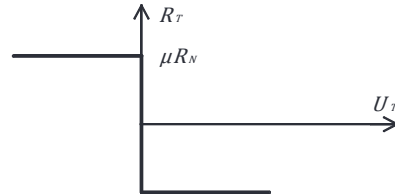
Karakteristika DEM je da ne zanemarujemo kontaktne sile, odnosno možemo matematički opisati interakciju između diskretnih elemenata. Interakcija ovisi o fizikalnim karakteristikama materijala diskretnog elementa i o uvjetima u kojima se nalazi, vlažna ili suha okolina. Trenje je najčešći i najjednostavniji kontakt problem koji želimo riješiti. Razmak (gap), relativna brzina i reakcija između promatranih elemenata osnovne su varijable pomoću kojih opisujemo kontakt. [1, 3]

Kruta tijela nemaju sposobnost da se međusobno isprepliću, odnosno možemo reći da je udaljenost g_α uvijek pozitivan i tada vrijedi $g_\alpha \geq 0$ [5]. Pretpostavlja se da nema međusobnog djelovanja između dva tijela ako nema kontakta između njih. Izrečeni uvjeti nazivaju se Signorinijevim uvjetom kojeg možemo matematički opisati izrazim

$$g_\alpha(t) \geq 0, \quad R_N \geq 0, \quad g_\alpha(t) R_N = 0. \quad (16)$$



Slika 3 Signorinijev graf.



Slika 4 Coulombov zakon.

Iz Signorinijevog grafa se vidi da u trenutku ostvarivanja kontakta sila R_N poprima maksimalnu vrijednost. Takav tip kontakta možemo očekivati između glatkih i jako krutih tijela [5]. Postoje i fleksibilniji modeli, površina kontakta nikada nije savršeno glatka

odnosno možemo očekivati nepravilnosti. Posljedica nepravilnosti je da se kontakt ostvaruje postepeno. Za razliku od Singorinijeva modela gdje sila R_N ima nagli skok sada imamo postepen prirast kontaktne sile R_N . Kontakt definiram s nepravilnostima možemo promatrati kao kontakt između elastično deformabilnih materijal [5]. Ovakav pristup omogućava da gap q_α ima negativnu vrijednost čime je definirano prodiranje između diskretnih elemenata.

Zakon trenja je odnos između sile trenja R_T i brzine klizanja U_T . Zakon trenja možemo podijeliti u dvije klase: viskozno ili mokro trenje i suho trenje. Suho trenje je najstariji i najjednostavniji model kontakta kojeg još nazivamo Coulombovim zakonom. Zakon se može napisati

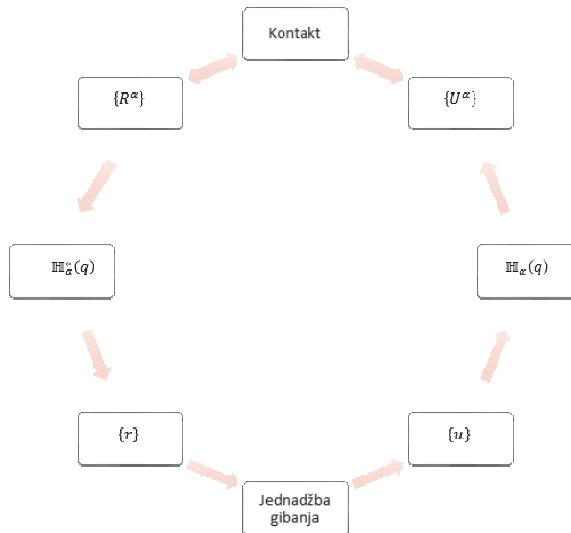
$$|R_T| \leq \mu R_N \quad |U_T| \neq 0 \Rightarrow R_T = -\mu R_N \frac{U_T}{|U_T|}, \quad (13)$$

gdje su R_T i R_N tangencijalna i normalna komponenta reakcije R , μ je koeficijent trenja.

Klizanje između dvije plohe nastupa kada je zadovoljne uvjet $R_T = -\mu R_N \frac{U_T}{|U_T|}$, treba napomenuti da brzina ima suprotan smjer od sile trenje.

2.4. ALGORITAM

Iz prethodnih izlaganja vidimo da se problem svodi na rješavanje globalnih i lokalnih nepoznanica. Globalne odnosno kinematske prostorne nepoznanice vežu se uz samo tijelo i lokalne nepoznanice koje se odnose na kontakt između tijela. Taj odnos možemo prikazati sljedećim grafom.



Slika 5 Odnos između lokalnih i globalnih nepoznanica.

Odnos između lokalnih i globalnih nepoznanica uspostavljamo pomoću operatora $\mathbb{H}_\alpha^*(q)$ i $\mathbb{H}_\alpha(q)$. J.J. Moreau uvodi sljedeću diskretizaciju prostora i vremena

