

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Domagoj Jakobović

OCJENA UČINKOVITOSTI POSTUPAKA ZA RJEŠAVANJE
KINEMATIKE STEWARTOVIH PARALELNIH MEHANIZAMA

MAGISTARSKI RAD

ZAGREB, 2001.

Magistarski rad je izrađen na Zavodu za elektroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave, Fakultet elektrotehnike i računarstva.

Mentor: prof. Leo Budin

Magistarski rad ima 112 stranica

Rad br.: _____

Povjerenstvo za ocjenu magistarskog rada:

Prof.dr.sc. Slobodan Ribarić – predsjednik

Prof.dr.sc. Leo Budin – mentor

Doc.dr.sc. Toma Udiljak – FSB Zagreb

Povjerenstvo za obranu magistarskog rada:

Prof.dr.sc. Slobodan Ribarić – predsjednik

Prof.dr.sc. Leo Budin – mentor

Doc.dr.sc. Toma Udiljak – FSB Zagreb

Datum obrane: 07.12.2001.

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. STEWARTOVA PLATFORMA (HEKSAPOD)	5
2.1. DEFINICIJA KONSTRUKCIJE HEKSAPODA	5
2.1.1. Standardni oblik heksapoda	6
2.2. DRUGE INAČICE STEWARTOVE PLATFORME	7
2.2.1. Paralelni kinematski mehanizmi sa različitim brojem hvatišta na osnovnoj i pomičnoj platformi	8
2.3. POSTOJEĆI PARALELNI MANIPULATORI	9
3. KINEMATIKA STEWARTOVE PLATFORME	12
3.1. INVERZNA KINEMATIKA	12
3.2. UNAPRIJEDNA KINEMATIKA	15
3.2.1. Položaj i orijentacija pomične platforme kao varijable	16
3.2.2. Kanonski oblik jednačbi unaprijedne kinematike	17
3.2.3. Preslikavanje vektora položaja i orijentacije i kanonskog oblika	22
3.2.4. Reducirani kanonski oblik jednačbi	24
3.2.5. Definiranje orijentacije pomoću rotacijskog vektora	27
3.3. KINEMATSKA SVOJSTVA STEWARTOVE PLATFORME	29
4. POSTUPCI RJEŠAVANJA UNAPRIJEDNE KINEMATIKE HEKSAPODA	32
4.1. KONVERGENCIJSKI POSTUPCI	33
4.1.1. Traženje po koordinatnim osima	34
4.1.2. Powellov postupak	35
4.1.3. Hooke-Jeeves postupak	36
4.1.4. Metoda najbržeg spusta	38
4.1.5. Newton-Raphsonova metoda za sustav jednačbi	38
4.1.6. Postupak po Fletcheru i Powellu	40
4.2. DODATNE PRILAGODBE POSTUPAKA OPTIMIRANJA	43
4.2.1. Izračunavanje parcijalnih derivacija funkcija cilja	43
4.2.2. Učinkovito pronalaženje minimuma na pravcu	44
4.2.3. Generiranje početnog rješenja eliminacijom varijabli	45
4.3. POLINOMSKI POSTUPCI	47
4.4. RJEŠAVANJE UNAPRIJEDNE KINEMATIKE DODAVANJEM OSJETNIKA	49
4.5. UNAPRIJEDNA KINEMATIKA DRUGIH MODELA HEKSAPODA	49
5. OCJENA UČINKOVITOSTI	51
5.1. KRITERIJI UČINKOVITOSTI	51
5.2. ISPITNE KONFIGURACIJE	52
5.2.1. Učinkovitost prilagodbi postupaka optimiranja	53
5.3. ISPITIVANJE U STATIČKIM UVJETIMA	56
5.3.1. Optimiranje prikaza funkcijom F_1 – položaj i orijentacija	56
5.3.2. Optimiranje prikaza funkcijom F_2 – kanonski oblik sa 9 varijabli	57
5.3.3. Optimiranje prikaza funkcijom F_3 – kanonski oblik sa 6 varijabli	59
5.3.4. Optimiranje prikaza funkcijom F_4 – kanonski oblik sa 3 varijable	60
5.3.5. Optimiranje prikaza funkcijom F_5 – položaj i orijentacija po Reboulet-u	61
5.4. ISPITIVANJE U DINAMIČKIM UVJETIMA	62
5.4.1. Izbor odgovarajućeg postupka rješavanja	64
5.4.2. Simulacija složenijih pomaka	68
6. ZAKLJUČAK	75
LITERATURA	78
PRILOG A: PARCIJALNE DERIVACIJE FUNKCIJA CILJA	81

<i>Funkcija F_1 – položaj i orijentacija kao varijable</i>	81
<i>Funkcija F_2 – kanonski oblik sa devet varijabli</i>	86
<i>Funkcija F_3 – kanonski oblik sa šest varijabli</i>	88
<i>Funkcija F_4 – kanonski oblik sa tri varijable</i>	90
<i>Funkcija F_5 – položaj i rotacijski vektor</i>	93
PRILOG B: PARCIJALNE DERIVACIJE U POLINOMSKOM OBLIKU	103
<i>Funkcija F_1 – parcijalne derivacije po t_x, t_y i t_z</i>	103
<i>Funkcija F_2 – parcijalna derivacija po parametru λ</i>	106
<i>Funkcija F_3 – parcijalna derivacija po parametru λ</i>	107
SAŽETAK	110
SUMMARY	111
ŽIVOTOPIS	112

1. Uvod

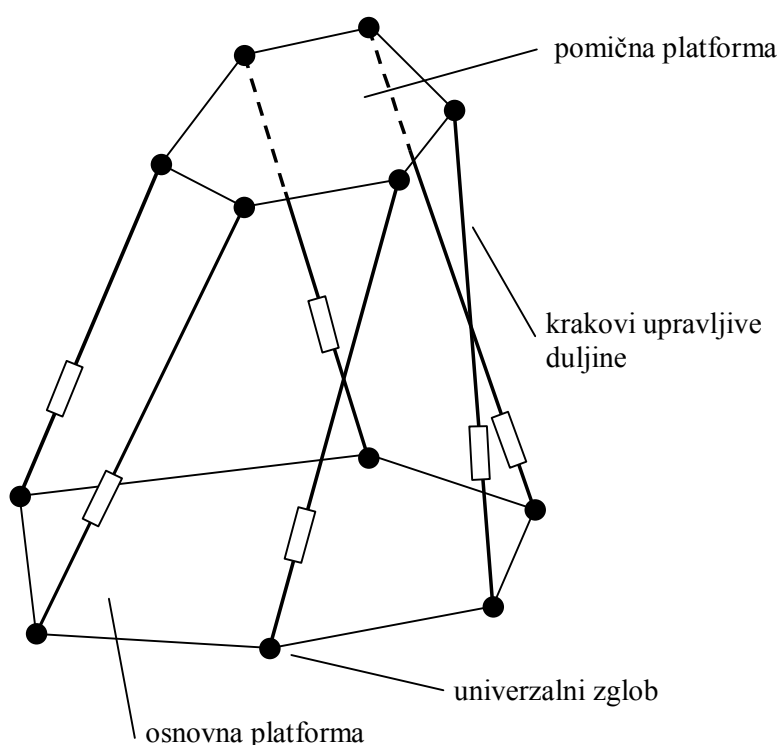
Automatizirana obrada materijala osnovni je preduvjet za razvoj masovne industrijske proizvodnje. U proteklom stoljeću takav je način obrade doživio svoj procvat ponajprije zbog sljedeća dva razloga: nastanak sofisticiranih mehanizama koji će obavljati ulogu ljudskih ruku u nekom proizvodnom procesu, dakle različitih *manipulatora*, te razvoja elektroničkih računala koji su omogućili izrazito učinkovito upravljanje tim mehanizmima. Spajanjem ta dva elementa dobiva se veliko povećanje brzine obavljanja zadanih radnji. No ova kombinacija ne mora poslužiti samo u masovnoj proizvodnji: računalno upravljani manipulatori koriste se i u područjima gdje je potrebna velika preciznost, kao što su neke grane medicine, te tamo gdje vladaju uvjeti nepogodni za neposredan pristup ljudske radne snage (razni okoliši opasni po život pa čak i rad u svemirskom prostoru).

U izgradnji manipulatora ili *obradnih mehanizama* krenulo se od očiglednog uzora: ljudske ruke. Više ili manje jednolik izgled većine današnjih manipulatora možemo pripisati upravo toj činjenici. Ogromna većina obradnih mehanizama koji se danas nalaze u uporabi su *sljednog* tipa. Takav tip mehanizma, upravo kao i ljudska ruka, sastoji se od jednostrukog niza pokretnih dijelova, povezanih jedan s drugim nekom vrstom zgloba, na kraju kojega se nalazi alat ili neki drugi uređaj. Često nazivan i *robotskom rukom*, ovakav mehanizam ima neke osobine koje su mu omogućile široku uporabu. Prije svega, slijedni je mehanizam moguće postaviti u zadanoj orijentaciji u vrlo velikom području, tj. posjeduje velik *radni prostor*. Upravljanje je gotovo intuitivno, jer je umnogome identično pokretanju vlastite ruke, te se u nekim situacijama može obavljati i ručno, dakle kao produžetak ruke voditelja. Za automatsko upravljanje se ipak treba malo pomučiti, no to je problem za koji odavno postoji standardizirano rješenje koje se danas primjenjuje bez većih poteškoća.

Postoje, ipak, neki problemi koji se inherentno javljaju kod spomenutog tipa manipulatora. Upravljačka sila se u slijednim mehanizmima prenosi s jednog elementa na drugi što za posljedicu ima relativno nisko *radno opterećenje* koje se može podnijeti. 'Relativno' ovdje ne znači da je to opterećenje manje nego kod ljudske ruke, nego da je za postizanje željene snage potrebna nesrazmjerno velika masa cijele konstrukcije, što je općenito nepoželjna osobina, već i samim time što smanjuje pokretljivost stroja. Nastoji li se istovremeno postići velika pokretljivost i brzina obrade uz željeno opterećenje, mora se raditi kompromis između ta dva kriterija. Preciznost slijednog mehanizma je poseban problem: budući da se željeni položaj i orijentacija postižu uzastopnim zbrajanjem položaja svih dijelova kinematskog lanca, tako se i eventualne pogreške nastale u bilo kojem dijelu zbrajaju s onima iz sljedećih dijelova i očituju u krajnjem rezultatu. Pogreške pak mogu uzrokovati mnogi čimbenici, kao što su diskretizacija i aproksimacija pri izračunavanju položaja pojedinog dijela, utjecaj naprezanja pri radu ili promjena dimenzija zbog temperaturnih razlika, pogreške u samoj izradi pojedinih elemenata stroja itd.

Navedeni problemi su u puno manjoj mjeri izraženi kod jedne druge vrste obradnih mehanizama, a to su *paralelni manipulatori*. Prvu popularniju inkarnaciju ovaj tip manipulatora doživio je 1966. godine zahvaljujući radu D. Stewarta [STE 66]. Doduše, još je 1948. godine V.E. Gough konstruirao napravu sličnih svojstava i opisao njenu primjenu u ispitivanju unutarnjih volumena guma. Njegov rad objavljen je 1962. godine [GOU 62], no nije bio osobito zapažen, pa je tek Stewartova ideja izazvala veću

pozornost stručnih krugova. Stewart je svoj manipulator upotrijebio kao postolje za simulator leta, a na njegovoj ideji se zasniva konstrukcija većine današnjih paralelnih manipulatora, koji se zbog toga često nazivaju i *Stewartovim platformama*. U uporabi su također i nazivi Stewart-Goughova platforma te, jezgrovito i prepoznatljivo, *heksapod*. Naziv 'heksapod' dolazi od same konstrukcije stroja: radi se, naime, o dvije platforme koje su povezane sa šest krakova. Jedna platforma je fiksirana (donja ili osnovna) dok je druga pokretna i na njoj se nalazi alat. Krakovi su za platforme povezani univerzalnim zglobovima koji nemaju posebnu kontrolu. Sami krakovi su izgrađeni tako da im se, nekom vrstom motora ili pneumatskog mehanizma, mogu mijenjati duljine, svakom kraku posebno. Na taj način se, mijenjajući samo duljinu tih šest krakova, može pokretna platforma postaviti u željeni položaj sa zadanom orijentacijom (slika 1.1). Krakovi heksapoda čine *paralelne kinematske lance* koji povezuju dvije platforme, pa zbog toga ova konstrukcija pripada porodici paralelnih manipulatora.



Slika 1.1 Skica Stewartove platforme (heksapoda)

U usporedbi sa slijednim mehanizmom, paralelni manipulator posjeduje čvršću mehaničku strukturu a time i visoke osnovne frekvencije. Može se dokazati, a i uočiti iz površnog uvida, da su krakovi Stewartove platforme opterećeni isključivo u aksijalnom smjeru, neovisno o opterećenju radne platforme. Budući je većina materijala u pravilu otpornija na sile u uzdužnom smjeru nego na sile savijanja, dopuštena su puno veća radna opterećenja pri obradi. Tada se postiže i bolji odnos snage prema vlastitoj masi što može umnogome olakšati konstrukcijske zahtjeve u slučajevima gdje se takva snaga iziskuje. Preciznost paralelnog manipulatora vrlo je velika, a posljedica je upravo zajedničkog utjecaja paralelnih kinematskih lanaca na položaj pokretne platforme. Osim toga, paralelni manipulator izgrađuje se iz više jednolikih dijelova (svih šest krakova jednake su konstrukcije) pa se i proces izgradnje može ekonomizirati, iako je ova vrsta strojeva još daleko od serijske proizvodnje. Radni prostor heksapoda je relativno malen i

ograničen je duljinama koje krakovi mogu poprimiti te kutevima koji se mogu postići kod zglobova na spojištima krakova i platformi. Ovakvi paralelni mehanizmi nalaze široku primjenu na mjestima gdje se zahtjeva veća snaga pri obradi, a isto tako brzina i preciznost. U situacijama gdje navedeni kriteriji dominiraju nad potrebom za, primjerice, velikim radnim prostorom, paralelni mehanizmi predstavljaju isplativu alternativu klasičnim slijednim rješenjima.

Međutim, opisana struktura paralelnih manipulatora posjeduje još neka svojstva koja ograničavaju njihovu širu primjenu. Osim već spomenutog ograničenog radnog prostora, problem upravljanja manipulatorom prilično je složen. Relativno jednostavna i elegantna idejna konstrukcija povlači za sobom komplicirane matematičke odnose. Dok se na položaj krajnjeg dijela serijskog manipulatora može utjecati neovisnim pomakom bilo koje osi konstrukcije, upravljanje paralelnim manipulatorom nije nimalo intuitivno. Svih šest krakova moraju se pomicati istovremeno (tj. istovremeno im se mora mijenjati duljina) da bi se promijenio položaj pokretne platforme. Transformacije koje se pri tomu trebaju poduzeti moraju se prethodno izračunati i zatim primijeniti pomoću neke automatske kontrole, npr. računalno upravljanim sustavom. Kod slijednih manipulatora je problem određivanja unaprijedne kinematike, tj. položaja krajnjeg dijela stroja ako znamo relativne međusobne transformacije između svakog pojedinog dijela, vrlo jednostavan i svodi se na uzastopno množenje transformacijskih matrica. Problem inverzne kinematike, dakle izračunavanja međusobnih transformacija koje rezultiraju zadanim položajem krajnjeg dijela, dosta je složeniji i potrebno je dobro projektirati konstrukciju da bi se rješenje moglo pronaći postupkom izvedivim na računalu. No za rješenje toga problema postoje algoritmi koji se odavno uspješno primjenjuju.

Kod paralelnih manipulatora situacija je obrnuta: znamo li položaj i orijentaciju pomične platforme, vrlo se jednostavno mogu izračunati duljine krakova potrebne za postizanje zadanog položaja, što se ovdje naziva inverznom kinematikom. Trebamo li, međutim, izračunati trenutnu poziciju pomične platforme na osnovi dostupnih duljina krakova, taj se problem ne može tako jednostavno riješiti. Zapravo, do danas nije otkriveno analitičko rješenje toga problema, koji se naziva i unaprijedna kinematika heksapoda, pa nam za nalaženje rješenja preostaju razne numeričke metode i približno izračunavanje. Dok za mjerenje duljina krakova paralelne strukture postoje standardizirani osjetnici (engl. *translational displacement sensors*, TDL), ne postoje osjetnici koji bi mogli biti upotrijebljeni za očitavanje položaja pomične platforme.

