Sedmi susret Hrvatskoga društva za mehaniku
Split, 16.-17. lipnja 2016.

LINEARNO ELASTIČNI IZOTROPNI MIKROPOLARNI KONTINUUM – USPOREDBA S KLASIČNIM KONTINUUMOM U RAVNINSKIM PROBLEMIMA

Grbčić, S., Jelenić, G.

Sažetak: U radu je dana motivacija za izvođenjem mikropolarne teorije, koja spada u alternativne teorije kontinuuma i izveden je analitički model linearnog izotropnog mikropolarnog kontinuuma koji obuhvaća ravnotežne, kinematičke i konstitutivne jednadžbe. Prilikom izvođenja kinematičkih jednadžbi u ravnini korišten je direktan geometrijski pristup. Analitički model je zatim implementiran na metodu konačnih elemenata za ravninsko stanje naprezanja ili deformacija korištenjem standardnih trokutnih konačnih elemenata s linearnom interpolacijom pomaka i mikrorotacija (CST). U zadnjem djelu rada napravljen je patch test za slučaj mikropolarne teorije.

Ključne riječi: *mikropolarni kontinuum, mikrorotacija, momentna naprezanja, metoda konačnih elemenata*

1 UVOD

Analitički rezultati dobiveni na temelju klasične (Cauchyjeve) teorije kontinuuma se u većini slučajeva poklapaju s eksperimentalnim rezultatima, naročito kod materijala kao što su čelik i beton, gdje se analizirani uzorak ponaša kao homogeni medij, međutim uočene su razlike u slučajevima drugih, na primjer polimernih materijala, kod kojih vrijednosti materijalnih konstanti ovise o veličini analiziranog uzorka (*size-effect*), što klasična teorija ne predviđa. Također, proračun naprezanja u blizini pukotina daje veće vrijednosti od eksperimentalnih rezultata [6]. Razlog tome je značajna uloga mikrostrukture materijala koju klasična teorija kontinuuma zanemaruje. S ciljem stvaranja unificirane teorije kontinuuma razvile su se različite alternativne teorije među kojima je i mikropolarna (Cosseratova) teorija kontinuuma. Za razliku od klasične teorije, gdje je interakcija između dvije čestice tijela opisana samo vektorom sile, mikropolarna teorija kontinuuma pretpostavlja da na površini djeluje dodatni vektor sprega (*couple-stress vector*) koji rezultira dodatnim momentnim naprezanjima (*couple stresses*). Također, mikropolarna teorija kontinuuma predviđa i dodatno kinematičko polje (*mikrorotaciju*), koje svakoj točki tijela dodjeljuje orijentaciju i potpuno je neovisno o makrorotaciji, koja proizlazi iz rotacijskog dijela gradijenta deformiranja [2]. Kao rezultat slijedi da su u mikropolarnoj teoriji kontinuuma i tenzor deformacija i tenzor naprezanja *nesimetrični*. Linearno elastični izotropni mikropolarni kontinuum u 3D prostoru ima ukupno šest međusobno nezavisnih materijalnih konstanti.

