PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
Odjel za matematiku

Iva Budimir

Matrični diferencijalni račun

Diplomski rad

Split, lipanj 2016.

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
Odjel za matematiku

Iva Budimir

Matrični diferencijalni račun

Diplomski rad

Voditeljica rada:
doc.dr.sc. Snježana Braić

Neposredni voditelj:
dr.sc. Ivo Ugrina

Split, lipanj 2016.

Sadržaj

Uvod

Matrice imaju važnu ulogu u matematici i njenim primjenama. Primjerice, matrično možemo prikazati djelovanje linearnih operatora, a sustave jednadžbi s velikim brojem nepoznanica najpogodnije je zapisati u matričnoj formi. Još jedan temeljni matematički pojam je diferencijabilnost. Ovaj diplomski rad povezuje ta dva pojma i navodi brojne rezultate matričnog diferencijalnog računa.

Diplomski rad se sastoji od dva poglavlja. U prvom poglavlju dan je kratak pregled teorije matrica i osnovni pojmovi diferencijalnog računa s naglaskom na diferencijabilnost matričnih funkcija. Drugo poglavlje je jezgra ovoga rada. U njemu se izvode diferencijali poznatih matričnih funkcija poput determinante, inverza matrice, svojstvene vrijednosti i mnogih drugih. Pojavljuju se i derivacije matričnih funkcija no one se izvode iz diferencijala tako da je glavni naglasak stavljen upravo na diferencijalni račun.

Ovim radom dan je uvod u područje diferencijabilnosti matričnih funkcija i zbog obilja navedenih primjera daje dobre temelje za daljne proučavanje ovoga područja. Može poslužiti i kao dodatna literatura iz pojedinih kolegija u kojima se pojavljuju matrične jednadžbe te se primjerice deriviranjem traže ekstremi postavljenih jednadžbi.

1 Osnovni pripremni matematički rezultati i pojmovi

1.1 Matrice

U ovom poglavlju ćemo se prisjeti definicije matrice i nekih temeljnih pojmova vezanih uz matrice. Uz to ćemo uvesti i nove pojmove poput Kroneckerovog i Hadamardovog produkta te vec operatora i navesti važne rezultate o njima. Neke će tvrdnje u nastavku teksta biti iskazane bez dokaza, a zainteresirani čitatelj može ih pronaći u [2] (poglavlja 9 i 10) i [1] (poglavlja 1, 2 i 3).

Matrica tipa $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}$, je pravokutan niz brojeva

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1.1}$$

Matricu kraće zapisujemo kao $A = (a_{ij})$, a skalare a_{ij} nazivamo *elementima* matrice A. Općenito se matrica može definirati nad bilo kojim poljem no mi ćemo promatrati matrice nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva, tj. pretpostaviti ćemo $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ili $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Matricu možemo shvatiti i kao jednu točku u prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$, odnosno $\mathbb{C}^{m\times n}$.

Za matricu tipa $m \times 1$ kažemo da je *stupčana matrica* ili matrica stupac, a za matricu tipa $1 \times n$ da je *redčana matrica* ili matrica redak. Stupčanu matricu često nazivamo samo vektorom te poistovjećujemo prostore $\mathbb{R}^{m\times 1}$ i $\mathbb{R}^m$, tj. $\mathbb{C}^{m\times 1}$ i $\mathbb{C}^m$. Matrica tipa $n \times n$ naziva se *kvadratna matrica* i pritom kažemo da je to kvadratna matrica reda n. Njenu glavnu dijagonalu čini n-torka $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. *Dijagonalna matrica* je kvadratna matrica koja samo na glavnoj dijagonali ima elemente različite od nula. Ako je A dijagonalna matrica reda n s elementima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ na glavnoj dijagonali to zapisujemo kao $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Oznakom I standardno označavamo jediničnu matricu $I = \mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1)$, a s oznakom 0 nul-matricu kojoj su svi elementi jednaki 0. Primijetimo da je jedinična matrica nužno kvadratna dok nul-matrica može biti općeg tipa $m \times n$.

Na prirodan način uvodimo zbrajanje matrica istog tipa. Neka su A i B matrice tipa $m \times n$. Tada je $A + B$ matrica tipa $m \times n$ čiji je element na poziciji (i, j) jednak $a_{ij} + b_{ij}$.

Množenjem matrice $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$ skalarom λ dobivamo matricu λA tipa $m \times n$ koja na poziciji (i, j) ima element λa_{ij}.

Neka je $A = (a_{ij})$ matrica tipa $m \times n$ i $B = (b_{ij})$ matrica tipa i $n \times p$. Umnožak matrica AB je matrica tipa $m \times p$ koja na poziciji (i, j) ima element $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Općenito ne vrijedi $AB = BA$ čak i kada su oba produkta dobro definirana. Potenciju kvadratne matrice A definiramo induktivno $A^n = AA^{n-1}$ i uzimamo da je $A^0 = I$. Za matricu za koju vrijedi $A^2 = A$, a onda posljedično i $A^n = A$, kažemo da je *idempotentna.*

Za navedene operacije vrijedi

$$
\begin{aligned}
A + B &= B + A, && (1.1.2)\\
(A + B) + C &= A + (B + C), && (1.1.3)\\
(\lambda + \mu)A &= \lambda A + \mu A, && (1.1.4)\\
\lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B, && (1.1.5)\\
\lambda(\mu A) &= (\lambda\mu)A, && (1.1.6)\\
(AB)C &= A(BC), && (1.1.7)\\
A(B + C) &= AB + AC, && (1.1.8)\\
(A + B)C &= AC + BC. && (1.1.9)
\end{aligned}
$$

gdje su A, B i C matrice i λ, μ skalari dani tako da su sve operacije dobro definirane.

Neka je A kvadratna matrica reda n. Kažemo da je A *regularna* matrica ako postoji kvadratna matrica X reda n takva da vrijedi $AX = XA = I$, gdje je I jedinična matrica. U tom slučaju X nazivamo *inverzom matrice* A i označavamo s A^{-1}. Za kvadratnu matricu koja nije regularna kažemo da je *singularna.*

Za dvije kvadratne matrice A, B reda n kažemo da su *slične* ako postoji regularna matrica T reda n takva da vrijedi $B = T^{-1}AT$. Primijetimo da u tom slučaju vrijedi i $A = (T^{-1})^{-1}BT^{-1} = TBT^{-1}$ pa je relacija sličnosti simetrična.

Neka je $A = (a_{ij})$ matrica tipa $m \times n$. *Transponirana matrica* matrice A je matrica tipa $n \times m$ čiji je element na poziciji (j, i) jednak elementu a_{ij}, za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Transponiranu matricu matrice A označavamo s A'. Vrijede sljedeća svojstva transponiranja:

$$
\begin{aligned}
(A')' &= A, && (1.1.10)\\
(A + B)' &= A' + B', && (1.1.11)\\
(AB)' &= B'A'. && (1.1.12)
\end{aligned}
$$

Za matricu A za koju vrijedi $A = A'$ kažemo da je *simetrična.* Simetrična matrica očito mora biti kvadratna. Za kvadratnu matricu A za koju vrijedi $AA' = A'A = I$, tj. $A^{-1} = A'$ kažemo da je *ortogonalna.*

Za kompleksnu matricu $A = (a_{ij})$ uvodimo *konjugiranu matricu* $\overline{A}$ s elementom $\overline{a}_{ij}$ na poziciji (i, j). Djelujemo li na matricu A konjugiranjem i transponiranjem dobijemo *adjungiranu matricu* matrice A koju označavamo s $A^* = (\overline{A})' = \overline{A'}$. Primijetimo da za realnu matricu A vrijedi $\overline{A} = A$ i $A^* = A'$.

Iz navedenih svojstava slijedi da je skup svih matrica tipa $m \times n$ vektorski prostor. Uvedimo pojam norme vektora.

Euklidska norma $n \times 1$ matrice (vektora) x definira se kao

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = (x'x)^{1/2}. \tag{1.1.13}$$

1.1.1 Rang i trag matrice

Za skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kažemo da je *linearno nezavisan* ako iz $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ slijedi $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, gdje su α_i, $i = 1, \ldots, n$ skalari.. Ako $\{x_1, \ldots, x_n\}$ nije linearno nezavisan, onda kažemo da je *linearno zavisan.*

Neka je A matrica tipa $m \times n$. *Rang po stupcima* od A jednak je r ako se maksimalan skup linearno nezavisnih stupaca matrice A sastoji od r vektora (stupaca). Analogno, *rang po redcima* od A jednak je r' ako se maksimalan skup linearno nezavisnih redaka matrice A sastoji od r' vektora (redaka). Može se pokazati da su ta dva ranga jednaka pa govorimo samo o rangu matrice i označavamo ga s $\mathrm{r}(A)$. Očito je $\mathrm{r}(A) \leq \min\{m, n\}$. Navedimo još neke važne rezultate o rangu matrice:

$$\mathrm{r}(A) = 0 \text{ ako i samo ako je } A = 0, \tag{1.1.14}$$

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A') = \mathrm{r}(A'A) = \mathrm{r}(AA'), \tag{1.1.15}$$

$$\mathrm{r}(AB) \leq \min\{\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\}. \tag{1.1.16}$$

Neka je sada $A = (a_{ij})$ kvadratna matrica reda n. *Trag* matrice A, u oznaci $\mathrm{tr}\, A$ ili $\mathrm{tr}(A)$, je suma njenih dijagonalnih elemenata, tj.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{1.1.17}$$

Vrijedi:

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B, \tag{1.1.18}$$

$$\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{tr}\, A, \quad \text{ako je } \lambda \text{ skalar}, \tag{1.1.19}$$

$$\mathrm{tr}\, A' = \mathrm{tr}\, A, \tag{1.1.20}$$

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA). \tag{1.1.21}$$

Primijetimo da iako su u (1.1.21) AB i BA nužno kvadratne, AB i BA ne moraju biti istoga reda.

U skladu s (Euklidskom) normom vektora x

$$\|x\| = (x'x)^{1/2} \tag{1.1.22}$$

uvedenoj u (1.1.13), definiramo matričnu (Euklidsku) normu s

$$\|A\| = (\mathrm{tr}\, A'A)^{1/2}. \tag{1.1.23}$$

Primijetimo da je $A'A$ uvijek kvadratna matrica. Neka je $A = (a_{ji})$ matrica tipa $m \times n$, a elemente njoj transponirane matrice označimo s $A' = (a'_{ij})$. Tada vrijedi

$$\operatorname{tr} A'A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a'_{ij} a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^2. \tag{1.1.24}$$

Dakle, $\operatorname{tr} A'A \geq 0$ pa je matrična norma dobro definirana.

Napomenimo da su rang i trag invarijantne sličnosti, tj. dvije slične matrice imaju jednak rang i jednak trag.

Za matricu A tipa $m \times n$ je skup svih vektora $\{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = 0\}$ vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$ i njegovu dimenziju nazivamo *defekt* matrice A. Rang i defekt matrice su međusobno povezani, a točno vezu daje sljedeći važan teorem.

Teorem 1.1 (Teorem u rangu i defektu)**.** *Za matricu A tipa $m \times n$ suma njenog ranga i defekta jednaka je n.*

Kvadratna matrica A reda n je regularna ako i samo ako joj je rang jednak n. Prema Teoremu o rangu i defektu slijedi da je matrica regularna ako i samo ako joj je defekt jednak 0.

1.1.2 Determinanta matrice

Neka je A kvadratna $n \times n$ matrica s elementima a_{ij}. *Determinantu* matrice A označavamo s $|A|$ i definiramo kao

$$|A| = \sum (-1)^{\phi(j_1,\ldots,j_n)} \prod_{i=1}^{n} a_{ij_i}, \tag{1.1.25}$$

gdje se sumira po svim permutacijama $(j_1, \ldots, j_n)$ skupa $\{1, \ldots, n\}$, a $\phi(j_1, \ldots, j_n)$ označava broj transpozicija potrebnih da $(1, \ldots, n)$ prijeđe u $(j_1, \ldots, j_n)$ (transpozicija se sastoji od zamjene dvaju brojeva i može se pokazati da je broj transpozicija potrebnih da $(1, \ldots, n)$ prijeđe u $(j_1, \ldots, j_n)$ uvijek paran ili uvijek neparan pa je $(-1)^{\phi(j_1,\ldots,j_n)}$ dobro definirano).
Za determinantu vrijede sljedeća svojstva

$$|AB| = |A||B| \tag{1.1.26}$$
$$|A'| = |A| \tag{1.1.27}$$
$$|\alpha A| = \alpha^n |A|, \quad \text{za svaki skalar } \alpha, \tag{1.1.28}$$
$$|A^{-1}| = |A|^{-1}, \quad \text{ako je } A \text{ regularna}, \tag{1.1.29}$$
$$|I_n| = 1. \tag{1.1.30}$$

Može se pokazati da je kvadratna matrica regularna ako i samo ako joj je determinanta različita od nule. Determinanta je još jedna invarijanta sličnost, tj. slične matrice imaju jednaku determinantu.

1.1.3 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Neka je A kvadratna matrica reda n. *Karakteristični polinom* matrice A je polinom stupnja n dan sa $k_A(\lambda) = |\lambda I_n - A|$. *Minimalni polinom* $m_A(\lambda)$ matrice A je polinom minimalnog stupnja kojeg matrica A poništava. Može se pokazati da minimalni polinom sadrži sve ireducibilne faktore karakterističnog polinoma.

Svojstvene vrijednosti matrice A su korijeni *karakteristične jednadžbe*

$$|\lambda I_n - A| = 0. \tag{1.1.31}$$

Jednadžba (1.1.31) ima n općenito kompleksnih korijena. Neka je λ svojstvena vrijednost od A. Tada postoji vektor x ($x \neq 0$) takav da je

$$(\lambda I_n - A)x = 0, \tag{1.1.32}$$

tj.

$$Ax = \lambda x. \tag{1.1.33}$$

Naime, iz (1.1.31) slijedi da je matrica $\lambda I_n - A$ singularna pa joj je defekt strogo veći od nule iz čega direktno slijedi (1.1.32). Vrijedi i obrat s obzirom da upravo navedena zaključivanja vrijede i u suprotnom smjeru iz čega dobivamo da (1.1.32) implicira (1.1.31). Vektor x iz (1.1.32) naziva se *svojstveni vektor* pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Svojstveni vektori su uglavnom na neki način normirani kako bi se postigla njihova jedinstvenost, primjerice s $x'x = 1$. Za danu svojstvenu vrijednost λ skup svih vektora x koji zadovoljavaju (1.1.32) čini vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$ čija se dimenzija naziva *geometrijskom kratnošću* svojstvene vrijednosti λ.

Sve svojstvene vrijednosti neke matrice ne moraju biti različite. Broj pojavljivanja svojstvene vrijednosti kao korijena jednadžbe (1.1.32) naziva se *algebarska kratnost* svojstvene vrijednosti. Svojstvene vrijednosti čija je algebarska kratnost jednaka 1 nazivaju se *jednostavnim* svojstvenim vrijednostima. Može se pokazati da je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti uvijek manja od ili jednaka njenoj algebarskoj kratnosti.

Kako smo napomenuli, svojstvene vrijednosti kompleksne i realne matrice su općenito kompleksni brojevi, ali kada se radi o realnoj simetričnoj matrici vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.2. *Realna simetrična matrica ima samo realne svojstvene vrijednosti.*

Navedimo još nekoliko rezultata o svojstvenim vrijednostima.

Teorem 1.3. *Neka je A kvadratna matrica reda n i G regularna kvadratna matrica reda n. Onda A i $G^{-1}AG$ imaju isti skup svojstvenih vrijednosti (s jednakim algebarskim kratnostima).*

Dakle, slične matrice imaju jednake svojstvene vrijednosti i to jednakih algebarskih kratnosti.

Teorem 1.4. *Neka je A kvadratna matrica reda n. Tada vrijedi*

(a) $\mathrm{r}(A) = n$ *ako i samo ako nula nije svojstvena vrijednost od A,*

(b) ako je $\mathrm{r}(A) = k \leq n$ *tada je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti nula jednaka $n - k$, a algebarska kratnost nule je veća od ili jednaka $n - k$.*

Dokaz. (a) $\mathrm{r}(A) = n$ ako i samo ako homogeni sustav $Ax = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, ima samo trivijalno rješenje $x = 0$, a to vrijedi ako i samo ako nula nije svojstvena vrijednost od A.

(b) Neka je $\mathrm{r}(A) = k \leq n$. Svi vektori $x \in \mathbb{R}^n$ za koje je $Ax = 0$ čine potprostor od $\mathbb{R}^n$ dimenzije $n-k$ (iz Teorema o rangu i defektu). Dakle, geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti nula jednaka je $n - k$ pa je algebarska kratnost nule veća ili jednaka $n - k$.

□

1.1.4 Jordanova forma matrice

Bez dokaza navodimo važan teorem koji nam govori kako pronaći matricu sličnu polaznoj matrici, a koja je zapisana u mnogo jednostavnijem obliku, tzv. Jordanovoj formi. Prije samog teorema uvodimo nekoliko pojmova.

Temeljni Jordanov blok pridružen skalaru λ je kvadratna matrica oblika

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{1.1.34}$$

tj. matrica kojoj je na glavnoj dijagonali raspoređen skalar λ, točno iznad dijagonale su jedinice, a sve osalo su nule. Nadalje, *Jordanov blok* pridružen skalaru λ je kvadratna matrica oblika

$$C = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_s \end{pmatrix}, \tag{1.1.35}$$

gdje su B_i, $i = 1, \dots, s$, temeljni Jordanovi blokovi, možda različitih redova, ali pridruženi istom skalaru λ. Konačno, *Jordanova matrica* je dijagonalna blokmatrica

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & & & 0 \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_r \end{pmatrix}, \tag{1.1.36}$$

gdje su C_j, $j = 1, \ldots, r$, Jordanovi blokovi koji pripadaju međusobno različitim skalarima λ_j.

Teorem 1.5 (Jordanova dekompozicija)**.** *Neka je A kvadratna matrica reda n nad algebarski zatvorenim poljem. Neka je*

$$k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k} \tag{1.1.37}$$

karakteristični polinom, a

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{s_k} \tag{1.1.38}$$

minimalni polinom matrice A. Tada je matrica A slična Jordanovoj matrici

$$J = \begin{pmatrix} C_1 & & & 0 \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_k \end{pmatrix}, \tag{1.1.39}$$

gdje Jordanov blok C_i odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_i, za svaki $i = 1, 2, \ldots, k$. Pritom je u matrici C_i bar jedan od temeljnih Jordanovih blokova reda s_i, dok red ostalih blokova u toj matrici ne prelazi s_i. Broj blokova u matrici C_i podudara se s geometrijskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ_i. Nadalje, suma redova svih blokova u matrici C_i jednaka je broju r_i (tj. algebarskoj kratnosti svojstvene vrijednosti λ_i). Konačno, matrica J je jednoznačno određena matricom A do na poredak (temeljnih) Jordanovih blokova duž glavne dijagonale.

Pokažimo sada jednu posljedicu upravo navedenog teorema.

Teorem 1.6. *Ako je matrica A idempotentna tada je* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{tr}(A)$.

Dokaz. Prema pretpostavci vrijedi $A^2 = A$, tj. $A^2 - A = 0$. Dakle, minimalni polinom matrice A je $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$. Prema Jordanovoj dekompoziciji (Teorem 1.5) zaključujemo da je matrica A slična matrici J

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1.40}$$

Očito vrijedi $\mathrm{r}(J) = \mathrm{tr}(J)$ pa kako su rang i trag sličnih matrica jednaki vrijedi i $\mathrm{r}(A) = \mathrm{tr}(A)$. □

1.1.5 Kroneckerov i Hadamardov produkt

Definicija 1.1. *Neka je $A = (a_{ij})$ $m \times n$ matrica i $B = (b_{st})$ $p \times q$ matrica. Matrica $mp \times nq$ definirana s*

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \tag{1.1.41}$$

zove se Kroneckerov produkt matrica A i B i označava s $A \otimes B$.