Zašto bi nam uopće trebalo rješenje unaprijedne kinematike heksapoda? Prilikom upravljanja manipulatorom takvo rješenje bi osiguralo precizno pozicioniranje pomične platforme u odnosu na osnovnu platformu. Upravljački sustav heksapoda na taj način dobiva dragocjenu povratnu vezu, koja pak omogućuje da Stewartova platforma bude upotrijebljena za detektiranje i mapiranje nepoznatih površina (*position-orientation sensor*). Osim dodirom, nepoznato se područje može ispitivati i kamerom – na primjer, platforma se pomiče dok ciljna točka ne bude u kadru, a zatim nam algoritam unaprijedne kinematike daje točni položaj kamere. Nisu neuobičajeni niti primjeri gdje heksapod može poslužiti kao uređaj za ručno pozicioniranje (npr. *joystick* sa šest stupnjeva slobode). Isto tako se dobiva mogućnost razvoja osjetnika vanjske sile i momenta (*force-torque sensor*) kojemu u isto vrijeme možemo kontrolirati položaj i orijentaciju. Podatak o položaju vrlo je važan za održavanje stabilnosti povratne veze u zadacima u kojima je potrebna stalna kontrola sile (*force-feedback control*), a u svakoj primjeni neobično je bitna i frekvencija uzorkovanja kojom se dobiva rješenje unaprijedne kinematike. Iako je i numeričko rješenje sasvim uporabljivo, analitičko rješenje bilo bi pogotovo korisno jer bi omogućilo detaljniji uvid u kinematska svojstva paralelnog manipulatora. Također bi se

mogla dobiti analiza osjetljivosti položaja pomične platforme na ulazne greške u duljinama krakova, te ukupan broj rješenja, tj. mogućih položaja koje pomična platforma može zauzeti.

U ovom se radu proučavaju postupci za rješavanje problema unaprijedne kinematike heksapoda. U drugom poglavlju iznosi se definicija konstrukcije Stewartove platforme te neke inačice osnovnog modela koje se nalaze u uporabi. U trećem se poglavlju analizira kinematika mehanizma te definiraju osnovni problemi inverzne i unaprijedne kinematike. Spominju se i neki problemi kod upravljivosti heksapoda i uvjeti pod kojima oni nastaju. Četvrto poglavlje, koje je središnji dio rada, posvećeno je metodama rješavanja unaprijedne kinematike. Diskutira se i o ukupnom broju rješenja, koji pak ovisi o izvedbi heksapoda. Problem se za neke pojednostavljene inačice može riješiti egzaktno (algebarski), a u općenitom slučaju rješava se približnim, numeričkim postupcima. Svaki postupak ispitan je na podacima koji su korišteni u literaturi, a razvijeno je i nekoliko vlastitih ispitnih situacija. Definirani su kriteriji učinkovitosti i dan je prikaz rezultata optimiranja. U završnom poglavlju interpretiraju se dobiveni rezultati i daju preporuke u smislu korištenja i poboljšanja postojećih postupaka.

2. Stewartova platforma (heksapod)

U ovom poglavlju prikazana je definicija konstrukcije Stewartove platforme kao i neke uobičajene inačice osnovnog modela. Definiran je i 'standardni' oblik heksapoda, matematički model na kojemu je u ovome radu ispitivana učinkovitost postupaka rješavanja unaprijedne kinematike. Na kraju je dan i kratak pregled nekih postojećih paralelnih manipulatora te opisana njihova primjena.

Stewartova platforma, u svom osnovnom obliku, sastoji se od dva dijela, pomičnoga i nepomičnoga, koji su povezani sa šest krakova (engl. *struts, rods, guide chains*). Pomični i nepomični dio zamišljeni su u obliku šesterokutnih platformi na čijim vrhovima se nalaze hvatišta krakova. Hvatišta su i na pomičnoj (engl. *payload platform, the platform*) i na nepomičnoj ili osnovnoj platformi (engl. *base platform, the base*) identična i uglavnom se ostvaruju univerzalnim (sfernim) zglobovima. Pri tome se na položaj pojedinog kraka u hvatištu ne djeluje nikakvom vanjskom (upravljačkom) silom. Osnovna platforma pričvršćena je i stacionarna te se njenim položajem definira i referentni koordinatni sustav. Duljina svakoga pojedinog kraka može se mijenjati ugrađenim aktuatorom, koji može biti različite izvedbe. Duljine krakova ipak nije moguće postaviti u proizvoljnoj kombinaciji jer krakovi čine skup zatvorenih paralelnih kinematskih lanaca. Pomična platforma spojena sa šest krakova promjenjive duljine dobiva na taj način šest stupnjeva slobode, tri rotacijska i tri translacijska, koji omogućuju njeno postavljanje u zadani položaj.

Skup položaja u koji se pokretna platforma može postaviti, mijenjajući duljine šest spojnih krakova, čini *radni prostor* heksapoda i ograničen je nekim konstrukcijskim parametrima stroja. Ograničenja su u prvom redu uzrokovana određenim minimalnim i maksimalnim vrijednostima duljina krakova. Granične vrijednosti su u pravilu jednake za svaki krak. Tu je zatim i orijentacija koju spojni krak može imati u određenom zglobu. Svaki zglob načinjen je tako da postoje ograničenja na kuteve pod kojima krakove leže u zglobu, jer i sam zglob mora biti izveden od nepokretnih dijelova koji čine nosivu konstrukciju. Još jedno ograničenje nametnuto je i fizičkom vrijednošću debljine kraka. Za zadanu debljinu krakova, koja ne mora biti konstantna po cijeloj duljini, potrebno je provjeriti da li su bilo koja dva kraka u nekoj točki preblizu jedan drugome. Pokuša li se Stewartova platforma dovesti u jednu takvu 'zabranjenu' konfiguraciju, može doći do naprezanja pokretnih dijelova pa i oštećenja cijele konstrukcije. Stoga se mora prethodno provjeriti valjanost svakog položaja u koji želimo dovesti pomičnu platformu, kao i put koji ona mora proći između dva takva valjana položaja.

2.1. Definicija konstrukcije heksapoda

Maloprije opisana Stewartova platforma definira se, u općenitom slučaju, navođenjem koordinata hvatišta krakova na osnovnoj i pomičnoj platformi. Koordinate hvatišta definiraju se u lokalnim koordinatnim sustavima. Ustaljena je konvencija da se ishodišta koordinatnih sustava nalaze u središtima platformi (barem kod platformi pravilnoga oblika), a postavljeni su tako da x i y osi leže u ravnini platformi. Koordinatni sustav osnovne platforme se najčešće definira i kao globalni koordinatni sustav, dok je lokalni sustav pomične platforme također 'pomičan' i njegov položaj i orijentacija određuju trenutno stanje heksapoda, tj poziciju pomične platforme.

Koordinate hvatišta krakova na obje platforme mogu se zadati u obliku vektora, šest za osnovnu i šest za pomičnu platformu. Ne postoji ustaljena konvencija označavanja tih vektora, no u ovom radu bit će korištene oznake ' b ' za osnovnu i ' p ' za pomičnu platformu, tako da tih dvanaest vektora dobivaju sljedeći oblik:

$$\vec{b}_i = \begin{bmatrix} b_{ix} \\ b_{iy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{p}_i = \begin{bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad 2.1$$

Ovdje valja uočiti da su z koordinate svih vektora jednake nuli, što slijedi iz pretpostavke da su sva hvatišta krakova na jednoj ravnini. Postoje neki matematički modeli koji dopuštaju da hvatišta ne moraju biti u istoj ravnini; međutim, takva se izvedba vrlo rijetko sreće u praksi i literaturi, pa se oblik s platformama koje leže u ravnini smatra dovoljno općenitim.

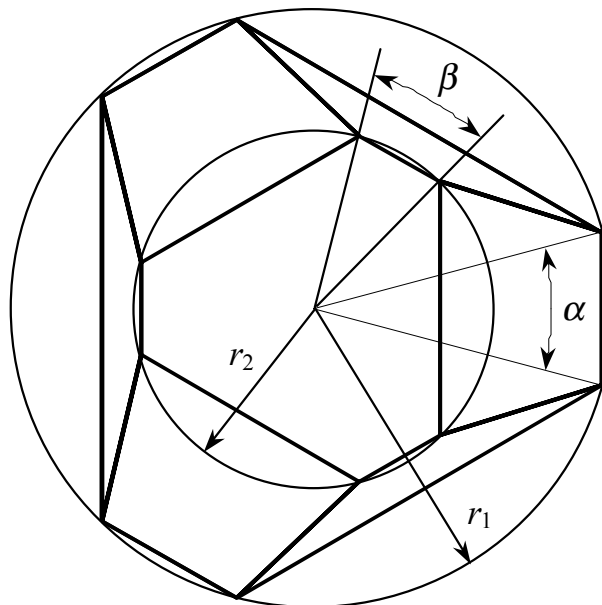
U praktičnoj primjeni se za dosljednu definiciju Stewartove platforme mora navesti još dosta parametara da bi se cjelokupna konstrukcija mogla pravilno koristiti. U prvom redu su tu još i minimalne i maksimalne vrijednosti duljina krakova koje ovise o njihovoj izvedbi i o izvedbi pogonskog dijela. Potrebno je odrediti pod kojim kutom se krak može nalaziti u odnosu na platformu zbog ograničenja mehanike zglobova. Važan parametar je u debljina krakova, kao i debljina osnovne i pomične platforme. Konačno, moraju se navesti i dimenzije alata, ispitnika ili nekog drugog obradnog sredstva koje se spaja na pomičnu platformu. Svi ti parametri potrebni su za određivanje radnog prostora heksapoda i ispravno upravljanje radom stroja. Međutim, u rješavanju problema inverzne i unaprijedne kinematike ovi parametri nemaju utjecaja pa se niti ne definiraju pri postavljanju tih problema.

2.1.1. Standardni oblik heksapoda

Premda je definicija heksapoda pomoću vektora hvatišta općenita i elegantna, iz samih koordinata se ne može dobiti jasniji uvid u geometrijsku strukturu platformi. Osim toga, potreban je relativno velik broj podataka za definiciju; ako su platforme oblikovane prema nekim geometrijskim pravilnostima, što je gotovo uvijek slučaj, bit će dovoljno navesti samo neke veličine. Želimo li ispitati učinkovitost nekoliko postupaka rješavanja unaprijedne kinematike, potrebno je definirati uniformni matematički model na kojemu će postupci biti primijenjeni. U ovom radu je za tu svrhu korištena jedna od uobičajenih inačica Stewartove platforme koja ima sljedeća svojstva:

- svih šest hvatišta krakova pojedine platforme leže na kružnici, tj. svi su jednako udaljeni od središta;
- hvatišta su na pojedinoj platformi raspoređena u tri grupe po dva hvatišta, a kut između svake grupe je 120° ;
- grupe s jedne platforme su posmahnute u odnosu na grupe s druge platforme za 60° .

Parametri koje ovaj model posjeduje su polumjeri kružnica (r_1 , r_2) te kutevi između hvatišta u grupama na osnovnoj i pomičnoj platformi (α , β).



Slika 2.1 Tlocrt 'standardnog' heksapoda

Zbog činjenice da sva hvatišta leže na kružnici određenog polumjera, za određivanje položaja pojedinoga hvatišta dovoljno je navesti kut pod kojim ono leži, a zatim se pomoću tih podataka mogu izračunati koordinate:

$$\vec{b}_i = r_1 \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{p}_i = r_2 \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad 2.2$$

Vrijednosti kuteva α_i i β_i se prethodno mogu izračunati pomoću α i β prema izrazu 2.3.

$$\alpha_i = \alpha_0 + \frac{2\pi}{3} \cdot \left[\frac{i}{2} \right] + \alpha \cdot \left(i \bmod 2 - \frac{1}{2} \right) \quad i = 1, \dots, 6 \quad 2.3$$

$$\beta_i = \alpha_0 + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot \left[\frac{i-1}{2} \right] - \beta \cdot \left(i \bmod 2 - \frac{1}{2} \right)$$

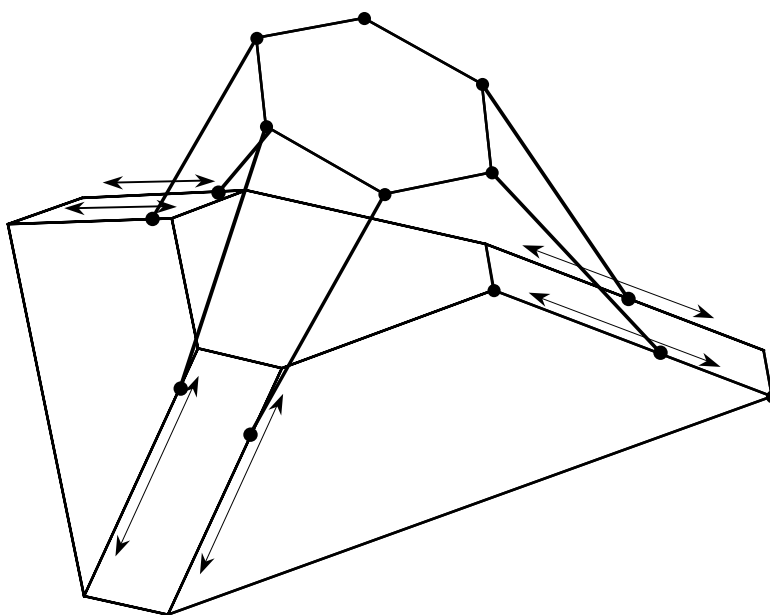
Parametar α_0 ne utječe na izgled same konstrukcije nego služi tome da se definira početni odmak hvatišta krakova od x osi lokalnog koordinatnog sustava. Na slici 2.1 prikazan je tlocrt heksapoda s uređenim skupom parametara ($\alpha = \beta = 30^\circ$, $\alpha_0 = 0^\circ$, $r_1 / r_2 = 5/3$).

2.2. Druge inačice Stewartove platforme

Stewartova platforma kakva je opisana u prethodnim poglavljima smatra se osnovnim modelom i naziva se još i platforma s *upravljivom duljinom krakova*. Krakovi u

takvih platformi imaju upravljački mehanizam pomoću kojega im se duljina može postaviti na željenu vrijednost unutar zadanih ograničenja. Sve se promjene duljina krakova moraju događati sinkronizirano jer u općenitom slučaju nije moguće mijenjati duljinu pojedinog kraka neovisno o drugima, tj. sve moguće kombinacije duljina krakova ne daju uvijek ostvarivu poziciju pomične platforme.

No osim opisanoga modela postoje i Stewartove platforme s *konstantnom duljinom krakova*. Kao što i samo ime kaže, krakovi su u ovom slučaju krute konstrukcije i nemaju mogućnost mijenjanja duljine. U prethodnom su modelu zglobovi krakova, spojna mjesta krakova s platformama, bili potpuno pasivni i nisu predstavljali dio upravljačkog mehanizma. Kod inačice s konstantnom duljinom krakova, zglobovi su krakova pokretni i postavljeni su na posebno izvedenim vodilicama (kliznik). Upravljački mehanizam ovoga heksapoda pomiče zglobove, tj. hvatišta krakova, po vodilicama i na taj način daje šest stupnjeva slobode pokretnoj platformi.



Slika 2.2 Heksapod s konstantnom duljinom krakova

Heksapod s konstantnom duljinom krakova umjesto donje platforme ima postolje na kojemu pod određenim nagibom leže vodilice. U njima su uglavljeni zglobovi koji drže krakove konstantne duljine. Pomična platforma je jednake konstrukcije kao i kod osnovnog modela i povezana je univerzalnim zglobovima s krakovima.

Dvije opisane inačice Stewartove platforme se i najčešće nalaze u primjeni. Druge kombinacije, kao na primjer modeli koji imaju istovremeno i promjenjive duljine krakova i pomična hvatišta krakova, nisu uobičajeni u praktičnoj primjeni [WAR 98].

