Usporedba mješovitih bezmrežnih pristupa za modeliranje problema gradijentne elastičnosti

Jalušić, B.[1], Jarak, T.[2] i Sorić, J.[3]

Sažetak
Posljednjih godina, cilj znanstvenih istraživanja je poboljšati modeliranje različitih fizikalnih pojava, kao što su popuštanje materijala i lokalizacija deformacija, koje se ne mogu dovoljno točno opisati pomoću klasične teorije kontinuuma. Za rješavanje jednadžbi pridruženih teorijama višeg reda potreban je visok stupanj kontinuiteta funkcija oblika. Dakle, upotreba metode konačnih elemenata (MKE) za rješavanje problema gradijentne elastičnosti zahtijeva primjenu elemenata sa složenim funkcijama oblika i velikim brojem čvornih stupnjeva slobode. U usporedbi s MKE, funkcije oblika proizvoljnog stupnja kontinuiteta mogu u bezmrežnim metodama biti izvedene na jednostavniji način korištenjem manjeg broja čvornih nepoznanica. Stoga se bezmrežni pristupi čine prikladnijima za modeliranje deformiranja materijala primjenom gradijentnih teorija. U ovom radu, diferencijalna jednadžba četvrtog reda kojom je opisan problem Aifantisove gradijentne elastičnosti razdvaja se u dva sastavna problema opisana diferencijalnim jednadžbama drugog reda. Sastavni problemi se tada rješavaju jedan za drugim, gdje se rješenje prvog koristi kao ulazni parametar za rješavanje drugog problema. Razmatraju se dva različita načina razdvajanja jednadžbe četvrtog reda, prvi je temeljen na pomaku, a drugi na deformaciji kao nepoznatom polju. Za diskretizaciju obaju problema koriste se mješovite kolokacijske metode. Rezultati su prikazani na reprezentativnom primjeru, te analizirani s obzirom na korišteni postupak razdvajanja jednadžbe četvrtog reda.

Ključne riječi: kolokacijska metoda, mješoviti pristup, gradijentna elastičnost

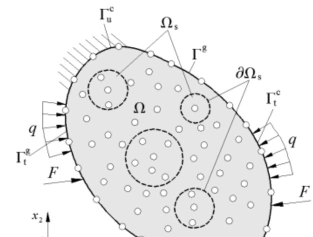
[1] **Dr.sc. Boris Jalušić,** Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: boris.jalusic@fsb.hr
[2] **Doc.dr.sc. Tomislav Jarak,** Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: tomislav.jarak@fsb.hr
[3] **Prof.dr.sc. Jurica Sorić,** Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: jurica.soric@fsb.hr

1 Uvod

Razmatra se mješovita bezmrežna lokalna Petrov-Galerkinova metoda [1] za modeliranje deformiranja materijala primjenom gradijentne elastične teorije [2]. Pritom je korištena teorija višeg reda s jednim mikrostrukturnim parametrom [3]. Analiza deformiranja materijala Aifantisovom gradijentnom teorijom [3] matematički je problem opisan diferencijalnom jednadžbom četvrtog reda. Prilikom rješavanja problema javlja se potreba za izračunavanjem derivacija visokog reda kao i zadovoljavanje složenih rubnih uvjeta na vanjskim granicama [4]. U ovom radu spomenuti nedostaci ublaženi su preoblikovanjem cjelovitog problema u dva sastavna problema, klasični (lokalni) i gradijentni (ne-lokalni), opisana jednadžbama drugog reda [4]. Primijenjena je aproksimacija koja posjeduje interpolacijska svojstva [5], kojom je omogućeno izravno zadovoljavanje osnovnih rubnih uvjeta. U oba sastavna problema sustav jednadžbi je zatvoren postavljanjem kinematičkih relacija koje povezuju aproksimirane veličine polja. Korištene mješovite formulacije i pristupi su detaljno prikazani u [1]. Korištena su dva različita načina razdvajanja originalne jednadžbe koji su objašnjeni u drugom poglavlju. Također, prikazane su dobivene diferencijalne jednadžbe kao i pripadajući rubni uvjeti za dva razmatrana pristupa (u-RA i ε-RA). Učinkovitost prikazanih pristupa prikazana je u 3. poglavlju pomoću jednog numeričkog primjera u kojem je analiziran utjecaj mikrostrukturnog parametra na odziv konstrukcije. Odnosno, za oba pristupa razdvajanja razmatrana je pojava efekta utjecaja veličine uzorka na odziv konstrukcije. U završnom poglavlju dani su zaključci i smjernice za daljnja istraživanja.