Primijetimo da iako produkt matrica AB postoji jedino kada je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B Kroneckerov produkt $A \otimes B$ postoji za bilo koji par matrica A i B. Također, $(kp+l, uq+v)$-ti element matrice $A \otimes B$, gdje su $k \in \{0, \dots, m-1\}$, $l \in \{1, \dots, p\}$, $u \in \{0, \dots, n-1\}$ i $v \in \{1, \dots, q\}$, je jednak $a_{k+1,u+1}b_{lv}$. Koristeći upravo navedeno svojstvo lako se dokazuje sljedeći teorem.

Teorem 1.7. *Neka su A, B, C i D matrice, α skalar te a i b vektori. Tada vrijede sljedeća svojstva Kroneckerova produkta:*

(i) $A \otimes B \otimes C = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$,

(ii) $(A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D$, *ako $A + B$ i $C + D$ postoje,*

(iii) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$, *ako AC i BD postoje,*

(iv) $\alpha \otimes A = \alpha A = A\alpha = A \otimes \alpha$,

(v) $a' \otimes b = ba' = b \otimes a'$,

(vi) $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$,

(vii) $\mathrm{tr}(A \otimes B) = (\mathrm{tr}\, A)(\mathrm{tr}\, B)$, *ako su A i B kvadratne matrice (ne nužno istog reda),*

(viii) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

Napomena. *Svojstva (i)-(iii) iz Teorema 1.7 opravdavaju naziv Kroneckerov produkt.*

Napomena. *Primijetimo da iz Teorema 1.7 (iii) induktivno slijedi*

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n)(B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n) = A_1B_1 \otimes A_2B_2 \otimes \cdots \otimes A_nB_n, \tag{1.1.42}$$

ako $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ postoje.

Definicija 1.2. *Neka su $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ $m \times n$ matrice. Tada definiramo Hadamardov produkt od A i B kao*

$$(A \odot B)_{ij} = a_{ij}b_{ij}. \tag{1.1.43}$$

Dakle, Hadamardov produkt $A \odot B$ je također $m \times n$ matrica i njen ij-ti element je $a_{ij} b_{ij}$. Direktno iz definicije slijede tvrdnje sljedećeg teorema.

Teorem 1.8. *Neka su A, B, C i D $m \times n$ matrice. Tada vrijedi*

(i) $A \odot B = B \odot A$,

(ii) $(A \odot B)' = A' \odot B'$,

(iii) $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$,

(iv) $(A + B) \odot (C + D) = A \odot C + A \odot D + B \odot C + B \odot D$,

(v) $A \odot I_n = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, *ako je A kvadratna matrica reda n,*

(vi) $A \odot J = A = J \odot A$, *gdje je J matrica koja se sastoji od jedinica.*

1.1.6 Vec operator

U ostatku teksta značajnu ulogu igrati će i vec operator.

Definicija 1.3. *Neka je A $m \times n$ matrica i a_i njen i-ti stupac. Tada je* $\operatorname{vec} A$ *vektor tipa $mn \times 1$ definiran s*

$$\operatorname{vec} A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{1.1.44}$$

Dakle, vec operator transformira matricu u vektor slažući stupce matrice jedan ispod drugog. Primijetimo da je $\operatorname{vec} A$ definiran za sve matrice A, ne samo za kvadratne. Također, primijetimo da $\operatorname{vec} A = \operatorname{vec} B$ ne implicira $A = B$, osim ako matrice A i B nisu istog reda.

Iz definicije odmah slijedi

$$\operatorname{vec} a' = \operatorname{vec} a = a \tag{1.1.45}$$

za proizvoljni vektor stupac a.

Osnovna veza između vec operatora i Kroneckerova produkta je dana s

$$\operatorname{vec} ab' = b \otimes a \tag{1.1.46}$$

za proizvoljne vektore a i b (ne nužno istog tipa). Neka su $a = (a_1, \ldots, a_m)'$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)'$. Tada vrijedi

$$
\begin{aligned}
\operatorname{vec} ab' &= \operatorname{vec} \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \ldots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \ldots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \ldots & a_m b_n \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{vec} \begin{pmatrix} b_1 a & b_2 a & \ldots & b_n a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1 a \\ b_2 a \\ \vdots \\ b_n a \end{pmatrix} = b \otimes a.
\end{aligned}
$$

Osnovna veza između vec operatora i traga je dana s

$$
(\operatorname{vec} A)' \operatorname{vec} B = \operatorname{tr} A'B, \tag{1.1.47}
$$

gdje su A i B matrice istog tipa. Ovo se lako pokaže jer su lijeva i desna strana u (1.1.47) jednake

$$
\sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij}.
$$

Već smo uveli definicije normi za vektore i matrice. Koristeći (1.1.47) pokazujemo da za matricu A tipa $m \times n$ vrijedi

$$
\|\operatorname{vec} A\| = ((\operatorname{vec} A)' \operatorname{vec} A)^{1/2} = (\operatorname{tr} A'A)^{1/2} = \|A\|. \tag{1.1.48}
$$

Dakle, norma matrice ostaje ista kada na nju djelujemo vec operatorom.
Generalizacija svojstva (1.1.46) iskazana je sljedećim teoremom.

Teorem 1.9. *Neka su A, B i C matrice takve da je matrični produkt ABC dobro definiran. Tada je*

$$
\operatorname{vec} ABC = (C' \otimes A) \operatorname{vec} B. \tag{1.1.49}
$$

Dokaz. Pretpostavimo da B ima q stupaca označenih s $b_1, b_2, \ldots, b_q$. Slično, neka $e_1, e_2, \ldots, e_q$ označava stupce identične matrice I_q reda q. Tada vrijedi

$$
B = \sum_{j=1}^{q} b_j e_j'.
$$

Koristeći (1.1.46) i svojstvo Kroneckerova produkta (Teorem 1.7 (iii)) dobivamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{vec} ABC &= \operatorname{vec} \sum_{j=1}^{q} Ab_j e_j' C = \operatorname{vec} \sum_{j=1}^{q} Ab_j (C' e_j)' \\
&= \sum_{j=1}^{q} \operatorname{vec}(Ab_j)(C' e_j)' = \sum_{j=1}^{q} (C' e_j \otimes Ab_j) \\
&= \sum_{j=1}^{q} (C' \otimes A)(e_j \otimes b_j) = (C' \otimes A) \sum_{j=1}^{q} (e_j \otimes b_j) \\
&= (C' \otimes A) \sum_{j=1}^{q} \operatorname{vec} b_j e_j' = (C' \otimes A) \operatorname{vec} B.
\end{aligned}$$

□

Jedan poseban slučaj Teorema 1.9 je

$$\operatorname{vec} AB = (B' \otimes I_m) \operatorname{vec} A = (B' \otimes A) \operatorname{vec} I_n = (I_q \otimes A) \operatorname{vec} B, \tag{1.1.50}$$

gdje je A $m \times n$ matrica i B $n \times q$ matrica i gdje koristimo $AB = I_m AB = AI_n B = ABI_q$. Drugi poseban slučaj se dobiva kada se matrica C zamijeni vektorom d. Tada dobivamo, koristeći (1.1.45)

$$ABd = \operatorname{vec} ABd = (d' \otimes A) \operatorname{vec} B, \tag{1.1.51}$$

$$ABd = \operatorname{vec}(ABd)' = \operatorname{vec} d' B' A' = (A \otimes d') \operatorname{vec} B'. \tag{1.1.52}$$

gdje je d $q \times 1$ vektor.

Jednakost (1.1.47) se može poopćiti sljedećim teoremom.

Teorem 1.10. *Neka su A, B, C i D matrice takve da je matrični produkt $ABCD$ dobro definiran i rezultat je kvadratna matrica. Tada je*

$$\operatorname{tr} ABCD = (\operatorname{vec} D')'(C' \otimes A) \operatorname{vec} B = (\operatorname{vec} D)'(A \otimes C') \operatorname{vec} B'. \tag{1.1.53}$$

Dokaz. Koristeći (1.1.47) i (1.1.49) dobivamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} ABCD &= \operatorname{tr} D(ABC) = (\operatorname{vec} D')' \operatorname{vec} ABC \\
&= (\operatorname{vec} D')'(C' \otimes A) \operatorname{vec} B
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} ABCD &= \operatorname{tr} D'(C'B'A') = (\operatorname{vec} D)' \operatorname{vec} C'B'A' \\
&= (\operatorname{vec} D)'(A \otimes C') \operatorname{vec} B'.
\end{aligned}$$

□

1.1.7 Moore-Penrose (MP) inverz

Inverz matrice je definiran kada je matrica kvadratna i regularna. Koncept invertibilnosti želimo proširiti na singularne kvadratne matrice i na matrice koje nisu kvadratne. Stoga uvodimo pojam *Moore-Penrose inverza.*

Definicija 1.4. *Neka je A $m \times n$ realna matrica. Realna $n \times m$ matrica X je MP inverz matrice A ako vrijede sljedeća svojstva*

$$AXA = A, \tag{1.1.54}$$

$$XAX = X, \tag{1.1.55}$$

$$(AX)' = AX, \tag{1.1.56}$$

$$(XA)' = XA, \tag{1.1.57}$$

MP inverz matrice A označavamo s A^+.

Napomena. *Ukoliko promatramo kompleksne matrice tada je dovoljno transponiranje zamijeniti s adjungiranjem. Tada primjerice svojstvo* (1.1.56) *prelazi u* $(AX)^* = AX$.

MP inverz uvijek postoji i jedinstven je pa je stoga opravdana oznaka A^+ uvedena u definiciji MP inverza, tj. vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.11. *Za svaku matricu A postoji jedinstvena matrica X takva da vrijede svojstva* (1.1.54)-(1.1.57).

Pokažimo nekoliko svojstava Moore-Penrose inverza.

Teorem 1.12. *Vrijede sljedeća svojstva MP inverza*

(i) $A^+ = A^{-1}$ *za regularne* A,

(ii) $(A^+)^+ = A$,

(iii) $(A')^+ = (A^+)'$,

(iv) A, A^+, AA^+ *i* A^+A *imaju isti rang,*

(v) AA^+ *i* A^+A *su simetrične i idempotentne,*

(vi) ako je A simetrična tada je i A^+ simetrična,

(vii) ako je A simetrična tada je $A^+A = AA^+$.

Dokaz. (i) Inverz regularne matrice A^{-1} zadovoljava svojstva (1.1.54)-(1.1.57) iz definicije MP inverza pa vrijedi $A^+ = A^{-1}$.

(ii) Zbog simetrije svojstava (1.1.54)-(1.1.57) iz definicije MP inverza slijedi $(A^+)^+ = A$.

(iii) Koristeći $AA^+A = A$ slijedi $A'(A^+)'A' = (AA^+A)' = A'$. Analogno pokazujući ostala tri svojstva iz definicije MP inverza slijedi $(A')^+ = (A^+)'$.

(iv) Koristimo (1.1.16). Iz $A = AA^+A = (AA^+)A = A(A^+A)$ slijedi $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(AA^+)$ i $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(A^+A)$. Iz $AA^+ = A(A^+AA^+)$ slijedi $\mathrm{r}(AA^+) \leq \mathrm{r}(A)$, a iz $A^+A = (A^+AA^+)A$ slijedi $\mathrm{r}(A^+A) \leq \mathrm{r}(A)$. Dakle, imamo $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(AA^+) = \mathrm{r}(A^+A)$. Analogno, iz $A^+ = A^+(AA^+)$ i $AA^+ = (AA^+A)A^+$ slijedi $\mathrm{r}(A^+) = \mathrm{r}(AA^+)$. Zajedno s prethodnim dobivamo tvrdnju.

(v) Iz svojstava (1.1.56) i (1.1.57) iz definicije MP inverza slijedi simetričnost matrica AA^+ i A^+A. Nadalje, vrijedi $(AA^+)^2{=}(AA^+A)A^+{=}AA^+$ pa je AA^+ idempotentna. Analogno se pokazuje idempotentnost matrice A^+A.

(vi) Pretpostavimo da je $A' = A$. Tada prema (iii) vrijedi $(A^+)' = (A')^+ = A^+$, tj. A^+ je simetrična.

(vii) Pretpostavimo da je $A' = A$. Tada prema (vi) i svojstvu (1.1.57) iz definicije MP inverza vrijedi $A^+A = (A^+A)' = A'(A^+)' = AA^+$.

□

1.1.8 Komutacijska matrica

Prisjetimo se prvo pojma permutacijske matrice. Kvadratna matrica P je *permutacijska matrica* ako svaki redak i svaki stupac od P sadrži točno jednu jedinicu, a svi ostali elementi su jednaki nula. Dakle, $n \times n$ permutacijska matrica sadrži ukupno n jedinica i $n(n-1)$ nula. Može se pokazati da je svaka permutacijska matrica regularna. Štoviše, svaka permutacijska matrica P je ortogonalna, tj. vrijedi

$$P^{-1} = P'. \tag{1.1.58}$$

Neka je A $m \times n$ matrica. Vektori $\operatorname{vec} A$ i $\operatorname{vec} A'$ očito sadrže istih mn elemenata, ali u različitom poretku. Stoga postoji jedinstvena $mn \times mn$ permutacijska matrica koja transformira $\operatorname{vec} A$ u $\operatorname{vec} A'$. Ova matrica se naziva *komutacijska matrica* i označava se s K_{mn} ili $K_{m,n}$ (ako je $m = n$ često pišemo K_n umjesto K_{nn}). Dakle,

$$K_{mn} \operatorname{vec} A = \operatorname{vec} A'. \tag{1.1.59}$$

Budući da je K_{mn} permutacijska matrica prema (1.1.58) je ortogonalna, tj. vrijedi $K_{mn}^{-1} = K_{mn}'$. Pomnožimo li jednakost (1.1.59) slijeva s K_{nm} dobivamo

$$K_{nm}K_{mn} \operatorname{vec} A = K_{nm} \operatorname{vec} A' = \operatorname{vec} A.$$

Kako prethodna jednakost vrijedi za sve $m \times n$ matrice A vrijedi $K_{nm}K_{mn} = I_{mn}$. Dakle,

$$K'_{mn} = K_{mn}^{-1} = K_{nm}. \tag{1.1.60}$$

Nadalje, koristeći (1.1.45) dobivamo

$$K_{n1} = K_{1n} = I_n. \tag{1.1.61}$$

Ključno svojstvo komutacijske matrice (i ono po kojem je dobila ime) omogućava nam da zamijenimo (”komutiramo”) dvije matrice u Kroneckerovom produktu.

Teorem 1.13. *Neka je A $m \times n$ matrica, B $p \times q$ matrica i b $p \times 1$ vektor. Tada vrijedi*

$$\text{(a)} \quad K_{pm}(A \otimes B) = (B \otimes A)K_{qn}, \tag{1.1.62}$$
$$\text{(b)} \quad K_{pm}(A \otimes B)K_{nq} = B \otimes A, \tag{1.1.63}$$
$$\text{(b)} \quad K_{pm}(A \otimes b) = b \otimes A, \tag{1.1.64}$$
$$\text{(b)} \quad K_{mp}(b \otimes A) = A \otimes b. \tag{1.1.65}$$

Dokaz. Neka je X proizvoljna $q \times n$ matrica. Tada, uzastopnom primjenom (1.1.59) i Teorema 1.9 slijedi

$$\begin{aligned} K_{pm}(A \otimes B) \operatorname{vec} X &= K_{pm} \operatorname{vec} BXA' = \operatorname{vec} AX'B' \\ &= (B \otimes A) \operatorname{vec} X' = (B \otimes A)K_{qn} \operatorname{vec} X. \end{aligned}$$

Kako je X proizvoljan slijedi (a). Nadalje, (b) slijedi iz (a) množeći (a) zdesna s $K_{nq} = K_{qn}^{-1}$, (c) slijedi iz (a) jer je $K_{1n} = I_n$, a (d) slijedi iz (a) zamjenom uloga od A i B i jer je $K_{n1} = I_n$. □

Važna primjena komutacijske matrice je u tome što nam dopušta da transformiramo vec Kroneckerovog produkta u Kroneckerov produkta vec-ova kao što nam govori naredni teorem.

Teorem 1.14. *Neka je A $m \times n$ matrica i B $p \times q$ matrica. Tada vrijedi*

$$\operatorname{vec}(A \otimes B) = (I_n \otimes K_{qm} \otimes I_p)(\operatorname{vec} A \otimes \operatorname{vec} B). \tag{1.1.66}$$

Dokaz. Neka $a_i (i = 1, \ldots, n)$ i $b_j (j = 1, \ldots, q)$ označavaju stupce od A i B, respektivno. Također, neka $e_i (i = 1, \ldots, n)$ i $u_j (j = 1, \ldots, q)$ označavaju stupce od I_n i I_q, respektivno. Tada A i B možemo zapisati kao

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i e'_i, \quad B = \sum_{j=1}^{q} b_j u'_j \tag{1.1.67}$$

iz čega dobivamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{vec}(A\otimes B) &= \operatorname{vec}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} a_i e_i' \otimes b_j u_j'\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} \operatorname{vec}(a_i e_i' \otimes b_j u_j') = \sum_{i,j} \operatorname{vec}(a_i \otimes b_j)(e_i' \otimes u_j')\\
&= \sum_{i,j} \operatorname{vec}(a_i \otimes b_j)(e_i \otimes u_j)' = \sum_{i,j}(e_i \otimes u_j \otimes a_i \otimes b_j)\\
&= \sum_{i,j}(I_n e_i \otimes K_{qm}(a_i \otimes u_j) \otimes I_p b_j)\\
&= \sum_{i,j}(I_n \otimes K_{qm} \otimes I_p)(e_i \otimes a_i \otimes u_j \otimes b_j)\\
&= (I_n \otimes K_{qm} \otimes I_p)\sum_{i,j}(e_i \otimes a_i \otimes u_j \otimes b_j)\\
&= (I_n \otimes K_{qm} \otimes I_p)\left(\left(\sum_i e_i \otimes a_i\right) \otimes \left(\sum_j u_j \otimes b_j\right)\right)\\
&= (I_n \otimes K_{qm} \otimes I_p)\left(\left(\sum_i \operatorname{vec} a_i e_i'\right) \otimes \left(\sum_j \operatorname{vec} b_j u_j'\right)\right)\\
&= (I_n \otimes K_{qm} \otimes I_p)(\operatorname{vec} A \otimes \operatorname{vec} B),
\end{aligned}$$

čime je dokaz završen. □

Usko vezana uz matricu K_n je matrica $\frac{1}{2}(I_{n^2} + K_n)$, koju označavamo s N_n. Nabrojimo neka svojstva matrice N_n.

Teorem 1.15. *Neka je $N_n = \frac{1}{2}(I_{n^2} + K_n)$. Tada vrijedi*

$$\text{(a)}\quad N_n = N_n' = N_n^2, \tag{1.1.68}$$
$$\text{(b)}\quad \mathrm{r}(N_n) = \mathrm{tr}(N_n) = \tfrac{1}{2}n(n+1), \tag{1.1.69}$$
$$\text{(c)}\quad N_n K_n = N_n = K_n N_n. \tag{1.1.70}$$

Dokaz. (a) Budući da je $K_n' = K_n^{-1} = K_n$ to je očito $N_n' = N_n$. Nadalje, $N_n^2 = \frac{1}{4}(I_{n^2} + K_n)(I_{n^2} + K_n) = \frac{1}{4}(I_{n^2} + K_n + K_n + K_n^2) = \frac{1}{4}(2I_{n^2} + 2K_n) = N_n$.

(b) Prema (a) je N_n idempotentna pa prema Teoremu 1.6 vrijedi $\mathrm{r}(N_n) = \mathrm{tr}(N_n) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\, I_{n^2} + \mathrm{tr}\, K_n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{1}{2}n(n+1)$. Koristili smo činjenicu da je trag permutacijske matrice jednak broju fiksnih elemenata permutacije, a kako K_n fiksira svaki n-ti element u $\operatorname{vec} A$, to ih ukupno fiksira $n = n^2/n$.

