

BARBEROVI FILTRI NISKIH FREKVENCIJA

Gordana Lukić, Veselko Tomljenović

Sažetak

U ovom članku su predstavljeni filtri niskih frekvencija koji se sastoje od dva paralelna puta. Svaki sadrži dva množitelja i niskopropusni filter sastavljen od standardnih komponenata. S aspekta teorije mreža ovi filtri predstavljaju linearne mreže s promjenjivim parametrima. Poznato je da za njih ne postoji opća analitička metoda rješenja. Rješenja su nađena za mali broj jednačbi. Ovi filtri, zahvaljujući svojoj konstrukciji, imaju visoku stabilnost. To je osobito važno kod dinamičkih ispitivanja. Pokazano je da se, kada je red ovih filtera veći od dva, u prijenosnoj funkciji pojavljuju dopunske nule prijenosne funkcije. Općenito, ove nule prijenosne funkcije uzrokuju izobličenja amplitudno-frekvencijske i fazno-frekvencijske karakteristike. Međutim, uz određenja ograničenja može se njihov utjecaj znatno smanjiti.

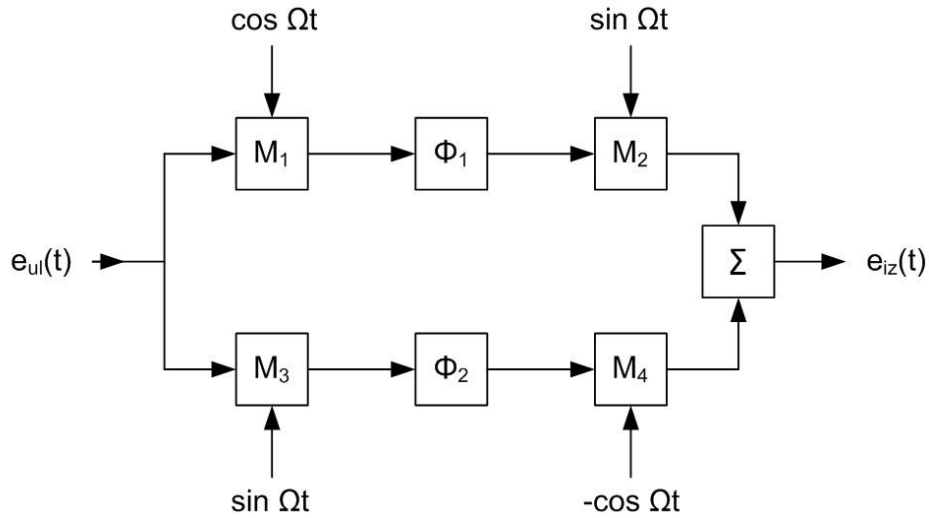
Ključne riječi: *amplitudno-frekvencijska karakteristika, fazno-frekvencijska karakteristika, filter niskih frekvencija, prijenosna funkcija*

1. UVOD

Obrada signala je opći pojam koji obuhvaća puno metoda, kao na primjer, analogno-digitalnu i digitalno-analognu pretvorbu, kontrolu analognih blokova, filtracija signala, korekciju grešaka i drugo.

Filtracija signala igra jednu od najvažnijih uloga kod obrade signala. Od kvalitete filtracije ovisi kvaliteta cijele obrade informacije.

Članak je posvećen filterima niskih frekvencija koje je predložio N. F. Barber [1]. Po njemu su i dobili naziv. S aspekta teorije električnih mreža barberovi filtri predstavljaju linearne mreže s promjenjivim parametrima. Takve mreže, kao što je poznato, opisuju se linearnim diferencijalnim jednačbama s promjenjivim koeficijentima. Opća analitička metoda rješavanja diferencijalnih jednačbi s promjenjivim koeficijentima ne postoji. Rješenja su nađena samo za mali broj jednačbi među kojima su jednačbe Bessela, Legendra i Webera.



Slika 1.