2 ANALITIČKI MODEL LINEARNOG MIKROPOLARNOG KONTINUUMA

Promatrajmo tijelo B volumena *V* i oplošja *S* u deformiranoj konfiguraciji, u kojem je materijalna čestica *X* određena vektorom položaja $\boldsymbol{x}$. Na tijelo djeluje kontinuirano volumno opterećenje $\boldsymbol{p_v}$ i $\boldsymbol{m_v}$ i kontinuirano površinsko opterećenje $\boldsymbol{p_s}$ i $\boldsymbol{m_s}$, gdje je $\boldsymbol{p_v}$ specifična volumna sila, $\boldsymbol{m_v}$ specifični volumni moment, $\boldsymbol{p_s}$ specifična površinska sila i $\boldsymbol{m_s}$ specifični površinski moment.
Kada bismo tijelo B presjekli zamišljenom plohom P, svaki dio tijela bi ostao u ravnoteži samo ukoliko na presječenim površinama djeluju točno određene sile i momenti. Prema Cauchyjevom principu, na proizvoljnoj površini ΔS djeluje vektor sile $\Delta\mathbf{F}$, a njihov međusobni omjer predstavlja srednju vrijednost vektora naprezanja $\bar{\boldsymbol{t}}$ [5]. Kako površina ΔS teži infinitezimalno maloj veličini dS, srednja vrijednost vektora naprezanja postaje polje vektora naprezanja $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n})$ koje predstavlja silu po jedinici površine i ovisno je o položaju $\boldsymbol{x}$, vremenu t i normali na površinu $\boldsymbol{n}$. Cauchy je dokazao da vrijedi $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{n}$, gdje je $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)$ Cauchyjev tenzor naprezanja [5]**.** Kod mikropolarne (Cosseratove) teorije, za opisivanje ravnoteže presječenog tijela, uz djelovanje vektora sile $\Delta\mathbf{F}$, pretpostavljamo dodatno djelovanje *sprega* $\Delta\mathbf{M}$ [6]. Promatranjem površine na infinitezimalno maloj razini i generalizacijom Cauchyjevog principa dokazuje se linearna ovisnost polja sprega $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n})$ (*couple-stress*) i normale $\boldsymbol{n}$ te postojanje dodatnog tenzora momentnih naprezanja $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, t)$ (*couple-stress tensor*):

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{n}. \tag{1}$$

2.1 Ravnotežne jednadžbe

Promotrimo sada tijelo B u deformiranoj konfiguraciji pod utjecajem vanjskog opterećenja $\boldsymbol{p_v}$, $\boldsymbol{m_v}$, $\boldsymbol{p_s}$ i $\boldsymbol{m_s}$. Oplošje tijela S neka bude podijeljeno na dva dijela, S_p s predodređenim površinskim opterećenjem i S_u s predodređenim pomacima i rotacijama. Analizom diferencijalnog volumena dV i sumiranjem sila u smjeru osi x_1, x_2, x_3 dobivamo prvu ravnotežnu jednadžbu u matričnom obliku:

$$\boldsymbol{\sigma}\nabla + \boldsymbol{p_v} = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

gdje ∇ operator parcijalnih derivacija [7]. Iz momentnih ravnotežnih jednadžbi oko osi x_1, x_2, x_3 dobivamo drugu ravnotežnu jednadžbu, koja u matričnom obliku glasi:

$$\boldsymbol{\mu}\nabla + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{m_v} = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

gdje je $\boldsymbol{a}$ aksijalni vektor dvostrukog anti-simetričnog dijela tenzora naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$ [5], odnosno

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{axial}(2\boldsymbol{\sigma_a}) = \begin{Bmatrix} \sigma_{32} - \sigma_{23} \\ -\sigma_{31} + \sigma_{13} \\ \sigma_{21} - \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Iz jednadžbi (2) i (3) vidimo da, za razliku od klasične teorije, u mikropolarnoj teoriji tenzor naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$ nije nužno simetričan. Anti-simetrični dio tenzora naprezanja posljedica je djelovanja momentnog volumnog opterećenja i divergencije tenzora momentnih naprezanja, div $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}\nabla$.
Analizom diferencijalne površine na dijelu oplošja tijela s predodređenim površinskim opterećenjem i sumiranjem sila i momenata u smjeru osi x_1, x_2, x_3 dobivamo sljedeće rubne uvjete:

$$\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}_s, \qquad \boldsymbol{\mu}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}_s. \tag{5}$$

2.2 Kinematičke jednadžbe

Druga grupa jednadžbi koja opisuje promatrani problem su kinematičke jednadžbe, koje povezuju deformacije i pomake. U ovom radu one su izvedene usporedbom geometrije nedeformiranog i deformiranog stanja tijela. Detaljan opis direktnog pristupa izvođenja kinematičkih jednadžbi dan je u [3].