(c) Vrijedi $N_n K_n = \frac{1}{2}(I_{n^2} + K_n)K_n = \frac{1}{2}(K_n + I_{n^2}) = N_n$. Analogno se dobiva i druga jednakost. □

1.1.9 Adjunkta matrice

Neka je $A = (a_{ij})$ kvadratna matrica reda n. *Submatrica* od A je matrica dobivena iz matrice A ispuštanjem nekih redaka i stupaca. *Minora* je determinanta kvadratne submatrice od A. Minora elementa a_{ij} je determinanta submatrice od A dobivene ispuštanjem i-tog retka i j-tog stupca. *Kofaktor* ili *algebarski komplement* elementa a_{ij}, označen s c_{ij}, je umnožak $(-1)^{i+j}$ i minore a_{ij}. Matricu $C = (c_{ij})$ nazivamo *matrica kofaktora* od A. Transponiranu matricu od C nazivamo *adjunkta* matrice A i označavamo je s $A^\#$, tj. $A^\# = C'$.
Vrijede sljedeća pravila

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}c_{jk} \quad (i, k = 1, \dots, n), \tag{1.1.71}$$

$$AA^\# = A^\# A = |A|I, \tag{1.1.72}$$

$$(AB)^\# = B^\# A^\#. \tag{1.1.73}$$

Dokažimo još neka svojstva adjunkte.

Teorem 1.16. *Neka je A kvadratna matrica reda n $(n \geq 2)$ i neka je $A^\#$ adjunkta matrice A. Tada vrijedi*

(a) ako je $\mathrm{r}(A) = n$, tada je

$$A^\# = |A|A^{-1}, \tag{1.1.74}$$

(b) ako je $\mathrm{r}(A) = n - 1$, tada je

$$A^\# = (-1)^{k+1}\mu(A)\frac{xy'}{y'(A^{k-1})^+x}, \tag{1.1.75}$$

gdje k označava kratnost nule kao nultočke od A $(1 \leq k \leq n)$, $\mu(A)$ je produkt ostalih $n-k$ nultočaka od A različitih od nula (ako je $k = n$ stavljamo $\mu(A) = 1$), a x i y su $n \times 1$ vektori koji zadovoljavaju $Ax = A'y = 0$, i

(c) ako je $\mathrm{r}(A) \leq n - 2$, tada je

$$A^\# = 0, \tag{1.1.76}$$

Dokaz. Ako je $\mathrm{r}(A) = n$ tada postoji A^{-1} pa množeći izraz (1.1.72) zdesna s A^{-1} dobivamo (1.1.74).

Ako je $\mathrm{r}(A) \leq n - 2$, izrazimo algebarski komplement c_{ij} kao

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}|E_i' A E_j|, \tag{1.1.77}$$

gdje je E_j $n \times (n-1)$ matrica dobivena iz I_n ispuštanjem j-tog stupca. Dakle, $E_i' A E_j$ je $(n-1) \times (n-1)$ matrica čiji rang zadovoljava

$$\mathrm{r}(E_i' A E_j) \leq \mathrm{r}(A) \leq n - 2. \tag{1.1.78}$$

Slijedi da je $E_i' A E_j$ singularna pa je $|E_i' A E_j| = 0$, a onda i $c_{ij} = 0$. Budući da ovo vrijedi za proizvoljne i i j, imamo $C = 0$ pa i $A^{\#} = 0$.

Konačno, pretpostavimo da je $\mathrm{r}(A) = n - 1$. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od A i pretpostavimo

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0, \tag{1.1.79}$$

dok je preostalih $n - k$ svojstvenih vrijednosti različito od nule. Prema Jordanovoj dekompoziciji (Teorem 1.5), postoji regularna matrica T takva da vrijedi

$$T^{-1} A T = J, \tag{1.1.80}$$

gdje je

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \tag{1.1.81}$$

Ovdje je J_1 $k \times k$ matrica

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1.82}$$

a J_2 je $(n-k) \times (n-k)$ matrica

$$J_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{k+1} & \delta_{k+1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_{k+2} & \delta_{k+2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{1.1.83}$$

gdje δ_j $(k+1 \leq j \leq n-1)$ može poprimiti samo vrijednosti nula ili jedan. Naime, iz $\mathrm{r}(A) = n - 1$ slijedi da je geometrijska kratnost nule kao svojstvene vrijednosti jednaka $n - (n-1) = 1$ pa se prema Jordanovoj dekompoziciji J_1 sastoji samo od jednog temeljnog Jordanovog bloka.

Prvi stupac i k-ti redak matrice J se sastoje od nula pa su algebarski komplementi svih elemenata matrice J, osim algebarskog komplementa elementa na mjestu $(k, 1)$, jednaki nula. Stoga vrijedi

$$J^{\#} = (-1)^{k+1} \mu(A) e_1 e_k', \tag{1.1.84}$$

gdje su e_1 i e_k prvi i k-ti jedinični vektor tipa $n \times 1$, i

$$\mu(A) = \prod_{j=k+1}^{n} \lambda_j. \tag{1.1.85}$$

Koristeći (1.1.73), (1.1.80) i (1.1.84) te primjenjujući svojstvo (1.1.74) na regularne matrice T i T^{-1} dobivamo

$$\begin{aligned} A^{\#} &= (TJT^{-1})^{\#} = (T^{-1})^{\#} J^{\#} T^{\#} \\ &= (|T^{-1}|(T^{-1})^{-1}) J^{\#} (|T| T^{-1}) \\ &= (|T|^{-1}|T|) T J^{\#} T^{-1} \\ &= T J^{\#} T^{-1} \\ &= (-1)^{k+1} \mu(A)(Te_1)(e_k' T^{-1}). \end{aligned} \tag{1.1.86}$$

Iz (1.1.81)-(1.1.83) slijedi $Je_1 = 0$ i $e_k' J = 0'$. Stoga, koristeći (1.1.80) dobivamo

$$ATe_1 = TJe_1 = 0 \;\text{ i }\; e_k' T^{-1} A = e_k' J T^{-1} = 0'. \tag{1.1.87}$$

Nadalje, budući da je $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A') = n - 1$, $n \times 1$ vektori x i y koji zadovoljavaju $Ax = A'y = 0$ su jedinstveni do na faktor proporcionalnosti (jer je defekt od A i A' jednak 1), tj.

$$x = \alpha Te_1 \;\text{ i }\; y' = \beta e_k' T^{-1} \tag{1.1.88}$$

za neke realne brojeve α i β. Prema (1.1.80) vrijedi $A = TJT^{-1}$ pa i

$$A^k = (TJT^{-1})^k = \underbrace{(TJT^{-1})(TJT^{-1})\cdots(TJT^{-1})}_{k \text{ puta}} = TJ^kT^{-1} \tag{1.1.89}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.
Iz (1.1.81)-(1.1.83) uočavamo da vrijedi

$$\begin{aligned} Je_k &= e_{k-1} \\ Je_{k-1} &= e_{k-2} \Rightarrow J^2 e_k = J(Je_k) = Je_{k-1} = e_{k-2} \\ Je_{k-2} &= e_{k-3} \Rightarrow J^3 e_k = J(J^2 e_k) = Je_{k-2} = e_{k-3} \\ &\;\vdots \\ Je_2 &= e_1 \Rightarrow J^{k-1} e_k = J(J^{k-2} e_k) = Je_2 = e_1 \end{aligned} \tag{1.1.90}$$

za svaki $k \geq 2$.
Analogno, dobivamo

$$\begin{aligned} e_1' J &= e_2' \\ e_2' J &= e_3' \Rightarrow e_1' J^2 = (e_1' J) J = e_2' J = e_3' \\ e_3' J &= e_4' \Rightarrow e_1' J^3 = (e_1' J^2) J = e_3' J = e_4' \\ &\;\vdots \\ e_{k-1}' J &= e_k' \Rightarrow e_1' J^{k-1} = (e_1' J^{k-2}) J = e_{k-1}' J = e_k' \end{aligned} \tag{1.1.91}$$

za svaki $k \geq 2$.
Slijedi

$$A^{k-1} Te_k = TJ^{k-1} T^{-1} Te_k = TJ^{k-1} e_k = Te_1, \tag{1.1.92}$$

i

$$e_1'T^{-1}A^{k-1} = e_1'T^{-1}TJ^{k-1}T^{-1} = e_1'J^{k-1}T^{-1} = e_k'T^{-1} \tag{1.1.93}$$

Koristeći pokazane tvrdnje i svojstva MP inverza dobivamo

$$\begin{aligned} y'(A^{k-1})^+x &= \alpha\beta e_k'T^{-1}(A^{k-1})^+Te_1 \\ &= \alpha\beta e_1'T^{-1}A^{k-1}(A^{k-1})^+A^{k-1}Te_k \\ &= \alpha\beta e_1'T^{-1}A^{k-1}Te_k \\ &= \alpha\beta(e_1'J^{k-1})e_k = \alpha\beta e_k'e_k = \alpha\beta \end{aligned} \tag{1.1.94}$$

Konačno, iz (1.1.88) i (1.1.94) dobivamo

$$\frac{xy'}{y'(A^{k-1})^+x} = (Te_1)(e_k'T^{-1}). \tag{1.1.95}$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza u (1.1.86) dobivamo traženu tvrdnju. Ovime je dokaz dovršen. □

Iz navedenog teorema direktno slijedi sljedeće tvrdnje

Korolar 1.1. *Neka je A kvadratna matrica reda n $(n \geq 2)$. Tada je*

$$\mathrm{r}(A^{\#}) = \begin{cases} n & , \textit{ ako je } \mathrm{r}(A) = n \\ 1 & , \textit{ ako je } \mathrm{r}(A) = n-1 \\ 0 & , \textit{ ako je } \mathrm{r}(A) \leq n-2 \end{cases} \tag{1.1.96}$$

Dokaz. Ako je $\mathrm{r}(A) = n$ tada je i $\mathrm{r}(A^{-1}) = n$ pa i $\mathrm{r}(|A|A^{-1}) = n$. Dakle, u slučaju kada je $\mathrm{r}(A) = n$ je i $\mathrm{r}(A^{\#}) = n$. Također vrijedi $\mathrm{r}(0) = 0$ pa je u slučaju kada je $\mathrm{r}(A) \leq n-2$, $\mathrm{r}(A^{\#}) = 0$. Naposljetku, neka je $\mathrm{r}(A) = n-1$. Kako je $\mathrm{r}(x'y) = 1$ (jer su svi stupci/redci međusobno proporcionalni) to je i $\mathrm{r}(A^{\#}) = 1$. □

Korolar 1.2. *Neka je A kvadratna matrica reda n $(n \geq 2)$ sa jednostavnom svojstvenom vrijednošću nula. Tada je $\mathrm{r}(A) = n-1$ i vrijedi*

$$A^{\#} = \mu(A)\frac{xy'}{y'x} \tag{1.1.97}$$

gdje je $\mu(A)$ produkt preostalih $n-1$ svojstvenih vrijednosti od A, a x i y zadovoljavaju $Ax = A'y = 0$.

Dokaz. Prema Teoremu 1.4 (a) slijedi da je $\mathrm{r}(A) \leq n-1$. Kada bi bilo $\mathrm{r}(A) = k \leq n-2$ tada bi prema Teoremu 1.4 (b) algebarska kratnost nule bila veća ili jednaka $n-k \geq n-(n-2) = 2$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, mora vrijediti $\mathrm{r}(A) = n-1$. Uvrstimo li u (1.1.75) $k = 1$ dobivamo tvrdnju korolara jer je $(-1)^2 = 1$ i $I^+ = I$. □

Navedimo sada dva teorema koja pokazuju da se adjunkta matrice pojavljuje u računanju determinante omeđene matrice. Prije toga definirajmo omeđenu matricu.

Definicija 1.5. *Omeđena matrica je blok matrica oblika*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C^* & D \end{pmatrix},$$

gdje je A $p \times q$, B $p \times (n-q)$, C $q \times (n-p)$ i D $(n-p) \times (n-q)$ matrica.

Teorem 1.17. *Neka je A kvadratna matrica reda n te x i y $n \times 1$ vektori. Tada vrijedi*

$$\begin{vmatrix} A & x \\ y' & 0 \end{vmatrix} = -y' A^{\#} x. \tag{1.1.98}$$

Dokaz. Neka je A_i $(n-1) \times n$ matrica dobivena iz matrice A ispuštanje i-tog retka i neka je A_{ij} $(n-1) \times (n-1)$ matrica dobivena iz matrice A ispuštanjem i-tog retka i j-tog stupca. Također, s x_i označimo i-tu komponentu vektora x, a s y_j j-tu komponentu vektora y. Tada razvojem determinante u (1.1.98) po $(n+1)$-om stupcu dobivamo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & x \\ y' & 0 \end{vmatrix} &= \sum_{i=1}^{n} x_i (-1)^{i+(n+1)} \begin{vmatrix} A_i \\ y' \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (-1)^{i+(n+1)} y_j (-1)^{n+j} |A_{ij}| \\ &= -(-1)^{2n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} x_i y_j |A_{ij}| \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j A^{\#}_{ji} \\ &= -y' A^{\#} x, \end{aligned}$$

gdje drugi redak slijedi iz prvog razvojem determinante $\begin{vmatrix} A_i \\ y' \end{vmatrix}$ po n-tom retku. Dakle, vrijedi tvrdnja teorema. □

Teorem 1.18. *Neka je A simetrična matrica reda n $(n \geq 2)$ i ranga $\mathrm{r}(A) = n-1$ te u svojstveni vektor od A pridružen jednostavnoj svojstvenoj vrijednosti nula, tj. $Au = 0$. Tada vrijedi*

$$\begin{vmatrix} A & u \\ u' & \alpha \end{vmatrix} = -\left(\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) u'u, \tag{1.1.99}$$

gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ svojstvene vrijednosti od A različite od nula.

Dokaz. Kako je $\mathrm{r}(A) = n - 1$ to je A singularna matrica pa je $|A| = 0$. Razvijanjem determinante u (1.1.99) po $(n+1)$-om stupcu zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} A & u \\ u' & \alpha \end{vmatrix} &= \sum_{i=1}^{n} \left(u_i (-1)^{i+(n+1)} \begin{vmatrix} A_i \\ u' \end{vmatrix} \right) + \alpha(-1)^{(n+1)+(n+1)}|A| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(u_i (-1)^{i+(n+1)} \begin{vmatrix} A_i \\ u' \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} A & u \\ u' & 0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

gdje smo s u_i označili i-tu komponentu vektora u, a s A_i matricu dobivenu iz A ispuštanjem i-tog retka. Dakle, možemo pretpostaviti da je $\alpha = 0$.
Sada, prema Teoremu 1.17 i Korolaru 1.2 slijedi

$$\begin{vmatrix} A & u \\ u' & 0 \end{vmatrix} = -u' A^{\#} u = -u' \mu(A) \frac{uu'}{u'u} u = -\mu(A) \frac{(u'u)(u'u)}{u'u} = -\left(\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) u'u$$

jer u zadovoljava $Au = 0$ i $A'u = Au = 0$. Primijetimo da je $u'u \in \mathbb{R}$ i $u'u \neq 0$ jer u nije nul-vektor pa je kraćenje razlomaka opravdano. Ovime je teorem dokazan. $\square$

1.2 Diferencijali

1.2.1 Otvoreni skupovi, limes, neprekidnost

U ovom poglavlju uvest ćemo pojam diferencijala te navesti nekoliko ključnih teorema koji govore o postojanju i računanju diferencijala. Dokazi navedenih teorema mogu se pronaći u [1] (poglavlja 4 i 5). Za početak se podsjetimo nekoliko temeljnih topoloških pojmova primjenjenih na prostor $\mathbb{R}^n$.

Prisjetimo se da se topologija u $\mathbb{R}^n$ može izgraditi koristeći već definiranu (Euklidsku) normu pomoću n-kugli radijusa r, $r > 0$, sa središtem u nekoj točki $c \in \mathbb{R}^n$, tj. pomoću skupova oblika $B(c; r) = \{x \colon x \in \mathbb{R}^n, \|x - c\| < r\}$. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ te $c \in S$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ako postoji n-kugla $B(c)$ takva da je $B(c) \subseteq S$, onda je c *unutarnja točka* skupa S. Ako svaka n-kugla $B(x)$ sadrži barem jednu točku skupa S različitu od x, onda je x *točka gomilišta*, kraće *gomilište*, skupa S. Skup svih unutarnjih točaka skupa S nazivamo interior skupa S i označavamo s $\operatorname{Int} S$. Za skup S kažemo da je *otvoren skup* ako su sve njegove točke unutarnje, tj. ako je $\operatorname{Int} S = S$.

Navedimo sada definicije limesa funkcije i neprekidnosti funkcije u točki za vektorske funkcije.

Definicija 1.6. *Neka je $f \colon S \to \mathbb{R}^m$ funkcija s domenom $S \subseteq \mathbb{R}^n$ i s vrijednostima u $\mathbb{R}^m$. Neka je $c \in \mathbb{R}^n$ gomilište skupa S. Pretpostavimo da postoji točka $b \in \mathbb{R}^m$ sa svojstvom da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi*

$$\|f(x) - b\| < \epsilon \tag{1.2.1}$$

za sve točke $x \in S$, $x \neq c$, za koje je

$$\|x - c\| < \delta. \tag{1.2.2}$$

Tada kažemo da je limes funkcije $f(x)$ u točki c jednak b i pišemo

$$\lim_{x\to c} f(x) = b. \tag{1.2.3}$$

Napomena. *Pretpostavka da je c gomilište skupa S nam osigurava da postoji točka $x \in S$, $x \neq c$, za koju vrijedi $\|x - c\| < \delta$.*

Za funkcije $f, g\colon S \to \mathbb{R}^m$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, koje imaju limese u gomilištu c skupa S i za $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x), \tag{1.2.4}$$
$$\lim_{x\to c}(\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to c} f(x), \tag{1.2.5}$$
$$\lim_{x\to c}\|f(x)\| = \|\lim_{x\to c} f(x)\|. \tag{1.2.6}$$

Definicija 1.7. *Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ funkcija s domenom $S \subseteq \mathbb{R}^n$ i s vrijednostima u $\mathbb{R}^m$. Neka je c točka u S. Kažemo da je f neprekidna u točki c ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi*

$$\|f(c+u) - f(c)\| < \epsilon \tag{1.2.7}$$

za sve točke $c + u \in S$ za koje je

$$\|u\| < \delta. \tag{1.2.8}$$

Ako je f neprekidna u svakoj točki skupa S kažemo da je f neprekidna na skupu S.

Funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ možemo zapisati kao

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))', \tag{1.2.9}$$

čime je definirano m realnih funkcija $f_i\colon S \to \mathbb{R}\,(i = 1, \ldots, m)$. Funkcije f_i se nazivaju koordinatnim funkcijama funkcije f i pišemo

$$f = (f_1, \ldots, f_m)'. \tag{1.2.10}$$

Teorem 1.19. *Neka je S podskup od $\mathbb{R}^n$. Funkcija $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ je neprekidna u točki $c \in S$ ako i samo ako je svaka od njenih koordinatnih funkcija $f_i\,(i = 1, \ldots, m)$ neprekidna u c.*

1.2.2 Diferencijabilnost i parcijalne derivacije

Definicija 1.8. *Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ funkcija s domenom $S \subseteq \mathbb{R}^n$ i s vrijednostima u $\mathbb{R}^m$. Neka je c unutarnja točka skupa S i $B(c; r)$, $r > 0$, n-kugla koja leži u S. Neka je $u \in \mathbb{R}^n$ sa svojstvom $\|u\| < r$ tako da je $c + u \in B(c; r)$. Ako postoji realna* *matrica A tipa $m \times n$ koja ovisi o c, ali ne ovisi o u, i realni $m \times 1$ vektor r_c koji ovisi o c i u, tako da vrijedi*

$$f(c+u) = f(c) + A(c)u + r_c(u) \tag{1.2.11}$$

za sve $u \in \mathbb{R}^n$ sa svojstvom $\|u\| < r$ i

$$\lim_{u \to 0} \frac{r_c(u)}{\|u\|} = 0, \tag{1.2.12}$$

tada kažemo da je funkcija f diferencijabilna u točki c. $m \times n$ matrica $A(c)$ se naziva (prva) derivacija od f u c, a $m \times 1$ vektor

$$df(c;u) = A(c)u, \tag{1.2.13}$$

koji je linearna funkcija od u, se naziva (prvi) diferencijal funkcije f u točki c (s prirastom u). Ako je f diferencijabilna u svakoj točki otvorenog podskupa $E \subseteq S$, onda kažemo da je f diferencijabilna na E.