Na sl. 1 predstavljena je elementna baza realizacije barberovog filtra niskih frekvencija. Strukturna shema sadrži četiri množitelja M_1 - M_4 , koji predstavljaju linearne parametarske elemente. Oni ostvaruju množenje filtrirajućeg signala sa $\sin \Omega t$ ili $\cos \Omega t$. Φ_1 i Φ_2 su dva filtra niskih frekvencija (unutarnji filtri) s identičnim prijenosnim funkcijama $H(p)$. Tu se još nalazi sumator Σ . Množitelji M_1 , M_2 i filtar Φ_1 formiraju gornji kanal, a ostali donji kanal.

2. PRIJENOSNA FUNKCIJA BARBEROVIH FILTERA NISKIH FREKVENCIJA

Ako se pretpostavi da su unutarnji filtri niskih frekvencija s jednakim prijenosnim funkcijama

$$H_1(p) = H_2(p) = H(p), \quad (1)$$

tada se lako dobije (sl. 1) da je prijenosna funkcija

$$Y(p) = \frac{1}{2j} [H(p - j\Omega) - H(p + j\Omega)]. \quad (2)$$

U cilju pokaza nekih svojstava prijenosne funkcije, uzimamo da su unutarnji filtri niskih frekvencija s prijenosnim funkcijama

$$T_1(p) = T_2(p) = T(p) = \frac{k}{(1 + pT)^n}, \quad (3)$$

gdje je k - konstanta, T - vremenska konstanta, n - prirodni broj.

Tada je

$$Y(p) = \frac{k}{2j} \left\{ \frac{1}{[1 + (p - j\Omega)T]^n} - \frac{1}{[1 + (p + j\Omega)T]^n} \right\}. \quad (4)$$

Analizirajući (4) jasno je da je red barberovog filtra dva puta veći od reda unutarnjih filtara. Par konjugirano-kompleksnih polova prijenosne funkcije unutarnjeg filtra transformira se u dva para konjugirano-kompleksnih polova prijenosne funkcije barberovog filtra. To se može objasniti kao transmisija frekvencijske karakteristike unutarnjeg filtra duž frekvencijske osi. Pojas unutarnjeg filtra se transponira za vrijednost modulirajuće frekvencije Ω . Vrijednost frekvencijskog pomaka se vidi iz (4) i određena je isključivo modulirajućom frekvencijom Ω . Koristeći digitalno-analogne visoko stabilne generatore, može se dobiti velika stabilnost frekvencije Ω . Stabilnost barberovih filtara ne ovisi od elemenata unutarnjih filtara.

Iz (4) se vidi da je

$$Y(p) = \frac{k\Omega}{T^{2n-1}} \cdot \frac{[1 + (p + j\Omega)T]^{n-1} + [1 + (p + j\Omega)T]^{n-2} \cdot \frac{[1 + (p - j\Omega)T] + \dots + [1 + (p - j\Omega)T]^{n-1}}{\left[\left(p + \frac{1}{T}\right)^2 + \Omega^2\right]^n}}{\left[\left(p + \frac{1}{T}\right)^2 + \Omega^2\right]^n}. \quad (5)$$

Ovo znači da ako je red unutarnjih filtra veći od jedan tada se u prijenosnoj funkciji barberovog filtra pojavljuju dopunske nule čiji je broj $n-1$, gdje je n red unutarnjeg filtra. Općenito, dopunske nule nepovoljno utječu na oblik karakteristika filtra. Postavlja se pitanje koja ograničenja moraju postojati da se smanji njihov utjecaj.

Iz (4), uz $k = 1$ i $p = j\omega$ dobiva se

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{[1 + j(\omega - \Omega)T]^n} - \frac{1}{[1 + j(\omega + \Omega)T]^n} \right\}. \quad (6)$$