Razlika položaja promatrane čestice između nedeformiranog i deformiranog stanja jest *pomak* čestice **u**. Komponente pomaka u_1, u_2, u_3 ovisne su o koordinatama x_1, x_2, x_3. U mikropolarnoj teoriji postoji dodatno kinematičko polje - mikrorotacija $\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3)$. Mikrorotacija predstavlja lokalnu rotaciju čestice i potpuno je neovisna o polju pomaka **u**. Promatramo ravninsko deformiranje tijela, što znači da pomak **u** i mikrorotacija $\boldsymbol{\varphi}$ ovise samo o x_1, x_2 dok su $u_3 = 0$ i $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Kao posljedica vanjskog opterećenja, tijelo se deformira i zauzima novi položaj. Normalne deformacije ϵ_{11} i ϵ_{22} definirane su kao promjena duljine materijalnog vlakna u odnosu na početnu duljinu, u slučaju kada početna duljina teži nuli. Analiziranjem tijela na diferencijalnoj razini dobivamo:

$$\epsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \varepsilon_{ii}, \quad i = 1,2,3, \tag{6}$$

odakle vidimo da su normalne deformacije u mikropolarnoj teoriji (ϵ_{ii}) jednake normalnim deformacijama u klasičnoj teoriji (ε_{ii}) što znači da mikrorotacija $\boldsymbol{\varphi}$ ne doprinosi produljenju ili skraćenju materijalnog vlakna. Doprinos mikrorotacije očituje se u formiranju posmičnih deformacija $\epsilon_{ij}, \; i,j = 1,2,3, \; i \neq j$. Mikropolarna posmična deformacija jednaka je razlici između promjene nagiba materijalnog vlakna tijekom deformacije (ψ) i mikrorotacije $\boldsymbol{\varphi}$. U ravnini x_1, x_2, dakle

$$\epsilon_{21} = \psi - \varphi_3. \tag{7}$$

Razvijanjem funkcija u_1, u_2 u Taylorov red i uzimajući u obzir da $\Delta x_1 \to 0$ dobivamo

$$\epsilon_{ij} = u_{i,j} + \varepsilon_{kij}\varphi_k. \tag{8}$$

S obzirom da imamo dodatno kinematičko polje $\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3)$ imamo i dodatnu kutnu deformaciju (zakrivljenost) koja je posljedica djelovanja momentnih naprezanja. Za ravninsko stanje, zakrivljenost κ_{31} je definirana kao promjena mikrorotacije $\varphi_3(x_1, x_2)$ duž osi x_1, odnosno

$$\kappa_{31} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\varphi_3(x_1 + \Delta x_1, x_2) - \varphi_3(x_1, x_2)}{\Delta x_1}. \tag{9}$$

Analogno dobivamo rezultat za κ_{32}, a raspisivanjem funkcija u Taylorov red te generalizacijom na 3D dobivamo da je tenzor zakrivljenosti $\boldsymbol{\kappa}$ jednak

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathrm{grad}\, \boldsymbol{\varphi}. \tag{10}$$

Dijagonalni članovi u $\boldsymbol{\kappa}$ predstavljaju torzijske deformacije (uzdužna zakrivljenost) koje je moguće prikazati samo u 3D.

2.3 Konstitutivne jednadžbe

Općenita veza između dva tenzora drugog reda $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ opisana je pomoću tenzora četvrtog reda **T** koji se naziva konstitutivni tenzor**.** U komponentnom zapisu:

$$\sigma_{ij} = T_{ijpq}\varepsilon_{pq}, \quad i, j, p, q = 1,2,3. \tag{11}$$

Analiziramo linearno elastičan i izotropan kontinuum, što znači da komponente konstitutivnog tenzora **T** ostaju nepromijenjene prilikom ortogonalne transformacije [7]. Općeniti oblik izotropnog tenzora četvrtog reda ima komponente oblika:

$$T_{ijpq} = \lambda\delta_{ij}\delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) + \nu(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}), \tag{12}$$

gdje λ, μ i ν predstavljaju materijalne parametre (konstante) i imaju iste vrijednosti u svim koordinatnim sistemima, a δ_{ip} je Kroneckerov simbol [4]. U mikropolarnoj teoriji imamo dodatni tenzor momentnih naprezanja $\boldsymbol{\mu}$ povezan s dodatnim tenzorom rotacijskih deformacija $\boldsymbol{\kappa}$ preko novog izotropnog konstitutivnog tenzora. Budući da su tenzori naprezanja nesimetrični, oba konstitutivna tenzora će sadržavati svih šest međusobno nezavisnih materijalnih konstanti. Konstitutivne jednadžbe mikropolarnog kontinuuma u komponentnom obliku jednake su:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \epsilon_{pp} \delta_{ij} + (\mu + \nu)\epsilon_{ij} + (\mu - \nu)\epsilon_{ji}, \\ \mu_{ij} &= \gamma \kappa_{pp} \delta_{ij} + (\alpha + \beta)\kappa_{ij} + (\alpha - \beta)\kappa_{ji}, \end{aligned} \tag{13}$$

