Sedmi susret Hrvatskoga društva za mehaniku
Split, 16-17. lipnja 2016.

BEZMREŽNO MODELIRANJE KONSTRUKCIJA PRIMJENOM GRADIJENTNE ELASTIČNE TEORIJE

Jalušić, B., Jarak, T. & Sorić, J.

Sažetak: U radu je prikazana primjena mješovite bezmrežne lokalne Petrov-Galerkinove kolokacijske metode za rješavanje jednodimenzijskih i dvodimenzijskih problema deformiranja homogenih materijala primjenom Aifantisove gradijentne teorije. Pritom je korištena stupnjevana strategija rješavanja cjelovitog problema gradijentne elastičnosti opisanog diferencijalnom jednadžbom četvrtog reda. Opisani stupnjevani način rješavanja problema testiran je na dva numerička primjera te su rezultati popraćeni prikladnim komentarima.

Ključne riječi: *mješovita bezmrežna kolokacijska metoda, gradijentna elastičnost*

1 UVOD

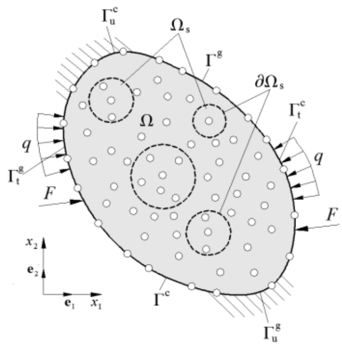
U ovom radu prikazana je bezmrežna mješovita lokalna Petrov-Galerkinova metoda [1] za modeliranje deformiranja materijala primjenom gradijentne elastične teorije [2]. Rješavanje problema teorijama višeg reda primjenom metode konačnih elemenata (MKE) nameće korištenje neučinkovitih C^1 formulacija elemenata sa složenim funkcijama oblika koje zahtijevaju veliki broj čvornih stupnjeva slobode, čak i kod mješovitih formulacija elemenata [3]. Kao alternativa koriste se bezmrežne metode [1] kod kojih se funkcije oblika visokog kontinuiteta mogu konstruirati na jednostavan način bez povećanja broja stupnjeva slobode.

Analiza deformiranja materijala gradijentnim teorijama matematički je problem opisan diferencijalnom jednadžbom četvrtog reda. Stoga se prilikom rješavanja problema javlja potreba za izračunavanjem derivacija funkcija oblika visokog stupnja kao i zadovoljavanje složenih rubnih uvjeta na vanjskim granicama problema [2]. U ovom radu navedeni nedostaci ublaženi su preoblikovanjem cjelovitog problema u dva sastavna problema opisana diferencijalnim jednadžbama drugog reda [2]. Diskretizacija i aproksimacija nepoznatih veličina provodi se za svaki problem zasebno. Primjenjuje se mješoviti pristup [1], gdje su komponente nepoznatih polja aproksimirane pomoću istih funkcija. U oba slučaja sustav jednadžbi je zatvoren postavljanjem odgovarajućih kinematičkih relacija koje povezuju aproksimirane veličine polja. U izvedenim konačnim sustavima jednadžbi kao nepoznanice javljaju se samo čvorni pomaci. Primijenjene su funkcije koje posjeduju interpolacijska svojstva u čvorovima tako da su rubni uvjeti klasičnog i gradijentnog pomaka na vanjskim granicama zadovoljeni izravno kao kod MKE.

U drugom poglavlju prikazana je i objašnjena mješovita kolokacijska metoda za modeliranje deformiranja homogenih materijala primjenom stupnjevane strategije rješavanja problema gradijentne elastičnosti. Učinkovitost izvedenog pristupa prikazana je pomoću dva numerička primjera u 3. poglavlju.

2 MJEŠOVITA BEZMREŽNA METODA ZA MODELIRANJE MATERIJALA PRIMJENOM GRADIJENTNE TEORIJE

Na slici 1 shematski je prikazan dvodimenzijski homogeni materijal koji zauzima područje Ω omeđeno globalnom granicom Γ. Ovisno o problemu koji se rješava, globalne granice poprimaju oznake Γ^{c} i Γ^{g} gdje se gornji indeksi odnose na klasični odnosno gradijentni problem rubnih vrijednosti.