2.2.1. Paralelni kinematski mehanizmi sa različitim brojem hvatišta na osnovnoj i pomičnoj platformi

U literaturi se, pogotovo onoj posvećenoj rješavanju unaprijedne kinematike heksapoda, često javljaju modeli koji nemaju jednak broj hvatišta (zglobova) krakova na osnovnoj i pomičnoj platformi. U stvari, radi se o konstrukcijama kod kojih se dva kraka spajaju u jednome zglobu, tj. u isto hvatište na suprotnoj platformi. Najuobičajenija

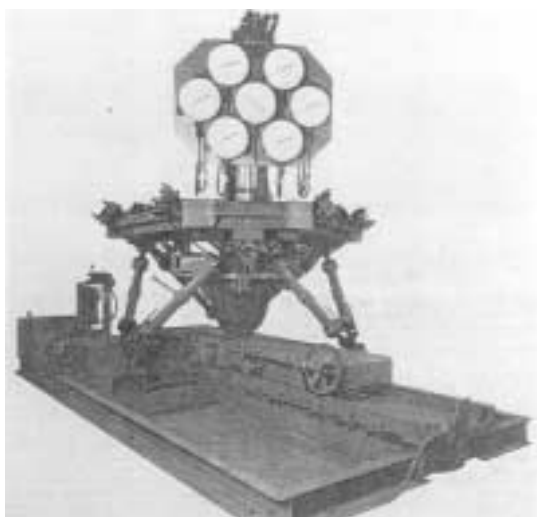
izvedba takvog mehanizma je inačica u kojoj se šest krakova spajaju iz šest zglobova na osnovnoj u samo tri zgloba na pokretnoj platformi, po dva kraka u svaki. Opisani model se obično označava kao 6-3 Stewartova platforma, po brojevima zglobova na donjoj i gornjoj platformi. Štoviše, većina originalnog Stewartovog članka se zapravo ne bavi onime što se danas naziva 'Stewartova platforma', već jednom sličnom konstrukcijom kojoj najviše odgovara model s oznakom 6-3 [MER 94].

Isto tako, poznate su i druge tvorevine koje onda dobivaju odgovarajuće oznake, kao što su 6-5, 4-5, 4-4 ili 3-3 Stewartova platforma. Osnovni model bi po toj konvenciji imao naziv '6-6 Stewartova platforma' koji se i koristi u nekim radovima, uglavnom da bi se izbjegla zabuna.

Modeli paralelnih kinematskih mehanizama s različitim brojem hvatišta imaju nešto jednostavniju unaprijednu kinematiku od osnovnoga modela. Posebno je velik broj radova koji istražuju rješenje unaprijedne kinematike za inačicu 6-3, te je za nju pronađeno dosta algoritama koji brzo vode do rješenja (npr. [LIU 93], [MCA 95]). Međutim, zglobovi u kojima se spajaju dva kraka su općenito kompliciranije konstrukcije, dopuštaju slabije maksimalno opterećenje i unose dodatna ograničenja na dozvoljene položaje krakova. O rješavanju unaprijedne kinematike za ove inačice Stewartove platforme bit će više govora u poglavlju 4.

2.3. Postojeći paralelni manipulatori

Zbog problema opisanih u uvodu, koji se javljaju pri njihovoj uporabi, paralelni manipulatori se u današnje vrijeme primjenjuju vrlo rijetko. Tek je razvojem računalne moći i specifičnih inženjerskih potreba njihovo korištenje postalo isplativo. Zadaci za koje su oni namijenjeni većinom su usko specijalizirani, pa se pojedini paralelni manipulatori izrađuju uglavnom samo za jedno područje primjene. Iako danas postoje i komercijalni modeli heksapoda, o uobičajenom serijskom proizvodnom procesu još je rano govoriti.



Slika 2.3 Goughov paralelni mehanizam



Slika 2.4 Simulator leta

Kao što je spomenuto u Uvodu, V. E. Gough je još 1948. godine konstruirao paralelni manipulator namijenjen ispitivanju unutarnjih volumena automobilskih guma (slika 2.3). No tek je Stewartov mehanizam izazvao veću pozornost i potakao napore na

području istraživanja uporabivosti takvih struktura. Primjer paralelnog mehanizma koji po uzoru na originalni Stewartov mehanizam služi u simulaciji leta prikazan je na slici 2.4.



Slika 2.5 Stewartov manipulator (NASA Goddard Space Center)



Slika 2.6 Paralelni manipulator sa 2 stupnja slobode

U američkom *Goddard Space Flight Center* (NASA) 1990. godine konstruiran je paralelni mehanizam po uzoru na Stewartovu platformu. Manipulator je 6-6 tipa (šest hvatišta i na osnovnoj i na pomičnoj platformi), a krakovi su upravljani *stepper* motorima, koji omogućuju diskretne ali precizne promjene duljina. Uređaj se koristi za proučavanje mogućnosti autonomnog montiranja dijelova u svemiru (slika 2.5).



Slika 2.7 Paralelni manipulator 'Oktaedar Hexapod', Ingersoll, SAD

Jedna vrlo pojednostavljena inačica paralelnog manipulatora konstruirana je na *The Catholic University of Amerika* (slika 2.6). Ovaj uređaj ima samo dva stupnja slobode i služi prvenstveno za demonstraciju strojeva sa zatvorenim kinematskim lancima.

Primjer komercijalnog uređaja projektiranoga po uzoru na Stewartovu platformu prikazan je na slici 2.7. Manipulator je nazvan 'Oktaedar Hexapod', a proizvod je korporacije *Ingersoll* (SAD). Razlike u odnosu na osnovni model su neplanarno raspoređeni zglobovi na osnovnoj platformi (koja se nalazi gore) te 6-3 konstrukcija, jer su po dva kraka na pomičnoj platformi spojena jednim zglobovom.

3. Kinematika Stewartove platforme

Kinematika Stewartove platforme obuhvaća nekoliko područja istraživanja koja se mogu svrstati pod isti zajednički nazivnik. Strogo uzevši, kinematika je grana fizike koja proučava odnose položaja, brzina i ubrzanja tijela, ne uzimajući u obzir pojmove kao što su masa, sila, momenti i energija gibanja. *Kinematika paralelnih manipulatora* proučava odnose između fizikalnih veličina koji su odgovorne za upravljanje i rad manipulatora, a to su konkretno duljine krakova koji povezuju platforme i položaj alata (tj. položaj pomične platforme). Za duljine krakova se još kaže i da se te veličine nalaze u *prostoru manipulatora*, dok se za položaj pomične platforme, opisan u referentnom koordinatnom sustavu, kaže da je element *kartezijevog prostora*. Problemi preslikavanja veličina između prostora manipulatora i kartezijevog prostora nazivaju se *inverznom* odnosno *unaprijednom* kinematikom manipulatora.

Osim toga, za potpuniji uvid u kinematska svojstva paralelnih manipulatora važan je i odnos *promjena* veličina u prostoru manipulatora i kartezijevom prostoru. Iako taj problem nije središnji dio ovoga rada, njemu ipak valja posvetiti dužnu pozornost. Proučavanje potonjih odnosa može nam otkriti potencijalne probleme kod upravljanja manipulatorom, kao što su manjak preciznosti i radnog otpora alata u nekim dijelovima radnog prostora te pojave tzv. *singularnih konfiguracija* o kojima će biti riječi u ovom poglavlju. Navedene kinematske osobine manipulatora moraju se detaljno analizirati 'na papiru' prije bilo kakve sklopovske izvedbe.

3.1. Inverzna kinematika

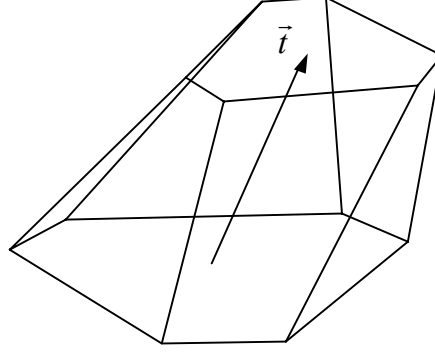
Problem inverzne kinematike Stewartove platforme svodi se na određivanje duljina krakova ako su zadani točan položaj i orijentacija pomične platforme; dakle, radi se o preslikavanju iz kartezijevoga prostora u prostor manipulatora. Za razliku od slijednih manipulatora, gdje je ovaj problem nešto teže riješiti i općenito postoji više od jednoga rješenja (nejednoznačnost problema), kod paralelnih manipulatora, pa i heksapoda, rješenje se dobiva relativno jednostavnim postupkom.

Ulazne veličine algoritma moraju određivati položaj i orijentaciju pomične platforme, tj. trenutnu konfiguraciju heksapoda. Za opis trenutne konfiguracije koriste se gotovo isključivo dva elementa: prvi je vektor odmaka (vektor translacije) pomične platforme koji spaja ishodišta referentnog i lokalnog koordinatnog sustava. Referentni (globalni) koordinatni sustav se redovito poklapa sa sustavom osnovne platforme, a ishodište mu leži u njenu središtu. Lokalni koordinatni sustav pomične platforme vezan je za istu i ishodište mu je u njezinom središtu. Vektor translacije, dakle, povezuje središta osnovne i pomične platforme (slika 3.1) i definiran je kao

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad 3.1$$

Drugi element opisa konfiguracije mora definirati orijentaciju pomične platforme, koja je matematički predstavljena elementima rotacijske matrice [PAU 81]. Ti se

elementi, međutim, daju jednostavno izračunati zadavanjem samo tri kuta koji opisuju rotaciju platforme oko zadanih osi. Rotacijska transformacija se najčešće definira slijedom rotacija oko stacionarnih osi globalnog koordinatnog sustava, x_B , y_B i z_B . Potrebno je samo odabrati kojim redoslijedom ćemo obaviti rotaciju oko navedenih osi, a za taj redoslijed postoje dva općeprihvaćena pristupa.



Slika 3.1 Prikaz vektora translacije za proizvoljni položaj standardnog heksapoda

Jedan od njih, tzv. *roll-pitch-yaw* rotacija, definira rotacijsku transformaciju u tri koraka: rotacijom oko stacionarne osi x_B za kut α , zatim rotacijom oko stacionarne osi y_B za kut β i konačno rotacijom oko stacionarne osi z_B za kut γ . Uzastopnim množenjem pojedinih rotacijskih transformacija dobivamo rezultantnu rotacijsku matricu prema 3.2.

$$\begin{aligned}
 {}^B R_{RPY} &= R(z, \gamma) R(y, \beta) R(x, \alpha) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad 3.2
 \end{aligned}$$

Oznaka u gornjem desnom uglu kod naziva vektora ili matrice koristi se za označavanje referentnog sustava u kojemu je taj objekt definiran. U ovom radu koristit će se oznaka B (*base platform*) ako se želi naglasiti da je dotični vektor ili matrica definiran u globalnom sustavu tj. sustavu osnovne platforme. Oznaka je izostavljena na mjestima gdje ne bi trebalo biti zabune oko referentnog sustava pojedinog objekta.

Drugi pristup definiranja rotacije su Eulerovi kutovi, gdje se neka rotacijska transformacija definira kao rotacija oko stacionarne osi z_B za kut ψ (psi), zatim oko stacionarne osi y_B za kut θ (theta) i potom ponovo oko stacionarne osi z_B za kut ϕ (fi). U tom slučaju se rezultantna rotacijska matrica dobiva prema izrazu 3.3.

U ovom radu korištena je, bez smanjenja općenitosti, definicija rotacije pomoću *roll-pitch-yaw* kuteva. Definiranje položaja i orijentacije pomične platforme svodi se stoga na navođenje šest veličina: tri elementa vektora translacije (t_x , t_y , t_z) i tri kuta

rotacije (α, β, γ). Ti elementi zajednički određuju općenitu transformaciju u prostoru koja se zadaje vektorom translacije i matricom rotacije.

$$\begin{aligned}
 {}^B \underline{R}_{EUL} &= \underline{R}(z, \phi) \underline{R}(y, \theta) \underline{R}(z, \psi) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad 3.3
 \end{aligned}$$

Rješenje problema inverzne kinematike predstavljaju duljine krakova koje odgovaraju zadanoj konfiguraciji. Da bi se preciznije odredio kinematski problem, definiraju se vektori krakova koji se poklapaju s pojedinim krakom i označavaju se sa $\vec{l}_i$, gdje je i indeks kraka i poprima vrijednosti od 1 do 6. Svaki vektor kraka može se predstaviti kao skalarni produkt jediničnog vektora $\vec{w}_i$, koji sadrži informaciju o smjeru kraka, i realnog broja koji predstavlja trenutnu duljinu kraka:

$$\vec{l}_i = \vec{w}_i \cdot l_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad 3.4$$

Svih šest duljinâ krakova mogu se grupirati u vektor $\vec{l}$ koji nema geometrijsko značenje, nego samo predstavlja točku u šesterodimenzijском prostoru – prostoru manipulatora:

$$\vec{l} = [l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4 \quad l_5 \quad l_6]^T. \quad 3.5$$

Zadatak je inverzne kinematike izračunati elemente vektora $\vec{l}$ pomoću zadanih podataka o položaju i orijentaciji pomične platforme. Te veličine mogu se povezati formuliranjem kinematskih lanaca koji tvore samu konstrukciju. Iz svakoga od šest zatvorenih kinematskih lanaca može se dobiti isti oblik jednadžbe kojom se definira pojedini vektor kraka (slika 3.2):

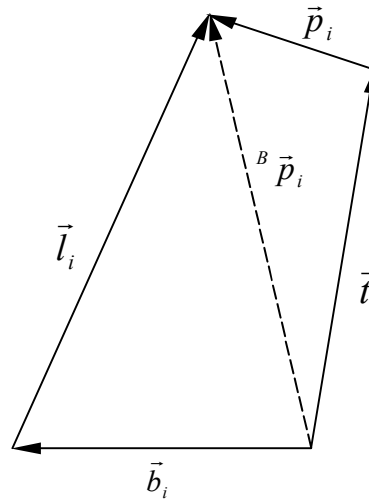
$$\vec{l}_i = -\vec{b}_i + \vec{t} + {}^B \underline{R} \cdot \vec{p}_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad 3.6$$

Dva pribrojnika na desnoj strani jednadžbe zapravo predstavljaju vektor koji povezuje ishodište referentnog koordinatnog sustava s hvatištima krakova na pomičnoj platformi, ali izražen u referentnom sustavu osnovne platforme:

$${}^B \vec{p}_i = \vec{t} + {}^B \underline{R} \cdot \vec{p}_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad 3.7$$

Izraz 3.6 se tada može napisati kao

$$\vec{l}_i = -\vec{b}_i + {}^B \vec{p}_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad 3.8$$



Slika 3.2 Prikaz zatvorenog kinematskog lanca jednoga kraka heksapoda

S obzirom da su svi elementi na desnoj strani jednadžbe poznati, može se izračunati svih šest vektora krakova heksapoda. Međutim, ako su nam za rješenje potrebne samo duljine tih krakova, dovoljno je izračunati te vrijednosti kao euklidske udaljenosti točaka u prostoru – hvatišta istoga kraka na osnovnoj i pomičnoj platformi:

$$l_i = D(\vec{b}_i, {}^B\vec{p}_i), \quad i = 1, \dots, 6$$

$$l_i = \sqrt{({}^B p_{ix} - b_{ix})^2 + ({}^B p_{iy} - b_{iy})^2 + ({}^B p_{iz} - b_{iz})^2} = \sqrt{({}^B\vec{p}_i - \vec{b}_i) \cdot ({}^B\vec{p}_i - \vec{b}_i)} \quad 3.9$$

Izračunavanje inverzne kinematike je prilično jednostavan ali vrlo važan postupak. Pomoću inverzne kinematike odvija se upravljanje radom heksapoda, izračunom potrebnih duljina krakova za zadani položaj pomične platforme. Za dovoljan broj točaka na putanji pomične platforme određuju se duljine krakova dok se ostale točke interpoliraju. Dovoljan broj točaka ovdje znači da trebamo postići željenu preciznost i da ne smijemo izaći iz dopuštenih ograničenja konstrukcije (npr. minimalne i maksimalne duljine krakova). Postupkom inverzne kinematike se također određuje radni prostor manipulatora gdje se za svaku točku određuje je li dohvatljiva manipulatoru s zadanim parametrima, uzimajući u obzir i stupanj moguće orijentacije pomične platforme u svakoj točki. Proces uzastopnog izračunavanja rješenja inverzne kinematike može biti i dugotrajan, pa je taj postupak moguće i prikladno paralelizirati za izvođenje na računalnom sustavu s više procesora. Osnovna ideja paralelizacije je izračun rješenja za svaki krak posebno, budući da rješenja ne ovise jedno o drugome [GOS 93].

3.2. Unaprijedna kinematika

Definicija problema unaprijedne kinematike heksapoda (engl. *forward kinematics*, *forward displacement analysis* - FDA) može se navesti kako slijedi: uz zadane duljine krakova Stewartove platforme treba pronaći položaj i orijentaciju pomične platforme. Pretpostavlja se da su zadane sve veličine koje opisuju dimenzije heksapoda, u ovom

slučaju koordinate hvatišta krakova na osnovnoj i pomičnoj platformi. Hvatišta svih krakova navedena su u lokalnim koordinatnim sustavima (onima od osnovne i pomične platforme) tako da čine konstantne veličine. Rješenje treba biti dano u koordinatnom sustavu osnovne platforme koji je nepomičan; u sustavu pomične platforme rješenje je, naravno, trivijalno.