Uzimajući u obzir normiranu frekvenciju

$$\omega_N = \frac{\omega}{\Omega}, \quad (7)$$

i

$$\Omega T = \sqrt{4Q^2 - 1}, \quad (8)$$

iz (6) je

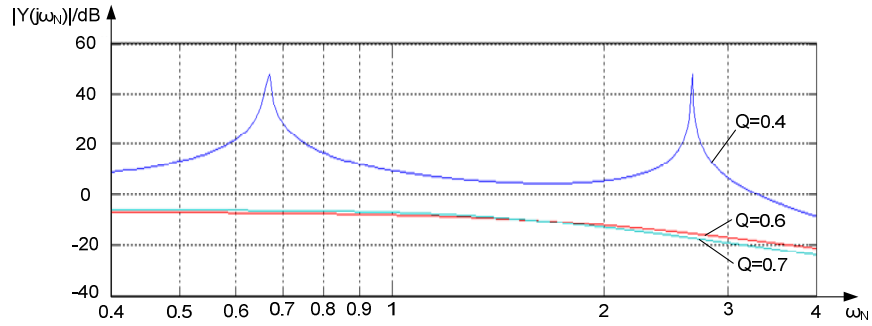
$$Y(j\omega_N) = \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{\left[1 + j\sqrt{4Q^2 - 1}(\omega_N - 1)\right]^n} - \frac{1}{\left[1 + j\sqrt{4Q^2 - 1}(\omega_N + 1)T\right]^n} \right\}. \quad (9)$$

Ako je $n = 1$, iz (9) dobivaju se amplitudno-frekvencijske karakteristike barberovog filtra niskih frekvencija drugog reda.

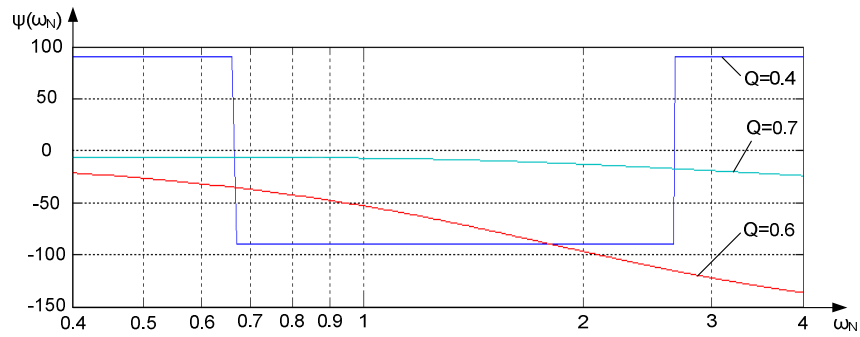
$$|Y(j\omega_N)| = \sqrt{\frac{4Q^2 - 1}{[4Q^2 - \omega_N^2(4Q^2 - 1)]^2 + 4\omega_N^2(4Q^2 - 1)}}, \quad (10)$$

i fazno-frekvencijske karakteristike

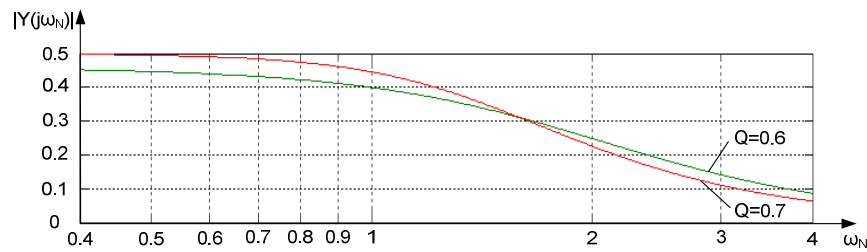
$$\psi(\omega_N) = \arctg \frac{2\omega_N\sqrt{4Q^2 - 1}}{\omega_N^2(4Q^2 - 1) - 4Q^2}. \quad (11)$$



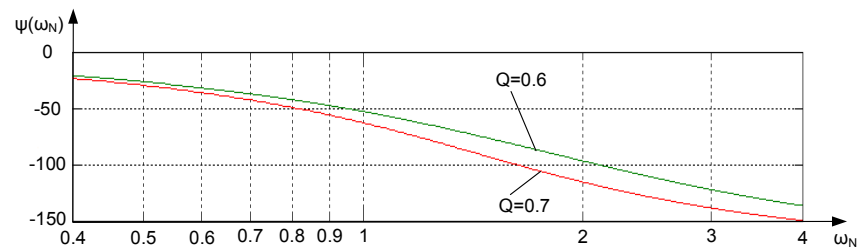
Slika 2.