Jednadžba (1.2.11) se sastoji od m jednadžbi

$$f_i(c+u) = f_i(c) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(c)u_j + r_c^i(u) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.2.14}$$

za koje je zadovoljeno

$$\lim_{u \to 0} \frac{r_c^i(u)}{\|u\|} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{1.2.15}$$

Stoga vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.20. *Neka je S podskup od $\mathbb{R}^n$. Funkcija $f \colon S \to \mathbb{R}^m$ je diferencijabilna u unutarnjoj točki c skupa S ako i samo ako je svaka koordinatna funkcija f_i funkcije f diferencijabilna u c. U tom slučaju, i-ta koordinata od $df(c;u)$ je jednaka $df_i(c;u)$ $(i = 1, \ldots, m)$.*

Ako diferencijal funkcije postoji, tada je jedinstven kao što govori sljedeći teorem.

Teorem 1.21. *Neka je $f \colon S \to \mathbb{R}^m$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, funkcija diferencijabilna u točki $c \in S$ s diferencijalom $df(c;u) = A(c)u$. Pretpostavimo da postoji druga matrica $B(c)$ za koju je $df(c;u) = B(c)u$. Tada je $A(c) = B(c)$.*

Zanimaju nas nužni i dovoljni uvjeti za postojanje diferencijala. Za početak navedimo jedan od nužnih uvjeta.

Teorem 1.22. *Neka je $f \colon S \to \mathbb{R}^m$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, funkcija diferencijabilna u točki $c \in S$. Tada je f neprekidna u c.*

Obrat ovog teorema ne vrijedi općenito.

U daljnjem proučavanju diferencijabilnih funkcija ključnu ulogu igraju parcijalne derivacije.

Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ funkcija s domenom $S \subseteq \mathbb{R}^n$ i s vrijednostima u $\mathbb{R}^m$, i neka je $f_i\colon S \to \mathbb{R}\,(i = 1, \ldots, m)$ i-ta koordinatna funkcija funkcije f. Nadalje, neka je c unutarnja točka skupa S i e_j j-ti jedinični vektor u $\mathbb{R}^n$, tj. vektor čija je j-ta koordinata jednaka jedan, a sve ostale koordinate su mu jednake nula. Promotrimo točku $c + te_j \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, čije su sve koordinate, osim j-te, jednake onima točke c. Kako je c unutarnja točka skupa S, za dovoljno male t točka $c + te_j$ pripada skupu S. Promotrimo limes

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_i(c + te_j) - f_i(c)}{t}. \tag{1.2.16}$$

Kada ovaj limes postoji nazivamo ga *parcijalnom derivacijom* funkcije f_i po j-toj varijabli (ili j-tom parcijalnom derivacijom funkcije f_i) u točki c i označavamo ga s $\mathrm{D}_j f_i(c)$. Stoga parcijalnim deriviranjem od dane funkcije f_i dobivamo n funkcija $\mathrm{D}_1 f_i, \ldots, \mathrm{D}_n f_i$ definiranih u onim točkama od S gdje postoje odgovarajući limesi. Parcijalnim deriviranjem funkciju više varijabli tretiramo kao funkciju jedne varijable dok ostale varijable tretiramo kao konstante.

Teorem 1.23. *Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}^m$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, funkcija diferencijabilna u točki $c \in S$. Tada postoje sve parcijalne derivacije $\mathrm{D}_j f_i(c)$, $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ u točki c.*

Obrat navedenog teorema općenito nije istinit.

1.2.3 Prvi identifikacijski teorem

Teorem 1.24 (Prvi identifikacijski teorem)**.** *Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ vektorska funkcija definirana na skupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ i diferencijabilna u unutarnjoj točki c skupa S. Neka je u $n \times 1$ vektor. Tada je*

$$df(c; u) = (\mathrm{D}\, f(c))u, \tag{1.2.17}$$

gdje je $\mathrm{D}\, f(c)$ matrica tipa $m \times n$ čiji su elementi $\mathrm{D}_j f_i(c)$ parcijalne derivacije of f u točki c. Obratno, ako je $A(c)$ matrica za koju vrijedi

$$df(c; u) = A(c)u \tag{1.2.18}$$

za sve realne $n \times 1$ vektore u, onda je $A(c) = \mathrm{D}\, f(c)$.

$m \times n$ matricu $\mathrm{D}\, f(c)$ iz (1.2.17), čiji je element na poziciji (i, j) jednak $\mathrm{D}_j f_i(c)$, nazivamo *Jacobijevom matricom* funkcije f u točki c. Ova matrica je definirana u svakoj točki gdje postoje parcijalne derivacije $\mathrm{D}_j f_i(c)$, $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$. Dakle, Jacobijeva matrica može postojati neovisno o tome je li funkcija f diferencijabilna u točki c. Kada je $m = n$ determinantu Jacobijeve matrice funkcije f nazivamo *Jacobijanom* funkcije f. $n \times m$ matricu dobivenu transponiranjem Jacobijeve matrice funkcije f nazivamo *gradijentom* funkcije f i označavamo s $\bigtriangledown f(c)$.

Prvi identifikacijski teorem ćemo primijenjivati u ostatku teksta. Velika važnost ovog teorema je u tome što za diferencijabilne funkcije iz diferencijala tih funkcija odmah dobivamo vrijednosti parcijalnih derivacija.

1.2.4 Postojanje diferencijala

U ovom odjeljku konačno dajemo dovoljne uvjete za postojanje diferencijala neke funkcije f u unutarnjoj točki njene domene c. Postavljamo sljedeća pitanja:

(i) Ako je f diferencijabilna u c, jesu li parcijalne derivacije funkcije f neprekidne u c?

(ii) Ako je svaka parcijalna derivacija funkcije f neprekidna u c, je li f diferencijabilna u c?

(iii) Ako je f diferencijabilna u c, postoje li sve parcijalne derivacije funkcije f u nekoj n-kugli $B(c)$ sa središtem u točki c?

(iv) Ako sve parcijalne derivacije funkcije f postoje u nekoj n-kugli $B(c)$ sa središtem u točki c, je li f diferencijabilna u c?

Odgovor na sva četiri postavljena pitanja je, općenito, negativan. Sada uočavamo važnost svih pretpostavki koje vode do postojanja diferencijala i koje su navedene u sljedećem teoremu.

Teorem 1.25. *Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ funkcija definirana na skupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je c unutarnja točka skupa S. Ako svaka parcijalna derivacija $\mathrm{D}_j f_i$, $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ postoji u nekoj n-kugli $B(c)$ sa središtem u točki c i ako je neprekidna u c, onda je f diferencijabilna u točki c.*

Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ funkcija definirana na otvorenom skupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Ako sve prve parcijalne derivacije $\mathrm{D}_j f_i(x)$, $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ postoje i neprekidne su u svakoj točki $x \in S$, kažemo da je funkcija f *neprekidno diferencijabilna* na S.

1.2.5 Lančano pravilo, Cauchyjevo pravilo invarijance, Teorem o srednjoj vrijednosti

Teorem 1.26 (Lančano pravilo)**.** *Neka je S podskup od $\mathbb{R}^n$ i pretpostavimo da je $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ funkcija diferencijabilna u unutarnjoj točki c skupa S. Nadalje, neka je T podskup od $\mathbb{R}^m$ takav da je $f(x) \in T$ za svaki $x \in S$ i neka je $g\colon T \to \mathbb{R}^p$ funkcija diferencijabilna u unutarnjoj točki $b = f(c)$ skupa T. Tada je funkcija $h\colon S \to \mathbb{R}^p$ dana kompozicijom*

$$h(x) = g(f(x)) \tag{1.2.19}$$

diferencijabilna u c i vrijedi

$$\mathrm{D}\, h(c) = (\mathrm{D}\, g(b))(\mathrm{D}\, f(c)). \tag{1.2.20}$$

Teorem 1.27 (Cauchyjevo pravilo invarijance). *Ako je f diferencijabilna u c i g diferencijabilna u $b = f(c)$, onda je kompozicija $h = g \circ f$ diferencijabilna u c i vrijedi*

$$dh(c; u) = dg(b; df(c; u)) \tag{1.2.21}$$

za svaki $u \in \mathbb{R}^n$.

Teorem 1.28 (Teorem o srednjoj vrijednosti). *Neka je $\phi \colon S \to \mathbb{R}$ realna funkcija definirana i diferencijabilna na otvorenom skupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Neka je $c \in S$ i $u \in \mathbb{R}^n$ tako da je $c + tu \in S$ za sve $t \in [0, 1]$. Tada je*

$$\phi(c + u) = \phi(c) + d\phi(c + \theta u; u) \tag{1.2.22}$$

za neki $\theta \in [0, 1]$.

1.2.6 Matrične funkcije

Korištenjem vec operatora iz matrice dobivamo vektor. Ovom idejom ćemo lako poopćiti rezultate dobivene za vektorske funkcije na matrične funkcije.

Definicija 1.9. *Neka je $F \colon S \to \mathbb{R}^{m \times p}$ matrična funkcija s domenom $S \subseteq \mathbb{R}^{n \times q}$ i s vrijednostima u $\mathbb{R}^{m \times p}$. Neka je C unutarnja točka skupa S i $B(C; r)$, $r > 0$, n-kugla sa središtem u C radijusa r koja leži u S. Neka je $U \in \mathbb{R}^{n \times q}$ sa svojstvom $\|U\| < r$ tako da je $C + U \in B(C; r)$. Ako postoji realna matrica A tipa $mp \times nq$ koja ovisi o C, ali ne ovisi o U, i realna $m \times p$ matrica R_C koja ovisi o C i U, tako da vrijedi*

$$\operatorname{vec} F(C + U) = \operatorname{vec} F(C) + A(C) \operatorname{vec} U + \operatorname{vec} R_C(U) \tag{1.2.23}$$

za sve $U \in \mathbb{R}^{n \times q}$ sa svojstvom $\|U\| < r$ i

$$\lim_{U \to 0} \frac{R_C(U)}{\|U\|} = 0, \tag{1.2.24}$$

tada kažemo da je funkcija F diferencijabilna u točki C. $m \times p$ matrica $dF(C; U)$ definirana s

$$\operatorname{vec} dF(C; U) = A(C) \operatorname{vec} U \tag{1.2.25}$$

se naziva (prvi) diferencijal od F u C s prirastom U, a $mp \times nq$ matrica $A(C)$ se naziva (prva) derivacija od F u C.

Napomena. *Prisjetimo se definicije norme matrice*

$$\|X\| = (\operatorname{tr} X'X)^{1/2} \tag{1.2.26}$$

i da smo pokazali da je

$$\|X\| = \|\operatorname{vec} X\|. \tag{1.2.27}$$

n-kugla u $\mathbb{R}^{n \times q}$ je jednaka

$$B(C; r) = \{X \colon X \in \mathbb{R}^{n \times q}, \|X - C\| < r\}. \tag{1.2.28}$$

Definirajmo funkciju $f\colon \operatorname{vec} S \to \mathbb{R}^{mp}$

$$f(\operatorname{vec} X) = \operatorname{vec} F(X). \tag{1.2.29}$$

Analogno, definirajmo funkciju $r_{\operatorname{vec} C}\colon \operatorname{vec} \mathbb{R}^{n\times q} \to \mathbb{R}^{mp}$ s

$$r_{\operatorname{vec} C}(\operatorname{vec} U) = \operatorname{vec} R_C(U). \tag{1.2.30}$$

Uz ovako definirane vektorske funkcije (1.2.23) je ekvivalentno s

$$f(\operatorname{vec} C + \operatorname{vec} U) = f(\operatorname{vec} C) + A(\operatorname{vec} C)\operatorname{vec} U + r_{\operatorname{vec} C}(\operatorname{vec} U), \tag{1.2.31}$$

a (1.2.24) je ekvivalentno s

$$\lim_{\operatorname{vec} U \to 0} \frac{r_{\operatorname{vec} C}(\operatorname{vec} U)}{\|\operatorname{vec} U\|} = 0 \tag{1.2.32}$$

jer zbog (1.2.27) matrica teži k nul-matrici ako i samo ako njoj pridruženi vektor teži nul-vektoru. Uspoređujući Definicije 1.8 i 1.9 zaključujemo da je F diferencijabilna u točki C ako i samo ako je njoj pridružena vektorska funkcija f diferencijabilna u $\operatorname{vec} C$. Uz to dobivamo i jednakost

$$\operatorname{vec} dF(C;U) = df(\operatorname{vec} C; \operatorname{vec} U). \tag{1.2.33}$$

Jacobijevu matricu od F u C definiramo s

$$\mathrm{D}\, F(C) = \mathrm{D}\, f(\operatorname{vec} C). \tag{1.2.34}$$

Jacobijeva matrica $\mathrm{D}\, F(C)$ je $mp \times nq$ matrica čiji je element na poziciji (i,j) parcijalna derivacija i-te koordinatne funkcije od $\operatorname{vec} F(C)$ po j-toj varijabli od $\operatorname{vec} X$, izračunata u $X = C$.

Sljedeći teoremi su direktna poopćenja već navedenih teorema za vektorske funkcije.

Teorem 1.29. *Neka je S podskup od $\mathbb{R}^{n\times q}$. Funkcija $F\colon S \to \mathbb{R}^{m\times p}$ je diferencijabilna u unutarnjoj točki C skupa S ako i samo ako je svaka koordinatna funkcija F_{ij} funkcije F diferencijabilna u C. U tom slučaju, (i,j)-ti element od $dF(C;U)$ je jednak $dF_{ij}(C;U)$ $(i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,p)$.*

Teorem 1.30 (Prvi identifikacijski teorem za matrične funkcije)**.** *Neka je $F\colon S \to \mathbb{R}^{m\times p}$ matrična funkcija s domenom $S \subseteq \mathbb{R}^{n\times q}$ i s vrijednostima u $\mathbb{R}^{m\times p}$, diferencijabilna u unutarnjoj točki $C \in S$. Tada je*

$$\operatorname{vec} dF(C;U) = A(C)\operatorname{vec} U \tag{1.2.35}$$

za sve $U \in \mathbb{R}^{n\times q}$ ako i samo ako je

$$\mathrm{D}\, F(C) = A(C). \tag{1.2.36}$$

Teorem 1.31 (Lančano pravilo za matrične funkcije)**.** *Neka je S podskup od $\mathbb{R}^{n\times q}$ i pretpostavimo da je $F\colon S \to \mathbb{R}^{m\times p}$ diferencijabilna u unutarnjoj točki $C \in S$. Nadalje, neka je T podskup od $\mathbb{R}^{m\times p}$ takav da je $F(X) \in T$ za sve $X \in S$ i pretpostavimo da je $G\colon T \to \mathbb{R}^{r\times s}$ diferencijabilna u unutarnjoj točki $B = F(C)$ od T. Tada je funkcija $H\colon S \to \mathbb{R}^{r\times s}$ definirana s*

$$H(X) = G(F(X)) \tag{1.2.37}$$

diferencijabilna u C i vrijedi

$$\mathrm{D}\,H(C) = (\mathrm{D}\,G(B))(\mathrm{D}\,F(C)). \tag{1.2.38}$$

Teorem 1.32 (Cauchyjevo pravilo invarijance za matrične funkcije)**.** *Ako je F diferencijabilna u C i G diferencijabilna u $B = F(C)$, onda je kompozicija $H = G \circ F$ diferencijabilna u C i vrijedi*

$$dH(C;U) = dG(B; dF(C;U)) \tag{1.2.39}$$

za svaki $U \in \mathbb{R}^{n\times q}$.

1.3 Teorem o implicitnoj funkciji

Bez dokaza navodimo važan teorem koji ćemo koristiti u sljedećem poglavlju.

Teorem 1.33 (Teorem o implicitnoj funkciji)**.** *Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ vektorska funkcija definirana na skupu $S \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$ i neka je $(x_0; t_0)$ unutarnja točka od S, gdje je $x_0 \in \mathbb{R}^m$ i $t_0 \in \mathbb{R}^k$. Pretpostavimo da vrijedi*

(i) $f(x_0; t_0) = 0$,

(ii) f *je* $p \geq 2$ *puta diferencijabilna u* $(x_0; t_0)$,

(iii) $m \times m$ *matrica* $J(x;t) = \partial f(x;t)/\partial x'$ *je regularna u* $(x_0; t_0)$.

Tada postoji otvoren skup $T \subseteq \mathbb{R}^k$ koji sadrži t_0 i postoji jedinstvena funkcija $g\colon T \to \mathbb{R}^m$ takva da vrijedi

(a) $g(t_0) = x_0$,

(b) $f(g(t); t) = 0$ *za sve* $t \in T$,

(c) g *je* $p - 1$ *puta diferencijabilna na* T *i* p *puta diferencijabilna u* t_0.

2 Matrični diferencijalni račun

2.1 Diferencijali važnih matričnih funkcija

2.1.1 Osnovna pravila diferenciranja

Neka su u i v realne diferencijabilne funkcije, $u, v\colon S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, i α realna konstanta. Tada vrijede sljedeća pravila

$$\begin{aligned}
d\alpha &= 0, && (2.1.1)\\
d(\alpha u) &= \alpha du, && (2.1.2)\\
d(u+v) &= du + dv, && (2.1.3)\\
d(u-v) &= du - dv, && (2.1.4)\\
d(uv) &= (du)v + udv, && (2.1.5)\\
d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{vdu - udv}{v^2} \qquad (v \neq 0). && (2.1.6)
\end{aligned}$$

Diferencijali potencije, logaritamske i eksponencijalne funkcije dani su s

$$\begin{aligned}
du^\alpha &= \alpha u^{\alpha-1} du, && (2.1.7)\\
d\ln u &= u^{-1} du \qquad (u > 0), && (2.1.8)\\
de^u &= e^u du, && (2.1.9)\\
d\alpha^u &= \alpha^u \ln \alpha du \qquad (\alpha > 0). && (2.1.10)
\end{aligned}$$

Napomena. *Domena funkcije u^α ovisi o realnom broju α. Ako je α prirodan broj tada je u^α definirana za sve $u \in \mathbb{R}$ no ako je α negativan cijeli broj ili nula točka $u = 0$ se mora isključiti. Ako je α racionalan broj, tj. $\alpha = p/q$ (gdje su p i q cijeli brojevi i uvijek možemo pretpostaviti da je $q > 0$), tada je $u^\alpha = \sqrt[q]{u^p}$ pa je funkcija u^α definirana za sve $u \in \mathbb{R}$ kada je q neparan, odnosno samo za $u \geq 0$ kada je q paran. U slučajevima kada je α iracionalan, funkcija u^α je definirana samo za $u > 0$.*

Navedena pravila diferenciranja se lako dokažu. Za primjer dokažimo (2.1.3). Definirajmo funkciju $\phi(x) = u(x) + v(x)$. Tada je

$$\begin{aligned}
d\phi(x;h) &= \sum_j h_j D_j \phi(x) = \sum_j h_j (D_j u(x) + D_j v(x))\\
&= \sum_j h_j D_j u(x) + \sum_j h_j D_j v(x) = du(x;h) + dv(x;h).
\end{aligned}$$

Slični rezultati vrijede kada su U i V matrične funkcije, A matrica realnih konstanti i α realna konstanta

$$\begin{aligned} dA &= 0, && (2.1.11)\\ d(\alpha U) &= \alpha dU, && (2.1.12)\\ d(U+V) &= dU + dV, && (2.1.13)\\ d(U-V) &= dU - dV, && (2.1.14)\\ d(UV) &= (dU)V + UdV. && (2.1.15) \end{aligned}$$

Primijetimo da iz (2.1.11) i (2.1.15) za matricu konstanti A i matričnu funkciju U vrijedi

$$d(AU) = AdU. \tag{2.1.16}$$

Za Kroneckerov produkt i Hadamardov produkt vrijede formule analogne formuli (2.1.15)

$$\begin{aligned} d(U \otimes V) &= (dU) \otimes V + U \otimes dV, && (2.1.17)\\ d(U \odot V) &= (dU) \odot V + U \odot dV. && (2.1.18) \end{aligned}$$

Vrijedi i

$$\begin{aligned} dU' &= (dU)', && (2.1.19)\\ d\,\mathrm{vec}\,U &= \mathrm{vec}\,dU, && (2.1.20)\\ d\,\mathrm{tr}\,U &= \mathrm{tr}\,dU. && (2.1.21) \end{aligned}$$

Napomena. *Da bi formule* (2.1.13), (2.1.14) *i* (2.1.18) *imale smisla matrične funkcije U i V moraju imati jednaku kodomenu. Također, da bi umnožak matričnih funkcija u* (2.1.15) *bio dobro definiran mora vrijediti $U\colon S \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $V\colon S \to \mathbb{R}^{n\times p}$ za neke $m, n, p \in \mathbb{N}$ (analogno mora vrijediti i za matrice A i U u* (2.1.16)*).*

Navedene tvrdnje se lako dokažu koristeći Teorem 1.29. Za primjer pokažimo da vrijedi (2.1.15). Za sve i, j vrijedi

$$\begin{aligned} (d(UV))_{ij} = d(UV)_{ij} = d\sum_k u_{ik}v_{kj} &= \sum_k d(u_{ik}v_{kj})\\ &= \sum_k [(du_{ik})v_{kj} + u_{ik}dv_{kj}]\\ &= \sum_k (du_{ik})v_{kj} + \sum_k u_{ik}dv_{kj}\\ &= ((dU)V)_{ij} + (UdV)_{ij}\\ &= ((dU)V + UdV)_{ij}. \end{aligned}$$

pa zaključujemo da vrijedi (2.1.15).