Prije pristupanja samom postupku rješavanja zadanog problema unaprijedne kinematike, potrebno je problem matematički formulirati i utvrditi mjeru valjanosti nekog proizvoljnog rješenja. Učinkovitost postupaka optimiranja može ovisiti o načinu na koji ćemo postaviti problem, što će i biti zorno prikazano u nastavku ovoga rada. Definicijom problema se zapravo definira jedinstvena funkcija koja daje ocjenu valjanosti rješenja, a veličina koju ona vraća najčešće opisuje pogrešku trenutnog, pretpostavljenog rješenja u odnosu na stvarno. Tako definirana funkcija se tada optimira nekim od postupaka, pri čemu je cilj pronaći rješenje za koji ona vraća najmanju vrijednost (najmanju grešku). Neke metode optimiranja mogu biti više 'ugodene' za pojedini oblik funkcije koju se optimira, pa su u ovom radu ispitane sve kombinacije postupaka optimiranja i zadanih funkcija. 'Dobrim' postavljanjem problema može se u velikoj mjeri skratiti vrijeme pronalaženja rješenja, a u nekim slučajevima i omogućiti samo pronalaženje. U sljedećem odjeljku opisani su različiti načini predstavljanja problema unaprijedne kinematike i njima pripadne funkcije greške. Svaki način opisan je s dva elementa - funkcijom greške i pripadnim vektorom koji sadrži sve varijable funkcije greške - koji će biti jednoznačno definirani poradi lakšeg referenciranja u daljem tekstu.

3.2.1. Položaj i orijentacija pomične platforme kao varijable

Oblik rješenja problema unaprijedne kinematike mora biti takav da se pomoću njega može jednoznačno odrediti točan položaj i orijentacija pomične platforme u koordinatnom sustavu osnovne platforme. Sasvim je logično uzeti upravo veličine koje opisuju položaj i orijentaciju kao varijable funkcije greške. Velika većina postupaka optimiranja koji se mogu naći u literaturi koristi ovaj pristup.

Neka je struktura Stewartove platforme opisana koordinatama hvatišta krakova. Definirano je šest vektora (3.10) za osnovnu ($\vec{b}_i$) i šest za pomičnu platformu ($\vec{p}_i$). Odgovarajući vektori su zadani u lokalnim koordinatnim sustavima, kao što je opisano u poglavlju 2.1.

$$\vec{b}_i = \begin{bmatrix} b_{ix} \\ b_{iy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{p}_i = \begin{bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad 3.10$$

Duljine krakova predstavljene su kao šest elemenata vektora $\vec{l}$. Položaj tj. pomak pomične platforme u odnosu na osnovnu opisuje se translacijskim vektorom $\vec{t}$, dok je orijentacija pomične platforme određena pomoću tri kuta *roll-pitch-yaw* rotacije. Elementi vektora koji će predstavljati jedno rješenje problema optimiranja u ovom slučaju identični su definiciji translacije i rotacije pomične platforme:

$$\vec{X} = [t_x \quad t_y \quad t_z \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma]^T. \quad 3.11$$

Kakav god se prikaz koristio za vektor rješenja, uvijek je potrebno omogućiti jednoznačno preslikavanje toga vektora u navedeni oblik (položaj + rotacija). Potrebno je još definirati i funkciju koja će dati ocjenu valjanosti pojedinoga rješenja. Ocjena rješenja dobiva se uvrštavanjem položaja i rotacije koju rješenje daje (u ovom prikazu je to identično) u jednadžbe koje smo koristili za izračunavanje inverzne kinematike heksapoda. Duljine krakova, koje su ovdje zadane veličine, dobivaju se pomoću formule 3.9 za euklidsku udaljenost hvatišta za svaki krak posebno. Da bi se izrazila ukupna pogreška (razlika između zadanih i izračunatih duljina nogu), potrebno je zbrojiti kvadrate pogrešaka za svaki krak:

$$f = \sum_{i=1}^6 \left(D(\vec{b}_i, {}^B\vec{p}_i)^2 - l_i^2 \right)^2. \quad 3.12$$

Da bi se izbjegli problemi pri označavanju ove i drugih funkcija pogrešaka u ovome radu, za konkretni pristup jednoznačno se definiraju funkcija i vektor varijabli sa indeksom '1' prema 3.13.

$$F_1 = \sum_{i=1}^6 \left[\left({}^B p_{ix} - b_{ix} \right)^2 + \left({}^B p_{iy} - b_{iy} \right)^2 + \left({}^B p_{iz} - b_{iz} \right)^2 - l_i^2 \right]^2 \quad 3.13$$

$$\vec{X}_1 = [t_x \quad t_y \quad t_z \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma]^T$$

Postupak pronalaženja rješenja unaprijedne kinematike treba naći takav vektor za koji funkcija 3.12 vraća vrijednost 0, tj. u stvarnoj implementaciji neku prethodno definiranu najveću dozvoljenu vrijednost greške. Dobivena funkcija sadrži nelinearne trigonometrijske članove (elementi rotacijske matrice) i zbog toga je teško opisati njeno ponašanje. Međutim, u isto vrijeme je i derivabilna u svakoj točki što omogućava primjenu nekih metoda optimiranja koje koriste to svojstvo ciljne funkcije. Odgovarajuće parcijalne derivacije nalaze se u Prilogu A.

3.2.2. Kanonski oblik jednadžbi unaprijedne kinematike

Kao varijable u rješavanju unaprijedne kinematike gotovo se isključivo koriste položaj i orijentacija pomične platforme [MER 92]. Međutim, funkcija koju valja optimirati u tom slučaju posjeduje velik stupanj nelinearnosti, što može otežati konvergenciju. Isto tako, iz oblika jednadžbi u kojima se nalaze transcendentne trigonometrijske funkcije nije jednostavno (a u ovom slučaju niti moguće) odrediti ukupan broj rješenja. No zadani problem moguće je izraziti i pomoću jednadžbi koje imaju polinomski oblik, iako uz povećan broj varijabli, tj. dimenziju rješenja [DAS 94].

Stewartova platforma definirana je vektorima hvatišta krakova osnovne ($\vec{b}_i$) i pomične platforme ($\vec{p}_i$). Duljine krakova zadane su kao elementi šesterodimenzijskog vektora $\vec{l}$. Translaciju pomične platforme u odnosu na osnovnu i dalje opisujemo vektorom $\vec{t}$ (3.1). Matricu koja opisuje rotaciju pomične platforme definiramo kao

$${}^B \underline{R} = [\vec{n} \quad \vec{o} \quad \vec{a}] = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}. \quad 3.14$$

Na taj način za opis rotacijske transformacije ne koristimo tri nego čak devet veličina. Međutim, vrijednosti tih veličina nisu međusobno neovisne, što će biti iskorišteno u smanjivanju broja varijabli. Odnosi elemenata vektora $\vec{n}$, $\vec{o}$ i $\vec{a}$ definirani su sljedećim jednadžbama:

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1, \quad 3.15$$

$$\vec{o} \cdot \vec{o} = o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 = 1, \quad 3.16$$

$$\vec{n} \cdot \vec{o} = n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z = 0, \quad 3.17$$

$$\vec{a} = \vec{n} \times \vec{o}. \quad 3.18$$

Vektorska jednadžba koja opisuje zatvoreni kinematski lanac po svakom od šest krakova tada glasi

$$\begin{aligned} \vec{l}_i &= \vec{t} + {}^B \underline{R} \cdot \vec{p}_i - \vec{b}_i = \\ &= \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{ix} \\ b_{iy} \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad 3.19$$

gdje su $\vec{l}_i$ vektori krakova (poklapaju se identično s pojedinim krakom) u koordinatnom sustavu osnovne platforme, a indeks $i = 1, \dots, 6$. Koristeći ovaj prikaz, možemo napisati jednadžbu udaljenosti hvatišta za svaki od šest krakova:

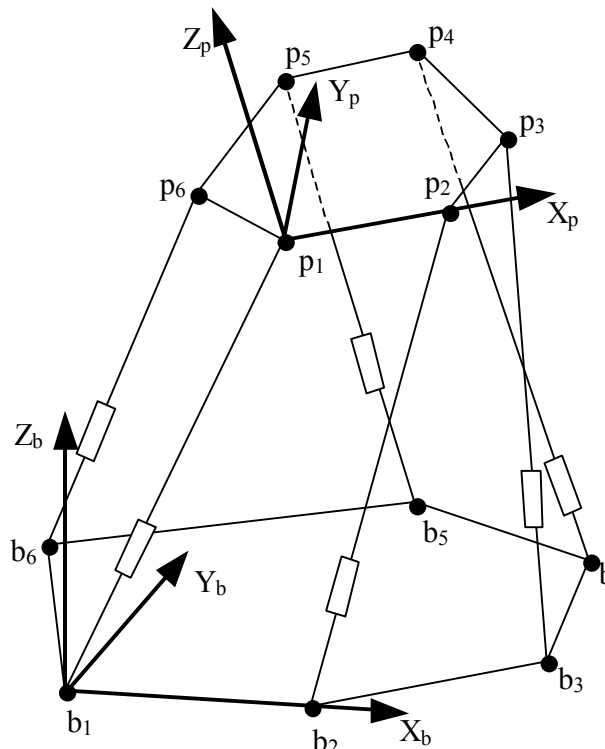
$$(n_x p_{ix} + o_x p_{iy} + t_x - b_{ix})^2 + (n_y p_{ix} + o_y p_{iy} + t_y - b_{iy})^2 + (n_z p_{ix} + o_z p_{iy} + t_z)^2 = l_i^2, \quad 3.20$$

koja, koristeći ograničenja iz jednadžbi 3.15-3.18, prelazi u sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} (t_x^2 + t_y^2 + t_z^2) + 2p_{ix}(n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z) + 2p_{iy}(o_x t_x + o_y t_y + o_z t_z) \\ - 2b_{ix}(t_x + p_{ix} n_x + p_{iy} o_x) - 2b_{iy}(t_y + p_{ix} n_y + p_{iy} o_y) + b_{ix}^2 + b_{iy}^2 + p_{ix}^2 + p_{iy}^2 - l_i^2 = 0 \end{aligned} \quad 3.21$$

Osim ovih šest jednadžbi (indeks $i = 1, \dots, 6$), moraju se uzeti u obzir još i navedene tri (3.15-3.17) koje su posljedica međusobnih odnosa vektora $\vec{n}$ i $\vec{o}$. To nam daje skup od devet jednadžbi drugog stupnja s devet nepoznanica ($t_x, t_y, t_z, n_x, n_y, n_z, o_x, o_y, o_z$), jer su elementi vektora $\vec{a}$ automatski eliminirani. Da bi se riješila unaprijedna kinematika heksapoda, potrebno je naći vektor rješenja koji istovremeno zadovoljava svih devet jednadžbi. Međutim, ovakav oblik jednadžbi može se dodatno pojednostaviti pažljivim odabirom koordinatnih sustava osnovne i pomične platforme. Taj odabir utjecat će na iznose konstantnih čimbenika, tj. elemenata vektora hvatišta u lokalnim koordinatnim sustavima. Na taj način pokušat ćemo dobiti 'linearniji' oblik jednadžbi eliminirajući neke od kvadratnih produkata varijabli.

Bez gubitka općenitosti možemo promijeniti položaje ishodišta lokalnih koordinatnih sustava osnovne i pomične platforme, koji su dosada ležali u središtima platformi. Odaberimo stoga jedan od krakova, neka to bude onaj sa indeksom 1, i postavimo ishodišta sustavâ u hvatište kraka na odgovarajućoj platformi, tj. tamo gdje se nalazi zglobov. Neke su x osi tih sustavâ usmjerene prema hvatištu drugoga kraka (sa indeksom 2) na odgovarajućoj platformi, a y osi neke leže u ravnini platforme, okomito na x osi. Preostale z osi tada će biti usmjerene okomito na ravninu platformi (slika 3.3).



Slika 3.3 Oznake hvatišta krakova i koordinatni sustavi osnovne i pomične platforme

Ovakvim izborom koordinatnih sustava hvatište prvoga kraka na osnovnoj platformi leži u ishodištu, a hvatište drugoga kraka na x osi. Slična situacija vrijedi i kod pomične platforme, što daje sljedeće:

$$b_{1x} = b_{1y} = p_{1x} = p_{1y} = b_{2y} = p_{2y} = 0. \quad 3.22$$

Uvrstimo li vrijednosti konstanti iz prethodne jednadžbe u 3.21 za $i=1$, dobivamo

$$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = l_1^2, \quad 3.23$$

što je očito jer vektor translacije $\vec{t}$ uz sadašnje koordinatne reference postaje identičan vektoru prvoga kraka $\vec{l}_1$. Koristeći 3.23, jednadžba 3.21 se može svesti na

$$\begin{aligned} & p_{ix}(n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z) + p_{iy}(o_x t_x + o_y t_y + o_z t_z) \\ & - b_{ix}(t_x + p_{ix} n_x + p_{iy} o_x) - b_{iy}(t_y + p_{ix} n_y + p_{iy} o_y) = K_i \end{aligned} \quad 3.24$$

za $i = 2, \dots, 6$ gdje su konstante K_i jednake

$$K_i = \frac{(l_i^2 - b_{ix}^2 - b_{iy}^2 - p_{ix}^2 - p_{iy}^2 - l_1^2)}{2}. \quad 3.25$$

Ako na isti način uvrstimo vrijednosti iz 3.22 u jednadžbu 3.24 za $i = 2$, jednadžba za drugi krak postaje

$$p_{2x}(n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z) - b_{2x}(t_x + p_{2x} n_x) = K_2, \quad 3.26$$

ili

$$n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z = A_1 t_x + A_2 n_x + A, \quad 3.27$$

gdje su konstante A_1 , A_2 i A jednake

$$\begin{aligned} A_1 &= b_{2x} / p_{2x}, \\ A_2 &= b_{2x}, \\ A &= K_2 / p_{2x}. \end{aligned} \quad 3.28$$

Treba napomenuti da p_{2x} mora biti različit od nule, tj. hvatišta prvoga i drugoga kraka na pomičnoj platformi ne smiju padati u istu točku. Uvrstimo li izraze 3.27 i 3.28 u prethodno dobiveni 3.24, jednadžba za treći krak ($i = 3$) se svodi na

$$\begin{aligned} p_{3x}(A_1 t_x + A_2 n_x + A) + p_{3y}(o_x t_x + o_y t_y + o_z t_z) \\ - b_{3x}(t_x + p_{3x} n_x + p_{3y} o_x) - b_{3y}(t_y + p_{3x} n_y + p_{3y} o_y) = K_3 \end{aligned} \quad 3.29$$

ili

$$o_x t_x + o_y t_y + o_z t_z = B_1 t_x + B_2 n_x + B_3 o_x + B_4 t_y + B_5 n_y + B_6 o_y + B, \quad 3.30$$

dok su konstantni članovi definirani prema 3.31.

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{b_{3x} p_{2x} - b_{2x} p_{3x}}{p_{2x} p_{3y}}, & B_2 &= \frac{(b_{3x} - b_{2x}) p_{3x}}{p_{3y}}, \\ B_3 &= b_{3x}, & B_4 &= b_{3y} / p_{3y}, \\ B_5 &= \frac{b_{3y} p_{3x}}{p_{3y}}, & B_6 &= b_{3y}, \\ B &= \frac{K_3 p_{2x} - K_2 p_{3x}}{p_{2x} p_{3y}}. \end{aligned} \quad 3.31$$

Iz prethodnih izraza se može uočiti da p_{3y} treba biti različit od nule, što znači da hvatište trećega kraka ne smije biti na istom pravcu kao i prva dva. Ovaj uvjet ne smanjuje općenitost konstrukcije manipulatora jer ćemo u svakoj valjanoj Stewartovoj

platformi uvijek naći tri točke hvatišta koje ne leže na istom pravcu, bilo na osnovnoj ili na pomičnoj platformi. Nepostojanje tri nekolinearne točke hvatišta značilo bi da je svih šest zglobova na istome pravcu, što bi prouzročilo dodatni neupravljivi stupanj slobode i uzrokovalo da manipulator izgubi svoju svrhu.