2 Bezmrežni postupci za rješavanje problema gradijente elastičnosti

Dvodimenzijski homogeni materijal koji zauzima područje Ω omeđeno globalnom granicom Γ shematski je prikazan na slici 1. S obzirom da se izvorni problem razdvaja na dva sastavna, globalne granice poprimaju oznake Γ^c i Γ^g gdje se gornji indeksi odnose na klasični (lokalni) odnosno gradijentni (ne-lokalni) problem rubnih vrijednosti.



Slika 1. Razmatrano područje s prikazanim rubnim uvjetima i pripadnim granicama

2.1 Jednadžbe gradijentne elastičnosti

Za sustav prema slici 1, jaki oblici 2D jednadžbi ravnoteže moraju biti zadovoljeni u svim čvorovima unutar područja materijala,

$$\tilde{\sigma}_{ij,x^j} + b_i = 0, \quad \text{unutar } \Omega. \tag{1}$$

Sukladno Aifantisovoj teoriji [2], cjelovito naprezanje $\tilde{\sigma}_{ij}$ definirano je kao razlika klasičnog Cauchyevog naprezanja σ_{ij} i naprezanja višeg reda μ_{ij},

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \mu_{ij}, \tag{2}$$

gdje su spomenuta naprezanja jednaka

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{3}$$

$$\mu_{ij} = C_{ijkl} l^2 \nabla^2 \left(\varepsilon_{kl}\right). \tag{4}$$

U jednadžbama (3) i (4), C_{ijkl} označava materijalni tenzor, ε_{kl} tenzor deformacije cjelovitog problema, a l mikrostrukturni parametar. Kinematičke relacije cjelovitog problema koje povezuju polje deformacija i pomaka mogu se zapisati kao

$$\varepsilon_{kl} = \left(u_{k,l} + u_{l,k}\right)/2. \tag{5}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (3) i (4) u relaciju (2) dobiva se konstitutivna relacija u malo drugačijem obliku

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - l^2 \varepsilon_{kl,mm}\right). \tag{6}$$

Uvrštavanjem (6) u relaciju (1) dobiva se jednadžba koja nije prikladna za numeričko rješavanje problema zbog potrebe za izračunavanjem visokog reda derivacija, ne samo u jednadžbi ravnoteže već i u pripadnim rubnim uvjetima (4). Stoga se izvorni problem može preoblikovati u dva sastavna problema opisana diferencijalnim jednadžbama drugog reda na sljedeća dva načina.

2.2 $\boldsymbol{u}$-RA pristup

Uvrštavanjem relacija (2) - (5) u jednadžbe ravnoteže (1), dobiva se diferencijalna jednadžba četvrtog reda kojom je opisano gradijentno elastično ponašanje materijala

$$\frac{1}{2} C_{ijkl}\left[\left(u_k - l^2\nabla^2 u_k\right)_{,jl} + \left(u_l - l^2\nabla^2 u_l\right)_{,jk}\right] + b_i = 0, \quad \text{unutar } \Omega. \tag{7}$$

Gornja diferencijalna jednadžba gradijentne elastičnosti četvrtog reda po polju pomaka može se preoblikovati u dva sastavna problema na način da se izrazi u okruglim zagradama proglase novim klasičnim (lokalnim) poljem pomaka u_k^{c},

$$\frac{1}{2} C_{ijkl}\left(u_{k,jl}^{\mathrm{c}} + u_{l,jk}^{\mathrm{c}}\right)_{,j} + b_i = 0, \quad \text{unutar } \Omega. \tag{8}$$