gdje su $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ materijalne konstante koje opisuju ponašanje linearnog izotropnog mikropolarnog kontinuuma. U klasičnoj teoriji imamo jedan tenzor naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$ i jedan tenzor deformacija $\boldsymbol{\varepsilon}$**,** od kojih su oba simetrična**.** Posljedično i konstitutivni tenzor $\mathbf{T}$ mora biti simetričan te treći član njegovog općenitog oblika (12) otpada. Ponašanje materijala tada je opisano pomoću dvije materijalne konstante μ i λ, poznate kao Lamè-ove konstante [5].

3 IMPLEMENTACIJA NA METODU KONAČNIH ELEMENATA ZA RAVNINSKO STANJE NAPREZANJA ILI DEFORMACIJA

Za rješavanje problema uobičajeno se koriste numeričke metode, od kojih ćemo se ovdje ograničiti na metodu konačnih elemenata (MKE). Virtualni rad unutarnjih sila mora biti jednak virtualnom radu vanjskih sila na sustavu koji se nalazi u statičkoj ravnoteži za proizvoljni, kinematički dopustivi, infinitezimalni, virtualni pomak i mikrorotaciju:

$$V_i = V_e. \tag{14}$$

Promatramo stanje naprezanja i deformacija u ravnini:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix}, \ \boldsymbol{\mu} = \begin{Bmatrix} \mu_{31} \\ \mu_{32} \end{Bmatrix}, \ \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_{31} \\ \kappa_{32} \end{Bmatrix}. \tag{15}$$

Virtualni rad unutarnjih sila jednak je:

$$V_i = \int_V (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\mu}) \, dV, \tag{16}$$

gdje su $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ i $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ vektori virtualnih deformacija i virtualnih zakrivljenosti koje u transponiranom obliku možemo zapisati kao $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{\boldsymbol{T}} = \bar{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{D_u} + \bar{\varphi}_3 \, \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\varphi}}^{\boldsymbol{T}}$, gdje su $\boldsymbol{D_u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\varphi}}^{\boldsymbol{T}} = \langle 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \rangle$. Vektor $\bar{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{T}}$ zapisujemo kao $\bar{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{T}}=\bar{\varphi}_3 \boldsymbol{D_\varphi}$, gdje je $\boldsymbol{D_\varphi} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle$**.** Vektor $\bar{\boldsymbol{u}}$ predstavlja vektor virtualnih pomaka, a $\bar{\varphi}_3$ predstavlja funkciju virtualnih mikrorotacija. Konstitutivne jednadžbe definirane u poglavlju 2.3. za ravninsko stanje deformacija se svode na:

$$\begin{gathered} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu + \nu & \mu - \nu & 0 \\ 0 & \mu - \nu & \mu + \nu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}}_{\mathbf{C_1}} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \mu_{31} \\ \mu_{32} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{C_2}} \begin{Bmatrix} \kappa_{31} \\ \kappa_{32} \end{Bmatrix}. \end{gathered} \tag{17}$$

gdje su $\mathbf{C}_1$ **i** $\mathbf{C}_2$ konstitutivne matrice. Iz gornjih jednadžbi dobivamo sljedeći matrični oblik virtualnog rada unutarnjih sila:

$$V_i = \int_V \left(\bar{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{D_u} + \bar{\varphi}_3\, \boldsymbol{I_\varphi^T}\right) \boldsymbol{C_1} \left(\boldsymbol{D_u^T u} + \varphi_3 \boldsymbol{I_\varphi}\right) + (\bar{\varphi}_3\, \boldsymbol{D_\varphi}) \boldsymbol{C_2} (\varphi_3\, \boldsymbol{D_\varphi^T})\, dV, \quad (18)$$

dok je virtualni rad vanjskih sila jednak

$$V_e = \int_V \left(\bar{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{p_v} + \bar{\varphi}_3\, m_{v3}\right) dV + \int_S \left(\bar{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{p_s} + \bar{\varphi}_3\, m_{s3}\right) dS. \quad (19)$$