Slika 3.



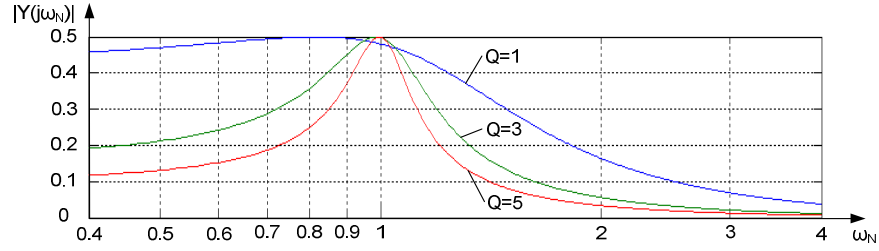
Slika 4.



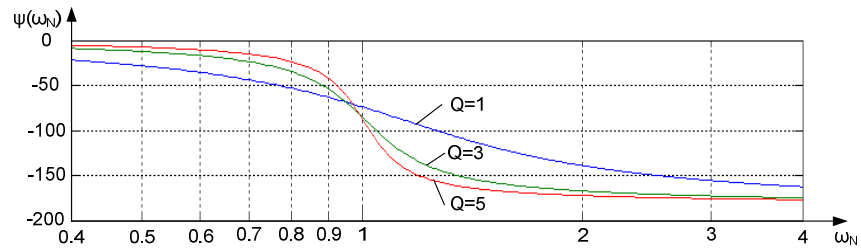
Slika 5.

Na sl. 2 predstavljene su amplitudno-frekvencijske karakteristike barberovog filtra drugog reda za različite vrijednosti faktora Q . Amplituda je dana u dB. Za $Q = 0,4$ vidi se da je amplitudno-frekvencijska karakteristika znatno izobličena, za $Q = 5$ ne postoji. Za $Q = 0,6$ i $Q = 0,7$ amplitudno-frekvencijske karakteristike nisu izobličene. Isto vrijedi i za fazno-frekvencijske karakteristike predstavljene na sl. 3. Na sl. 4, gdje su još jednom predstavljene amplitudno-frekvencijske karakteristike za $Q = 0,6$ i $Q = 0,7$, ali sada ne u dB još se jasnije vidi da nema

nikakvih izobličenja. To isto vrijedi i za fazno-frekvencijske karakteristike na sl. 5.



Slika 6.



Slika 7.

Na sl. 6 pokazane su amplitudno-frekvencijske karakteristike barberovog filtra niskih frekvencija drugog reda za $Q = 1$, $Q = 3$ i $Q = 5$. Jasno je da do izobličenja dolazi za $Q > 1$. To isto vrijedi i u slučaju fazno-frekvencijske karakteristike predstavljene na sl. 7.

Ako je $n = 2$ iz (9) se dobivaju amplitudno-frekvencijske i fazno-frekvencijske karakteristike barberovog filtra niskih frekvencija četvrtog reda.

$$Y(j\omega_N) = \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{\left[1 + j\sqrt{4Q^2 - 1}(\omega_N - 1)\right]^2} - \frac{1}{\left[1 + j\sqrt{4Q^2 - 1}(\omega_N + 1)\right]^2} \right\}, \quad (12)$$

$$Y(j\omega_N) = \frac{1}{2j} \cdot \left\{ \frac{\left[1 + j\sqrt{4Q^2 - 1}(\omega_N + 1)\right]^2 - \left[1 + j\sqrt{4Q^2 - 1}(\omega_N - 1)\right]^2}{\left[1 + j\sqrt{4Q^2 - 1}(\omega_N - 1)\right]^2 \cdot \left[1 + j\sqrt{4Q^2 - 1}(\omega_N + 1)\right]^2} \right\}, \quad (13)$$

$$Y(j\omega_N) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1 + 2j\sqrt{4Q^2 - 1}(\omega_N + 1) - (4Q^2 - 1)(\omega_N + 1)^2}{\left[1 + 2j\sqrt{4Q^2 - 1}\omega_N - (4Q^2 - 1)(\omega_N - 1)\right]^2} \cdot \frac{-1 - 2j\sqrt{4Q^2 - 1}(\omega_N - 1) - (4Q^2 - 1)(\omega_N - 1)^2}{\left[1 + 2j\sqrt{4Q^2 - 1}\omega_N - (4Q^2 - 1)(\omega_N - 1)\right]^2}. \quad (14)$$