Zamjena je moguća s obzirom da rezultira diferencijalnom jednadžbom drugog reda koja opisuje klasično ponašanje linearno elastičnog homogenog materijala. Druga sastavna jednadžba problema slijedi iz supstitucije i glasi

$$u_i^{\mathrm{g}} - l^2 u_{i,mm}^{\mathrm{g}} = u_i^{\mathrm{c}}, \quad \text{unutar } \Omega. \tag{9}$$

Problemi rubnih vrijednosti definirani jednadžbama (8) i (9) rješavaju se sada stupnjevanom strategijom, odnosno jedan za drugim, gdje se rješenje prvog problema koristi kao ulazni parametar za drugu diferencijalnu jednadžbu. Relacija (8) zapravo sada označava jednadžbu problema klasične elastičnosti (2). Stoga jednadžbe (8) i (9) moraju zadovoljavati rubne uvjete propisane na vanjskoj granici $\partial\Omega$ prikazanoj na slici 1, odnosno

$$u_i^{\mathrm{c}} = \bar{u}_i^{\mathrm{c}}, \quad \text{na } \Gamma_{\mathrm{u}}^{\mathrm{c}}, \qquad t_i^{\mathrm{c}} = \sigma_{ij}^{\mathrm{c}} n_j^{\mathrm{c}} = \bar{t}_i^{\mathrm{c}}, \quad \text{na } \Gamma_{\mathrm{t}}^{\mathrm{c}}, \tag{10}$$

$$u_i^{\mathrm{g}} = \bar{u}_i^{\mathrm{g}}, \quad \text{na } \Gamma_{\mathrm{u}}^{\mathrm{g}}, \qquad R_i^{\mathrm{g}} = \frac{\partial^2 u_i^{\mathrm{g}}}{\partial n^{\mathrm{g}\,2}} = \bar{R}_i^{\mathrm{g}}, \quad \text{na } \Gamma_{\mathrm{t}}^{\mathrm{g}}. \tag{11}$$

2.3 ε-RA pristup

Uvrštavanjem jednadžbe (6) u jednadžbe ravnoteže (1), dobiva se diferencijalna jednadžba trećeg reda po polju deformacija kojom je također opisano gradijentno ponašanje materijala

$$C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - l^2 \varepsilon_{kl,mm}\right)_{,j} + b_i = 0, \quad \text{unutar } \Omega. \tag{12}$$

Ukoliko se sada izraz u zagradi u gornjoj jednadžbi zamijeni s klasičnim (lokalnim) poljem deformacije izravno slijedi prva sastavna jednadžba ovog pristupa

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j}^{\mathrm{c}} + b_i = 0, \quad \text{unutar } \Omega, \tag{13}$$

dok druga slijedi iz same zamjene

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{g}} - l^2 \varepsilon_{ij,mm}^{\mathrm{g}} = \varepsilon_{ij}^{\mathrm{c}}, \quad \text{unutar } \Omega. \tag{14}$$

Jednadžba (13) zapravo je jednaka jednadžbi (8) ukoliko se u nju uvrste kinematičke relacije definirane prema jednadžbi (5). Stoga se mora spomenuti da se klasično (lokalno) rješenje problema kod oba pristupa može izračunavati na isti način. Nadalje, rubni uvjeti klasičnog problema ostaju jednaki kao i kod u-RA pristupa i definirani su prema (10). Međutim, zbog drugačije druge jednadžbe problema dolazi do promjene rubnih uvjeta ne-lokalnog problema te stoga oni prema [4] glase

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{g}} = \bar{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{g}}, \quad \text{na } \Gamma_{\mathrm{u}}^{\mathrm{g}}, \qquad R_{ij}^{\mathrm{g}} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{\mathrm{g}}}{\partial n^{\mathrm{g}}} = \bar{R}_{ij}^{\mathrm{g}}, \quad \text{na } \Gamma_{\mathrm{t}}^{\mathrm{g}}. \tag{15}$$