Koristeći izraze 3.27 do 3.31 u jednadžbi 3.24 za $i = 4, 5, 6$, preostale tri jednadžbe krakova svode se na sljedeći linearni oblik:

$$C_{i1}t_x + C_{i2}n_x + C_{i3}o_x + C_{i4}t_y + C_{i5}n_y + C_{i6}o_y = C_i, \quad 3.32$$

uz sljedeće vrijednosti konstantnih članova:

$$\begin{aligned} C_{i1} &= A_1 p_{ix} + B_1 p_{iy} - b_{ix}, \\ C_{i2} &= A_2 p_{ix} + B_2 p_{iy} - b_{ix} p_{ix}, \\ C_{i3} &= B_3 p_{iy} - b_{ix} p_{iy}, \\ C_{i4} &= B_4 p_{iy} - b_{iy}, \\ C_{i5} &= B_5 p_{iy} - b_{iy} p_{ix}, \\ C_{i6} &= B_6 p_{iy} - b_{iy} p_{iy}, \\ C_i &= K_i - \frac{K_2}{p_{2x}} p_{ix} - \frac{K_3 p_{2x} - K_2 p_{3x}}{p_{2x} p_{3y}} p_{iy}. \end{aligned} \quad 3.33$$

Naposljetku dolazimo do devet jednadžbi (3.15, 3.16, 3.17, 3.23, 3.27, 3.30, 3.32) koje istovremeno moraju biti zadovoljene za neko rješenje unaprijedne kinematike. Navedenih devet izraza (3.34 - 3.42) predstavljaju kanonski oblik jednadžbi unaprijedne kinematike heksapoda:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1, \quad 3.34$$

$$o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 = 1, \quad 3.35$$

$$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = l_1^2, \quad 3.36$$

$$n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z = 0, \quad 3.37$$

$$n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z = A_1 t_x + A_2 n_x + A, \quad 3.38$$

$$o_x t_x + o_y t_y + o_z t_z = B_1 t_x + B_2 n_x + B_3 o_x + B_4 t_y + B_5 n_y + B_6 o_y + B, \quad 3.39$$

$$C_{41}t_x + C_{42}n_x + C_{43}o_x + C_{44}t_y + C_{45}n_y + C_{46}o_y = C_4, \quad 3.40$$

$$C_{51}t_x + C_{52}n_x + C_{53}o_x + C_{54}t_y + C_{55}n_y + C_{56}o_y = C_5, \quad 3.41$$

$$C_{61}t_x + C_{62}n_x + C_{63}o_x + C_{64}t_y + C_{65}n_y + C_{66}o_y = C_6. \quad 3.42$$

Od ovih devet jednadžbi tri su linearne a šest ih je kvadratnih, što daje ukupan (najveći mogući) broj rješenja od 2^6 ili 64. Ta rješenja se kod heksapoda javljaju u parovima kod kojih je položaj pomične platforme simetričan u odnosu na osnovnu platformu, tj. gdje je z koordinata pomične platforme pozitivna ili negativna. Takva rješenja imaju, naravno, samo matematičko značenje jer su na vrijednosti koordinata položaja i orijentacije pomične platforme postavljena neka realna i fizička ograničenja (samo pozitivne vrijednosti koordinata, minimalne i maksimalne vrijednosti duljine

krakova kao i zakretnih kutova). Isto tako, u obzir će dolaziti samo rješenja koja nemaju imaginarnih članova, koji se također mogu pojaviti pri rješavanju zadanog sustava.

$$\begin{aligned}
F_2 = & \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1\right)^2 + \left(o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 - 1\right)^2 + \left(t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 - l_1^2\right)^2 \\
& + \left(n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z\right)^2 + \left(n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z - A_1 t_x - A_2 n_x - A\right)^2 \\
& + \left(o_x t_x + o_y t_y + o_z t_z - B_1 t_x - B_2 n_x - B_3 o_x - B_4 t_y - B_5 n_y - B_6 o_y - B\right)^2 \\
& + \left(C_{41} t_x + C_{42} n_x + C_{43} o_x + C_{44} t_y + C_{45} n_y + C_{46} o_y - C_4\right)^2 \\
& + \left(C_{51} t_x + C_{52} n_x + C_{53} o_x + C_{54} t_y + C_{55} n_y + C_{56} o_y - C_5\right)^2 \\
& + \left(C_{61} t_x + C_{62} n_x + C_{63} o_x + C_{64} t_y + C_{65} n_y + C_{66} o_y - C_6\right)^2 \\
\vec{X}_2 = & \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & o_x & o_y & o_z & t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Iz navedenih devet jednadžbi definira se jedna funkcija kao zbroj kvadrata svih izraza s lijeve strane kanonskih jednadžbi. Ta funkcija dobiva ulogu funkcije cilja u nekom od odabranih postupaka optimiranja. U daljem tekstu ova je funkcija, kao i pripadni vektor, označena indeksom '2' (3.43), a pripadne parcijalne derivacije mogu se naći u Prilogu A.

3.2.3. Preslikavanje vektora položaja i orijentacije i kanonskog oblika

Da bi se sustav jednadžbi 3.34 - 3.42 mogao primijeniti u rješavanju unaprijedne kinematike, potrebno je još definirati preslikavanje koje će povezati položaj i orijentaciju pomične platforme sa devet varijabli kanonskog oblika. Vrijednosti parametara kanonske transformacije opisane u daljem tekstu odnose se na 'standardni' heksapod sa navedenim parametrima (poglavlje 2.1.1, slika 2.1); no one će biti različite i za drugačiji odabir indeksa hvatišta na platformama u odnosu na polazišni koordinatni sustav. Za svaku posebnu izvedbu potrebno je te vrijednosti iznova definirati. U ostatku poglavlja za oznake dane u koordinatnim sustavima koji se koriste kod kanonskog oblika jednadžbi (slika 3.3) korišten je indeks 'K'.

Definirajmo prvo transformaciju koja preslikava koordinatni sustav iz središta platforme u hvatište prvoga kraka. Rotacijska matrica tog preslikavanja za definirani standardni heksapod je

$$\underline{R}_K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

Translacijski vektor je za obje platforme jednak vektoru hvatišta prvoga kraka u *polazišnim* koordinatnim sustavima ($\vec{b}_1$ za osnovnu i $\vec{p}_1$ za pomičnu platformu). Koordinate hvatišta krakova koje čine konstantne elemente u kanonskom obliku jednadžbi trebaju se izračunati sukladno toj transformaciji.

Pretvorba zadanog položaja i orijentacije u kanonski oblik varijabli je jednostavnija i radi se na sljedeći način: pomoću tri kuta rotacije izračunava se rotacijska

matrica ${}^B \underline{R}$ prema izrazu 3.2 ili 3.3. Matrica koja opisuje rotacijsko preslikavanje pomične platforme u odnosu na osnovnu prema kanonskim koordinatnim sustavima ${}^B \underline{R}_K$ tada je jednaka

$${}^B \underline{R}_K = \underline{R}_K \cdot {}^B \underline{R} \cdot \underline{R}_K^{-1} \quad 3.45$$

gdje je

$$\underline{R}_K^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3.46$$

Translacijski vektor pomične platforme u kanonskim koordinatnim sustavima $\vec{t}_K$ jednak je vektoru prvoga kraka $\vec{l}_1$ i računa se kao

$$\vec{t}_K = \underline{R}_K (\vec{t} - \vec{b}_1 + {}^B \underline{R} \cdot \vec{p}_1) \quad 3.47$$

gdje je $\vec{t}$ translacijski vektor pomične platforme u polazišnom koordinatnom sustavu (ishodišta u središtu platformi). Pretvorba položaja i orijentacije u kanonski oblik se svodi na izračunavanje izraza 3.45 i 3.47, iz čijih se rezultata dobiva svih devet varijabli, tj. $n_x, n_y, n_z, o_x, o_y, o_z$ iz matrice ${}^B \underline{R}_K$, a t_x, t_y , i t_z kao elementi vektora $\vec{t}_K$.

Pretvorba varijabli kanonskoga oblika u položaj i orijentaciju pomične platforme je nešto složenija od prethodnoga postupka jer uključuje izračunavanje kuteva rotacije iz rotacijske matrice. Iz zadanih veličina (devet varijabli) trebaju se prvo izračunati elementi vektora $\vec{a}$ kao vektorski produkt prema 3.18 te se na taj način dobivaju svi elementi rotacijske matrice ${}^B \underline{R}_K$. Potom računamo elemente matrice ${}^B \underline{R}$ kao

$${}^B \underline{R} = \underline{R}_K^{-1} \cdot {}^B \underline{R}_K \cdot \underline{R}_K \quad 3.48$$

Iz elemenata te matrice trebamo dobiti kutove orijentacije pomične platforme, bilo po *roll-pitch-yaw* rotaciji ili po Euleru. Taj postupak je već poznat kao dio problema rješavanja inverzne kinematike slijednih mehanizama. Za izračunavanje kuteva koristit će se funkcija $\text{atan2}(x, y)$ koja računa arcus tangens kvocijenta dva parametra (x/y) ali koja istovremeno uzima u obzir i predznake obaju argumenata da bi odredila u kojem kvadrantu se nalazi rješenje. Ta se funkcija može naći u gotovo svim bibliotekama funkcija raznih programskih jezika od Fortrana do C-a pa ovdje neće biti potanko opisana, a više detalja o toj funkciji kao i o samom postupku računanja kuteva može se naći u [PAU 81].

Izračunavanje *roll-pitch-yaw* kuteva odvija se u nekoliko koraka. Za kut γ , koji predstavlja rotaciju oko z osi, dobivamo dva rješenja:

$$\gamma_1 = \text{atan2}(n_y, n_x); \quad \gamma_2 = \gamma_1 + 180^\circ. \quad 3.49$$

S obzirom da u postupku rješavanja unaprijedne kinematike uvijek znamo početno (pretpostavljeno) rješenje, možemo uzeti onu vrijednost γ koja je bliža početnoj vrijednosti. Ta se pretpostavka može dodatno provjeriti nakon izračunavanja preostala dva kuta. Kutevi α i β koji predstavljaju rotaciju oko x odnosno y osi računaju se kao

$$\begin{aligned}\beta &= \text{atan2}(-n_z, n_x \cos \gamma + n_y \sin \gamma) \\ \alpha &= \text{atan2}(a_x \sin \gamma - a_y \cos \gamma, -o_x \sin \gamma + o_y \cos \gamma)\end{aligned}\quad 3.50$$

Na sličan se način računaju Eulerovi kutovi, pri čemu također moramo odabrati jedno od dva moguća rješenja za kut ϕ :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \text{atan2}(a_x, a_y), \quad \phi_2 = \phi_1 + 180^\circ, \\ \theta &= \text{atan2}(a_x \cos \phi + a_y \sin \phi, a_z), \\ \psi &= \text{atan2}(-n_x \sin \phi + n_y \cos \phi, -o_x \sin \phi + o_y \cos \phi)\end{aligned}\quad 3.51$$

Još nam je samo preostao vektor translacije pomične platforme kojega dobivamo prema izrazu 3.52.

$$\vec{t} = \underline{R}_K^{-1} \cdot \vec{t}_K - {}^B \underline{R} \cdot \vec{p}_1 + \vec{b}_1 \quad 3.52$$

Pretvorbu položaja i orijentacije u kanonski oblik koristit ćemo na početku postupka rješavanja gdje nam je početno pretpostavljeno rješenje zadano u tom obliku, dok će nam inverzno preslikavanje poslužiti pri vraćanju dobivenoga konačnog rješenja u polazišnu domenu.

3.2.4. Reducirani kanonski oblik jednadžbi

Za učinkovito rješavanje sustava jednadžbi (3.34 - 3.42) poželjno je sustav dodatno pojednostaviti, npr. eliminacijom nekih od devet varijabli, a da se struktura izraza u isto vrijeme previše ne zakomplicira. Dobro mjesto za početak eliminacije bile bi tri linearne jednadžbe 3.40 - 3.42 u kojima se nalazi šest različitih varijabli. Tri varijable od tih šest moglo bi se prikazati kao linearne kombinacije preostale tri, a zatim bi se dobiveni izrazi uvrstili u prethodnih šest jednadžbi. Pitanje je koje tri varijable odabrati za eliminaciju? U općenitom slučaju neće biti moguće odabrati bilo koje tri od šest varijabli $t_x, n_x, o_x, t_y, n_y, o_y$ [DAS 94]. Potrebno je pronaći barem jednu, jer može ih biti i više, nesusingularnu podmatricu dimenzija 3×3 unutar matrice linearnih koeficijenata $[C_{ij}]$. Tada se sustav može riješiti po nepoznanicama čiji koeficijenti tvore nesusingularnu podmatricu, čime se eliminiraju tri varijable. Ovaj odabir nepoznanica ovisi o konstrukciji Stewartove platforme tj. o odnosima koordinata hvatišta krakova osnovne i pomične platforme.

U slučaju standardnog oblika heksapoda opisanog u poglavlju 2.1.1, stupci $[C_{i4}]$ i $[C_{i6}]$ matrice koeficijenata su međusobno linearno ovisni, što onemogućava istovremeni izbor varijabli t_y i o_y za eliminaciju. U ovoj redukciji izabrane su za eliminaciju varijable t_x, t_y i n_y , koje će biti zamijenjene linearnim kombinacijama preostale tri varijable:

$$\begin{aligned}
t_x &= D_{11}n_x + D_{12}o_x + D_{13}o_y + D_1, \\
t_y &= D_{21}n_x + D_{22}o_x + D_{23}o_y + D_2, \\
n_y &= D_{31}n_x + D_{32}o_x + D_{33}o_y + D_3.
\end{aligned}
\tag{3.53}$$

Nakon što smo zamijenili gornje tri varijable sa ovim linearnim kombinacijama, dobili smo sustav sa šest nepoznanica od preostalih šest jednakosti. Stupanj potencija varijabli je i dalje ostao kvadratni, što može biti potencijalno korisno u postupcima optimiranja. Već sada možemo definirati novu funkciju cilja prema 3.54.

$$\begin{aligned}
F_3 &= (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1)^2 + (o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 - 1)^2 + (t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 - l_1^2)^2 \\
&\quad + (n_x o_x + n_y o_y + n_z o_z)^2 + (n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z - A_1 t_x - A_2 n_x - A)^2 \\
&\quad + (o_x t_x + o_y t_y + o_z t_z - B_1 t_x - B_2 n_x - B_3 o_x - B_4 t_y - B_5 n_y - B_6 o_y - B)^2 \\
\vec{X}_3 &= [n_x \quad n_z \quad o_x \quad o_y \quad o_z \quad t_z]^T
\end{aligned}
\tag{3.54}$$

Prije računanja funkcije potrebno je iskoristiti izraze 3.53 kako bismo dobili vrijednosti tri eliminirane varijable. Redukcija se, međutim, ovdje ne mora zaustaviti jer postoji mogućnost za eliminaciju i drugih nepoznanica. Uvrstimo li izraze za t_x , t_y i n_y u desnu stranu jednakosti 3.39, dobivamo

$$o_x t_x + o_y t_y + o_z t_z = E_1 n_x + E_2 o_x + E_3 o_y + E, \tag{3.55}$$

gdje su konstantni članovi izraza jednaki

$$\begin{aligned}
E_1 &= B_2 + B_1 D_{11} + B_4 D_{21} + B_5 D_{31}, \\
E_2 &= B_3 + B_1 D_{12} + B_4 D_{22} + B_5 D_{32}, \\
E_3 &= B_6 + B_1 D_{13} + B_4 D_{23} + B_5 D_{33}, \\
E &= B + B_1 D_1 + B_4 D_2 + B_5 D_3.
\end{aligned}
\tag{3.56}$$

Eliminiranjem varijabli n_z , i o_z iz izraza 3.34, 3.35 i 3.37 dobiva se sljedeća jednakost:

$$(n_x o_x - n_y o_x)^2 - (n_x^2 + n_y^2 + o_x^2 + o_y^2) + 1 = 0. \tag{3.57}$$

Isto tako, eliminacija n_z i t_z iz izraza 3.34, 3.36 i 3.38 daje

$$\begin{aligned}
&(n_x t_y - n_y t_x)^2 + 2(A_1 t_x + A_2 n_x + A)(n_x t_x + n_y t_y) - (A_1 t_x + A_2 n_x + A)^2 \\
&\quad - (t_x^2 + t_y^2) + l_1^2 (1 - n_x^2 - n_y^2) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.58}$$

Konačno, eliminacijom varijabli o_z i t_z iz jednakosti 3.35, 3.36 i 3.55 izvodimo sljedeću jednadžbu:

$$\begin{aligned} & (o_x t_y - o_y t_x)^2 + 2(E_1 n_x + E_2 o_x + E_3 o_y + E)(o_x t_x + o_y t_y) \\ & - (E_1 n_x + E_2 o_x + E_3 o_y + E)^2 - (t_x^2 + t_y^2) + l_1^2(1 - o_x^2 - o_y^2) = 0. \end{aligned} \quad 3.59$$