U cilju pojednostavljenja pisanja izraza uvodimo sljedeće supstitucije:

$$\sqrt{4Q^2 - 1} = A_1; \quad \omega_N + 1 = A_2; \quad \omega_N - 1 = A_3; \quad A_1 \cdot A_2 = A_4;$$

$$A_1 \cdot A_3 = A_5; \quad A_1^2 \cdot A_2 A_3 = A_6; \quad 1 - A_6 = A_7; \quad A_1 \omega_N = A_8$$

$$A_5^2 - A_4^2 = A_9; \quad A_4 - A_5 = A_{10}; \quad A_7^2 - A_8^2 = A_{11}$$

Ako uzmemo u obzir gornje supstitucije dobije se:

$$Y(j\omega_N) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{2A_{10}A_7 - 4jA_8A_{10} - jA_7A_9 - 2A_8A_9}{A_{11}}. \quad (15)$$

Uzmimo da je:

$$2A_{10}A_7 - 2A_8A_9 = A_{12}; \quad 4jA_8A_{10} + jA_7A_9 = A_{13},$$

Tada je:

$$Y(j\omega_N) = \frac{A_{12} - jA_{13}}{A_{11}}. \quad (16)$$

Ako je:

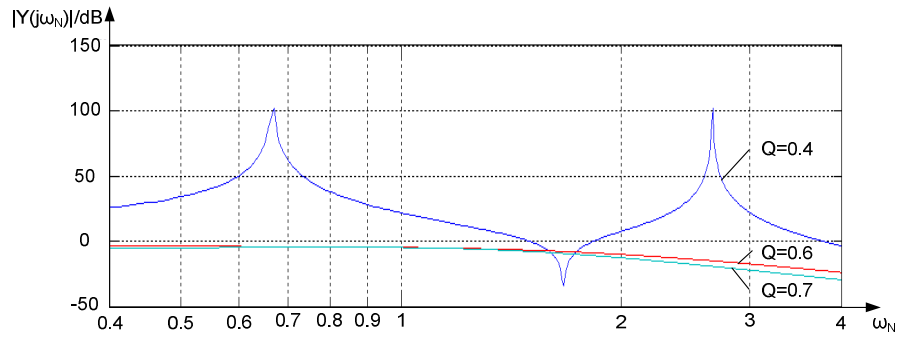
$$\frac{A_{12}}{A_{11}} = A_{14} \quad \text{i} \quad \frac{A_{13}}{A_{11}} = A_{15}, \quad (17)$$

iz (16) i (17) slijedi da je amplitudno-frekvencijska karakteristika

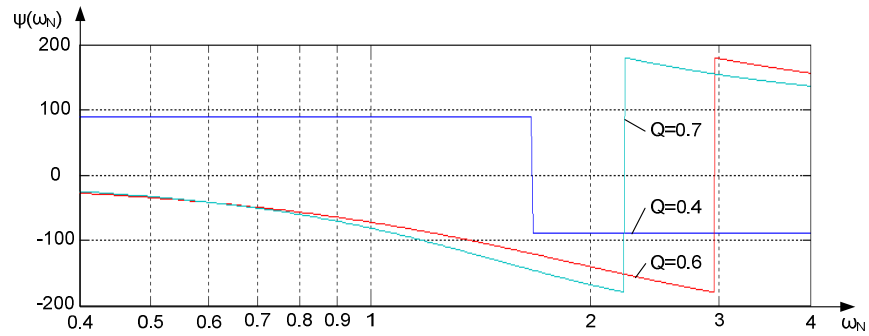
$$|Y(j\omega_N)| = \frac{1}{2} \sqrt{A_{14}^2 + A_{15}^2} \quad (18)$$