Sl. 1. Dvodimenzijski homogeni materijal

Jednadžbe za sustav prema slici 1 su jaki oblici 2D jednadžbi ravnoteže koje moraju biti zadovoljene u svim čvorovima unutar područja materijala,

$$\tilde{\sigma}_{ij,X^j} + b_i = 0, \ \text{unutar } \Omega. \tag{1}$$

Sukladno Aifantisovoj teoriji [2], cjelovito naprezanje $\tilde{\sigma}_{ij}$ definirano je kao razlika klasičnog Cauchyevog naprezanja σ_{ij} i naprezanja višeg reda π_{ij},

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \pi_{ij}, \tag{2}$$

gdje su spomenuta naprezanja jednaka

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{3}$$

$$\pi_{ij} = D_{ijkl} l^2 \nabla^2 \left(\varepsilon_{kl}\right). \tag{4}$$

U jednadžbama (3) i (4), D_{ijkl} označava materijalni tenzor, ε_{kl} tenzor deformacije cjelovitog problema, a l mikrostrukturalni parametar. Kinematičke relacije cjelovitog problema koje povezuju polje deformacija i pomaka mogu se zapisati kao

$$\varepsilon_{kl} = \left(u_{k,l} + u_{l,k}\right)/2. \tag{5}$$

Uvrštavanjem relacija (2) - (5) u jednadžbe ravnoteže (1), dobiva se diferencijalna jednadžba četvrtog reda kojom je opisano gradijentno elastično ponašanje materijala

$$\frac{1}{2} D_{ijkl}\left[\left(u_k - l^2\nabla^2 u_k\right)_{,jl} + \left(u_l - l^2\nabla^2 u_l\right)_{,jk}\right] + b_i = 0, \ \text{unutar } \Omega. \tag{6}$$

Gornja jednadžba nije prikladna za numeričko rješavanje problema zbog potrebe za izračunavanjem visokih stupnjeva derivacija, ne samo u jednadžbi već i u pripadnim rubnim uvjetima [2]. Stoga se jednadžba (6) za probleme gradijentne elastičnosti može preoblikovati u dva sastavna problema na način da se izrazi u okruglim zagradama proglase novim klasičnim poljem pomaka u_k^{c},

$$\frac{1}{2} D_{ijkl}\left(u_{k,jl}^{\mathrm{c}} + u_{l,jk}^{\mathrm{c}}\right)_{,j} + b_i = 0, \ \text{unutar } \Omega. \tag{7}$$

Ova zamjena je moguća s obzirom da rezultira diferencijalnom jednadžbom drugog reda koja opisuje klasično ponašanje linearno elastičnog homogenog materijala. Druga sastavna supstitucijska jednadžba problema također je drugog reda i glasi

$$u_i^{\mathrm{g}} - l^2 \nabla^2 u_i^{\mathrm{g}} = u_i^{\mathrm{c}}, \quad \text{unutar } \Omega. \tag{8}$$

Problemi rubnih vrijednosti definirani jednadžbama (7) i (8) rješavaju se sada stupnjevanom strategijom, odnosno jedan za drugim, gdje se rješenje prvog problema koristi kao ulazni parametar za drugu diferencijalnu jednadžbu. Kao rezultat oba problema dobivaju se dva odvojena polja pomaka, klasično $\mathbf{u}^{\mathrm{c}}$ i gradijentno $\mathbf{u}^{\mathrm{g}}$. Rješavanjem problema gradijentne elastičnosti na ovaj način, postiže se smanjenje stupnja izračuna potrebnih derivacija kako u samim diferencijalnim jednadžbama (7) i (8) tako i u pripadnim rubnim uvjetima za svaki problem [2]. Relacija (7) zapravo sada označava klasičnu jednadžbu problema elastičnosti koja se može preoblikovati u jednadžbu ravnoteže analognu (1), samo s uvrštenim Cauchyevim naprezanjem σ_{ij} umjesto $\tilde{\sigma}_{ij}$. Stoga jednadžbe (7) i (8) moraju zadovoljavati rubne uvjete propisane na vanjskoj granici $\partial\Omega$ prikazanoj na slici 1, odnosno