Za diskretizaciju 2D mreže odabrali smo trokutni konačni element (CST) s 3 čvora i 3 stupnja slobode po čvoru (horizontalni pomak, vertikalni pomak i mikrorotacija). Pretpostavimo linearnu razdiobu polja pomaka i polja mikrorotacije duž elementa. Polja pomaka i mikrorotacije možemo matrično zapisati kao

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N_u}\, \boldsymbol{\rho}, \qquad \bar{\varphi}_3 = \boldsymbol{N_\varphi}\, \boldsymbol{\rho}, \quad (20)$$

gdje je $\boldsymbol{\rho}$ vektor čvornih nepoznanica elementa. Virtualni rad konačnog elementa j je tada jednak:

$$\begin{gathered} V_j = \bar{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{T}} \int_{V'} [\left(\boldsymbol{N_u}^T \boldsymbol{D_u} + \boldsymbol{N_\varphi}^T \boldsymbol{I_\varphi^T}\right) \boldsymbol{C_1} \left(\boldsymbol{D_u^T N_u} + \boldsymbol{I_\varphi N_\varphi}\right) + \\ \left(\boldsymbol{N_\varphi}^T \boldsymbol{D_\varphi}\right) \boldsymbol{C_2} \left(\boldsymbol{D_\varphi^T N_\varphi}\right)] dV \boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{T}} \int_{V'} (\boldsymbol{N_u}^T \boldsymbol{p_v} + \boldsymbol{N_\varphi}^T m_{v3}) dV - \\ \bar{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{T}} \int_{S'} (\boldsymbol{N_u}^T \boldsymbol{p_s} + \boldsymbol{N_\varphi}^T m_{s3}) dS = \bar{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{T}} (\mathbf{K}_j \boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}_j), \end{gathered} \quad (21)$$

gdje je $\mathbf{K}_j$ matrica krutosti elementa i $\mathbf{R}_j$ vektor vanjskog opterećenja elementa. Suma virtualnih radova svih konačnih elemenata mora biti jednaka nuli, odnosno

$$\sum_{j=1}^{n} V_j = 0 \rightarrow \mathbf{K}\boldsymbol{r} - \mathbf{R} = 0, \quad (22)$$

gdje je n broj konačnih elemenata, $\mathbf{K}$ globalna matrica krutosti, $\mathbf{R}$ globalni vektor vanjskog opterećenja i $\boldsymbol{r}$ globalni vektor nepoznatih čvornih pomaka i rotacija.

4 NUMERIČKI PRIMJER

Za validaciju konačnog elementa simulira se stanje uniformnog naprezanja koje rezultira konstantnom deformacijom. Takav test naziva se *patch test*. Ako element prolazi patch test, rješenja koja se dobivaju progušćivanjem mreže konačnih elemenata, konvergirati će prema egzaktnom rješenju promatranog problema [1]. U mikropolarnoj teoriji javljaju se poteškoće u definiranju ravnotežnih stanja prilikom konstantne deformacije zbog postojanja nezavisnog polja mikrorotacije. Prema [8], potpuni patch test za Cosseratov kontinuum sastoji se od tri testa. Prvim testom potrebno je dokazati da je konačni element sposoban reproducirati stanje konstantne deformacije za slučaj kada su posmične deformacije na međusobno okomitim ravninama jednake, odnosno $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$, što je slučaj klasične teorije. Drugim testom se također provjerava stanje konstantne deformacije, ali za slučaj nesimetričnosti tenzora deformacija, tj. $\epsilon_{12} \neq \epsilon_{21}$. U prva dva testa su komponente zakrivljenosti jednake nuli, stoga je potrebno napraviti i treći test gdje će ravnotežno stanje biti opisano konstantnom zakrivljenošću. Rubni uvjeti i opterećenje za provedbu testova dani su u [8]. U nastavku je prikazana numerička analiza za slučaj simetričnosti tenzora deformacija (Test 1).