Na kraju smo ostali sa izrazima 3.57, 3.58 i 3.59 koji pomoću supstitucije linearnih kombinacija 3.53 umjesto varijabli t_x , t_y i n_y daju sustav četvrtog stupnja od tri jednačbe sa tri nepoznanice. U općenitom slučaju taj sustav može imati najviše 4^3 ili 64 rješenja za vrijednosti varijabli n_x , o_x i o_y . Iz tih vrijednosti možemo naći nepoznanice t_x , t_y i n_y pomoću 3.53 te zatim vrijednosti t_z , n_z i o_z iz jednačbi 3.34 - 3.39. Nakon toga se izračunavaju komponente vektora $\vec{a}$ i obavlja se transformacija kanonskog oblika u položaj i orijentaciju kako je opisano u prethodnom poglavlju. Funkcija greške ili funkcija cilja u optimiranju definira se na sličan način kao i u prethodnim slučajevima, zbrojem kvadrata iznosa pojedine jednačbe:

$$\begin{aligned} F_4 = & \left[(n_x o_x - n_y o_x)^2 - (n_x^2 + n_y^2 + o_x^2 + o_y^2) + 1 \right]^2 \\ & + \left[(n_x t_y - n_y t_x)^2 + 2(A_1 t_x + A_2 n_x + A)(n_x t_x + n_y t_y) \right. \\ & \left. - (A_1 t_x + A_2 n_x + A)^2 - (t_x^2 + t_y^2) + l_1^2(1 - n_x^2 - n_y^2) \right]^2 \\ & + \left[(o_x t_y - o_y t_x)^2 + 2(E_1 n_x + E_2 o_x + E_3 o_y + E)(o_x t_x + o_y t_y) \right. \\ & \left. - (E_1 n_x + E_2 o_x + E_3 o_y + E)^2 - (t_x^2 + t_y^2) + l_1^2(1 - o_x^2 - o_y^2) \right]^2 \\ \vec{X}_4 = & \begin{bmatrix} n_x & o_x & o_y \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad 3.60$$

Parcijalne derivacije funkcija izvedenih u ovom poglavlju nalaze se u Prilogu A. Potrebno je napomenuti da tri varijable n_x , o_x i o_y , koje predstavljaju vektor rješenja, ne mogu jednoznačno odrediti jedinstvenu konfiguraciju heksapoda, tj. jedinstvenu poziciju pomične platforme. U postupku preslikavanja zadanog početnog položaja i orijentacije u biti se cijeli skup takvih konfiguracija preslikava u isti vektor rješenja reduciranog kanonskog oblika. I površnim uvidom postaje očito da se sa tri veličine ne može jednoznačno definirati točka u šesterodimenzijском prostoru. U postupku 'dekodiranja', međutim, javljaju se konstantni članovi jednačbi koji ovise o zadanim duljinama krakova heksapoda, pa te konstante upravljaju postupak na pravo rješenje. Ova pojava se može iskoristiti za procjenu početnog rješenja unaprijedne kinematike, o čemu detaljnije u poglavlju 4.2.

Pored spomenutoga, postoji i nejednoznačnost u definiranju vrijednosti varijabli t_z , n_z i o_z pomoću ostalih šest. Moguće je izabrati i pozitivne i negativne vrijednosti tih varijabli (tj. imamo dva moguća rješenja) jer se navedene varijable javljaju uvijek kao kvadratni član ili u međusobnom produktu. Ova dva rješenja fizikalno se mogu opisati kao parovi konfiguracija heksapoda u kojima se pokretna platforma nalazi simetrično s gornje ili donje strane osnovne platforme. Drugim riječima, z koordinata položaja platforme može poprimiti istu vrijednost s različitim predznacima dok je orijentacija u oba rješenja jednaka, gledano s osnovne platforme. Naravno, samo će jedno od ta dva rješenja imati fizikalni smisao, a to je ono kojemu je vrijednost z koordinate pozitivna.

3.2.5. Definiranje orijentacije pomoću rotacijskog vektora

Pristup rješavanju problema unaprijedne kinematike u kojemu se kao varijable uzimaju položaj i orijentacija pomične platforme, može se dodatno modificirati ako se za predstavljanje orijentacije upotrijebi univerzalni rotacijski vektor. Svako rotacijsko preslikavanje može se, osim trima kutovima koji određuju zakret oko koordinatnih osi, predstaviti samo jednim zakretom oko određenog vektora, koji se još naziva i rotacijski vektor, a postavljen je u ishodište početnog koordinatnog sustava. Neka je rotacijski vektor označen sa $\vec{k}$, a kut rotacije sa θ . Tada su nam za opis neke proizvoljne rotacije potrebne četiri veličine (tri elementa vektora $\vec{k}$ i kut zakreta). Međutim, da bi se izbjeglo povećavanje broja nepoznanica, definira se novi vektor kao produkt vektora rotacije i kuta zakreta:

$$\vec{r} = \theta \cdot \vec{k} \quad 3.61$$

Vektor rotacije $\vec{k}$ definiran je kao jedinični vektor, tj. vektor čija je euklidska norma jednaka jedinici. Množenjem vektora s kutem zakreta (u radijanima) vektoru dajemo duljinu koja je jednaka tom kutu. Na taj smo način konstruirali vektor varijabli koji i dalje ima šest elemenata (prema 3.62). Ovakav pristup prvi je za rješavanje unaprijedne kinematike heksapoda upotrijebio C. Reboulet a opis postupka se može naći i u [MER 92].

$$\vec{X}_5 = [t_x \quad t_y \quad t_z \quad r_x \quad r_y \quad r_z]^T \quad 3.62$$

Potrebno je još definirati preslikavanje navedenoga rješenja u standardni položaj i orijentaciju i obrnuto. Za izračunavanje funkcije cilja moramo izračunati elemente rotacijske matrice, a ona je rotacijskim vektorom i kutom zakreta definirana na sljedeći način:

$${}^B_R = \begin{bmatrix} k_x k_x \text{vers} \theta + \cos \theta & k_y k_x \text{vers} \theta - k_z \sin \theta & k_z k_x \text{vers} \theta + k_y \sin \theta \\ k_x k_y \text{vers} \theta + k_z \sin \theta & k_y k_y \text{vers} \theta + \cos \theta & k_z k_y \text{vers} \theta - k_x \sin \theta \\ k_x k_z \text{vers} \theta - k_y \sin \theta & k_y k_z \text{vers} \theta + k_x \sin \theta & k_z k_z \text{vers} \theta + \cos \theta \end{bmatrix}, \quad 3.63$$

gdje je funkcija $\text{vers } \theta$ definirana kao $\text{vers } \theta = (1 - \cos \theta)$ [PAU 81].

Za neku proizvoljno zadanu orijentaciju, određivanje vektora rotacije nije baš intuitivno pa se postupak mora dobro algoritamski definirati. Zadavanjem rotacije dobivamo definiranu matricu rotacije koju tada možemo izjednačiti s 3.63 da bismo izračunali elemente vektora rotacije i kut zakreta. Odgovarajući odabir elemenata matrice i njihovo izjednačavanje daje izraze za sinus i kosinus funkcije kuta θ :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2}(n_x + o_y + a_z - 1) \\ \sin \theta &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(o_z - a_z)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}. \end{aligned} \quad 3.64$$

Definiramo li kut zakreta tako da uvijek bude pozitivan, tj. $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, tada možemo upotrijebiti znak '+' u izrazu za sinus kuta, pa θ postaje jednoznačno određen s

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{(o_z - a_z)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}}{(n_x + o_y + a_z - 1)}. \quad 3.65$$

Komponente vektora rotacije mogu se izračunati kao

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{o_z - a_y}{2 \sin \theta}, \\ k_y &= \frac{a_x - n_z}{2 \sin \theta}, \\ k_z &= \frac{n_y - o_x}{2 \sin \theta}. \end{aligned} \quad 3.66$$

Elementi vektora $\vec{k}$ trebaju biti naknadno pomnoženi tako da norma vektora bude jednaka jedinici. Kada je kut rotacije vrlo mali, vektor rotacije postaje loše definiran zbog malih iznosa brojnika i nazivnika u 3.66. Kada se kut rotacije približava 180° , izrazi poprimaju oblik 0/0 te ne daju korisne informacije za određivanje osi rotacije. U slučaju da je kut rotacije veći od 90° , za izračunavanje elemenata vektora koristi se drugi postupak [PAU 81]. Pomoću sljedećih izraza određuje se najveća komponenta vektora rotacije:

$$\begin{aligned} k_x &= \operatorname{sgn}(o_z - a_y) \sqrt{\frac{n_x - \cos \theta}{1 - \cos \theta}}, \\ k_y &= \operatorname{sgn}(a_x - n_z) \sqrt{\frac{o_y - \cos \theta}{1 - \cos \theta}}, \\ k_z &= \operatorname{sgn}(n_y - o_x) \sqrt{\frac{a_z - \cos \theta}{1 - \cos \theta}}. \end{aligned} \quad 3.67$$

gdje funkcija sgn vraća vrijednosti '1' ili '-1' ovisno o predznaku argumenta. Samo će se najveća komponenta vektora $\vec{k}$, a to je ona koja odgovara najvećoj vrijednosti elemenata rotacijske matrice n_x , o_y ili a_z , odrediti iz izraza 3.67. Ostali elementi se mogu preciznije izračunati kada se odredi najveća komponenta po sljedećem postupku: ako se najveća vrijednost dobiva za k_x , tada su ostali elementi jednaki

$$\begin{aligned} k_y &= \frac{n_y + o_x}{2k_x \operatorname{vers} \theta}, \\ k_z &= \frac{a_x + n_z}{2k_x \operatorname{vers} \theta}. \end{aligned} \quad 3.68$$

Ako je najveći element k_y , ostali su definirani s

$$\begin{aligned}
 k_x &= \frac{n_y + o_x}{2k_y \text{vers}\theta}, \\
 k_z &= \frac{a_y + o_z}{2k_y \text{vers}\theta}.
 \end{aligned}
 \tag{3.69}$$

Naposljetku, ako je k_z najveći, druga dva elementa se računaju kao

$$\begin{aligned}
 k_x &= \frac{a_x + n_z}{2k_z \text{vers}\theta}, \\
 k_y &= \frac{a_y + o_z}{2k_z \text{vers}\theta}.
 \end{aligned}
 \tag{3.70}$$

Na osnovi navedenoga postupka možemo izračunati vektor rotacije i kut zakreta za bilo koju proizvoljno zadanu početnu orijentaciju pomične platforme. Funkcija cilja se u ovom slučaju označava sa F_5 , a istovjetna je funkciji F_1 opisanoj u poglavlju 3.2.1. Prilikom izračunavanja funkcije cilja potrebno je prethodno izračunati matricu rotacije prema 3.63. Reboulet je pokazao da ovaj način predstavljanja vektora rješenja prilikom rješavanja unaprijedne kinematike Newton-Raphsonovom metodom ima bolja konvergentna svojstva na cijelom definiranom radnom području manipulatora.

3.3. Kinematska svojstva Stewartove platforme

Kako se upravljanje paralelnim manipulatorom obavlja mijenjanjem duljina krakova koji drže pomičnu platformu, od osobite je važnosti predočiti ovisnosti promjena duljina krakova na promjenu položaja pomične platforme. Taj odnos međusobnih promjena određuje kinematska svojstva manipulatora. Preslikavanje brzine promjena duljina krakova u brzinu pomaka pokretne platforme može se predstaviti u matičnom obliku, Jacobievom matricom sustava (jakobijanom).

Definirajmo vektor $\vec{a}_i$ kao produkt orijentacijske matrice i vektora $\vec{p}_i$:

$$\vec{a}_i = {}^B \underline{R} \cdot \vec{p}_i, \quad i = 1, \dots, 6. \tag{3.71}$$

Vektor $\vec{a}_i$ povezuje središte pomične platforme s hvatištima krakova na istoj platformi, ali u globalnim koordinatama. Kako se platforma pomiče, duljina vektora $\vec{a}_i$ je konstantna ali mu se mijenja orijentacija, sukladno orijentaciji pomične platforme. Ako se u izrazu 3.6 vektor kraka prikaže kao skalarni produkt jediničnog vektora i duljine te ako primijenimo jednakost 3.71, izraz poprima sljedeći oblik:

$$l_i \cdot \vec{w}_i = -\vec{b}_i + \vec{t} + \vec{a}_i, \quad i = 1, \dots, 6. \tag{3.72}$$

Parcijalnom derivacijom toga izraza po vremenu dobiva se sljedeći oblik:

$$\dot{l}_i \cdot \vec{w}_i + l_i \cdot \vec{\omega} \times \vec{w}_i = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{a}_i, \tag{3.73}$$

gdje vektor $\vec{v}$ predstavlja linearnu a vektor $\vec{\omega}$ kutnu brzinu pomične platforme. Vektor $\vec{b}_i$ je konstantan pa njegova parcijalna derivacija po vremenu daje kao rezultat nul vektor. Množenjem prethodne jednadžbe s jediničnim vektorom kraka $\vec{w}_i$ dobivamo

$$\dot{l}_i = \vec{v} \cdot \vec{w}_i + (\vec{\omega} \times \vec{a}_i) \cdot \vec{w}_i = \vec{v} \cdot \vec{w}_i + \vec{\omega} \cdot (\vec{a}_i \times \vec{w}_i) \quad 3.74$$

ili u matričnom obliku:

$$\dot{l}_i = \begin{bmatrix} \vec{w}_i^T & (\vec{a}_i \times \vec{w}_i)^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}. \quad 3.75$$

Ovaj izraz može se napisati za svih šest krakova u vektorskom obliku:

$$\begin{aligned} \vec{\dot{l}} &= \begin{bmatrix} \vec{w}_1^T & (\vec{a}_1 \times \vec{w}_1)^T \\ \vdots & \vdots \\ \vec{w}_6^T & (\vec{a}_6 \times \vec{w}_6)^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}; \\ \vec{\dot{l}} &= \underline{J} \cdot \dot{\underline{x}}. \end{aligned} \quad 3.76$$

Matrica koja povezuje vektor derivacija (ili brzine promjena) duljina krakova s kutnom i linearnom brzinom pomične platforme je Jacobijeva matrica sustava [HUA 98]. Kako njene elemente čine jedinični vektori krakova i vektori koji leže na pomičnoj platformi, ona nije konstantna nego ovisi o točki u kojoj se platforma trenutno nalazi.

Svojstvene vrijednosti te matrice mogu nam puno reći o ponašanju manipulatora u određenom dijelu radnog prostora, kao i o određenoj konfiguraciji stroja. Sa gledišta upravljanja heksapodom naročito su opasne konfiguracije u kojima se za određene duljine krakova pomična platforma može nalaziti u više od jedne točke radnog prostora. Kako je već prije spomenuto, problem unaprijedne kinematike može imati više od jednog rješenja pa je to sasvim moguće. No postoje i takve kombinacije parametara heksapoda i duljina krakova za koje postoji beskonačno mnogo rješenja (beskonačno mnogo mogućih položaja pokretne platforme), koje se nazivaju *singularne konfiguracije*. Postojanje tih konfiguracija moguće je otkriti promatranjem Jacobijeve matrice sustava: ako je determinanta Jacobijeve matrice jednaka nuli, manipulator se nalazi u singularnoj konfiguraciji.

Zašto se u singularnoj konfiguraciji javlja beskonačno mnogo rješenja? U takvoj se konfiguraciji kod paralelnog manipulatora javljaju *neupravljivi stupnjevi slobode* kojima se struktura manipulatora ne može oduprijeti, tako da pomična platforma može zauzeti, matematički gledano, beskonačno mnogo položaja.

Kao primjer može poslužiti jedna određena inačica Stewartove platforme, kod koje su osnovna i pomična platforma jednakoga oblika, no mogu biti različite veličine. Drugim riječima, šesterokuti koji povezuju hvatišta krakova na osnovnoj i pomičnoj platformi su geometrijski *slični*. Između vektora hvatišta na jednoj i drugoj platformi postoji linearna povezanost, pa se otuda taj model naziva i *linearno povezana* Stewartova platforma. Nekoliko istraživača (neovisno jedni od drugih) predložili su ovaj model u cilju lakšega rješavanja unaprijedne kinematike [BRU 96][SRE 94][YAN 98].

Dobra strana predstavljenoga modela leži u tome da se rješenja unaprijedne kinematike mogu dobiti analitičkim postupkom, što kod općenite inačice nije moguće. Isto tako, moguće je pokazati da za bilo koji zadani skup duljina krakova postoji najviše osam različitih rješenja, što je vrlo važan podatak. Međutim, u isto vrijeme taj model ima nedostatak da se vrlo lako može naći u singularnoj konfiguraciji. Promatrajući Jacobijevu matricu za taj model, može se pokazati [BRU 99] da je dotični heksapod u singularnoj konfiguraciji uvijek kada pomična platforma leži paralelno sa osnovnom! Drugim riječima, determinanta matrice J je jednaka nuli uvijek kada su platforme paralelne. Što se tada zapravo događa? U takvoj konfiguraciji manipulator se ne može oduprijeti momentu oko z osi globalnog koordinatnog sustava. Duljine krakova ostaju jednake ali se mijenjaju njihove orijentacije i cijela konstrukcija se može okretati ok z osi bez ikakvog otpora – javlja se neupravljivi stupanj slobode kojemu se manipulator ne može oduprijeti.