Pokažimo da vrijedi
$$d(AXB) = A(dX)B \tag{2.1.22}$$
gdje su A i B konstantne matrice i X matrična funkcija tako da je matrični produkt AXB dobro definiran.

Za sve i, j vrijedi

$$\begin{aligned}
(d(AXB))_{ij} = d(AXB)_{ij} &= d\left(\sum_k \sum_l a_{ik}x_{kl}b_{lj}\right) \\
&= \sum_k \sum_l d\left(a_{ik}x_{kl}b_{lj}\right) \\
&= \sum_k \sum_l a_{ik}(dx_{kl})b_{lj} \\
&= \sum_k \sum_l a_{ik}(dX)_{kl}b_{lj} \\
&= (A(dX)B)_{ij}.
\end{aligned}$$

pa vrijedi (2.1.22).

2.1.2 Diferencijal determinante

Iskoristimo navedene tvrdnje za dobivanje brojnih korisnih rezultata. Za početak izvedimo diferencijal determinante.

Teorem 2.1. *Neka je S otvoreni podskup od $\mathbb{R}^{n\times q}$. Ako je matrična funkcija $F\colon S \to \mathbb{R}^{m\times m}$ $(m \geq 2)$ k puta (neprekidno) diferencijabilna na S, onda je i realna funkcija $|F|\colon S \to \mathbb{R}$ definirana s $|F|(X) = |F(X)|$ k puta (neprekidno) diferencijabilna na S. Nadalje, vrijedi*
$$d|F| = tr\ (F^{\#}dF), \tag{2.1.23}$$
gdje $F^{\#}(X) = (F(X))^{\#}$ označava adjunktu matrice $F(X)$. Posebno, u točkama X gdje je $\mathrm{r}(F(X)) = m$ vrijedi
$$d|F| = |F|\,\mathrm{tr}(F^{-1}dF). \tag{2.1.24}$$
Nadalje, u točkama X gdje je $\mathrm{r}(F(X)) = m-1$ vrijedi
$$d|F| = (-1)^{p+1}\mu(F)\frac{v'(dF)u}{v'(F^{p-1})^{+}u}\,, \tag{2.1.25}$$
gdje p označava kratnost nule kao nultočke od $F(X)$, $1 \leq p \leq m$, $\mu(F(X))$ je produkt $m-p$ ne-nula svojstvenih vrijednosti od $F(X)$ ako je $p < m$ ili je $\mu(F(X)) = 1$ ako je $p = m$, a u i v su $m \times 1$ vektori koji zadovoljavaju $F(X)u = F'(X)v = 0$. Konačno, u točkama X za koje je $\mathrm{r}(F(X)) \leq 2$ vrijedi
$$d|F| = 0. \tag{2.1.26}$$

Dokaz. Promotrimo realnu funkciju $\phi\colon \mathbb{R}^{m\times m} \to \mathbb{R}$ definiranu s $\phi(Y) = |Y|$. Funkcija ϕ je očito ∞ puta diferencijabilna u svakoj točki $Y \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Ako je $Y = (y_{ij})$ i c_{ij} kofaktor elementa y_{ij}, onda razvijajući determinantu $|Y|$ po njezinu j-tom stupcu (za svaki $j = 1, \ldots, m$) dobivamo

$$\phi(Y) = |Y| = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} y_{ij}. \tag{2.1.27}$$

Budući da $c_{1j}, \ldots, c_{mj}$ ne ovise o y_{ij}, imamo

$$\frac{\partial \phi(Y)}{\partial y_{ij}} = c_{ij}. \tag{2.1.28}$$

Koristeći izračunate parcijalne derivacije dobivamo diferencijal

$$d\phi(Y) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\, dy_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (Y^{\#} dY)_{jj} = \mathrm{tr}(Y^{\#} dY) \tag{2.1.29}$$

Budući da je $|F|$ kompozicija funkcija ϕ i F, prema Cauchyjevom pravilu invarijance (Teorem 1.32) vrijedi

$$d|F|(X;U) = d\phi(F(X); dF(X;U)) = \mathrm{tr}(F(X)^{\#} dF(X;U)).$$

Odnosno, vrijedi

$$d|F| = \mathrm{tr}(F^{\#} dF). \tag{2.1.30}$$

Ostale tvrdnje slijede iz Teorema 1.16.
Naime, ako je $\mathrm{r}(F(X)) = m$ tada je $(F(X))^{\#} = |F(X)|(F(X))^{-1}$ pa je $\mathrm{tr}(F(X)^{\#} dF(X;U)) = |F(X)|\mathrm{tr}\ (F(X)^{-1} F(X;U))$, a otuda slijedi (2.1.24).
Ako je $\mathrm{r}(F(X) = m - 1$, tada je $(F(X))^{\#} = (-1)^{p+1}\mu(F(X)) \dfrac{uv'}{v'(F(X)^{p-1})^{+}u}$, s oznakama kao iz iskaza teorema. Kako je $v'(F(X)^{p-1})^{+}u \in \mathbb{R}$ i $\mathrm{tr}(uv' dF(X;U)) = \mathrm{tr}\ (u(v' dF(X;U))) = \mathrm{tr}((v' dF(X;U))u) = \mathrm{tr}\ (v' dF(X;U)u)$ slijedi (2.1.25).
Konačno, kada je $\mathrm{r}(F(X)) \leq m-2$, tada je $(F(X))^{\#} = 0$ pa je i $\mathrm{tr}(F(X)^{\#} dF(X;U)) = 0$. ☐

U točkama gdje je $\mathrm{r}(F(X)) = m - 1$, $F(X)$ mora imati barem jednu svojstvenu vrijednost jednaku nula. Nadalje, u točkama gdje je nula jednostavna svojstvena vrijednost (tj. svojstvena vrijednost algebarske kratnosti jedan) mora vrijediti $\mathrm{r}(F(X)) = m-1$. Prema Teoremu 1.4 slijedi da ako pretpostavimo da je nula jednostavna svojstvena vrijednost od $F(X)$ mora vrijediti $\mathrm{r}(F(X)) \leq m-1$, a kada bi bilo $\mathrm{r}(F(X)) < m - 1$ slijedilo bi da je algebarska kratnost nule veća ili jednaka $m - (m - 2) = 2$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, mora biti $\mathrm{r}(F(X)) = m - 1$. Dakle, kada je nula jednostavna svojstvena vrijednost od $F(X)$ tada je $p = 1$ pa se (2.1.25) može zapisati kao

$$d|F| = \mu(F)\frac{v'(dF)u}{v'u}, \tag{2.1.31}$$

s obzirom da je $(-1)^2 = 1$ i $(F^0)^{+} = I^{+} = I$.

Teorem 2.2. *Neka T_+ označava skup*

$$T_+ = \{Y : Y \in \mathbb{R}^{m\times m}, |Y| > 0\}. \tag{2.1.32}$$

Neka je S otvoreni podskup od $\mathbb{R}^{n\times q}$. Ako je matična funkcija $F: S \to T_+$ k puta (neprekidno) diferencijabilna na S, tada je i realna funkcija $\ln|F|: S \to \mathbb{R}$ dana s $(\ln|F|)(X) = \ln|F(X)|$ k puta (neprekidno) diferencijabilna. Nadalje, vrijedi

$$d\ln|F| = \operatorname{tr}(F^{-1}dF). \tag{2.1.33}$$

Dokaz. Kako je kodomena funkcije F jednaka T_+ to je $F(Y)$ regularna za svaki $Y \in S$. $\ln|F|$ je kompozicija funkcija ln i $|F|$ pa prema (2.1.8), (2.1.24) i Cauchyjevom pravilu invarijance (Teorem 1.32) slijedi

$$d\ln|F| = |F|^{-1}d|F| = |F|^{-1}|F|\operatorname{tr}(F^{-1}dF) = \operatorname{tr}(F^{-1}dF)$$

□

2.1.3 Diferencijal inverza

U sljedećem teoremu izvodimo diferencijal inverzne funkcije.

Teorem 2.3. *Neka je T skup regularnih realnih $m \times m$ matrica, tj. $T = \{Y : Y \in \mathbb{R}^{m\times m}, |Y| \neq 0\}$. Neka je S otvoren podskup od $\mathbb{R}^{n\times q}$. Ako je matrična funkcija $F: S \to T$ k puta (neprekidno) diferencijabilna na S, onda je i matrična funkcija $F^{-1}: S \to T$ definirana s $F^{-1}(X) = (F(X))^{-1}$ k puta (neprekidno) diferencijabilna na S i vrijedi*

$$dF^{-1} = -F^{-1}(dF)F^{-1}. \tag{2.1.34}$$

Dokaz. Neka je $A_{ij}(X)$ $(m-1)\times(m-1)$ submatrica od $F(X)$ dobivena ispuštanjem i-tog retka i j-tog stupca iz matrice $F(X)$. Opći element matrice $F^{-1}(X)$ se može izraziti kao

$$[F^{-1}(X)]_{ij} = \frac{1}{|F(X)|}(-1)^{i+j}|A_{ji}(X)|. \tag{2.1.35}$$

Kako su obje determinante $|A_{ji}|$ i $|F|$ k puta (neprekidno) diferencijabilne na S, to je i njihov količnik pa je stoga i matrična funkcija F^{-1} k puta (neprekidno) diferencijabilna na S (jer su sve njene koordinatne funkcije k puta (neprekidno) diferencijabilne na S pa koristimo Teorem 1.29).
Da dokažemo (2.1.34) prvo računamo

$$0 = dI = d(F^{-1}F) = (dF^{-1})F + F^{-1}dF. \tag{2.1.36}$$

Množeći prethodni izraz zdesna s F^{-1} dobivamo (2.1.34). □

Promotrimo skup T svih regularnih realnih $m \times m$ matrica. T je otvoren podskup od $\mathbb{R}^{m\times m}$ pa za svaki $Y_0 \in T$ postoji otvorena okolina $N(Y_0)$ sadržana u T, tj. takva da su sve točke u $N(Y_0)$ regularne matrice. Naime, promotrimo funkciju determinante $\phi\colon \mathbb{R}^{m\times m} \to \mathbb{R}$, definiranu s $\phi(Y) = |Y|$. ϕ je neprekidna funkcija, a $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je otvoren podskup od $\mathbb{R}$ pa je i $T = \phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ otvoren podskup od $\mathbb{R}^{m\times m}$.
Neka je $Y_0 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regularna matrica i $\{E_j\}$ niz realnih $m \times m$ matrica takav da je $\lim_{j\to\infty} E_j = 0$. Tada je zbog neprekidnosti funkcije determinante

$$\lim_{j\to\infty} |Y_0 + E_j| = |\lim_{j\to\infty}(Y_0 + E_j)| = |Y_0|. \tag{2.1.37}$$

Kako je $|Y_0| \neq 0$ to postoji $j_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $j \geq j_0$ vrijedi $|Y_0 + E_j| \neq 0$. Matrica je regularna ako i samo ako joj je determinanta različita od nula i ako i samo ako joj je rang jednak m pa je

$$\mathrm{r}(Y_0 + E_j) = \mathrm{r}(Y_0) = m \tag{2.1.38}$$

za svaki $j \geq j_0$.
Nadalje, kako je inverzna funkcija neprekidna slijedi

$$\lim_{j\to\infty}(Y_0 + E_j)^{-1} = (\lim_{j\to\infty}(Y_0 + E_j))^{-1} = Y_0^{-1}. \tag{2.1.39}$$

Napomena. *Primijetimo da inverz od* $Y_0 + E_j$ *ne mora postojati za svaki* $j \in \mathbb{N}$ *no kako vrijedi* (2.1.38) *to je za svaki* $j \geq j_0$ *inverz od* $Y_0 + E_j$ *dobro definiran pa postoji* $\lim_{j\to\infty}(Y_0 + E_j)^{-1}$ *u* (2.1.39).

2.1.4 Diferencijal Moore-Penrose inverza

Jednadžba (2.1.38) pokazuje da regularne matrice imaju *lokalno konstantan rang.* Singularne matrice nemaju navedeno svojstvo. Promotrimo, na primjer, matrice

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad E_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/j \end{bmatrix}, \tag{2.1.40}$$

i neka je $Y_j = Y_0 + E_j$. Tada je $\mathrm{r}(Y_0)$=1 no $\mathrm{r}(Y_j) = 2$ za svaki $j \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi $lim_{j\to\infty} Y_j = Y_0$, ali imamo $\mathrm{r}(Y_j) \neq \mathrm{r}(Y_0)$ za svaki $j \in \mathbb{N}$.
Također, primijetimo da je

$$Y_j^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix},$$

za svaki $j \in \mathbb{N}$. Naime, Y_j je regularna matrica pa se njen MP inverz poklapa s inverzom. Y_j^+ ne konvergira prema Y_0^+ jer uopće ne konvergira. Kada je Y_0 bila regularna matrica njen inverz (pa i MP inverz) se mogao dobiti kao limes inverza (pa i MP inverza) od Y_j.
Slijedi: (i) $\mathrm{r}(Y)$ nije konstantan u niti jednoj okolini od Y_0, i (ii) Y^+ nije neprekidan u Y_0.
Bez dokaza navodimo dvije leme koje će pobliže opisati povezanost svojstava (i) i (ii).

Lema 2.1. *Neka je $Y_0 \in \mathbb{R}^{m\times p}$ i neka je $\{E_j\}$ niz realnih $m \times p$ matrica takvih da je $\lim_{j\to\infty} E_j = 0$. Tada je*

$$\mathrm{r}(Y_0 + E_j) = \mathrm{r}(Y_0) \qquad \text{za sve } j \geq j_0 \tag{2.1.41}$$

ako i samo ako je

$$\lim_{j\to\infty} (Y_0 + E_j)^+ = Y_0^+. \tag{2.1.42}$$

Lema 2.2. *Neka je X_0 unutarnja točka podskupa S od $\mathbb{R}^{n\times q}$. Neka je $F\colon S \to \mathbb{R}^{m\times p}$ matrična funkcija definirana na S i k puta (neprekidno) diferencijabilna u svakoj točki neke okoline $N(X_0) \subseteq S$ od X_0. Tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

(i) rang od $F(X)$ je konstantan na $N(X_0)$,

(ii) F^+ je neprekidna na $N(X_0)$,

(iii) F^+ je k puta (neprekidno) diferencijabilna na $N(X_0)$.

Navedimo i dokažimo sada dva teorema u kojima izvodimo diferencijal Moore-Penrose inverza.

Teorem 2.4. *Neka je S otvoreni podskup od $\mathbb{R}^{n\times q}$ i neka je $F\colon S \to \mathbb{R}^{m\times p}$ matrična funkcija definirana i $k \geq 1$ puta (neprekidno) diferencijabilna na S. Ako je $\mathrm{r}(F(X))$ konstantan na S, tada su i $F^+F\colon S \to \mathbb{R}^{p\times p}$ i $FF^+\colon S \to \mathbb{R}^{m\times m}$ k puta (neprekidno) diferencijabilne na S i vrijedi*

$$d(F^+F) = F^+(dF)(I_p - F^+F) + (F^+(dF)(I_p - F^+F))' \tag{2.1.43}$$

i

$$d(FF^+) = (I_m - FF^+)(dF)F^+ + ((I_m - FF^+)(dF)F^+)'. \tag{2.1.44}$$

Dokaz. Kako je ispunjen uvjet (i) Leme 2.2 na okolini S to vrijedi i uvjet (iii) iz Leme 2.2, tj. F^+ je k puta (neprekidno) diferencijabilna na S pa su i umnošci F^+F i FF^+ k puta (neprekidno) diferencijabilni.

Pokažimo prvi rezultat. Iz svojstava MP inverza, prema Teoremu 1.12 (v), slijedi $(F^+F)(F^+F) = F^+F$ i $(F^+F)' = F^+F$. Iz simetričnosti od F^+F slijedi $(d(F^+F))' = d(F^+F)' = d(F^+F)$ simetričnost od $d(F^+F)$ pa vrijedi

$$\begin{aligned} d(F^+F) &= d((F^+F)(F^+F)) = (d(F^+F))F^+F + F^+Fd(F^+F) \\ &= (F^+Fd(F^+F))' + F^+F(d(F^+F)). \end{aligned} \tag{2.1.45}$$

Da bismo pronašli $d(F^+F)$ dovoljno je pronaći $Fd(F^+F)$ no ovo lagano dobivamo izlučujući iz jednakosti

$$dF = d(FF^+F) = (dF)(F^+F) + Fd(F^+F) \tag{2.1.46}$$

dF i sređivanjem dobivenog

$$Fd(F^+F) = dF(I_p - F^+F). \tag{2.1.47}$$

Uvrštavajući (2.1.47) u (2.1.45) slijedi (2.1.43).

Drugi rezultat dobivamo na analogan način. $\square$

Naposljetku dokazujemo konačan rezultat.

Teorem 2.5. *Neka je S otvoreni podskup od $\mathbb{R}^{n\times q}$ i neka je $F\colon S \to \mathbb{R}^{m\times p}$ matrična funkcija definirana i $k \geq 1$ puta (neprekidno) diferencijabilna na S. Ako je $\mathrm{r}(F(X))$ konstantan na S, tada je i $F^+\colon S \to \mathbb{R}^{p\times m}$ k puta (neprekidno) diferencijabilna na S i vrijedi*

$$dF^+ = -F^+(dF)F^+ + F^+F^{+'}(dF')(I_m - FF^+) + (I_p - F^+F)(dF')F^{+'}F^+. \tag{2.1.48}$$

Dokaz. Analogno kao u prethodnom dokazu pokazujemo da je F^+ k puta (neprekidno) diferencijabilna.