$$u_{(i+1)} = u_{free} + M^{(-1)} r_{(i+1)}. \quad (14)$$

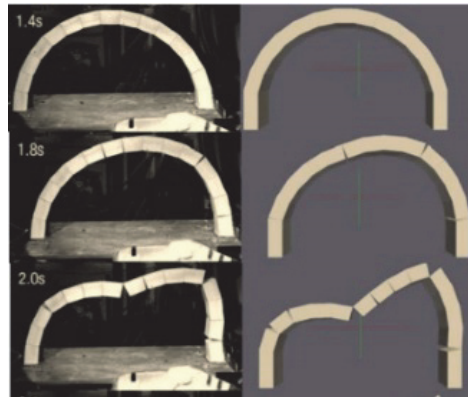
u_{i+1} je brzina na kraju koraka a u_{free} je brzina tijela bez utjecaja kontakta. Matrica M je inercijalna matrica koja ovisi o načinu na koji modeliramo tijelo. Ako se radi o apsolutno krutom tijelu tada je $M = \bar{M}$. U slučaju deformabilnog tijela vrijedi $M = \bar{M} + h\bar{C} + h^2\bar{\Theta}^2 K$ gdje $\bar{M}$ opisuje masu, $\bar{C}$ viskoznost i K krutost. r_{i+1} je rezultanti impuls od svih kontaktnih impulsa koji djeluju na promatrano tijelo za promatrani interval. Rješenje se određuje iterativnim postupkom i to nelinearnim Gauss-Seidel metodom (NLGS). Jednadžba 18 može se prikazati u lokalnim nepoznicama [1, 3]

$$U_{i+1}^\alpha = U_{free}^\alpha + \sum W^{\alpha\beta}(q) R_{i+1}^\beta, \quad (15)$$

gdje $W = \mathbb{H}^* M^{-1} \mathbb{H}$ i naziva se Delass-ovim operatorom.

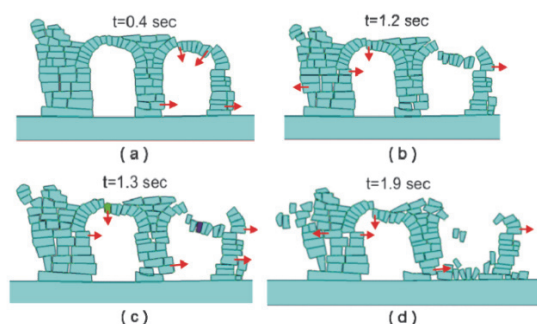
3. PRIMJENA NSCD METODE

Albuerne sa svojim suradnicima objavljuje članak u kojemu prikazuje rezultate dinamičkog ponašanja luka koji je sastavljen od kamenih blokova. U radu se uspoređuju rezultati dobiveni numeričkim modelom primjenom NSCD (numerički model je izrađen u softveru LMGC90) i stvarnog ispitivanja. Autori utvrđuju podudarnost između numeričkog i eksperimentalnog modela i izjavljuju da je u potpunosti opravdano koristiti NSCD u modeliranju. [4]

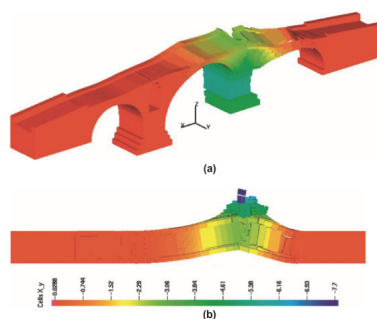


Slika 6 Otkazivanje luka od kamenih blokova.

U radu Dynamics of the Roman Arches of Burnum using the Non-smooth Contact Dynamics Method Lancioni s kolegama proučava rimski luk Burnum u Hrvatsko i bave se dinamičkom analizom rimskog luka. [1]



Slika 7 Otkazivanje luka u Burnum.



Slika 8 Otkazivanje kamenog mosta.

Izrađuju dvodimenzionalni i trodimenzionalni model luka korištenjem programskog paketa LMGC90 i prikazuju slučajeve otkazivanja. Istraživanja pokazuje da LMGC90 predstavlja snažan alat u proučavanju dinamičkog ponašanja povijesnih građevina. Autori također naglašavaju jednostavnost modeliranja, potrebno je poznavati jedino koeficijent trenja između blokova dok se svi ostali materijalni parametri zanemaruju. [5]

Rafieea i kolege objavljuje rad u kojemu je prikazano otkazivanje kamenog mosta, vidi sliku 8. [6] Prikazano je rušenje mosta od strujanja vode za vrijeme poplava.

4. ZAKLJUČAK

Primjeri i matematička formulacija ukazuju na velike mogućnosti modeliranja zidanih konstrukcija. Modeliranje pomoću LMGC90 omogućuje nam da pratimo i predvidimo otkazivanje zidanih konstrukcija. Ovaj pristup nam omogućava da uočimo slabe točke postojećih građevina od iznimne kulturne baštine u cilju sprečavanja danjeg propadanja odnosno havarije. Nedostatak ove metode je u tome što postoji mali broj eksperimentalnih modela koji bi potvrdili točnost NSCD metode ali modeli koji su uspoređeni ukazuju na podudarnost rezultata.

LITERATURA

- [1] J. Moreou, „The non-smooth contact dynamics method,“ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, p. 1999.
- [2] Hibbeler; Russell C., *Engineering Mechanics: Dynamics*, Prentice Hall, 2012.
- [3] Dubois, Frederic; Renou, Mathieu, „Numerical Modeling of granular materials with multi physics coupling,“ *Laboratoire de Mecanique et Genie Civil*, 2008.
- [4] Alejandra Albuérne, Martin Williams, Victoria Lawson, „Prediction of the failure mechanism of arches under base motion using DEM based on the NSCD method,“ *Journal of Heritage Conservation*, 2013.
- [5] G. Lancioni, S. Lenci, E. Quagliarin, „Dynamics of the Roman Arches of Burnum using the Non-smooth Contact Dynamics Method,“ *Civil-Comp Pres*, 2014.
- [6] A. Rafieea, M. Vinches, „Mechanical behaviour of a stone masonry bridge assessed using an implicit discrete element method,“ *Engineering Structures*, 2013