Takvi 'propusti' u dizajnu mogu se preduhitriti pomnom analizom ponašanja Jacobijeve matrice manipulatora još dok je cijeli stroj samo na papiru. U radu iz 1998. godine J. P. Merlet [MER 88] je razvio metodologiju otkrivanja postojanja singularnih konfiguracija za 3-3 i 6-3 inačice heksapoda. Ovisno o rasporedu hvatišta na osnovnoj i pomičnoj platformi, moguće je analitički odrediti postojanje singularnih točaka manipulatora i njihove položaje. Nažalost, u slučaju općenitog 6-6 heksapoda autor nije uspio provesti sličnu analizu, pa se pretpostavlja da se u tom slučaju niti ne može izravno utvrditi postojanje singularnih konfiguracija.

Osim samih singularnih konfiguracija, manipulator se može naći i u dijelovima radnog prostora u kojima relativno male promjene duljina krakova uzrokuju relativno velike promjene položaja pomične platforme. Ponekad se može dogoditi da preciznost mijenjanja duljina bude nedovoljna za održavanje manipulatora u željenoj konfiguraciji. Isto tako, maksimalna radna opterećenja koja može podnijeti alat ovisna su o trenutnoj konfiguraciji pa putanju alata treba planirati uzevši sve navedene elemente u obzir.

4. Postupci rješavanja unaprijedne kinematike heksapoda

U ovom će se dijelu rada prikazati postupci kojima se rješava problem unaprijedne kinematike heksapoda opisan u poglavlju 3.2. Kako postoje različiti pristupi rješavanju toga problema ovdje su ukratko opisane različite potrebe dobivanja rješenja koje iziskuju i drugačije metodologije rješavanja.

Problem unaprijedne kinematike rješava se u dva konteksta: jedan od njih je rad u stvarnom vremenu, pri kojemu nam treba samo jedno rješenje (po mogućnosti ono koje predstavlja stvarni položaj pomične platforme) i to u što manjem vremenu. Rad u stvarnom vremenu zahtijeva pouzdanu i brzu povratnu informaciju kojom se zatvara upravljački krug povratne veze. U većini primjena paralelnih mehanizama, međutim, ta se povratna veza ne ostvaruje jer je vrijeme rješavanja često preveliko. Umjesto toga, upravljanje mehanizmom odvija se samo primjenom inverzne kinematike. U tom slučaju ne dobivamo nikakvu povratnu informaciju o stvarnom položaju pomične platforme jer ne postoje osjetnici koji bi učinkovito i bez ometanja rada stroja izmjerili tražene veličine. U slušaju heksapoda s različitim brojem hvatišta na obje platforme i sa manjim brojem hvatišta, kao što su 6-3 ili 3-3 manipulatori, moguće je ostvariti tu povratnu vezu jer je problem unaprijedne kinematike za te modele znatno jednostavniji (poglavlje 4.5). Kod općenitog 6-6 heksapoda, međutim, upotrebljavaju se iterativni, *konvergenjski* postupci koji ponavljanjem u neodređenom vremenu dolaze do rješenja. Upravo je to neodređeno vrijeme najveća zapreka uključivanja unaprijedne kinematike u rad u stvarnom vremenu. U ovome radu nastoji se odgovarajućim odabirom metode optimiranja i funkcije cilja koja predstavlja problem naći kombinaciju koja bi relativno brzo i precizno nalazila rješenje unaprijedne kinematike. U poglavlju 4.1 opisane su metode optimiranja koje su u ovom radu upotrebljene u cilju što bržeg nalaženja *jednoga* rješenja unaprijedne kinematike.

Učinkovitu primjenu postupaka optimiranja općenito nije moguće postići bez ikakvog prilagođavanja algoritma danom problemu, osim u vrlo rijetkim slučajevima. Stoga su u poglavlju 4.2 predložene neke modifikacije postojećih algoritama koje bi trebale poboljšati proces rješavanja u smislu omogućavanja i ubrzavanja konvergenције iterativnih metoda.

Drugi kontekst rješavanja unaprijedne kinematike je takozvani problem dizajna (engl. *design problem*), gdje se za zadane duljine nogu heksapoda nastoje naći *sva* rješenja, tj. svi mogući položaji koje pomična platforma može zauzeti. Postupci za rješavanje ovoga problema obično se nazivaju *polinomskima* jer se u većini slučajeva gradi polinom jedne varijable određenoga stupnja za koji se potom numeričkim postupcima traže sva moguća rješenja. Za rješavanje ovoga problema potrebno je još više vremena negoli kod klasičnih iterativnih postupaka jer uključuju računanje velikog broja složenih koeficijenata, zatim pronalaženje svih rješenja dobivenoga polinoma te konačno preslikavanje rješenja u oblik položaja i orijentacije pomične platforme. Takvi postupci su primjereni u statičkoj analizi te za određivanje početnih uvjeta nekoga dinamičkog procesa. Svi dosada objavljeni polinomski postupci iznimno su opširni i ovdje se iznose samo u kratkim crtama, s osvrtom na njihova najvažnija svojstva. Jedno od tih svojstava je i određivanje *najvećeg broja rješenja* – naročito je važno u bilo kakvom planiranju izgradnje paralelnoga manipulatora analitički odrediti broj mogućih konfiguracija stroja za zadani skup duljina krakova, što je u nekim slučajevima i učinjeno. Polinomski

postupci objavljeni u zadnjih desetak godina, što obuhvaća većinu rada na tom području, opisani su u poglavlju 4.3.

Jedan zanimljivi pristup problemu je i korištenje dodatnih podataka dobivenih putem osjetnika postavljenih na odgovarajuća mjesta unutar konstrukcije. Ovim putem može se u nekim slučajevima vrlo brzo doći do stvarnog, jedinstvenog rješenja unaprijedne kinematike. Potrebne su, doduše, određene intervencije unutar samoga manipulatora, tj. ugradnja samih osjetnika, što je poželjno odrediti još u vrijeme planiranja izgradnje heksapoda. Neke od metoda koje koriste podatke iz dodatnih osjetnika opisane su u poglavlju 4.4.

Kako je već spomenuto, unaprijedna kinematika drugih inačica heksapoda s manjim brojem hvatišta na platformama, znatno je jednostavniji problem. U poglavlju 4.5 navedeni su neki radovi na tome području.

4.1. Konvergencijski postupci

Svi opisani konvergencijski postupci koriste se u ovom radu za rješavanje problema unaprijedne kinematike Stewartove platforme. Zajednička su im svojstva to da se na početku optimiranja mora zadati početno rješenje koje se u svakom koraku mijenja i ocjenjuje. Svi postupci također daju samo jedno rješenje, za razliku od metoda za pronalaženje svih rješenja unaprijedne kinematike. U općenitom slučaju ne znamo koje ćemo od rješenja naći konvergencijskim postupkom. Međutim, uglavnom je u primjeni poznata prethodna pozicija pomične platforme koja može poslužiti kao vrlo dobra aproksimacija, pa postupak (gotovo) uvijek konvergira ka rješenju koje predstavlja stvarni položaj manipulatora.

Većina opisanih postupaka koristi traženje minimuma zadane funkcije na pravcu u višedimenzijском prostoru. Pravac je najčešće određen jediničnim vektorom smjera, a izbor toga vektora i redoslijed traženja minimuma glavna su svojstva pojedinog postupka optimiranja. U općenitom slučaju zadan je neki jedinični vektor smjera $\vec{v}$ koji određuje pravac u kojemu se traži minimum. Vektor smjera ima broj komponenti jednak dimenziji prostora rješenja. Kao argument višedimenzijске funkcije cilja tada se ne zadaje sam vektor rješenja, koji određuje početnu točku pretraživanja, nego suma početnoga rješenja i produkta smjera sa parametrom λ :

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0 + \lambda \cdot \vec{v}). \quad 4.1$$

Pronalaženje minimuma na pravcu se tada svodi na pronalaženje minimuma funkcije *jedne* varijable, parametra λ . Da bi se odredio minimum na pravcu, potrebno je prvo definirati početni *unimodalni* interval u kome se nalazi jedinstveni minimum. Postupak za pronalaženje unimodalnog intervala polazi od početne točke $\vec{x}^0$ i nastoji što brže pronaći što manji interval u kome je ograničen minimum. Nakon toga se dobivene granice unimodalnog intervala prosljeđuju algoritmu koji će taj interval smanjiti, održavajući minimum unutar njega, na proizvoljno malenu veličinu. Najčešće korišteni algoritmi za smanjenje unimodalnog intervala su metoda zlatnog reza i metoda kvadratne interpolacije [TUR 89].

Metoda zlatnog reza ne postavlja nikakve zahtjeve na svojstva funkcije i konstantnom brzinom vodi do sve manjeg i manjeg intervala. Međutim, ako je početni interval relativno velik, može biti potrebno puno izračunavanja funkcije (dakle, puno

vremena) da bi se došlo do željene preciznosti. Kvadratna interpolacija, u drugu ruku, pretpostavlja da se funkcija u okolini minimuma ponaša slično kvadratnoj funkciji, pa se u svakom koraku pronalazi tjeme parabole određeno sa tri točke. Ako je funkcija zaista slična kvadratnoj, relativno se brzo, tj. uz puno manje izračunavanja funkcije, dolazi do minimuma u željenim granicama. No ukoliko ciljna funkcija nije 'lijepog' oblika i ne ponaša se približno kvadratnoj, postupak se može usporiti do te mjere da postaje potpuno neupotrebljiv! Zbog toga je potrebno isprobati ponašanje algoritma na konkretnoj funkciji prije uporabe u stvarnom vremenu. Postoje, osim toga, i varijacije algoritama koje koriste kombinaciju prethodna dva postupka, a ocjena napredovanja se obavlja 'u letu'.

Prilikom opisa konvergentnih postupaka u nastavku, ne navode se algoritmi pronalaženja minimuma na pravcu (ako ih dotični postupak uključuje), već se podrazumijeva da se svaki takav dio postupka optimiranja sastoji od pronalaženja početnog unimodalnog intervala i smanjenja istoga jednom od spomenutih metoda.

4.1.1. Traženje po koordinatnim osima

Traženje po koordinatnim osima je najjednostavniji primjer algoritma za pronalaženje minimuma funkcije više varijabli. Ovaj postupak je prilično neučinkovit za iole složenije probleme pa ovdje služi samo kao ilustracija i usporedba s ostalim metodama. Njegova uporaba može eventualno biti opravdana ako postoji način da se za konkretni problem relativno brzo odredi minimum funkcije po jednoj varijabli.

Sam postupak se sastoji od uzastopnog traženja minimuma funkcije cilja po svakoj varijabli, tj. po svakom elementu n -dimenzijskog vektora varijabli. Jedna iteracija postupka čini n pronalaženja minimuma na pravcu u smjeru svake koordinatne osi u n -dimenzijskom prostoru. Nakon svake iteracije provjerava se kriterij zaustavljanja algoritma koji je obično takav da se zahtijeva da apsolutna vrijednost promjene elemenata vektora rješenja u dvije uzastopne iteracije bude manja od prethodno definirane preciznosti ε_i :

$$|x_i^j - x_i^{j-1}| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad 4.2$$

gdje indeks i označava pojedini element vektora a j broj iteracije. Za svaku komponentu rješenja, konstanta ε_i definira se posebno te se mogu odrediti različite vrijednosti za pojedine elemente – npr. za kuteve ili koordinate položaja. Ovaj postupak se može prikazati algoritmom na slici 4.1.

```

postavi  $\mathbf{x}^0$ ;
j=0;
ponavljaj
{
  j++;
  za k=1 do n
  {
     $\mathbf{x}^j = \text{minimum od } \mathbf{x}^{j-1} \text{ u smjeru osi } x_k$ ;
  }
}
dok nije  $|x_i^j - x_i^{j-1}| \leq \varepsilon_i$  za sve i
rješenje =  $\mathbf{x}^j$ ;

```

Slika 4.1 Algoritam traženja po koordinatnim osima

Najveći nedostatak ovoga postupka je njegova spora konvergencija. To može naročito biti izraženo ako se smjer od početne točke prema lokalnom minimumu ne podudara sa smjerom neke od koordinatnih osi, u kojem slučaju će algoritam vrlo sporo postići željenu preciznost. Ipak, kod nekih je funkcija cilja moguće odrediti minimum na pravcu (npr. samo u smjeru koordinatnih osi) analitički ili ga predstaviti problemom koji je puno jednostavniji od opetovanog izračunavanja same funkcije cilja, što se čini pri svakom traženju minimuma na pravcu nekim od klasičnih metoda (zlatni rez, kvadratna interpolacija), pa se pretraživanje po pravcu može znatno ubrzati. Ako u isto vrijeme takvo ubrzanje nije moguće postići za proizvoljni smjer u n -dimenzijskom prostoru, tada se i ovom metodom mogu postići rezultati u prihvatljivom vremenu.

4.1.2. Powellov postupak

Rješenje kvadratne funkcije više varijabli (funkcije gdje su sve varijable maksimalno potencirane na kvadrat) može se odrediti analitički. Stvarne funkcije cilja rijetko su kvadratnoga oblika, ali se često u optimiranju pretpostavlja da se funkcija u okolini lokalnog minimuma ponaša približno kvadratno. Na taj način se mogu iskoristiti neka svojstva kvadratne funkcije koja nas mogu vrlo uspješno uputiti prema minimumu. Iako se do rješenja može u jednom koraku doći samo kod kvadratne funkcije, praksa je pokazala da se dosta problema može relativno dobro riješiti koristeći ta svojstva. Jedna od takvih metoda optimiranja je i postupak po Powellu.

Općenito se kvadratna funkcija više varijabli može napisati u matričnom obliku kao:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{x}^T \cdot \underline{A} \cdot \vec{x} + \vec{b} \cdot \vec{x} + c, \quad 4.3$$

gdje je matrica $\underline{A}$ kvadratnog oblika i dimenzija $n \times n$. Powellov postupak se temelji na dva sljedeća dva svojstva kvadratne funkcije:

- minimum kvadratne funkcije može se odrediti traženjem u n konjugiranih smjerova s obzirom na matricu $\underline{A}$;
- konjugirani smjer se dobiva spajanjem dvaju minimuma koji leže na dva paralelna pravca.

Dokaz ova dva svojstva može se naći u [TUR 89]. Ideja postupka je u postepenoj izgradnji n konjugiranih smjerova te traženjem minimuma po njima. Postupak započinje sa n zadanih linearno nezavisnih smjerova za koje se obično uzimaju smjerovi koordinatnih osi, $\vec{e}_1$ do $\vec{e}_n$. Iz definirane početne točke $\vec{x}^{1,0}$ traži se najprije minimum u smjeru $\vec{e}_n$ i dolazi se do točke $\vec{x}^{1,1}$. Potom se uzastopno određuje minimum po svim smjerovima od $\vec{e}_1$ do $\vec{e}_n$, čime se dolazi do točke $\vec{x}^{1,n+1}$, koja ujedno postaje i početna točka sljedeće iteracije, $\vec{x}^{2,0}$. Točke $\vec{x}^{1,1}$ i $\vec{x}^{1,n+1}$ određuju konjugirani smjer $\vec{v}_1$ jer su obje minimumi funkcije na dva paralelna smjera $\vec{e}_n$. Vektor konjugiranog smjera mora se dodatno normalizirati da mu duljina bude jednaka 1. Iz skupa neovisnih smjerova odbacuje se $\vec{e}_1$ i umjesto njega postavlja $\vec{v}_1$. U sljedećoj iteraciji određuju se iz točke $\vec{x}^{2,0}$

minimum u smjeru $\vec{v}_1$, zatim minimumi u smjerovima $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ i ponovo u smjeru $\vec{v}_1$. Točke $\vec{x}^{2,1}$ i $\vec{x}^{2,n+1}$ određuju novi smjer $\vec{v}_2$ konjugiran u odnosu na $\vec{v}_1$. U sljedećem koraku odbacuje se smjer $\vec{e}_2$ i postupak se ponavlja s preostalim smjerovima $\vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2$. Na taj način dobiveni konjugirani smjerovi postepeno izbacuju početne smjerove i nakon $n-1$ koraka svi će smjerovi biti konjugirani. U slučaju kvadratne funkcije, u sljedećem se koraku pronalazi i sam minimum, dok će za ostale funkcije cilja u općenitom slučaju biti potreban još neodređen, ali ako imamo sreće relativno mali, broj dodatnih iteracija. Postupak se može prikazati i formalno, algoritmom na slici 4.2.

```

postavi  $\mathbf{x}^0$ ;
postavi smjerove  $\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i, i=1, \dots, n$ ;
ponavljaj
{
   $\mathbf{x}^1 = \text{minimum od } \mathbf{x}^0 \text{ u smjeru } \mathbf{v}_n$ ;
  za  $i=1$  do  $n$ 
  {
     $\mathbf{x}^{i+1} = \text{minimum od } \mathbf{x}^i \text{ u smjeru } \mathbf{v}_i$ ;
     $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i+1}$ ; // odmah pomičemo smjerove
  }
   $\mathbf{v}_n = \mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^1$ ;
  normaliziraj  $\mathbf{v}_n$ ;
   $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^{n+1}$ ;
}
dok nije zadovoljen uvjet zaustavljanja
rješenje =  $\mathbf{x}^{n+1}$ ;

```

Slika 4.2 Algoritam postupka po Powellu

Ako se funkcija cilja za koju tražimo minimum ne ponaša približno kao kvadratna funkcija, postupak može znatno usporiti jer nakon nekog vremena konjugirani smjerovi postaju međusobno ovisni. Dogodi li se da algoritam uspori konvergenciju, potrebno je promijeniti smjerove u kojima se određuje minimum. Najčešće se tada trenutni skup smjerova zamjenjuje sa početnim skupom od n linearno neovisnih smjerova i algoritam se nastavlja iz do tada dosegnute točke sa minimalnom vrijednošću funkcije.