Strategija dokaza tvrdnje (2.1.48) je da dF^+ izrazimo preko $d(FF^+)$ i $d(F^+F)$ pa primijenimo Teorem 2.4. Imamo

$$dF^+ = d(F^+FF^+) = (d(F^+F))F^+ + F^+FdF^+ \tag{2.1.49}$$

i

$$d(FF^+) = (dF)F^+ + FdF^+. \tag{2.1.50}$$

Uvrštavanjem izraza za FdF^+ iz (2.1.50) u (2.1.49), dobivamo

$$dF^+ = (d(F^+F))F^+ + F^+(d(FF^+)) - F^+(dF)F^+ \tag{2.1.51}$$

Koristeći Teorem 2.4 dobivamo

$$\begin{aligned}(d(F^+F))F^+ &= F^+(dF)(I_p - F^+F)F^+ + (F^+(dF)(I_p - F^+F))'F^+ \\ &= F^+(dF)(F^+ - F^+FF^+) + (I_p - F^+F)(dF)'F^{+'}F^+ \\ &= F^+(dF)(F^+ - F^+) + (I_p - F^+F)(dF')F^{+'}F^+ \\ &= (I_p - F^+F)(dF')F^{+'}F^+\end{aligned} \tag{2.1.52}$$

i analogno

$$F^+(d(FF^+)) = F^+F^{+'}(dF')(I_m - FF^+) \tag{2.1.53}$$

Konačno, uvrštavanjem (2.1.52) i (2.1.53) u (2.1.51) dobivamo (2.1.48). $\square$

2.1.5 Diferencijal adjunkte

Prisjetimo se da za realnu $m \times m$ matricu Y njenu $m \times m$ adjunktu označavamo s $Y^{\#}$. Za danu matričnu $m \times m$ funkciju F definiramo matričnu $m \times m$ funkciju $F^{\#}$ s $F^{\#}(X) = (F(X))^{\#}$. U ovom poglavlju izvodimo diferencijal od $F^{\#}$. Za početak dokažimo sljedeći teorem.

Teorem 2.6. *Neka je S podskup od $\mathbb{R}^{n\times q}$ i neka je $F\colon S \to \mathbb{R}^{m\times m}$ ($m \geq 2$) matrična funkcija definirana na S. Ako je F k puta (neprekidno) diferencijabilna u točki $X_0 \in S$, tada je i matična funkcija $F^{\#}\colon S \to \mathbb{R}^{m\times m}$ k puta (neprekidno) diferencijabilna u točki X_0 i u X_0 vrijedi*

$$(dF^{\#})_{ij} = (-1)^{i+j}\operatorname{tr}(E_i(E_j'FE_i)^{\#}E_j'dF) \quad (i,j=1,\ldots,m), \tag{2.1.54}$$

gdje E_i označava $m\times(m-1)$ matricu dobivenu iz I_m ispuštanjem i-tog stupca.

Napomena. *$(m-1)\times(m-1)$ matrica $E_j'F(X)E_i$ se dobiva iz $m\times m$ matrice $F(X)$ ispuštanjem j-tog retka i i-tog stupca. $m\times m$ matrica $E_i(E_j'FE_i)^{\#}E_j'$ se dobiva iz $(m-1)\times(m-1)$ matrice $(E_j'FE_i)^{\#}$ dodavanjem nul-retka između $(i-1)$-og i i-tog retka i nul-stupca između $(j-1)$-tog i j-tog stupca.*

Dokaz. Prema definiciji adjunkte je

$$(F^{\#}(X))_{ij} = (-1)^{i+j}|E_j'F(X)E_i| \tag{2.1.55}$$

pa je prema Teoremu 2.1 $F^{\#}$ k puta (neprekidno) diferencijabilna i slijedi

$$\begin{aligned}(dF^{\#}(X))_{ij} &= d(F^{\#}(X))_{ij}\\ &= (-1)^{i+j}\operatorname{tr}[(E_j'F(X)E_i)^{\#}d(E_j'F(X)E_i)]\\ &= (-1)^{i+j}\operatorname{tr}[(E_j'F(X)E_i)^{\#}E_j'd(F(X))E_i]\\ &= (-1)^{i+j}\operatorname{tr}(E_i(E_j'F(X)E_i)^{\#}E_j'd(F(X)))\end{aligned} \tag{2.1.56}$$

gdje treći redak slijedi iz drugog zbog (2.1.22), a četvrti iz trećeg zbog (1.1.21). Ovim smo dokazali tvrdnju teorema. □

Prisjetimo se da prema Korolaru 1.1 vrijedi: ako je $Y = F(X)$ $m\times m$ matrica i $m \geq 2$, tada je rang od $Y^{\#} = F^{\#}(X)$ dan s

$$\operatorname{r}(Y^{\#}) = \begin{cases} m & \text{, ako je } \operatorname{r}(A) = m\\ 1 & \text{, ako je } \operatorname{r}(A) = m-1\\ 0 & \text{, ako je } \operatorname{r}(A) \leq m-2 \end{cases}. \tag{2.1.57}$$

Pomoću navedene tvrdnje možemo dokazati dva posebna slučaja Teorema 2.6.

Korolar 2.1. *Neka je* $F\colon S \to \mathbb{R}^{m\times m}$ $(m \geq 2)$, $S \subseteq \mathbb{R}^{n\times q}$, *k puta (neprekidno) diferencijabilna u točki* $X_0 \in S$ *gdje je* $F(X_0)$ *regularna, tada je i* $F^{\#}\colon S \to \mathbb{R}^{m\times m}$ *k puta (neprekidno) diferencijabilna u točki* X_0 *i diferencijal od* $F^{\#}$ *u* X_0 *je dan s*

$$dF^{\#} = |F|[(\mathrm{tr}(F^{-1}dF))F^{-1} - F^{-1}(dF)F^{-1}] \tag{2.1.58}$$

ili, ekvivalentno

$$d\,\mathrm{vec}\,F^{\#} = |F|[(\mathrm{vec}\,F^{-1})(\mathrm{vec}(F')^{-1})' - (F')^{-1} \otimes F^{-1}]d\,\mathrm{vec}\,F. \tag{2.1.59}$$

Dokaz. Kako je $F(X_0)$ regularna to u točki X_0 vrijedi $F^{\#} = |F|F^{-1}$ pa imamo, koristeći Teorem 2.1 i Teorem 2.3,

$$\begin{aligned} dF^{\#} &= d(|F|F^{-1}) \\ &= d(|F|)F^{-1} + |F|dF^{-1} \\ &= (|F|\,\mathrm{tr}(F^{-1}dF))F^{-1} + |F|F^{-1}(dF)F^{-1} \\ &= |F|[(\mathrm{tr}(F^{-1}dF))F^{-1} - F^{-1}(dF)F^{-1}]. \end{aligned} \tag{2.1.60}$$

Koristeći upravo dokazano i svojstva vec operatora slijedi

$$\begin{aligned} d\,\mathrm{vec}\,F^{\#} &= \mathrm{vec}\,dF^{\#} \\ &= \mathrm{vec}[|F|[(\mathrm{tr}\ (F^{-1}dF))F^{-1} - F^{-1}(dF)F^{-1}]] \\ &= |F|\,\mathrm{vec}[(\mathrm{tr}\ (F^{-1}dF))F^{-1} - F^{-1}(dF)F^{-1}] \\ &= |F|[(\mathrm{tr}\ (F^{-1}dF))\,\mathrm{vec}\,F^{-1} - \mathrm{vec}(F^{-1}(dF)F^{-1})] \\ &= |F|[(\mathrm{vec}\,F^{-1})(\mathrm{tr}\ (((F^{-1})')'dF)) - \mathrm{vec}(F^{-1}(dF)F^{-1})] \\ &= |F|[(\mathrm{vec}\,F^{-1})(\mathrm{tr}\ (((F')^{-1})'dF)) - \mathrm{vec}(F^{-1}(dF)F^{-1})] \\ &= |F|[(\mathrm{vec}\,F^{-1})(\mathrm{vec}(F')^{-1})'(\mathrm{vec}\,dF) - ((F^{-1})' \otimes F^{-1})(\mathrm{vec}\,dF)] \\ &= |F|[(\mathrm{vec}\,F^{-1})(\mathrm{vec}(F')^{-1})' - (F')^{-1} \otimes F^{-1}]\,\mathrm{vec}\,dF \\ &= |F|[(\mathrm{vec}\,F^{-1})(\mathrm{vec}(F')^{-1})' - (F')^{-1} \otimes F^{-1}]d\,\mathrm{vec}\,F \end{aligned} \tag{2.1.61}$$

i time je dokazana i druga tvrdnja teorema. □

Korolar 2.2. *Neka je* $F\colon S \to \mathbb{R}^{m\times m}$ $(m \geq 3)$, $S \subseteq \mathbb{R}^{n\times q}$ *diferencijabilna u točki* $X_0 \in S$. *Ako je* $\mathrm{r}(F(X_0)) \leq m-3$, *tada je*

$$(dF^{\#})(X_0) = 0. \tag{2.1.62}$$

Dokaz. Budući da rang $(m-1)\times(m-1)$ matrice $E_j'F(X_0)E_i$ u Teoremu 2.6 ne može prijeći $m-3 = (m-1)-2$ (jer smo tu matricu dobili iz matrice $F(X_0)$ ispuštanjem j-tog retka i i-tog stupca) to prema (2.1.57) slijedi da je $(E_j'F(X_0)E_i)^{\#} = 0$. Uvrštavajući $(E_j'F(X_0)E_i)^{\#} = 0$ u (2.1.54) slijedi $(dF^{\#}(X_0))_{ij} = 0$ jer je trag nul-matrice jednak nula. Kako ovo vrijedi za sve $i, j = 1, \ldots, m$ to je $dF^{\#}(X_0) = 0$. □

Prethodna dva korolara daju izraz za $dF^{\#}$ u svim točkama X gdje je $\mathrm{r}(F(X)) = m$ ili $\mathrm{r}(F(X)) \leq m-3$. Za preostale točke gdje je $\mathrm{r}(F(X))$ jednak $m-1$ ili $m-2$ koristimo Teorem 2.6.

2.1.6 Diferencijal svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora

Za realnu matricu X svojstvene vrijednosti su općenito kompleksni brojevi. Uz to algebarska kratnost svojstvenih vrijednosti može biti strogo veća od jedan. Ovo komplicira traženje diferencijala funkcije svojstvene vrijednosti no mi ćemo razmatrati samo najjednostavniji slučaj u kojem je dana realna simetrična matrica X_0 pa su sve svojstvene vrijednosti realne i pretpostavit ćemo da X_0 ima jednostavnu svojstvenu vrijednost λ_0. Prvo pokažimo tvrdnju sljedeće leme.

Lema 2.3. *Neka je A simetrična matrica reda n, tj. $A' = A$ i b proizvoljni $n \times 1$ vektor. Tada je $Ab = 0$ ako i samo ako je $A^+b = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $Ab = 0$. Tada vrijedi $A^+Ab = A^+(Ab) = 0$ pa iz Teorema 1.12 (vii) slijedi $AA^+b = A^+Ab = 0$, a onda i $A^+b = A^+AA^+b = A^+(AA^+b) = 0$.
Obratno, pretpostavimo da je $A^+b = 0$. Tada je i $AA^+b = A(A^+b) = 0$ pa ponovno prema Teoremu 1.12 (vii) slijedi $A^+Ab = AA^+b = 0$. Dalje, vrijedi $Ab = AA^+Ab = A(A^+Ab) = 0$. □

Teorem 2.7. *Neka je X_0 realna simetrična matrica reda n. Neka je u_0 normirani svojstveni vektor pridružen jednostavnoj svojstvenoj vrijednosti λ_0 od X_0. Tada postoje realna funkcija λ i vektorska funkcija u definirane za sve X u nekoj okolini $N(X_0) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ od X_0 takve da vrijedi*

$$\lambda(X_0) = \lambda_0, \quad u(X_0) = u_0, \tag{2.1.63}$$

i

$$Xu = \lambda u, \quad u'u = 1 \quad (X \in N(X_0)). \tag{2.1.64}$$

Nadalje, funkcije λ i u su ∞ puta diferencijabilne na $N(X_0)$ i njihovi diferencijalni u X_0 su

$$d\lambda = u_0'(dX)u_0 \tag{2.1.65}$$

i

$$du = (\lambda_0 I_n - X_0)^+(dX)u_0. \tag{2.1.66}$$

Napomena. *Da bi tvrdnja teorema vrijedila zahtijevamo da je λ_0 jednostavna svojstvena vrijednost no time ne isključujemo mogućnost višestrukosti kod ostalih $n-1$ svojstvenih vrijednosti od X_0.*

Dokaz. Promotrimo vektorsku funkciju $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definiranu s

$$f(u, \lambda; X) = \begin{pmatrix} (\lambda I_n - X)u \\ u'u - 1 \end{pmatrix}. \tag{2.1.67}$$

i primijetimo da je f ∞ puta diferencijabilna na $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n\times n}$. Naime, sve koordinatne funkcije imaju neprekidne parcijalne derivacije svakog reda na $R^{n+1} \times \mathbb{R}^{n\times n}$ pa su i diferencijabilne na $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n\times n}$ prema Teoremu 1.25. Sada prema Teoremu 1.29 slijedi da je i f diferencijabilna na $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n\times n}$.
Točka $(u_0, \lambda_0; X_0) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n\times n}$ zadovoljava

$$f(u_0, \lambda_0; X_0) = 0 \tag{2.1.68}$$

i

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 I_n - X_0 & u_0 \\ 2u_0' & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.1.69}$$

Pokažimo navedene tvrdnje. Po pretpostavci teorema je $X_0 u_0 = \lambda_0 u_0$ i u_0 je normiran, tj. $u_0' u_0 = 1$, pa vrijedi

$$f(u_0, \lambda_0; X_0) = \begin{pmatrix} (\lambda_0 I_n - X_0)u_0 \\ u_0' u_0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 u_0 - X_0 u_0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Primijetimo da je λ svojstvena vrijednost od X_0 ako i samo ako je $\lambda_0 - \lambda$ svojstvena vrijednost od $\lambda_0 I_n - X_0$. Također, u je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ od X_0 ako i samo ako je u svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_0 - \lambda$ od $\lambda_0 I_n - X_0$. Navedene tvrdnje slijede iz

$$X_0 u = \lambda u \;\Leftrightarrow\; (\lambda_0 I_n - X_0)u = (\lambda_0 - \lambda)u.$$

Dakle, iz pretpostavke teorema slijedi da je $\lambda_0 - \lambda_0 = 0$ jednostavna svojstvena vrijednost od $\lambda_0 I_n - X_0$ i u_0 njoj pridruženi normirani svojstveni vektor. Očito je tada nula i jednostavna svojstvena vrijednost od $\frac{1}{2}(\lambda_0 I_n - X_0)$ i u_0 njoj pridružen svojstveni vektor pa prema Teoremu 1.18 slijedi

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 I_n - X_0 & u_0 \\ 2u_0' & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_0 I_n - X_0) & u_0 \\ u_0' & 0 \end{vmatrix} = -2 \left(\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) u_0' u_0 = -2 \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \neq 0,$$

gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ preostale svojstvene vrijednosti od $\lambda_0 I_n - X_0$ različite od nula. Ovime smo pokazali da su ispunjeni uvjeti (i)-(iii) Teorema o implicitnoj funkciji (Teorem 1.33) za $m = n + 1$, $k = n \times n$, $x_0 = (u_0, \lambda_0)$, $t_0 = X_0$ i $S = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n\times n}$. Preciznije, (i) slijedi iz (2.1.68), (ii) vrijedi za $p = \infty$, a (iii) slijedi iz (2.1.69) jer je

$$\partial f(u, \lambda; X)/\partial(u, \lambda)' = \begin{pmatrix} \lambda I_n - X & u \\ 2u' & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada prema Teoremu o implicitnoj funkciji postoji okolina $N(X_0) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ od X_0 i jedinstvena realna funkcija $\lambda\colon N(X_0) \to \mathbb{R}$ te jedinstvena vektorska funkcija $u\colon N(X_0) \to \mathbb{R}^n$ tako da vrijedi

(a) $\lambda(X_0) = \lambda_0$, $u(X_0) = u_0$,

(b)

$$
\begin{aligned}
f(\lambda(X), u(X); X) &= \begin{pmatrix} (\lambda(X)I_n - X)u(X) \\ u(X)'u(X) - 1 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow Xu(X) = \lambda(X)u(X), u(X)'u(X) = 1, \quad \text{za sve } X \in N(X_0).
\end{aligned}
$$

(c) λ i u su ∞ puta diferencijabilne na $N(X_0)$.

Ovime smo završili prvi dio dokaza.

Izvedimo ekspilicitni izraz za $d\lambda$. Koristeći pravilo za diferenciranje produkta iz $Xu = \lambda u$ dobivamo

$$
(dX)u_0 + X_0du = (d\lambda)u_0 + \lambda_0du, \tag{2.1.70}
$$

gdje su diferencijali $d\lambda$ i du definirani u X_0.
Množeći slijeva s u_0' dobivamo

$$
u_0'(dX)u_0 + u_0'X_0du = (d\lambda)u_0'u_0 + \lambda_0u_0'du. \tag{2.1.71}
$$

Kako je X_0 simetrična iz $X_0u_0 = \lambda_0u_0$ slijedi $u_0'X_0 = \lambda_0u_0'$. Također znamo $u_0'u_0 = 1$ pa slijedi

$$
d\lambda = u_0'(dX)u_0. \tag{2.1.72}
$$

Izvedimo sada izraz za du. Uvedimo oznaku $Y_0 = \lambda_0I_n - X_0$ i zapišimo (2.1.70) kao

$$
Y_0du = (dX)u_0 - (d\lambda)u_0. \tag{2.1.73}
$$

Množeći dobiveno slijeva s Y_0^+ dobivamo

$$
Y_0^+Y_0du = Y_0^+(dX)u_0, \tag{2.1.74}
$$

jer je $Y_0^+u_0 = 0$ prema Lemi 2.3 i zbog $Y_0u_0 = \lambda_0u_0 - X_0u_0 = 0$.
Ukoliko dokažemo da vrijedi

$$
Y_0^+Y_0du = du \tag{2.1.75}
$$

dobit ćemo $du = Y_0^+(dX)u_0 = (\lambda_0I_n - X_0)^+(dX)u_0$ i time će dokaz biti gotov.
Definirajmo matricu C_0 s

$$
C_0 = Y_0^+Y_0 + u_0u_0'. \tag{2.1.76}
$$

Primijetimo da je Y_0 simetrična matrica, $Y_0' = (\lambda_0I_n - X_0)' = \lambda_0I_n' - X_0' = \lambda_0I_n - X_0 = Y_0$ pa je i Y_0^+ simetrična te vrijedi $u_0'Y_0^+ = u_0'(Y_0^+)' = (Y_0^+u_0)' = 0'$ što zajedno s $Y_0u_0 = 0$ daje

$$
\begin{aligned}
C_0^2 &= (Y_0^+Y_0 + u_0u_0')(Y_0^+Y_0 + u_0u_0') \\
&= Y_0^+Y_0Y_0^+Y_0 + Y_0^+Y_0u_0u_0' + u_0u_0'Y_0^+Y_0 + u_0u_0'u_0u_0' \\
&= (Y_0^+Y_0)^2 + Y_0^+(Y_0u_0)u_0' + u_0(u_0'Y_0^+)Y_0 + u_0(u_0'u_0)u_0' \\
&= Y_0^+Y_0 + Y_0^+(0)u_0' + u_0(0')Y_0 + u_0(1)u_0' \\
&= Y_0^+Y_0 + u_0u_0' = C_0
\end{aligned}
$$

Dakle, C_0 je idempotentna matrica pa kako su i $Y_0^+Y_0$ i u_0u_0' idempotentne prema Teoremu 1.6 zaključujemo

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(C_0) &= \mathrm{tr}(C_0) = \mathrm{tr}(Y_0^+Y_0 + u_0u_0') = \mathrm{tr}(Y_0^+Y_0) + \mathrm{tr}(u_0u_0') = \mathrm{r}(Y_0^+Y_0) + \mathrm{r}(u_0u_0') \\ &= \mathrm{r}(Y_0) + 1 = (n-1) + 1 = n,\end{aligned}$$

gdje $\mathrm{r}(Y_0) = n - 1$ slijedi jer je nula jednostavna svojstvena vrijednost od Y_0, a $\mathrm{r}(Y_0^+Y_0) = \mathrm{r}(Y_0)$ slijedi prema Teoremu 1.12 (iv).
Dakle, C_0 je invertibilna pa množeći $C_0^2 = C_0$ s C_0^{-1} dobivamo $C_0 = I_n$.
Nadalje, iz $u'u = 1$ dobivamo $0 = (du')u + u'du = (du)'u + u'du = 2u'du$, tj. $u'du = 0$ pa zaključujemo

$$du = C_0du = (Y_0^+Y_0 + u_0u_0')du = Y_0^+Y_0du. \tag{2.1.77}$$

Ovime smo dokazali da vrijedi (2.1.75) i time dovršili dokaz teorema. □

2.2 Diferencijali prvog reda i Jacobijeva matrica

U ovom poglavlju koristit ćemo Prvi identifikacijski teorem koji nam govori kako iz diferencijala funkcije pronaći derivaciju (Jacobijevu matricu).