i fazno-frekvencijska karakteristika

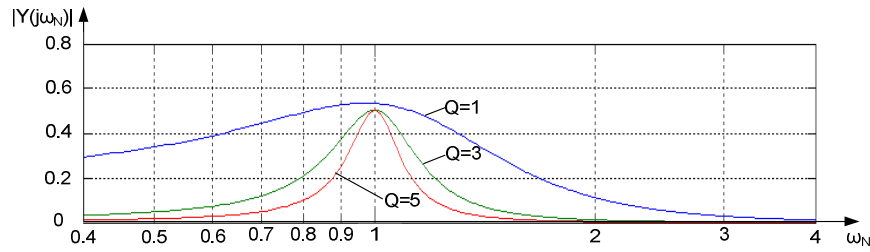
$$\psi(\omega_N) = -\arctg \frac{A_{15}}{A_{14}}. \quad (19)$$



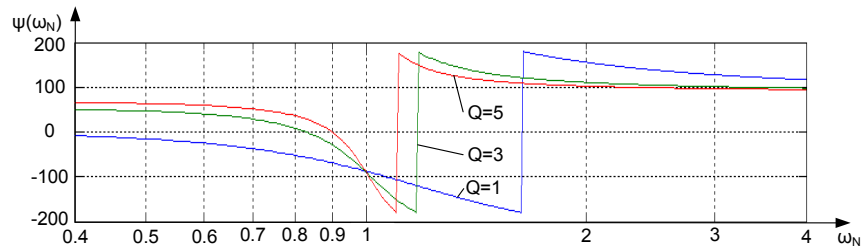
Slika 8.



Slika 9.



Slika 10.



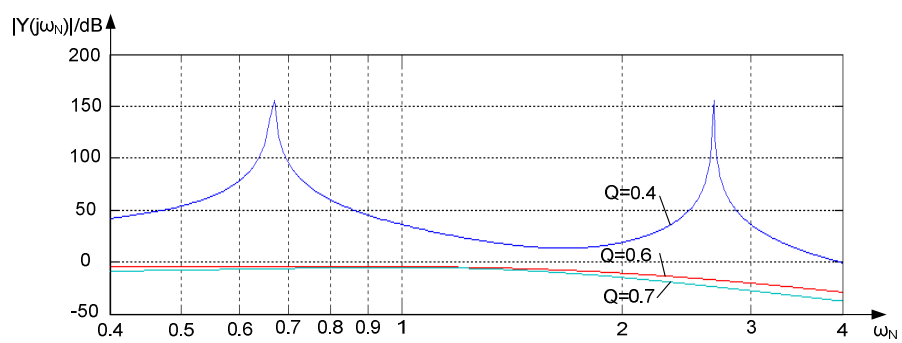
Slika 11.

Na sl. 8 pokazane su amplitudno-frekvencijske karakteristike za različite vrijednosti Q . Vidljiva su znatna izobličenja za $Q = 0,4$, dok za $Q = 0,6$ i $Q = 0,7$ nema izobličenja. Fazno-frekvencijske karakteristike su prikazane na sl. 9. Postoje znatna izobličenja ako je $Q = 0,4$. Za ostale vrijednosti do $\omega_N = 2$ nema znatnih izobličenja.

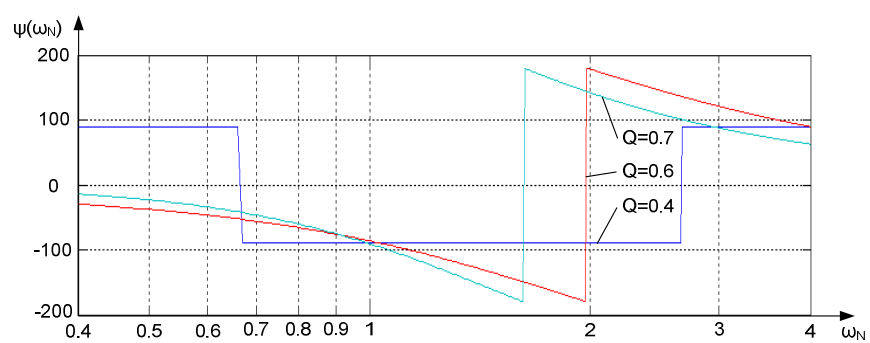
Iz sl. 10 se vidi da izobličenje amplitudno-fazne karakteristike postoji već za $Q = 1$, dok su za $Q = 3$ i $Q = 5$ puno više izražena.