$$u_i^{\mathrm{c}} = \bar{u}_i^{\mathrm{c}}, \quad \text{na } \Gamma_{\mathrm{u}}^{\mathrm{c}}, \qquad t_i^{\mathrm{c}} = \sigma_{ij}^{\mathrm{c}} n_j^{\mathrm{c}} = \bar{t}_i^{\mathrm{c}}, \quad \text{na } \Gamma_{\mathrm{t}}^{\mathrm{c}}, \tag{9}$$

$$u_i^{\mathrm{g}} = \bar{u}_i^{\mathrm{g}}, \quad \text{na } \Gamma_{\mathrm{u}}^{\mathrm{g}}, \qquad R_i^{\mathrm{g}} = \frac{\partial^2 u_i^{\mathrm{g}}}{\partial n_j^{\mathrm{g}\,2}} = \bar{R}_i^{\mathrm{g}}, \quad \text{na } \Gamma_{\mathrm{t}}^{\mathrm{g}}, \tag{10}$$

Vrijedi da je $\partial\Omega = \Gamma_{\mathrm{u}}^{\mathrm{c}} \cup \Gamma_{\mathrm{t}}^{\mathrm{c}}$ kod rješavanja klasičnog problema odnosno, $\partial\Omega = \Gamma_{\mathrm{u}}^{\mathrm{g}} \cup \Gamma_{\mathrm{t}}^{\mathrm{g}}$ kod gradijentnog problema. Nadalje, granica $\Gamma_{\mathrm{u}}^{\mathrm{c}}$ označava dio $\partial\Omega$ sa zadanim klasičnim pomacima $\bar{u}_i^{\mathrm{c}}$, dok su na $\Gamma_{\mathrm{t}}^{\mathrm{c}}$ zadane površinske sile $\bar{t}_i^{\mathrm{c}}$. Analogno, na granici $\Gamma_{\mathrm{u}}^{\mathrm{g}}$ zadani su gradijentni pomaci $\bar{u}_i^{\mathrm{g}}$, dok su na $\Gamma_{\mathrm{t}}^{\mathrm{g}}$ zadani prirodni rubni uvjeti $\bar{R}_i^{\mathrm{g}}$ gradijentnog problema.

Pri rješavanju oba problema 2D kontinuum se diskretizira pomoću skupa čvorova $I = 1, 2, ..., N$, gdje je N ukupni broj čvorova u području Ω. Prema mješovitom kolokacijskom postupku iz [1], nepoznate veličine polja klasičnog problema su komponente deformacija i pomaka. Sve nepoznate veličine aproksimirane su zasebno u području Ω, pri čemu se koriste iste aproksimacijske funkcije za sve komponente pomaka i deformacija. Stoga vrijedi

$$u_i^{\mathrm{c}(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{K=1}^{N} \phi_K(\mathbf{X}) \left(\hat{u}_i^{\mathrm{c}}\right)_K, \qquad \varepsilon_{ij}^{\mathrm{c}(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{J=1}^{N} \phi_J(\mathbf{X}) \left(\hat{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{c}}\right)_J, \tag{11}$$

gdje ϕ_J predstavlja čvornu vrijednost 2-D funkcije oblika za čvor *J*, a $\left(\hat{u}_i^{\mathrm{c}}\right)_J$ i $\left(\hat{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{c}}\right)_J$ pripadne su čvorne vrijednosti za pomake i deformacije. Analogno tome, kod gradijentnog problema aproksimirane su komponente pomaka i gradijenta pomaka, odnosno

$$u_i^{\mathrm{g}(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{K=1}^{N} \phi_K(\mathbf{X}) \left(\hat{u}_i^{\mathrm{g}}\right)_K, \qquad \left(\nabla u_i^{\mathrm{g}}\right)^{(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{J=1}^{N} \phi_J(\mathbf{X}) \left(\nabla u_i^{\mathrm{g}}\right)_J. \tag{12}$$