2.2.1 Klasifikacija funkcija i varijabli

Promatrat ćemo *skalarne* funkcije ϕ, *vektorske* funkcije f i *matrične* funkcije F. Svaka od njih može ovisiti o *jednoj* realnoj varijabli ξ, *vektoru* realnih varijabli x ili o *matrici* realnih varijabili X. Iz promatranog dobivamo klasifikaciju funkcija i varijabli kao u Tablici 2.1

Tablica 2.1: Klasifikacija funkcija i varijabli

	Skalarna varijabla	Vektorska varijabla	Matrična varijabla
Skalarna funkcija	$\phi(\xi)$	$\phi(x)$	$\phi(X)$
Vektorska funkcija	$f(\xi)$	$f(x)$	$f(X)$
Matrična funkcija	$F(\xi)$	$F(x)$	$F(X)$

Promotrimo neke primjere ovakvih funkcija.

$$\begin{array}{lcl}
\phi(\xi) & : & \xi^2 \\
\phi(x) & : & a'x,\ x'Ax \\
\phi(X) & : & a'Xb,\ \operatorname{tr} X'X,\ |X|,\ \lambda(X) \text{ (svojstvena vrijednost)} \\
\\
f(\xi) & : & (\xi, \xi^2)' \\
f(x) & : & Ax \\
f(X) & : & Xa,\ u(X) \ \text{ (svojstveni vektor)} \\
\\
F(\xi) & : & \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} \\
F(x) & : & xx' \\
F(X) & : & AXB,\ X^2,\ X^+
\end{array}$$

2.2.2 Loša notacija

Neka je F diferencijabilna $m \times p$ matrična funkcija $n \times q$ matrice X realnih varijabli. Postavlja se pitanje kako poredati $mnpq$ parcijalnih derivacija od F. Očito za ovo postoji mnogo načina. U ovom odjeljku navodimo dva takva načina i navodimo njihove nedostatke.

Definicija 2.1. *Neka je ϕ diferencijabilna realna funkcija $n \times q$ matrice $X = (x_{ij})$ realnih varijabli. Tada simbol $\partial\phi(X)/\partial X$ označava $n \times q$ matricu*

$$\frac{\partial\phi(X)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x_{11} & \dots & \partial\phi/\partial x_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial\phi/\partial x_{n1} & \dots & \partial\phi/\partial x_{nq} \end{pmatrix}. \tag{2.2.1}$$

Definicija 2.2. *Neka je $F = (f_{st})$ diferencijabilna realna matrična $m \times p$ funkcija $n \times q$ matrice X realnih varijabli. Tada simbol $\partial F(X)/\partial X$ označava $mn \times pq$ matricu*

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \partial f_{11}/\partial X & \dots & \partial f_{1p}/\partial \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_{m1}/\partial X & \dots & \partial f_{mp}/\partial \end{pmatrix}. \tag{2.2.2}$$

Istaknimo prvo nekoliko prednosti Definicije 2.2: (i) ako je F matrična funkcija jedne realne varijable ξ tada je matrica $\partial F(\xi)/\partial\xi$ istog reda kao i $F(\xi)$, i (ii) ako je ϕ skalarna funkcija matrice X realnih varijabli, tada je $\partial\phi(X)/\partial X$ istog reda kao i X. Posebno, ako je ϕ skalarna funkcija vektora stupca x, onda je $\partial\phi/\partial x$ vektor stupac i $\partial\phi/\partial x'$ vektor redak. Druga posljedica definicije je da nam ovakva notacija dopušta da poredamo mn parcijalnih derivacija $m \times 1$ vektorske funkcije $f(x)$, gdje je x $n \times 1$ vektor varijabli, na četiri različita načina: $\partial f/\partial x'$ ($m \times n$ matrica), $\partial f'/\partial x$ ($n \times m$ matrica), $\partial f/\partial x$ ($mn \times 1$ vektor) ili $\partial f'/\partial x'$ ($1 \times mn$ vektor).

Istaknimo sada nedostatke Definicije 2.2 promatrajući funkciju identitetu $F(X) = X$, gdje je X $n \times q$ matrica realnih varijabli. Iz definicije 2.2 dobivamo

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \overbrace{\hphantom{1 \;\dots\; 0}}^{q} & \hphantom{\dots} & \overbrace{\hphantom{0 \;\dots\; 1}}^{q} \end{array} \\ \begin{array}{r} n\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \vdots\\ 0\end{array}}\right. \\ \vphantom{\vdots} \\ n\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \vdots\\ 0\end{array}}\right. \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} = (\operatorname{vec} I_n)(\operatorname{vec} I_q)'. \tag{2.2.3}$$

$\partial F(X)/\partial X$ je matrica ranga 1. Jacobijeva matrica funkcije identitete je $nq \times nq$ identična matrica, tj. I_{nq}. Naime, to možemo zaključiti iz $\operatorname{vec} F(X) = I_{nq} \operatorname{vec} X$, definicije Jacobijeve matrice (1.2.34) te Teorema 1.30. Očito nam Definicija 2.2 ne daje Jacobijevu matricu funkcije F i rang Jacobijeve matrice (nq) se razlikuje od ranga matrice $\partial F(X)/\partial X$ (1). Ovo razmatranje implicira da matrica (2.2.2) prikazuje parcijalne derivacije, no ništa više od toga. Posebice, determinanta od $\partial F(X)/\partial X$ nema nikakvu interpretaciju i, što je vrlo važno za praktične primjene, ne postoji korisno lančano pravilo.

Često se koristi i druga, jednako neprikladna, notacija koja se ne zasniva na $\partial \phi(X)/\partial X$, već na

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_{ij}} = \begin{pmatrix} \partial f_{11}/\partial x_{ij} & \dots & \partial f_{1p}/\partial x_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_{m1}/\partial x_{ij} & \dots & \partial f_{mp}/\partial x_{ij} \end{pmatrix}. \tag{2.2.4}$$

Definicija 2.3. *Neka je $F = (f_{st})$ diferencijabilna realna matrična $m \times p$ funkcija $n \times q$ matrice X realnih varijabli. Tada simbol $\partial F(X)//\partial X$ označava $mn \times pq$ matricu*

$$\frac{\partial F(X)}{\overline{\overline{\partial X}}} = \begin{pmatrix} \partial F(X)/\partial x_{11} & \dots & \partial F(X)/\partial x_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial F(X)/\partial x_{n1} & \dots & \partial F(X)/\partial x_{nq} \end{pmatrix}. \tag{2.2.5}$$

Promotrimo sada notaciju koja je jedina prirodna generalizacija Jacobijeve matrice vektorske funkcije na Jacobijevu matricu matrične funkcije.

2.2.3 Dobra notacija

Neka je ϕ skalarna funkcija $n \times 1$ vektora x. Već smo se susreli s *derivacijom* od ϕ,

$$\mathrm{D}\,\phi(x) = (\mathrm{D}_1\,\phi(x), \dots, \mathrm{D}_n\,\phi(x)) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x'}. \tag{2.2.6}$$

Ako je f $m \times 1$ vektorska funkcija od x, tada je derivacija (ili *Jacobijeva matrica*) od f $m \times n$ matrica

$$\mathrm{D}\, f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x'}. \tag{2.2.7}$$

Kako je (2.2.6) samo specijalan slučaj od (2.2.7) opravdano je korištenje istog simbola D. Generalizacijom ovog pojma na matrične funkcije s matričnom varijablom dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 2.4. *Neka je F diferencijabilna realna matrična $m \times p$ funkcija $n \times q$ matrice X realnih varijabli. Jacobijeva matrica od F u X je $mp \times nq$ matrica*

$$\mathrm{D}\, F(X) = \frac{\partial \operatorname{vec} F(X)}{\partial (\operatorname{vec} X)'}. \tag{2.2.8}$$

Primijetimo da je (2.2.7) samo poseban slučaj od (2.2.8) pa je posljedično i (2.2.6) poseban slučaj od (2.2.8). Naime, iz (1.1.45) znamo da vrijedi $\operatorname{vec} f(x) = f(x)$ i $\operatorname{vec} x = x$. Dakle, smijemo koristiti simbol D za $\mathrm{D}\, F$, $\mathrm{D}\, f$ i $\mathrm{D}\, \phi$.

Vrijedi spomenuti da $\mathrm{D}\, F(X)$ i $\partial F(X)/\partial X$ sadrže jednakih $mnpq$ parcijalnih derivacija no u različitom poretku. Doista, red dvaju matrica je različit ($\mathrm{D}\, F(X)$ je reda $mp \times nq$, a matrica $\partial F(X)/\partial X$ je reda $mn \times pq$) i, još važnije, njihovi rangovi su općenito različiti.

Kako je $\mathrm{D}\, F(X)$ direktna matrična generalizacija tradicionalne definicije Jacobijeve matrice $\partial f(x)/\partial x'$, sva svojstva Jacobijeve matrice ostaju sačuvana. Naime, Definicija 2.4 se podudara s definicijom (1.2.34) pa smijemo koristiti teoreme iskazane za definiciju (1.2.34). Definicija 2.4 svodi proučavanje matričnih funkcija matrične varijable na proučavanje vektorskih funkcija vektorske varijable budući da promatra $F(X)$ i X samo u njihovoj vektorskoj formi $\operatorname{vec} F(X)$ i $\operatorname{vec} X$.

Kao rezultat Definicije 2.4 neprivlačni izrazi

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X}, \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f(X)}{\partial X}$$

nam više nisu potrebni. Isto, u principu, vrijedi i za

$$\frac{\partial \phi(X)}{\partial X} \quad \text{i} \quad \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi},$$

s obzirom da ih možemo zamijeniti s

$$\mathrm{D}\, \phi(X) = \frac{\partial \phi(X)}{\partial (\operatorname{vec} X)'} \quad \text{i} \quad \mathrm{D}\, F(\xi) = \frac{\partial \operatorname{vec} F(\xi)}{\partial \xi}.$$

No često ćemo koristit i notaciju $\partial \phi(X)/\partial X$ i $\partial F(\xi)/\partial \xi$ jer je ideja slaganja parcijalnih derivacija u matricu (umjesto u vektor redak, odnosno u vektor stupac) često privlačna i korisna.

2.2.4 Identifikacija Jacobijeve matrice

Naša strategija za pronalazak Jacobijeve matrice funkcije neće biti izračunavanja parcijalnih derivacija, već ćemo pronaći diferencijal. U slučaju diferencijabilne vektorske funkcije $f(x)$ Prvi identifikacijski teorem (Teorem 1.24) govori da postoji jedan na jedan korespodencija između diferencijala od f i Jacobijeve matrice. Preciznije, govori da vrijedi

$$df(x) = A(x)dx \tag{2.2.9}$$

ako i samo ako je

$$\mathrm{D}\, f(x) = A(x). \tag{2.2.10}$$

Poopćenje na matrične funkcije je prirodno. Prvi identifikacijski teorem za matrice (Teorem 1.30) govori da vrijedi

$$d \operatorname{vec} F(X) = A(X) d \operatorname{vec} X \tag{2.2.11}$$

ako i samo ako je

$$\mathrm{D}\, F(X) = A(X). \tag{2.2.12}$$

Kako je diferencijalni račun relativno jednostavan, identifikacijski teoremi su iznimno korisni. Za danu matričnu funkciju $F(X)$ postupamo na sljedeći način: (i) izračunamo diferencijal od $F(X)$, (ii) djelujemo na diferencijal s vec operatorom i pritom koristimo (2.1.20) da bismo dobili $d \operatorname{vec} F(X) = A(X) d \operatorname{vec} X$, i (iii) zaključujemo da vrijedi $\mathrm{D}\, F(X) = A(X)$.

Brojnim primjerima u ovom poglavlju ćemo demonstrirati jednostavnost i eleganciju ovakvog pristupa. Promotrimo odmah jedan primjer. Neka je $F(X) = AXB$, gdje su A i B matrice konstanti. Tada prema (2.1.22) vrijedi

$$dF(X) = A(dX)B, \tag{2.2.13}$$

iz čega prema Teoremu 1.9 slijedi

$$d \operatorname{vec} F(X) = \operatorname{vec} A(dX)B = (B' \otimes A) \operatorname{vec} dX = d \operatorname{vec} F(X) \tag{2.2.14}$$

pa zaključujemo

$$\mathrm{D}\, F(X) = B' \otimes A. \tag{2.2.15}$$

2.2.5 Prva identifikacijska tablica

Identifikacijski teorem za matrične funkcije matrične varijable obuhvaća i identifikaciju za matrične, vektorske i skalarne funkcije s matričnim, vektorskim ili skalarnim varijablama. Tablica 2.2 popisuje ove rezultate.

Tablica 2.2: Prva identifikacijska tablica

Funkcija	Diferencijal	Derivacija/Jacobijeva matrica	Red od D
$\phi(\xi)$	$d\phi = \alpha d\xi$	$\mathrm{D}\,\phi(\xi) = \alpha$	1×1
$\phi(x)$	$d\phi = a'dx$	$\mathrm{D}\,\phi(x) = a'$	$1 \times n$
$\phi(X)$	$d\phi = \operatorname{tr} A'dX$	$\mathrm{D}\,\phi(X) = (\operatorname{vec} A)'$	$1 \times nq$
	$= (\operatorname{vec} A)'d \operatorname{vec} X$		
$f(\xi)$	$df = ad\xi$	$\mathrm{D}\,f(\xi) = a$	$m \times 1$
$f(x)$	$df = Adx$	$\mathrm{D}\,f(x) = A$	$m \times n$
$f(X)$	$df = Ad \operatorname{vec} X$	$\mathrm{D}\,f(X) = A$	$m \times nq$
$F(\xi)$	$dF = Ad\xi$	$\mathrm{D}\,F(\xi) = \operatorname{vec} A$	$mp \times 1$
$F(x)$	$d \operatorname{vec} F = Adx$	$\mathrm{D}\,F(x) = A$	$mp \times n$
$F(X)$	$d \operatorname{vec} F = Ad \operatorname{vec} X$	$\mathrm{D}\,F(X) = A$	$mp \times nq$

U prvoj identifikacijskoj tablici koristimo sljedeće oznake: ϕ je skalarna funkcija, f je $m \times 1$ vektorska funkcija i F je $m \times p$ matrična funkcija; ξ je skalar, x je $n \times 1$ vektor i X je $n \times q$ matrica; α je skalar, a je vektor stupac i A je matrica (od kojih svaka može biti funkcija s varijablom ξ, x ili X).

Pokažimo kako smo došli do nekih rezultata iz tablice. Primjerice, promotrimo $f(X)$. Ako je diferencijal oblika $df = Ad \operatorname{vec} X$ tada kako je f vektor stupac diferencijal možemo zapisati i u obliku $d \operatorname{vec} f = Ad \operatorname{vec} X$ pa prema Prvom identifikacijskom teoremu za matrice zaključujemo $\mathrm{D}\,f(X) = A$. Promotrimo i $F(\xi)$. Ako je diferencijal oblika $dF = Ad\xi$, tada djelovanjem vec operatora dobivamo $d \operatorname{vec} F = \operatorname{vec}(Ad\xi) = (\operatorname{vec} A)d\xi = (\operatorname{vec} A)d \operatorname{vec} \xi$ pa prema Prvom identifikacijskom teoremu za matrice dobivamo $\mathrm{D}\,F(X) = \operatorname{vec} A$. Za dobivanje ostalih rezultata u tablici postupamo na sličan način.

Promotrimo dodatno funkciju $\phi(X)$. Kao što smo napomenuli u odjeljku 2.2.3 za skalarne funkcije matrične varijable često ćemo koristiti i "lošu" notaciju $\partial\phi(X)/\partial X$. Nadopunimo stoga prvu identifikacijsku tablicu s $\partial\phi(X)/\partial X$. Prisjetimo se da za $X = (x_{ij})$ vrijedi

$$\frac{\partial\phi(X)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x_{11} & \dots & \partial\phi/\partial x_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial\phi/\partial x_{n1} & \dots & \partial\phi/\partial x_{nq} \end{pmatrix},$$

dok je

$$\mathrm{D}\,\phi(X) = \frac{\partial\phi(X)}{\partial(\operatorname{vec} X)'} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x_{11} & \dots & \partial\phi/\partial x_{n1} & \dots & \partial\phi/\partial x_{1q} & \dots & \partial\phi/\partial x_{nq} \end{pmatrix}.$$

Dakle, vrijedi

$$\mathrm{D}\,\phi(X) = \left(\operatorname{vec} \frac{\partial\phi(X)}{\partial X}\right)'. \tag{2.2.16}$$

Zaključujemo da ako je diferencijal od $\phi(X)$ dan s $d\phi(X) = \operatorname{tr} A'dX = (\operatorname{vec} A)'d \operatorname{vec} X$, gdje je A matrica reda $n \times q$, tada je prema Prvom identifikacijskom teoremu za matrice $\mathrm{D}\,\phi(X) = (\operatorname{vec} A)'$, a prema upravo promatranom je

$$\left(\operatorname{vec} \frac{\partial \phi(X)}{\partial X}\right)' = (\operatorname{vec} A)'$$

pa je i

$$\operatorname{vec} \frac{\partial \phi(X)}{\partial X} = \operatorname{vec} A.$$

Kako je $\partial\phi(X)/\partial X$ prema definiciji matrica reda $n \times q$, a matrica A je istog reda smijemo zaključiti

$$\frac{\partial \phi(X)}{\partial X} = A. \tag{2.2.17}$$

2.2.6 Particioniranje derivacije

Prije navođenja primjera, dogovorit ćemo još jedan način označavanja. Neka je ϕ skalarna diferencijabilna funkcija $n \times 1$ vektora x. Pretpostavimo da je x podijeljen kao

$$x' = (x_1', x_2'). \tag{2.2.18}$$

Tada je i derivacija $\mathrm{D}\,\phi(x)$ podijeljena na jednak način pa pišemo

$$\mathrm{D}\,\phi(x) = (\mathrm{D}_1\,\phi(x), \mathrm{D}_2\,\phi(x)), \tag{2.2.19}$$

gjde $\mathrm{D}_1\,\phi(x)$ sadrži parcijalne derivacije od ϕ s obzirom na x_1, a $\mathrm{D}_2\,\phi(x)$ sadrži parcijalne derivacije od ϕ s obzirom na x_2. Kao rezultat dobivamo, ako je

$$d\phi(x) = a_1'(x)dx_1 + a_2'(x)dx_2 = (a_1', a_2')\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}, \tag{2.2.20}$$

onda je

$$\mathrm{D}_1\,\phi(x) = a_1'(x), \quad \mathrm{D}_2\,\phi(x) = a_2'(x) \tag{2.2.21}$$

i

$$\mathrm{D}\,\phi(x) = (a_1'(x), a_2'(x)). \tag{2.2.22}$$

2.2.7 Skalarne funkcije vektorske varijable

Započnimo s primjerima. Dva najvažnija primjera skalarne funkcije vektorske varijable su linearna i kvadratna forma. Ako je a $n \times 1$ vektor, A $n \times n$ matrica, onda se izraz $a'x$ naziva *linearna forma* u x, a izraz $x'Ax$ *kvadratna forma* u x, gdje je x $n \times 1$ vektor.

Neka je $\phi(x) = a'x$, gdje je a vektor konstanti. Tada je $d\phi(x) = a'dx$ pa prema prvoj identifikacijskoj tablici vrijedi $\mathrm{D}\,\phi(x) = a'$.