Fazno-frekvencijske karakteristike na sl. 11 za $Q = 3$ i $Q = 5$ su izrazito izobličene za $\omega_N > 1$, dok za $Q = 1$ to izobličenje nastupi znatno kasnije.

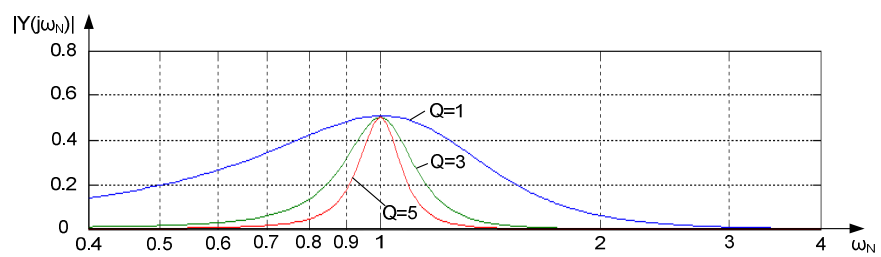
Ako se promatraju amplitudno-frekvencijske i fazno-frekvencijske karakteristike za barberov filter niskih frekvencija šestog reda, tj. u (9) se stavi $n = 3$, vidi se iz sl. 12 i 14 da se pojavljuju izraženija izobličenja za $Q = 0,4$, $Q = 3$ i $Q = 5$. To vrijedi i za fazno-frekvencijske karakteristike predstavljene na sl. 13 i 15.



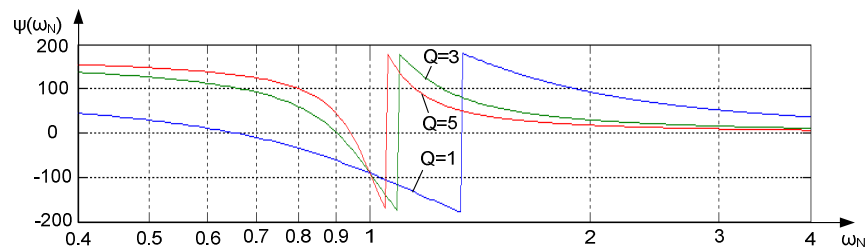
Slika 12.



Slika 13.



Slika 14.



Slika 15.

3. ZAKLJUČAK

Barberovi filtri niskih frekvencija su vrlo slabo istraženi. Vidi se da se, ako su kanali identični, pojavljuju dopunske nule u prijenosnoj funkciji. Jasno da dopunske nule utječu na amplitudno-frekvencijsku i fazno-frekvencijsku karakteristiku. Međutim, kako se vidi iz gore izloženog, za određene vrijednosti faktora Q i u određenom području njihov je utjecaj znatno manji. Ranije se mislilo da su barberovi filtri niskih frekvencija neupotrebljivi za više redove unutarnjih filtara. Istraživanja su pokazala da ako je $0,5 < Q \leq 1$, tada nema izobličenja u amplitudno-frekvencijskoj karakteristici i fazno-frekvencijska karakteristika je u dosta velikom području linearna. Prema tome, s ovim ograničenjima barberovi filtri niskih frekvencija mogu se primijeniti i sa višim redovima unutarnjih filtara.

Literatura

- [1] N.F. Barber, Narrow band-pass filter using modulation, Wireless Eng. 24, 132-134 May (1947).
- [2] O. V. Kustov, V. Z. Lundin, Operacionne usiliteli v lineinih cepiah, Svjaz, Moskva, 108-111 (1978).
- [3] G. S. Lukić, Theoretical bases of the Barber Filters, Signal Proccesing, 78, 139-149 (1999).