Za konstrukciju funkcija oblika koristi se metoda najmanjih pomičnih kvadrata (*Moving Least Squares*, MLS) [1] prema kojoj se funkcija oblika izračunava

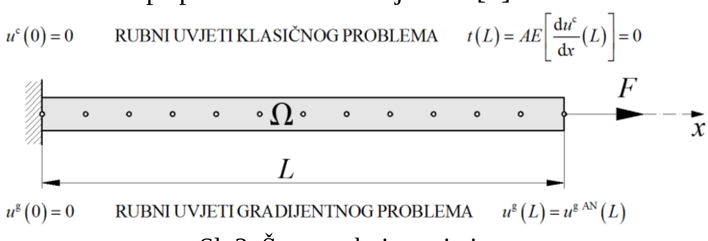
$$\phi_J(\mathbf{X}) = \sum_{k}^{m} p_k(\mathbf{X}) \left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X})\right]_{kJ}. \tag{13}$$

U spomenutoj aproksimaciji interpolacijska svojstva, postignuta su definiranjem težinske funkcije prema [4], čime je stvorena tkz. IMLS funkcija kojom je omogućeno izravno zadovoljavanje osnovnih rubnih uvjeta, kao u MKE. Diskretizacijom klasične jednadžbe zapisane preko polja deformacija korištenjem druge relacije u (11), dobiva se nerješivi sustav jednadžbi jer je ukupni broj nepoznatih čvornih deformacija veći od broja raspoloživih jednadžbi. Stoga je u svim čvorovima potrebno uvesti kinematičke relacije analogne relaciji (5) pomoću kojih je moguće izračunati čvorne deformacije $\hat{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{c}}$ aproksimiranih pomaka (11). Eliminacijom čvornih deformacija $\hat{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{c}}$, dobiva se zatvoreni sustav linearnih algebarskih jednadžbi u kojima se kao nepoznanice javljaju samo čvorni pomaci $\hat{u}_i^{\mathrm{c}}$. Rješenja klasičnog sustava jednadžbi $\hat{u}_i^{\mathrm{c}}$ uvrštavaju se sada na desnu stranu gradijentne jednadžbe (8) i provodi se analogan mješoviti postupak diskretizacije. Pritom se prvo jednadžba diskretizira pomoću aproksimacije gradijenata pomaka, druge relacije u (12), te se zatvoreni i rješivi sustav jednadžbi dobiva primjenom kinematičkih relacija kojima se povezuju čvorne vrijednosti gradijenata pomaka ∇u_i^{g} i aproksimiranih čvornih pomaka primjenom prvog izraza u (12). Na taj način dobiva se sustav jednadžbi u kojima su čvorne nepoznanice samo čvorni pomaci $\hat{u}_i^{\mathrm{g}}$. Primjenom adekvatnih kinematičkih relacija (5) i konstitutivne jednadžbe (2) mogu se izračunati sva ostala potrebna polja problema.

3 NUMERIČKI PRIMJERI

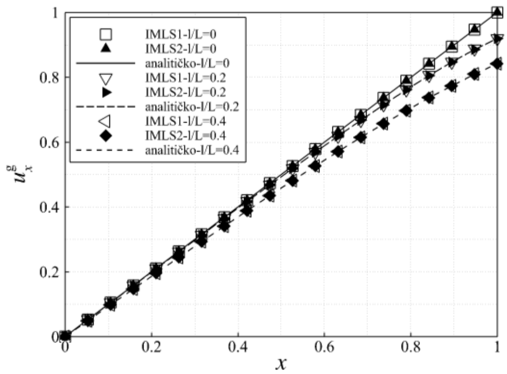
3.1 Osno opterećeni štap

Štap jedinične površine, duljine $L=1$, modula elastičnosti $E=1$ opterećen je silom $F=1$ na desnom kraju. Na oba kraja štapa nametnuti su klasični i gradijentni rubni uvjeti prema slici 2. Rubni uvjet $u^{\mathrm{g\,AN}}$ nametnut na desnom kraju gradijentnog problema izračunat je analitičkim rješavanjem cjelovitog problema gradijentne elastičnosti s nametnutim pripadnim rubnim uvjetima [6].