Neka je sada $\phi(x) = x'Ax$, gdje je A kvadratna matrica konstanti. Vrijedi

$$\begin{aligned} d\phi(x) &= d(x'Ax) = d(x')Ax + x'd(Ax) \\ &= (dx)'Ax + x'Adx = ((dx)'Ax)' + x'Adx \\ &= x'A'dx + x'Adx = x'(A + A')dx, \end{aligned}$$

gdje jednakost u drugom retku vrijedi jer je $(dx)'Ax \in \mathbb{R}$. Prema prvoj identifikacijskoj tablici vrijedi $\mathrm{D}\,\phi(x) = x'(A + A')$. Dobivamo Tablicu 2.3.

Tablica 2.3:

$\phi(x)$	$d\phi(x)$	$\mathrm{D}\,\phi(x)$
$a'x$	$a'dx$	a'
$x'Ax$	$x'(A + A')dx$	$x'(A + A')$

2.2.8 Skalarne funkcije matrične varijable I: trag

Postoji obilje zanimljivih primjera skalarnih funkcija matrične varijable. U ovom odjeljku ispitivat ćemo diferencijale tragova nekih matričnih funkcija. Odjeljak 2.2.9 posvećen je determinantama, a odjeljak 2.2.10 svojstvenim vrijednostima.

Najjednostavniji slučaj je $\operatorname{tr} AX$, gdje je A konstanta matrica i AX kvadratna matrica.Vrijedi

$$d \operatorname{tr} AX = \operatorname{tr} d(AX) = \operatorname{tr} AdX \tag{2.2.23}$$

pa zaključujemo

$$\frac{\partial \operatorname{tr} AX}{\partial X} = A' \quad \text{i} \quad \mathrm{D} \operatorname{tr} AX = (\operatorname{vec} A')'. \tag{2.2.24}$$

Promotrimo sada funkciju $\operatorname{tr} XAX'B$, gdje su A i B konstantne matrice i i $XAX'B$ kvadratna matrica. Diferencijal dobivamo na sljedeći način

$$\begin{aligned} d \operatorname{tr} XAX'B &= \operatorname{tr} d(XAX'B) = \operatorname{tr}((dX)AX'B + Xd(AX'B)) \\ &= \operatorname{tr}((dX)AX'B + XA(dX')B) = \operatorname{tr}((dX)AX'B) + \operatorname{tr}(XA(dX)'B) \\ &= \operatorname{tr}(AX'BdX) + \operatorname{tr}((B'dX)(A'X')) = \operatorname{tr}(AX'BdX) + \operatorname{tr}(A'X'B'dX) \\ &= \operatorname{tr}(AX'B + A'X'B')dX \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

pa prema prvoj identifikacijskoj tablici i prema (2.2.17) vrijedi

$$\frac{\partial \operatorname{tr} XAX'B}{\partial X} = B'XA' + BXA \quad \text{i} \quad \mathrm{D} \operatorname{tr} XAX'B = (\operatorname{vec}(B'XA' + BXA))'. \tag{2.2.26}$$

Sljedeća funkcija koju promatramo je $\operatorname{tr} XAXB$, gdje su A i B konstantne matrice i i $XAXB$ kvadratna matrica. Za diferencijal dobivamo

$$\begin{aligned} d \operatorname{tr} XAXB &= \operatorname{tr} d(XAXB) = \operatorname{tr}((dX)AXB + Xd(AXB)) \\ &= \operatorname{tr}((dX)AXB + XA(dX)B) \\ &= \operatorname{tr}((AXBdX + BXAdX) \\ &= \operatorname{tr}(AXB + BXA)dX \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

pa zaključujemo

$$\frac{\partial \operatorname{tr} XAXB}{\partial X} = B'X'A' + A'X'B' \quad \text{i} \quad \operatorname{D} \operatorname{tr} XAXB = (\operatorname{vec}(B'X'A' + A'X'B'))'. \tag{2.2.28}$$

Dolazimo do tablice 2.4.

Tablica 2.4:

$\phi(X)$	$d\phi(X)$	$\partial\phi(X)/\partial X$	$\operatorname{D}\phi(X)$
$\operatorname{tr} AX$	$\operatorname{tr} AdX$	A'	$(\operatorname{vec} A')'$
$\operatorname{tr} XAX'B$	$\operatorname{tr}(AX'B + A'X'B')dX$	$B'XA' + BXA$	$(\operatorname{vec}(B'XA' + BXA))'$
$\operatorname{tr} XAXB$	$\operatorname{tr}(AXB + BXA)dX$	$B'X'A' + A'X'B'$	$(\operatorname{vec}(B'X'A' + A'X'B'))'$

Promotrimo nekoliko specijalih slučajeva funkcija koje smo dosad nabrojili. Uzmemo li za $A = I_n$ i X je $n \times n$ kvadratna matrica funkcija $\phi(X) = \operatorname{tr} AX$ postaje $\phi(X) = \operatorname{tr} X$. Slično, uzmemo li za A i B matrice identitete tada funkcija $\phi(X) = \operatorname{tr} XAX'B$ postaje $\phi(X) = \operatorname{tr} XX' = \operatorname{tr} X'X$ (ovo je dobro definirano za svaku matricu X). Konačno, za kvadratnu matricu X iz $\phi(X) = \operatorname{tr} XAXB$ dolazimo do $\phi(X) = \operatorname{tr} X^2$ ako za A i B stavimo da su jednake matricama identitete. Na ovaj način iz već pokazanog, točnije iz Tablice 2.4, lagano dolazimo do Tablice 2.5

Tablica 2.5:

$\phi(X)$	$d\phi(X)$	$\partial\phi(X)/\partial X$	$\operatorname{D}\phi(X)$
$\operatorname{tr} X$	$\operatorname{tr} IdX$	I	$(\operatorname{vec} I)'$
$\operatorname{tr} X'X$	$2 \operatorname{tr} X'dX$	$2X$	$2(\operatorname{vec} X)'$
$\operatorname{tr} X^2$	$2 \operatorname{tr} XdX$	$2X'$	$2(\operatorname{vec} X')'$

2.2.9 Skalarne funkcije matrične varijable II: determinanta

Prisjetimo se da je diferencijal determinante dan s

$$d|X| = |X| \operatorname{tr} X^{-1}dX, \tag{2.2.29}$$

kada je X kvadratna regularna matrica (Teorem 2.1). Kao rezultat, dobivamo

$$\operatorname{D}|X| = |X|(\operatorname{vec}(X^{-1})')' \tag{2.2.30}$$

i

$$\frac{\partial |X|}{\partial X} = |X|(X^{-1})' = |X|(X')^{-1}. \tag{2.2.31}$$

Upotrijebimo jednakost (2.2.29) i Teorem 1.32 za pronalaženje diferencijala i derivacije determinante nekih jednostavnih matričnih funkcija od X. Prva funkcija koju promatramo je $|XX'|$, gdje X nije nužno kvadratna matrica no pretpostavljamo da je XX' regularna, tj. $|XX'| \neq 0$. Diferencijal ove funkcije je

$$\begin{aligned} d|XX'| &= |XX'| \operatorname{tr}(XX')^{-1} d(XX') \\ &= |XX'| \operatorname{tr}(XX')^{-1}((dX)X' + X(dX')) \\ &= |XX'|[\operatorname{tr}(XX')^{-1}(dX)X' + \operatorname{tr}(XX')^{-1}X(dX)'] \\ &= |XX'|[\operatorname{tr} X'(XX')^{-1}(dX) + \operatorname{tr}(dX)X'((XX')^{-1})'] \\ &= |XX'|[\operatorname{tr} X'(XX')^{-1}(dX) + \operatorname{tr} X'(XX')^{-1}(dX)] \\ &= 2|XX'| \operatorname{tr} X'(XX')^{-1} dX \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

pa zaključujemo

$$\mathrm{D}|XX'| = 2|XX'|(\operatorname{vec}(XX')^{-1}X)' \tag{2.2.33}$$

i

$$\frac{\partial |XX'|}{\partial X} = 2|XX'|(XX')^{-1}X. \tag{2.2.34}$$

Analogno, za funkciju $|X'X|$ takvu da vrijedi $|X'X| \neq 0$ dobivamo

$$d|X'X| = 2|X'X| \operatorname{tr}(X'X)^{-1}X'dX \tag{2.2.35}$$

pa je

$$\mathrm{D}|X'X| = 2|X'X|(\operatorname{vec} X(X'X)^{-1})' \tag{2.2.36}$$

i

$$\frac{\partial |X'X|}{\partial X} = 2|X'X|X(X'X)^{-1}. \tag{2.2.37}$$

Konačno, promotrimo determinantu od X^2, gdje je X regularna matrica (pa je i X^2 regularna). Budući da je $|X^2| = |X|^2$ vrijedi

$$d|X^2| = d|X|^2 = 2|X|d|X| = 2|X|^2 \operatorname{tr} X^{-1}dX. \tag{2.2.38}$$

Slijedi

$$\mathrm{D}|X^2| = 2|X|^2(\operatorname{vec}(X^{-1})')' \tag{2.2.39}$$

i

$$\frac{\partial |X^2|}{\partial X} = 2|X|^2(X^{-1})'. \tag{2.2.40}$$

Sumiramo li rezultate ovog odjeljka dobivamo Tablicu 2.6

Tablica 2.6:

$\phi(X)$	$d\phi(X)$	$\partial\phi(X)/\partial X$	$\mathrm{D}\,\phi(X)$
$\lvert X\rvert$	$\lvert X\rvert \operatorname{tr} X^{-1}dX$	$\lvert X\rvert(X^{-1})'$	$\lvert X\rvert(\operatorname{vec}(X^{-1})')'$
$\lvert XX'\rvert$	$2\lvert XX'\rvert \operatorname{tr} X'(XX')^{-1}dX$	$2\lvert XX'\rvert(XX')^{-1}X$	$2\lvert XX'\rvert(\operatorname{vec}(XX')^{-1}X)'$
$\lvert X'X\rvert$	$2\lvert X'X\rvert \operatorname{tr}(X'X)^{-1}X'dX$	$2\lvert X'X\rvert X(X'X)^{-1}$	$2\lvert X'X\rvert(\operatorname{vec} X(X'X)^{-1})'$
$\lvert X^2\rvert$	$2\lvert X\rvert^2 \operatorname{tr} X^{-1}dX$	$2\lvert X\rvert^2(X^{-1})'$	$2\lvert X\rvert^2(\operatorname{vec}(X^{-1})')'$

u kojoj pretpostavljamo da su sve determinante različite od nula.

2.2.10 Skalarne funkcije matrične varijable III: svojstvena vrijednost

Neka je X_0 realna simetrična $n \times n$ matrica i u_0 normirani svojstveni vektor pridužen jednostavnoj svojstvenoj vrijednosti λ_0 od X_0. Prema Teoremu 2.7 znamo da jedinstvene diferencijabilne funkcije $\lambda = \lambda(X)$ i $u = u(X)$ postoje za sve X u okolini $N(X_0)$ od X_0 i da zadovoljavaju

$$\lambda(X_0) = \lambda_0, \quad u(X_0) = u_0 \tag{2.2.41}$$

i

$$Xu(X) = \lambda(X)u(X), \quad u(X)'u(X) = 1 \quad (X \in N(X_0)). \tag{2.2.42}$$

Diferencijal od λ u X_0 je

$$d\lambda = u_0'(dX)u_0 = \operatorname{tr} u_0'(dX)u_0 = \operatorname{tr} u_0u_0'dX \tag{2.2.43}$$

pa dobivamo

$$\frac{\partial\lambda(X)}{\partial X} = (u_0u_0') = u_0u_0' \tag{2.2.44}$$

i

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\,\lambda(X) &= (\operatorname{vec}(u_0u_0')')' = (\operatorname{vec} u_0u_0')' \\ &= (u_0 \otimes u_0)' = u_0' \otimes u_0', \end{aligned} \tag{2.2.45}$$

gdje smo iskoristili (1.1.46) i Teorem 1.7 (vi).

2.2.11 Dva primjera vektorskih funkcija

U ovom odjeljku promatramo dva primjera vektorskih funkcija: vektorsku funkciju vektorske varijable i vektorsku funkciju matrične varijable.

Promotrimo skup varijabli $y_1, \ldots, y_m$ i pretpostavimo da su one dane linearne kombinacije drugog skupa varijabli $x_1, \ldots, x_n$, tj.

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{2.2.46}$$

gdje su a_{ij} dane konstante.
Tada je

$$y = f(x) = Ax \tag{2.2.47}$$

i budući da je diferencijal jednak $df(x) = Adx$, za Jacobijevu matricu dobivamo

$$\mathrm{D}\, f(x) = A. \tag{2.2.48}$$

U drugom primjeru uzimamo da su y_i linearne kombinacije varijabli x_{ij} tako da vrijedi

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{2.2.49}$$

gdje su a_j dane konstante.
Ovim je definirana vektorska funkcija

$$y = f(X) = Xa. \tag{2.2.50}$$

Diferencijal je jednak

$$df(X) = (dX)a = \mathrm{vec}(dX)a = (a' \otimes I_m)\,\mathrm{vec}\, dX = (a' \otimes I_m) d\,\mathrm{vec}\, X, \tag{2.2.51}$$

gdje smo koristili (1.1.45) i (1.1.50). Dakle, za Jacobijevu matricu vrijedi

$$\mathrm{D}\, f(X) = a' \otimes I_m. \tag{2.2.52}$$

2.2.12 Matrične funkcije

Primjer matrične funkcije vektorske varijable je

$$F(x) = xx'. \tag{2.2.53}$$

Diferencijal od F je

$$dxx' = (dx)x' + x(dx') = (dx)x' + x(dx)', \tag{2.2.54}$$

pa koristeći (1.1.50) i (1.1.45) dobivamo

$$\begin{aligned} d\,\mathrm{vec}\, xx' &= \mathrm{vec}((dx)x') + \mathrm{vec}(x(dx)') \\ &= (x \otimes I) d\,\mathrm{vec}\, x + (I \otimes x) d\,\mathrm{vec}\, x' \\ &= (I \otimes x + x \otimes I) dx. \end{aligned} \tag{2.2.55}$$

Prema prvoj identifikacijskoj tablici vrijedi

$$\mathrm{D}\, F(x) = I \otimes x + x \otimes I. \tag{2.2.56}$$

Promotrimo sada nekoliko primjera matrične funkcije matrične varijable X, gdje je red od X $n \times q$. Započnimo s funkcijom identitetom

$$F(X) = X. \tag{2.2.57}$$

Očito je $d \operatorname{vec} F(X) = d \operatorname{vec} X$ iz čega slijedi

$$\mathrm{D}\, F(X) = I_{nq}. \tag{2.2.58}$$

Nešto zanimljiviji primjer je funkcija transponiranja

$$F(X) = X'. \tag{2.2.59}$$

Dobivamo

$$d \operatorname{vec} F(X) = d \operatorname{vec} X' = K_{nq} d \operatorname{vec} X. \tag{2.2.60}$$

Stoga je

$$\mathrm{D}\, F(X) = K_{nq}. \tag{2.2.61}$$

Komutacijska matrica K će vjerojatno igrati ulogu kada god se pojavi transponirana matrica varijabli. Na primjer, promotrimo funkciju

$$F(X) = XX'. \tag{2.2.62}$$

Tada je

$$dF(X) = (dX)X' + X(dX)' \tag{2.2.63}$$

pa je

$$\begin{aligned} d \operatorname{vec} F(X) &= \operatorname{vec}((dX)X') + \operatorname{vec}(X(dX)') \\ &= (X \otimes I_n) d \operatorname{vec} X + (I_n \otimes X) d \operatorname{vec} X' \\ &= (X \otimes I_n) d \operatorname{vec} X + (I_n \otimes X) K_{nq} d \operatorname{vec} X \\ &= ((X \otimes I_n) + K_{nn}(X \otimes I_n)) d \operatorname{vec} X \\ &= (I_{n^2} + K_{nn})(X \otimes I_n) d \operatorname{vec} X \\ &= 2N_n (X \otimes I_n) d \operatorname{vec} X, \end{aligned} \tag{2.2.64}$$

gdje smo koristili definiciju komutacijske matrice i Teorem 1.13 (a). Slijedi

$$\mathrm{D}\, F(X) = 2N_n(X \otimes I_n). \tag{2.2.65}$$

Na sličan način za funkciju

$$F(X) = X'X \tag{2.2.66}$$

dobivamo

$$d \operatorname{vec} F(X) = (I_{q^2} + K_{qq})(I_q \otimes X') d \operatorname{vec} X = 2N_q(I_q \otimes X') d \operatorname{vec} X \tag{2.2.67}$$

pa je

$$\mathrm{D}\,F(X) = 2N_q(I_q \otimes X'). \tag{2.2.68}$$

Sumiramo li ove rezultate dobivamo Tablicu 2.7.

Tablica 2.7:

$F(X)$	$dF(X)$	$\mathrm{D}\,F(X)$
X	dX	I_{nq}
X'	$(dX)'$	K_{nq}
XX'	$(dX)X' + X(dX)'$	$2N_n(X \otimes I_n)$
$X'X$	$(dX)'X + X'dX$	$2N_q(I_q \otimes X')$

Ako je X regularna $n \times n$ matrica, tada je dobro definirana matrična funkcija

$$F(X) = X^{-1} \tag{2.2.69}$$

i njen diferencijal je prema Teoremu 2.3 dan s

$$dF(X) = -X^{-1}(dX)X^{-1}. \tag{2.2.70}$$

Djelujući s vec operatorom dobivamo

$$d\,\mathrm{vec}\,F(X) = \mathrm{vec}(-X^{-1}(dX)X^{-1}) = -((X')^{-1} \otimes X^{-1})d\,\mathrm{vec}\,X. \tag{2.2.71}$$

Stoga je

$$\mathrm{D}\,F(X) = -(X')^{-1} \otimes X^{-1}. \tag{2.2.72}$$

Konačno, ako je X kvadratna matrica, promatramo funkciju potencije

$$F(X) = X^p \quad (p = 1, 2, \ldots). \tag{2.2.73}$$

Računamo diferencijal

$$\begin{aligned} dF(X) &= (dX)X^{p-1} + X(dX^{p-1}) \\ &= (dX)X^{p-1} + X(dX)X^{p-2} + X^2(dX^{p-2}) \\ &\quad\vdots \\ &= (dX)X^{p-1} + X(dX)X^{p-2} + \cdots + X^{p-1}(dX) \\ &= \sum_{j=1}^{p} X^{j-1}(dX)X^{p-j}, \end{aligned} \tag{2.2.74}$$

pa djelovanjem vec operatora dobivamo

$$\begin{aligned} d\,\mathrm{vec}\,F(X) &= \left(\sum_{j=1}^{p} \mathrm{vec}(X^{j-1}(dX)X^{p-j})\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{p}((X')^{p-j} \otimes X^{j-1})d\,\mathrm{vec}\,X\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{p}(X')^{p-j} \otimes X^{j-1}\right) d\,\mathrm{vec}\,X. \end{aligned} \tag{2.2.75}$$

Slijedi

$$\mathrm{D}\, F(X) = \sum_{j=1}^{p} (X')^{p-j} \otimes X^{j-1}. \tag{2.2.76}$$

Posljednja dva primjera zapisujemo u Tablicu 2.8.

Tablica 2.8:

$F(X)$	$dF(X)$	$\mathrm{D}\, F(X)$	Uvjeti
X^{-1}	$-X^{-1}(dX)X^{-1}$	$-(X')^{-1} \otimes X^{-1}$	X regularna
X^p	$\sum_{j=1}^{p} X^{j-1}(dX)X^{p-j}$	$\sum_{j=1}^{p}(X')^{p-j} \otimes X^{j-1}$	X kvadratna, $p \in \mathbb{N}$

Bibliografija

[1] Jan R. Magnus, Heinz Neudecker: *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, John Wiley & Sons, Chichester, 2007.

[2] Krešimir Horvatić: *Linearna algebra*, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.