Gradijentno deformacijska formulacija za modeliranje oštećenja

Putar, F.[1], Sorić, J.[2], Lesičar, T.[3] i Tonković, Z.[4]

Sažetak
Provedenim istraživanjem razmatrano je modeliranje oštećenja u kvazi-krhkim materijalima, pri čemu je predložen numerički učinkovit model ugrađen u dvodimenzijski konačni element C^1 kontinuiteta temeljen na teoriji gradijentnih deformacija. Konstitutivni model višeg reda proširen je izotropnom formulacijom oštećenja, čime je omogućena analiza popuštanja homogenih i heterogenih materijala. Korištenjem navedene formulacije, pri povećanju oštećenja dolazi do degradacije materijalnih svojstava opisanih preko konstitutivnih tenzora, a samim time i do smanjivanja nelokalnosti u modelu, što je neophodno za točno opisivanje lokaliziranog deformacijskog pojasa. Konstitutivni tenzori dobiveni su direktno s mikrostrukturne razine materijala primjenom računalne homogenizacije drugog reda, u svrhu čega je korišten odgovarajući reprezentativni volumni element. Izvedena formulacija konačnog elementa ugrađena je u programski paket ABAQUS. Točnost i učinkovitost predloženog gradijentnog modela popuštanja pokazani su na primjeru tlačno opterećene ploče, za koju je karakteristična pojava tzv. smičnog pojasa.

Ključne riječi: kvazi-krhko oštećenje, konačni element C^1 kontinuiteta, teorija gradijentnih deformacija, lokalizacija, smični pojas

[1] **Filip Putar, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: filip.putar@fsb.hr
[2] **Prof. dr. sc. Jurica Sorić**, e-mail: jurica.soric@fsb.hr
[3] **Dr. sc. Tomislav Lesičar**, e-mail: tomislav.lesicar@fsb.hr
[4] **Prof. dr. sc. Zdenko Tonković**, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr

1 Uvod

Rješenja dobivena korištenjem klasične mehanike kontinuuma pri analiziranju pojave oštećenja ne mogu se smatrati točnima jer diferencijalne jednadžbe koje opisuju proces deformiranja mogu izgubiti svojstvo eliptičnosti u trenutku kada materijal počne popuštati. Matematički model analiziranog problema pritom postaje loše uvjetovan i njegova numerička rješenja ne konvergiraju realnom rješenju [1]. Većina regularizacijskih tehnika izvedenih za rješavanje tog problema temeljena je na poboljšanju modela klasičnog kontinuuma njegovim obogaćivanjem parametrima unutarnje duljinske skale na više različitih načina. Među tim tehnikama do izražaja posebice dolaze one temeljene na nelokalnoj mehanici kontinuuma, i to zbog njihove primjenjivosti pri razmatranju raznovrsnih problema. Gledano s fizikalne strane, nelokalnost predstavlja različite heterogenosti i međudjelovanja što se odvijaju na mikrostrukturnoj razini materijala, a matematički se najčešće eksplicitno opisuje preko spomenutog parametra unutarnje duljinske skale koji je u literaturi poznat i kao mikrostrukturni parametar. Iako rjeđe korišteno, uvođenje nelokalnosti moguće je i putem dodatnog člana višeg reda u funkciju gustoće energije deformiranja, a koji uključuje gradijente deformacije, odnosno deformacije drugog reda te njihove energijski konjugirane veličine, naprezanja drugog reda [2]. S tim u vezi, a u sklopu višerazinskog modeliranja deformiranja materijala poznata je takozvana poopćena gradijentna teorija koja nelokalnost ne uključuje direktno preko parametra mikrostrukturne skale, već je ona implicitno sadržana u veličini reprezentativnog volumnog elementa (RVE-a). Veličina RVE-a je u modelu obuhvaćena vrijednostima tangentnih matrica krutosti višeg reda, koje se ovdje izračunavaju primjenom računalne homogenizacije drugog reda [3].