3 Numerički primjer

3.1 Membrana opterećena konstantnim površinskim opterećenjem

Membrana jedinične debljine, duljine $L = 6$, visine $H = 3$ opterećena je na desnom kraju jednolikim površinskim opterećenjem u smjeru osi x, prema slici 2. Svi korišteni klasični i gradijentni rubni uvjeti također su prikazani na slici. Pritom su u oba pristupa (u-RA i ε-RA) korišteni jednaki klasični rubni uvjeti, što nije slučaj pri rješavanju gradijentne (ne-lokalne) jednadžbe. Materijalna svojstva membrane definirana su Youngovim modulom $E = 1$ i Poissonovim faktorom $\nu = 0,25$. Za diskretizaciju membrane korištena je mreža koja je sastoji od 153 jednoliko razmaknuta čvora. Na numeričkom primjeru analizirana je mogućnost mješovitih kolokacijskih pristupa da opišu utjecaj mikrostrukture na odziv konstrukcije, što je postignuto mijenjanjem parametra l. Prije prikaza numeričkih rezultata definiramo pomoćnu veličinu zvanu omjer deformacija ε_{R} koja će nam poslužiti za analizu rezultata. Omjer deformacija razmatran je u točki A s koordinatama $x = 0,375,\ y = 1,5$, a računa se prema

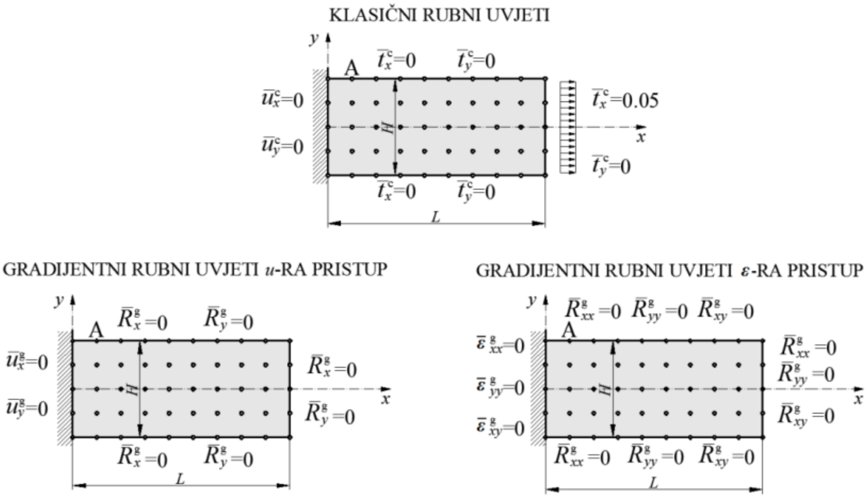
$$\varepsilon_{\mathrm{R}} = \frac{\left(\varepsilon_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{c}}\right)_{\mathrm{A}}}{\left(\varepsilon_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{g}}\right)_{\mathrm{A}}}, \tag{16}$$

gdje su ekvivalentne klasične i gradijentne deformacije jednake

$$\varepsilon_{\mathrm{eq}} = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{dev}}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{dev}}}. \tag{17}$$

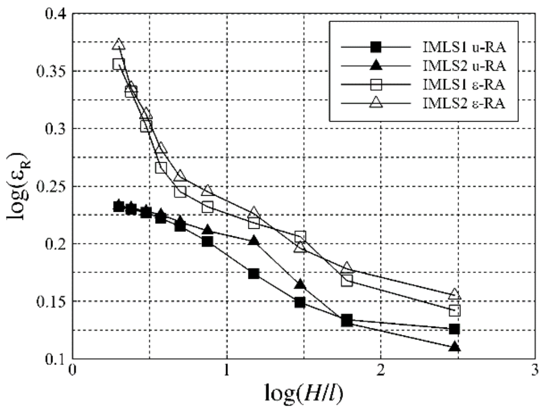
U gornjoj jednadžbi $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{dev}}$ se odnosi na tenzor devijatorskih deformacija