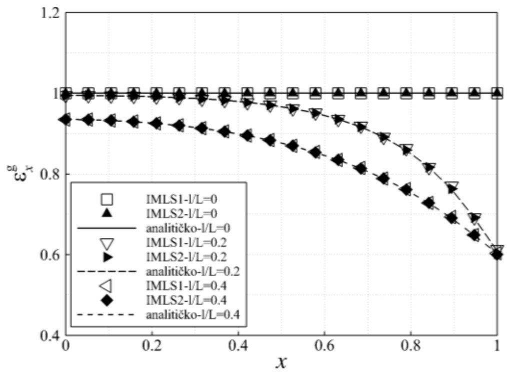


Sl. 2. Štap s rubnim uvjetima

Na slikama 3 i 4 prikazane su raspodjela pomaka u_x^{g} i deformacije $\varepsilon_x^{\mathrm{g}}$ po duljini štapa izračunate za različite vrijednosti mikrostrukturalnog parametra l te su rješenja uspoređena s analitičkim rješenjima [6]. Štap je diskretiziran s 20 jednako razmaknutih čvorova dok su za konstrukciju funkcija oblika korištene IMLS aproksimacije prvog i drugog stupnja.



Sl. 3. Raspodjela pomaka u_x^{g}

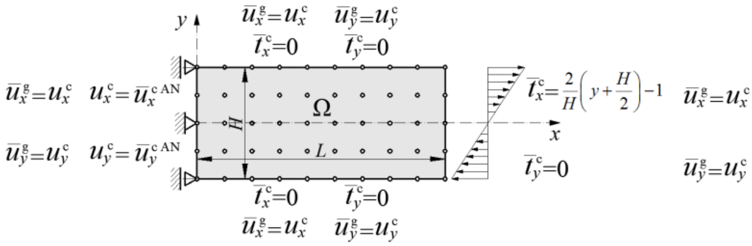


Sl. 4. Raspodjela deformacije $\varepsilon_x^{\mathrm{g}}$

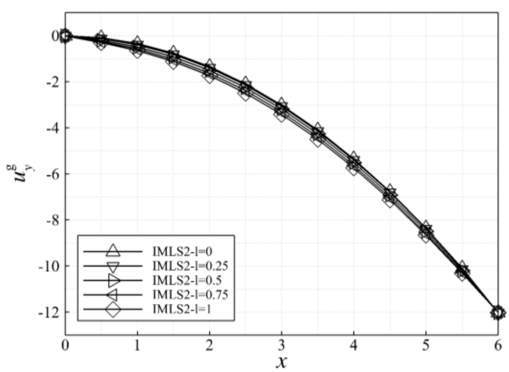
Na slikama 3 i 4 vidljivo je da se primjenom mješovitog pristupa i stupnjevane strategije rješavanja gradijentnog problema mogu točno opisati raspodjele pomaka i deformacija za proizvoljno odabranu vrijednost Aifantisovog parametra kao i proizvoljni stupanj IMLS aproksimacije. Također, potrebno je napomenuti da za vrijednost parametra $l = 0$ numerički model točno reproducira klasično rješenje problema.

3.2 Membrana opterećena linearnim površinskim opterećenjem

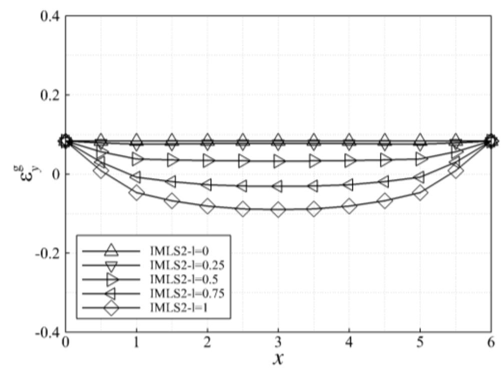
Membrana jedinične debljine, visine $H = 3$, duljine $L = 6$ opterećena je na desnom kraju linearnim opterećenjem u smjeru osi x. Svi korišteni klasični i gradijentni rubni uvjeti problema prikazani su na slici 5. Pritom su analitička rješenja zadana po lijevom rubu membrane kod klasičnog problema preuzeta iz rješenja dobivenog jednadžbama teorije elastičnosti.