2 Algoritam za analizu oštećenja temeljen na teoriji gradijentnih deformacija

Degradacija elastičnih svojstava krutosti u izotropnom modelu oštećenja opisuje se na temelju sljedeće konstitutivne relacije

$$\mathbf{C}^{\mathrm{eff}} = \left(1-D\right)\mathbf{C}, \tag{1}$$

gdje je D je skalarna varijabla oštećenja koja može poprimiti vrijednosti između 0 i 1, a što su granične vrijednosti za neoštećeni i potpuno oštećeni materijal. $\mathbf{C}^{eff}$ i $\mathbf{C}$ redom predstavljaju efektivnu i elastičnu krutost. Stanje oštećenja ovisno je o monotono rastućem skalarnom parametru κ, koji odgovara najvećem lokalnom deformacijskom odazivu postignutom u određenoj točki do razmatranog trenutka, što se standardno zapisuje preko Kuhn-Tuckerovih relacija

$$\kappa \geq 0, \quad \varepsilon_{\mathrm{eq}} - \kappa \leq 0, \quad \dot{\kappa}\left(\varepsilon_{\mathrm{eq}} - \kappa\right) = 0. \tag{2}$$

U gornjem izrazu $\varepsilon_{\mathrm{eq}}$ predstavlja ekvivalentu elastičnu deformaciju koja se ovdje izračunava putem von Misesove relacije

$$\varepsilon_{\text{eq}} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1 + \frac{1}{2k}\sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2}, \tag{3}$$

u kojoj I_1 i J_2 redom predstavljaju prvu invarijantu tenzora deformacije te drugu invarijantu devijatora tenzora deformacije, dok parametar k opisuje omjer između jednoosne tlačne i vlačne čvrstoće materijala. U provedenom istraživanju korišten je eksponencijalni zakon nastajanja oštećenja koji se često koristi pri realnim razmatranjima popuštanja kvazi-krhkih materijala

$$D = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa}\left\{1-\alpha+\alpha\exp\left[\beta\left(\kappa_0-\kappa\right)\right]\right\} \quad \text{za} \quad \kappa > \kappa_0, \tag{4}$$

pri čemu su α i β parametri modela, a κ_0 materijalni parametar koji predstavlja graničnu vrijednost kod koje dolazi do iniciranja oštećenja. Formulacija modela oštećenja izvedena u ovom radu implementirana je u trokutni konačni element C^1 kontinuiteta za ravninsko stanje deformacija [3]. Element sadrži tri čvora uz ukupno 36 stupnjeva slobode, a polje pomaka aproksimirano je nepotpunim polinomom petog stupnja. Stupnjevi slobode su dva pomaka te njihove prve i druge derivacije s obzirom na Kartezijeve koordinate. Prema uobičajenom postupku, izvod jednadžbi konačnog elementa slijedi iz principa virtualnih radova, koji je za gradijentni kontinuum jednak

$$\int_A \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}A + \int_A \delta\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{d}A = \int_s \delta\mathbf{u}^T\mathbf{t}\,\mathrm{d}s + \int_s \delta\left(\operatorname{grad}\mathbf{u}^T\right)\mathbf{T}\,\mathrm{d}s. \tag{5}$$

U jednadžbi (5), A i s su redom površina i rub elementa, $\boldsymbol{\varepsilon}$ i $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor deformacije te Cauchyjev tenzor naprezanja, $\boldsymbol{\eta}$ predstavlja tenzor deformacije drugog reda koji sadrži druge derivacije vektora pomaka $\mathbf{u}$, a $\boldsymbol{\mu}$ je energijski konjugirana veličina tenzora deformacije drugog reda, takozvani tenzor naprezanja drugog reda ili „double stress" tenzor. $\mathbf{t}$ i $\mathbf{T}$ su vektori rubnih sila pridruženi vektoru pomaka i gradijentu vektora pomaka. Uključivanjem izotropnog zakona oštećenja u konstitutivne relacije koje proizlaze iz poopćene gradijentne teorije, dobiva se