4.1 Patch test

Analizirana je pravokutna domena, integrirana proizvoljno postavljenim trokutnim konačnim elementima (CST). Domena obuhvaća 7 točaka:

$$\begin{gathered} T_1 = (0,0),\ T_2 = (0.24,0),\ T_3 = (0,0.12),\ T_4 = (0.24,0.12), \\ T_5 = (0.1,0.03),\ T_6 = (0.2,0.06),\ T_7 = (0.05,0.1), \end{gathered} \quad (23)$$

i podijeljena je na 8 konačnih elemenata. Materijalne konstante mikropolarnog kontinuuma jednake su $\alpha+\beta=40,\ \mu=1000,\ \nu=500,\ \lambda=1000.$ Test se sastoji od zadavanja horizontalnih i vertikalnih pomaka i rotacija u rubnim čvorovima prema ovakvoj raspodjeli pomaka i rotacija po domeni:

$$u_1=10^{-3}\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right),\ \ u_2=10^{-3}(x_1+x_2),\ \ \varphi_3=\frac{1}{4}\times 10^{-3}, \qquad (24)$$

gdje su x_1i x_2 koordinate točaka. Opterećenje sustava jednako je $p_1=p_2=m_3=0$. Zahtjev koji treba biti zadovoljen jest da su pomaci i rotacije unutrašnjih čvorova jednaki onima koji proizlaze iz (24). Rješavanjem sustava dobivaju se sljedeći čvorni pomaci:

$$\begin{gathered} T_5\rightarrow u_1=0.00115,\ u_2=0.0013,\ \ \varphi_3=0.0025, \\ T_6\rightarrow u_1=0.0023,\ u_2=0.0026,\ \ \varphi_3=0.0025, \\ T_7\rightarrow\ u_1=0.001,\ u_2=0.0015,\ \ \varphi_3=0.0025. \end{gathered} \qquad (25)$$

Pomaci unutarnjih točaka zadovoljavaju traženi uvjet, što znači da trokutni konačni element s linearnom interpolacijom zadovoljava test konstantne deformacije za slučaj simetričnosti tenzora deformiranja.

5 ZAKLJUČAK

Izveden je analitički model linearnog izotropnog mikropolarnog kontinuuma i prikazana je implementacija modela na metodu konačnih elemenata. Korištena je interpolacija trokutnim konačnim elementima s tri čvora (CST) što znači da su oba kinematička polja (pomak i mikrorotacija) linearno interpolirani. Prema literaturi [8], napravljen je prvi od ukupno tri potrebna testa za validaciju konačnog elementa. Trokutni konačni element s linearnom interpolacijom prolazi patch test za slučaj simetričnosti tenzora deformacija.

Zahvala. Rezultati prikazani u ovom radu dobiveni su u sklopu rada na projektu IP 1631 Hrvatske zaklade za znanost (Configuration-dependent approximation in non-linear finite-element analysis of structures)

Literatura:

[1] Cook, R. D., *Finite Element Modeling for Stress Analysis*, J. W. & S, New York, 1995.

[2] Eringen, A. C., *Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids*, Springer-Verlag, New York, 2012.

[3] Grbčić, S., *Micropolar Elasticity- Equilibrium, Kinematic and Constitutive Equations*, seminarski rad iz predmeta "Primjenjena viša matematika", Rijeka 2016.

[4] Jeffreys, H., *Cartesian Tensors*, Cambridge University Press, Cambridge, 1957.

[5] Malvern, L. E., *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, Inc, New Jersey, 1969.

[6] Nowacki, W., *Theory of micropolar elasticity*, Springer-Verlag, Vienna, 1972.

[7] Ogden, R. W., *Non-Linear Elastic Deformations*, Dover Publications, Inc., Mineaola, New York, 2013.

[8] Providas, E., Kattis, M.A., *Finite element method in plane Cosserat elasticity*, Computers and structures 80 (2002) 2059-2069

Sara Grbčić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051/265-956,
e-mail: sara.grbcic@uniri.hr web stranica: https://portal.uniri.hr/Portfelj/2375

Gordan Jelenić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, tel. 051/265-955, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr web stranica: https://portal.uniri.hr/Portfelj/194