Sl. 5. Membrana s rubnim uvjetima



Sl. 6. Raspodjela pomaka u_y^{g}



Sl. 7. Raspodjela deformacije $\varepsilon_y^{\mathrm{g}}$

Konstante elastičnosti membrane jednake su $E = 1$ i $\nu = 0.25$. Membrana je diskretizirana s jednoliko razmaknutim čvorovima u oba smjera. Pritom je korištena diskretizacija s 91-im čvorom. S obzirom da su ovdje funkcije koje opisuju točnu raspodjelu klasičnog pomaka po membrani polinomi drugog stupnja, za analizu su korištene samo bezmrežne aproksimacijske funkcije drugog stupnja. Na slikama 6 i 7 prikazane su raspodjele pomaka u_y^{g} i deformacije $\varepsilon_y^{\mathrm{g}}$ u smjeru *x* duž koordinate $y = 1$. Sa dijagrama prikazanih na slikama može se zaključiti da za nultu vrijednost mikrostrukturalnog parametra numerički model točno opisuje klasično rješenje problema. Također vidljivo je da primjena gradijente teorije omogućava efekt zaglađivanja polja deformacija što može biti velika prednost ukoliko u modelu postoji više materijala različitih materijalnih karakteristika.

4 ZAKLJUČAK

Bezmrežne metode korištene za modeliranje deformiranja materijala primjenom gradijentnih teorija većinom se oslanjanju na korištenje visokog kontinuiteta funkcija oblika koji se lako postiže kod tih numeričkih metoda. Pritom je i dalje potrebno izračunavati visoke derivacije funkcija oblika što povećava računalne troškove. U prikazanoj bezmrežnoj mješovitoj metodi koja se temelji na stupnjevanom rješavanju diferencijalnih jednadžbi drugog reda funkcije moraju posjedovati samo C^1 kontinuitet čime se direktno povećava numerička točnost. Odnosno, za sklapanje čvornih matrica krutosti kod obje sastavne jednadžbe problema potrebno je izračunavati samo prve derivacije funkcija oblika. Analizom numeričkih primjera može se zaključiti da metoda opisuje fizikalno točan odziv konstrukcija. U daljnjim radovima metoda će biti primijenjena na modeliranje deformiranja heterogenih materijala.

Financijska potpora

Ovaj rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom „Multiscale Numerical Modeling of Material Deformation Responses from Macro- to Nanolevel“ (2516).

Literatura:

[1] Atluri, S.N., Liu, H.T., Han, Z.D., “Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Mixed Collocation Method for Elasticity Problems“, CMES, Vol.14, No.3, 2006, 141-152.

[2] Askes, H., Morata, I., Aifantis, E.C., “Finite element analysis with staggered gradient elasticity“, Computers & Structures, Vol.86, 2008, 1266-1279.

[3] Amanatidou, E., Aravas, N., “Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems“, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.191, No.15-16, 2002, 1723-1751.

[4] Most, T., Bucher, C., “New Concepts for Moving Least Squares: An Interpolating Non-singular Weighting Function and Weighted Nodal Least Squares”, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.32, No.6, 2008, 461–470.

[5] Papargyri-Beskou, S., Beskos, D., “Static Analysis of Gradient Elastic Bars, Beams, Plates and Shells“, The Open Mechanics Journal, Vol.4, 2010, 65-73.

Autori:

Boris Jalušić, Tomislav Jarak, Jurica Sorić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5 10002 Zagreb, tel: 016168/ 115, 514, 103, fax: 01 6168 187, e-mail: boris.jalusic@fsb.hr, tomislav.jarak@fsb.hr, jurica.sorić@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/