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= (1-D)\mathbf{C}_{\sigma\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} + (1-D)\mathbf{C}_{\sigma\eta}\boldsymbol{\eta},\\ \boldsymbol{\mu} &= (1-D)\mathbf{C}_{\mu\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} + (1-D)\mathbf{C}_{\mu\eta}\boldsymbol{\eta},\end{aligned} \tag{6}$$

gdje su veličine $\mathbf{C}_{\sigma\varepsilon}$, $\mathbf{C}_{\sigma\eta}$, $\mathbf{C}_{\mu\varepsilon}$ i $\mathbf{C}_{\mu\eta}$ konstitutivne tangentne matrice koje se izračunavaju za odgovarajući RVE korištenjem homogenizacije drugog reda [3]. U slučaju materijalne homogenosti, materijalne izotropije i simetrije razmatranog RVE-a, konstitutivne matrice $\mathbf{C}_{\sigma\eta}$ i $\mathbf{C}_{\mu\varepsilon}$ jednake su nuli, a preostale dvije matrice mogu se naći koristeći analitičke izraze u obliku

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\sigma\varepsilon} &= \mathbf{C}_{\sigma\varepsilon}(E,\nu),\\ \mathbf{C}_{\mu\eta} &= \mathbf{C}_{\mu\eta}(E,\nu,L).\end{aligned} \tag{7}$$

U relaciji (7), E i ν su elastični materijalni parametri, a L predstavlja veličinu RVE-a, koja se kod homogenizacije drugog reda može povezati s unutarnjom duljinskom skalom l putem relacije

$$l^2 = \frac{L^2}{12}. \tag{8}$$

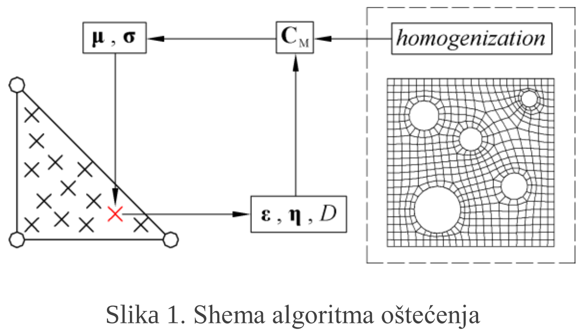
Uvrštavanjem izraza (6) u (5) te naknadnim inkrementiranjem tako dobivene relacije, uz korištenje dodatnih izraza koje se mogu naći u [3], dobiva se jednadžba konačnog elementa

$$\left(\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} + \mathbf{K}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{K}_{\eta\varepsilon} + \mathbf{K}_{\eta\eta}\right)\Delta\mathbf{v} = \mathbf{F}_{\mathrm{e}} - \mathbf{F}_{\mathrm{i}}, \tag{9}$$

gdje su pojedine matrice krutosti elementa jednake

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} &= \int_A \mathbf{B}_\varepsilon^T \left[\left(1-D^{i-1}\right)\mathbf{C}_{\sigma\varepsilon} - \mathbf{C}_{\sigma\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{i-1}\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{i-1} - \mathbf{C}_{\sigma\eta}\boldsymbol{\eta}^{i-1}\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{i-1}\right]\mathbf{B}_\varepsilon \mathrm{d}A,\\
\mathbf{K}_{\varepsilon\eta} &= \int_A \mathbf{B}_\varepsilon^T \left(1-D^{i-1}\right)\mathbf{C}_{\sigma\eta}\mathbf{B}_\eta \,\mathrm{d}A,\\
\mathbf{K}_{\eta\varepsilon} &= \int_A \mathbf{B}_\eta^T \left[\left(1-D^{i-1}\right)\mathbf{C}_{\mu\varepsilon} - \mathbf{C}_{\mu\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{i-1}\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{i-1} - \mathbf{C}_{\mu\eta}\boldsymbol{\eta}^{i-1}\left(\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{i-1}\right]\mathbf{B}_\varepsilon \mathrm{d}A,\\
\mathbf{K}_{\eta\eta} &= \int_A \mathbf{B}_\eta^T \left(1-D^{i-1}\right)\mathbf{C}_{\mu\eta}\mathbf{B}_\eta \,\mathrm{d}A.
\end{aligned} \tag{10}$$