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{dev}} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\cdot\delta_{ij}. \tag{18}$$



Slika 2. Membrana s prikazanim klasičnim i gradijentnim rubnim uvjetima

Numerički izračuni provedeni su korištenjem aproksimacijskih funkcija prvog (IMLS1) i drugog (IMLS2) stupnja. Pritom su korištene veličine aproksimacijskih domena jednake $r_{\mathrm{s}}/h_{\mathrm{s}} = 1.4$ za prvi, odnosno $r_{\mathrm{s}}/h_{\mathrm{s}} = 2.3$ za drugi stupanj aproksimacije. Pritom je s h_{s} ovdje označena međusobna udaljenost između čvorova. Na slici 3. prikazan je dijagram utjecaja promjene mikrostrukturnog parametra l na iznos omjera deformacija ε_{R} u točki A u logaritamskom mjerilu.



Slika 3. Dijagram međusobne ovisnosti omjera deformacije i mikrostrukturnog parametra

Analizom rezultata vrlo jasno je vidljivo da upotreba različitih pristupa, odnosno različitih rubnih uvjeta pri rješavanju gradijentne (ne-lokalne) jednadžbe utječe na odziv same konstrukcije. Također, vidljivo je da s povećanjem parametra l kod oba pristupa raste i vrijednost omjera deformacija ε_{R}. Može se konstatirati da uvođenje članova višeg reda u konstitutivnu jednadžbu gradijentne elastičnosti zaglađuje polja deformacija te smanjuje maksimalnu vrijednost deformacija, što za posljedicu ima povećanje ε_{R}. Prikazani rezultati kvalitativno su bliski onima koji su dostupni u literaturi [4].

4 Zaključak

Rješavanjem problema gradijentne elastičnosti primjenom tzv. stupnjevanih postupaka, postiže se smanjenje reda potrebnih derivacija kako u samim diferencijalnim jednadžbama, tako i u pripadnim rubnim uvjetima. U korištenim mješovitim bezmrežnim formulacijama, za rješavanje diferencijalnih jednadžbi drugog reda, funkcije moraju posjedovati samo C^0 kontinuitet čime se direktno povećava numerička točnost te smanjuju računalni troškovi. Za sklapanje čvornih matrica krutosti kod obje sastavne jednadžbe problema i kod oba pristupa razdvajanja potrebno je izračunavati samo prve derivacije funkcija oblika. Analizom dobivenih rezultata na numeričkom primjeru membrane može se zaključiti da se s oba pristupa razdvajanja može adekvatno opisati pojava utjecaja veličine uzorka na deformiranje same konstrukcije. S obzirom da su rezultati kvalitativno usporedivi s dostupnima u literaturi, može se konstatirati da se primjenom mješovitih kolokacijskih metoda može postići točan odziv konstrukcije. U daljnjim radovima metoda će biti primijenjena za modeliranje deformiranja heterogenih materijala.

Zahvale

Ovaj rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom „Multiscale Numerical Modeling of Material Deformation Responses from Macro- to Nanolevel“ (2516).

Literatura

1. Jalušić B. Meshless Numerical Method for Modeling of Heterogeneous Materials. Doctoral Thesis. Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, Zagreb, 2016.
2. Askes H, Aifantis EC. Gradient Elasticity in Statics and Dynamics: An Overview of Formulations, Length Scale Identification Procedures, Finite Element Implementations and New results. International Journal of Solids and Structures. 2011,48:1962-1990.
3. Tenek LT, Aifantis EC. A Two-dimensional Finite Element Implementation of a Special Form of Gradient Elasticity. Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES). 2002, 3(6):731-741.
4. Askes H, Morata I, Aifantis EC. Finite Element Analysis With Staggered Gradient Elasticity. Computers & Structures. 2008,86:1266-1279.
5. Most T, Bucher C. New Concepts for Moving Least Squares: An Interpolating Non-singular Weighting Function and Weighted Nodal Least Squares. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2008,32(6):461-470.