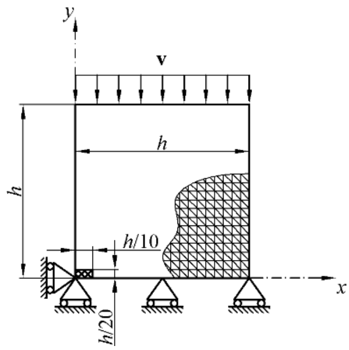
U navedenim izrazima gornji indeks (i-1) označava zadnje konvergirano ravnotežno stanje. Definicije vektora unutarnjih i vanjskih čvornih sila u jednadžbi (9) navedene su u [3]. Postupak analize prezentiranim algoritmom ukratko je prikazan dijagramom na slici 1. Prije početka inkrementalno-iterativne petlje, vrijednosti tangentnih krutosti koje se pojavljuju u relaciji (6) izračunavaju se homogenizacijom drugog reda koristeći odgovarajući RVE. Budući da se u radu razmatra linearno elastično ponašanje materijala, homogenizaciju je potrebno provesti samo jednom, i to prije analize popuštanja. Tako homogenizirane vrijednosti tenzora krutosti ostaju konstantnima tijekom cijele analize, a degradacija krutosti odvija se izotropnim zakonom oštećenja. Detaljniji izvod i opis prezentiranog algoritma oštećenja prikazan je u [4].



Slika 1. Shema algoritma oštećenja

3 Numerički primjer

Mogućnost opisivanja pravilnog širenja oštećenja pomoću prezentiranog algoritma prikazana je na primjeru tlačno opterećene ploče čiji se numerički model nalazi na slici 2. Tlačno opterećenje nametnuto je vertikalnim pomakom od 0.08 mm. Korišten je materijal homogene mikrostrukture unutarnje duljinske skale $l = 2$ mm, uz Youngov modul $E = 20000$ N/mm^2 te Poissonov faktor $\nu = 0.2$. Za modeliranje oštećenja korišteni su sljedeći parametri: $\kappa_0 = 0.0001$, $\alpha = 0.99$, $\beta = 300$ i $k = 1$. Kako bi se izazvala lokalizacija, u donjem lijevom kutu ploče parametar κ_0 smanjen je za 50%.

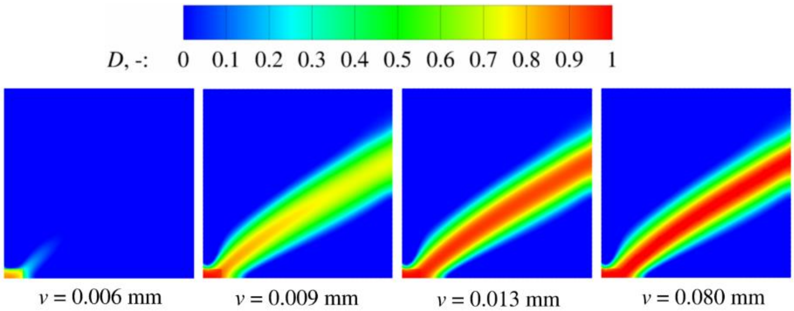


Slika 2. Geometrija i rubni uvjeti numeričkog modela tlačno opterećene ploče, *h* = 60 mm

Isti primjer analiziran je u [5] uz primjenu modela oštećenja temeljenog na standardnoj implicitnoj gradijentnoj formulaciji, a tako dobivena rješenja pokazala su netočno širenje oštećenja duž donjeg horizontalnog ruba. Kao što je opisano u [6], uzrok takvom ponašanju je nepromijenjena veličina područja mikrostrukturnog međudjelovanja materijala tijekom cijelog deformacijskog procesa. Posljedica navedenog je kontinuirano prenošenje energije iz zone materijala zahvaćene oštećenjem u susjednu zonu gdje materijal elastično popušta, što dovodi do nefizikalne raspodijele oštećenja, a samim time i do nemogućnosti stvaranja makropukotine. Na slici 3. jasno je vidljivo kako se prezentiranim algoritmom dobiva ujednačena raspodjela oštećenja tijekom cijelog procesa deformiranja. Stvaranje smičnog pojasa započinje u zoni materijalne nesavršenosti te se nastavlja širenjem prema desnom rubu ploče. Pojas poprima završnu debljinu u veoma ranoj fazi procesa popuštanja, a lokalizacija se nastavlja u njegovoj sredini sve do pojave loma. Sličan razvoj smičnog pojasa popraćen jakom lokalizacijom uz točno širenje oštećenja dobiven je i u [6], gdje je korišten tzv. lokalizacijski gradijentni model oštećenja.

4 Zaključak

Predložena je nova formulacija za modeliranje kvazi-krhke pojave popuštanja materijala koja je ugrađena u trokutni konačni element C^1 kontinuiteta temeljen na teoriji gradijentnih deformacija. Korištenjem izotropnog modela oštećenja u konstitutivnim relacijama višeg reda, ne samo da je omogućeno popuštanje smanjivanjem elastičnih svojstava materijala s porastom oštećenja, već se direktno utječe i na veličinu područja mikrostrukturnog međudjelovanja. Posljednje navedeno je nužno za fizikalan opis završnog lokaliziranog deformacijskog pojasa koji nastaje iz raspršene



Slika 3. Raspodjela oštećenja *D* kroz nekoliko faza opterećenja

mreže mikropukotina na početku popuštanja, kada je spomenuta veličina mikrostrukturnog utjecaja najveća. Mogućnosti predloženog algoritma pokazane su u simulaciji lokalizacije smičnog pojasa na tipičnom testnom primjeru tlačno opterećene ploče s materijalnom nesavršenošću. U usporedbi s rezultatima iz literature u kojoj je korištena standardna implicitna gradijentna formulacija, ovdje dobiveni rezultati pokazuju u potpunosti lokaliziran deformacijski pojas uz točno širenje oštećenja. Provedena analiza pokazuje da se predloženim modelom oštećenja temeljenim na teoriji gradijentnih deformacija može uspješno predvidjeti područje iniciranja rasta oštećenja, kao i naknadna lokalizacija deformacije prema makroskopskoj pukotini.

Financijska potpora

Ovaj rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom „Multiscale Numerical Modeling of Material Deformation Responses from Macro- to Nanolevel“ (2516).

Literatura

1. De Borst R., Sluys L.J., Mühlhaus H.B. i Pamin, J. Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation. Engineering Computations. 1993;10:99-121.
2. Mindlin R.D. i Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. International Journal of Solids and Structures. 1968;4:109-124.
3. Lesičar T., Tonković Z. i Sorić J. A second-order two-scale homogenization procedure using C-1 macrolevel discretization. Computational Mechanics. 2014;54(2):425-441.
4. Putar F., Sorić J., Lesičar T. i Tonković Z. Damage modeling employing strain gradient continuum theory. International Journal of Solids and Structures. 2017;000:0-15.
5. Simone A., Askes H. i Sluys, L.J. Incorrect initiation and propagation of failure in non-local and gradient enhanced media. International Journal of Solids and Structures. 2004; 41:351-363.
6. Poh L.H. i Sun G. Localizing gradient damage model with decreasing interactions. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2017;110:503-522.