4.1.3. Hooke-Jeeves postupak

Postupak po Hookeu i Jeevesu još je jedan od postupaka koji pronalaze minimum zadane višedimenzijске funkcije bez uporabe derivacija. Međutim, njegova posebnost leži u činjenici da se minimum ne određuje pretraživanjem na pravcu nego samo lokalnim izračunavanjem funkcije, što može u velikoj mjeri ubrzati konvergenciju. Ideja algoritma je da se, krenuvši iz neke početne točke, odredi smjer pada funkcije, a zatim se pretraživanje nastavi u tome smjeru.

Svaka iteracija postupka sastoji se od dva dijela: istraživanja i kretanja u odabranom smjeru. Dio *istraživanja* započinje iz prethodno definirane početne točke $\vec{x}^0$ pomoću *koraka istraživanja* Δx_i koji su definirani za svaku komponentu vektora rješenja. Vrijednost funkcije računa se za početnu točku, a potom se vrijednost elemenata vektora $\vec{x}$ smanjuje i povećava za Δx_i . Nakon svake promjene bilo koje komponente x_i računa se vrijednost funkcije u novoj točki. Ako je ta vrijednost funkcije manja (tj. bolja) nego u prethodnoj točki, tada se ta promjena zadržava. Ako prilikom pomaka u pozitivnom i negativnom smjeru vrijednost funkcije poraste, zadržava se početna vrijednost varijable

x_i . Nakon što je istraživanje završeno u svim smjerovima, dolazi se do nove tzv. *bazne točke* $\bar{x}^1$. Početna točka $\bar{x}^0$ također se smatra baznom.

```

postavi  $\mathbf{x}^0$ ;
 $\mathbf{x}^S = \mathbf{x}^B = \mathbf{x}^0$ ;
ponavljaj
{
   $\mathbf{x}^N = \text{istraži}(\mathbf{x}^S, \Delta x)$ ; // definiran je potprogram
  ako  $F(\mathbf{x}^N) < F(\mathbf{x}^B)$  // prihvaćamo baznu točku
  {
     $\mathbf{x}^S = 2\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^B$ ;
     $\mathbf{x}^B = \mathbf{x}^N$ ;
  }
  inače
  {
    smanji  $\Delta x$ ;
     $\mathbf{x}^S = \mathbf{x}^B$ ;
  }
}
dok nije zadovoljen uvjet zaustavljanja
rješenje =  $\mathbf{x}^B$ ;

procedura istraži( $\mathbf{x}^S, \Delta x$ )
{
   $\mathbf{x} = \mathbf{x}^S$ ;
   $P = F(\mathbf{x})$ ;
  za  $i=1$  do  $n$ 
  {
     $x_i = x_i + \Delta x$ ;
     $N = F(\mathbf{x})$ ;
    ako  $N > P$  // ne valja pozitivni pomak
    {
       $x_i = x_i - 2\Delta x$ ;
       $N = F(\mathbf{x})$ ;
      ako  $N > P$  // ne valja ni negativni
       $x_i = x_i + \Delta x$ ;
    }
     $P = N$ ;
  }
  vrati  $\mathbf{x}$ ;
}

```

Slika 4.3 Algoritamski prikaz Hooke-Jeeves postupka

Drugi dio postupka je kretanje u odabranom smjeru, a sastoji se od pomaka na pravcu koji određuju dvije prethodno pronađene bazne točke, i to za duljinu koja je jednaka udaljenosti tih dvaju točaka. Nova se točka dobiva kao:

$$\bar{x} = 2\bar{x}^1 - \bar{x}^0. \quad 4.4$$

Vrijednost funkcije u toj točki ne uspoređuje se s prethodnima, nego iz te točke ponovo započinje postupak istraživanja koji dovodi do nove bazne točke $\bar{x}^2$. Tek tada provjeravamo: ako je vrijednost funkcije u novodobivenoj baznoj točki manja od vrijednosti funkcije u prethodnoj, ponovno se izvodi kretanje po pravcu koje spaja zadnje dvije bazne točke; u ovom slučaju $\bar{x}^2$ i $\bar{x}^1$. Općenito je, dakle,

$$\bar{x} = 2\bar{x}^j - \bar{x}^{j-1}. \quad 8.4.5$$

Ako je, međutim, vrijednost funkcije u novoj baznoj točki veća (dakle, lošija) nego u prethodnoj, tada se vraćamo u prethodnu baznu točku i postupak se nastavlja sa dijelom istraživanja, no ovaj puta sa *smanjenim* korakom istraživanja Δx_i , koji se obično postavlja na polovinu prethodnog iznosa. Postupak se zaustavlja kada korak padne ispod unaprijed definirane minimalne vrijednosti. Algoritam postupka prikazan je proceduralno na slici 4.3.

Prikazani algoritam može se dodatno prilagoditi pojedinom problemu optimiranja. Vrijednost koraka istraživanja može se posebno definirati za svaku varijablu, npr. različito za kuteve i prostorne koordinate. Relativno lako se, osim toga, može za svaku varijablu dodati provjera eventualnih eksplicitnih ograničenja, što je u nekim problemima od osobite važnosti. Prilikom dijela istraživanja, izračunavanje funkcije cilja se, ako je to moguće, može prilagoditi promjenama samo jedne komponente rješenja i time eventualno ubrzati cijeli postupak.

4.1.4. Metoda najbržeg spusta

Ukoliko se za ciljnu funkciju koju optimiramo mogu odrediti parcijalne derivacije po svim varijablama, logično je upotrijebiti i metode koje koriste tu dodatnu informaciju da bi brže i efikasnije pronašle minimum. Za svaku točku u prostoru rješenja postoji, osim vrijednosti funkcije, i smjer najvećeg rasta odnosno pada (gradijent funkcije). Najjednostavniji postupak koji uzima u obzir gradijent funkcije je metoda najbržeg spusta. Ideja je sljedeća: u bilo kojoj točki se nalazili, pretpostavljamo da ćemo najbrže doći do minimuma ako se krećemo po pravcu koji je istovjetan sa smjerom najbržeg pada vrijednosti funkcije. Iz neke početne točke $\vec{x}^0$ traži se dakle minimum na pravcu kojega određuje jedinični vektor negativnog gradijenta:

$$\vec{v} = -\frac{\nabla f(\vec{x}^0)}{\|\nabla f(\vec{x}^0)\|}, \quad 4.6$$

gdje $\nabla f(\vec{x})$ predstavlja *vektor parcijalnih derivacija* funkcije po svim varijablama u određenoj točki (vektor gradijenta). Kada pronađemo točku koja određuje minimum na zadanom pravcu, u toj novoj točki ponovno se računaju parcijalne derivacije i postupak se ponavlja. Lokalno gledano, ovakva strategija doima se najboljom, no ona ne uzima u obzir nikakva saznanja o prethodnim koracima postupka. Isto tako, smjer gradijenta funkcije može biti vrlo promjenjiv i ne mora pokazivati prema lokalnom minimumu ako funkcija ima jako zakrivljene krivulje iste vrijednosti. Kako određivanje minimuma na pravcu ne može biti apsolutno točno, smjer koji se dobiva iz sljedeće točke može biti jako ovisan o preciznosti parametara. Zbog navedenih razloga, brzina konvergencije ovoga postupka u većini slučajeva nije dostatna; stoga se on općenito ne koristi bez ikakvih modifikacija. Algoritamski prikaz postupka je vrlo jednostavan pa je ovdje izostavljen.

4.1.5. Newton-Raphsonova metoda za sustav jednadžbi

Najčešće korištena metoda optimiranja pri rješavanju unaprijedne kinematike heksapoda, a vjerojatno i uopće, upravo je Newton-Raphsonova metoda prilagođena za

rješavanje sustava jednadžbi. Ako se neki problem optimiranja može formulirati kao skup više funkcija koje istovremeno moraju biti zadovoljene, uporaba ove metode pokazala se dobrim izborom. Kako se problem unaprijedne kinematike predstavlja kao sustav jednadžbi? Umjesto jedinstvene funkcije cilja u kojoj se zbrajaju kvadrati grešaka svih pojedinih funkcija – konkretno, šest funkcija koje ocjenjuju grešku pri procjeni duljine svakog kraka heksapoda – koristimo svaku od tih funkcija posebno. Primjerice, u slučaju položaja i orijentacije pomične platforme kao vektora varijabli (poglavlje 3.2.1) imamo:

$$f_i = D(\vec{b}_i, {}^B\vec{p}_i)^2 - l_i^2, \quad i = 1, \dots, 6. \quad 4.7$$

Svaka od tih funkcija mora biti istovremeno zadovoljena, pa se sustav jednadžbi dobiva izjednačavanjem svih funkcija s nulom. U slučaju kanonskog oblika jednadžbi imat ćemo devet takvih funkcija (3.34-3.42), itd. Općenito, definiramo vektor sustava funkcija kao

$$F[\vec{x}] = [f_1(\vec{x}) \quad \dots \quad f_n(\vec{x})]^T. \quad 4.8$$

Također se definira i matrica prvih derivacija sustava:

$$\underline{J}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad 4.9$$

Ova matrica se također naziva Jacobijevom matricom; međutim, nju ne treba zamijeniti sa kinematskom Jacobijevom matricom koja povezuje promjene duljina krakova sa promjenom položaja i orijentacije pomične platforme. Razvoj svake od funkcija f_i u Taylorov red oko neke točke $\vec{x}^0$, uzevši u obzir samo prva dva člana reda, može se u matričnom obliku napisati kao

$$F[\vec{x}] \approx F[\vec{x}^0] + \underline{J}(\vec{x}^0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0). \quad 4.10$$

Tražimo li da sve jednadžbe budu zadovoljene u točki $\vec{x}$, desnu stranu izraza 4.10 izjednačit ćemo s nulom, čime se dobiva:

$$\underline{J}(\vec{x}^0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^0) = -F[\vec{x}^0]. \quad 4.11$$

Ako su funkcije kojima tražimo nul-točke točno opisane izrazom 4.10, tj. da je u tom izrazu znak potpune jednakosti, tada bismo rješavanjem linearnog sustava 4.11 iz bilo koje početne točke $\vec{x}^0$ u odmah došli do rješenja. u općenitom slučaju, međutim, dolazimo do iterativnog postupka koji se može opisati sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} \underline{J}(\vec{x}^k) \cdot \Delta \vec{x}^k &= -F[\vec{x}^k], \\ \vec{x}^{k+1} &= \vec{x}^k + \Delta \vec{x}^k. \end{aligned} \quad 4.12$$

Prethodni izrazi slikovito opisuju Newton-Raphsonov iteracijski postupak: pretpostavimo da se u k -toj iteraciji nalazimo u nekoj proizvoljnoj točki $\vec{x}^k$. Za tu točku potrebno je izračunati vektor funkcija i Jacobijevu matricu, a zatim riješiti sustav linearnih jednadžbi (uobičajeno LU dekompozicijom) i pomoću rješenja sustava izračunati novu točku postupka. Metoda se može jednostavno opisati algoritamski (slika 4.4).

```

postavi x;
ponavljaj
{   izračunaj J(x);
    izračunaj F(x);
    riješi J(x)*dx = -F(x);
    x = x + dx;
}
dok nije zadovoljen uvjet zaustavljanja
rješenje = x;

```

Slika 4.4 Algoritam Newton-Raphsonovog postupka

Nedostatak ovoga postupka je uzastopno rješavanje sustava linearnih jednadžbi koji u nekim problemima može biti prilično velik. Jednadžba sustava 4.11 može se napisati i kao

$$\Delta \vec{x}^k = -\underline{J}^{-1}(\vec{x}^k) \cdot F[\vec{x}^k]. \quad 4.13$$

Rješavanjem sustava se zapravo implicitno računa inverzija Jacobijeve matrice u svakom koraku postupka. Modifikacija ovoga postupka sastoji se u uporabi konstantne Jacobijeve matrice, tj. njene inverzije, tokom cijelog procesa optimiranja. Iterativna jednadžba tada poprima sljedeći oblik:

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \underline{J}^{-1}(\vec{x}^0) \cdot F[\vec{x}^k]. \quad 4.14$$

Uporaba konstantne matrice prvih derivacija opravdana je uz dvije pretpostavke: da je Jacobijeva matrica približno konstantna u blizini rješenja i da početna točka pretraživanja nije previše udaljena. Izračunavanjem drugih derivacija funkcija u početnoj točki može se provjeriti pretpostavka o malim promjenama prvih derivacija, no u općenitom slučaju teško je dati dobru početnu aproksimaciju rješenja. Ipak, ova se inačica metode uspješno koristi u mnogim područjima. Prilikom rješavanja unaprijedne kinematike heksapoda, obično je, pri praćenju putanje platforme u stvarnom vremenu, poznat početni položaj platforme, pa on može poslužiti kao vrlo dobro početno rješenje.

4.1.6. Postupak po Fletcheru i Powellu

Relativno veliki broj postupaka optimiranja temelji se na pretpostavci da ciljna funkcija posjeduje svojstva približna kvadratnoj funkciji, te se uz tu pretpostavku može razviti metoda koja bi iskoristila neka od navedenih svojstava. Aproksimacija neke funkcije razvojem u Taylorov red, uzimajući u obzir prva tri člana reda, daje sljedeći izraz:

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}^0) + \nabla f^T \cdot \Delta \vec{x} + \frac{1}{2} \Delta \vec{x}^T \cdot \underline{H} \cdot \Delta \vec{x}, \quad \Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}^0, \quad 4.15$$

gdje je $\nabla f(\vec{x})$ vektor prvih derivacija a $\underline{H}$ je Hesseova matrica drugih derivacija, definirana kao

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2^2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \quad 4.16$$

Vektor gradijenta i Hesseova matrica iz 4.15 izračunati su u točki $\vec{x}^0$. Tražimo li minimum zadane funkcije u točki $\vec{x}$, izjednačit ćemo prvu derivaciju aproksimacije Taylorova reda sa nulom, čime se dobiva

$$0 = \nabla f + \underline{H} \cdot \Delta \vec{x}, \quad 4.17$$

tj. izrazimo li $\vec{x}$:

$$\vec{x} = \vec{x}^0 - \underline{H}^{-1} \cdot \nabla f. \quad 4.18$$

Za kvadratnu funkciju više varijabli, koja bi bila egzaktno prikazana jednakošću 4.15, prethodnim izrazom bi se odmah dobio stvarni minimum. U općenitom slučaju, međutim, kada funkcija $f(\vec{x})$ nije kvadratna, postupak može dovesti do minimuma u više iteracija, no u svakoj iteraciji trebali bismo određivati Hesseovu matricu i njenu inverziju. Osnovna ideja postupka po Fletcheru i Powellu (i cijele obitelji srodnih postupaka) je da se invertirana matrica drugih derivacija aproksimira nekom matricom koja tijekom postupka teži invertiranoj Hesseovoj matrici ali se lakše, tj. brže, izračunava. U svakom koraku postupka tražit će se minimum na pravcu određenim smjerom $\vec{v}$:

$$\vec{v} = -\frac{\underline{G} \cdot \nabla f}{\|\underline{G} \cdot \nabla f\|}, \quad 4.19$$

gdje matricom $\underline{G}$ aproksimiramo matricu drugih derivacija. Postupak započinje tako što se odabere početno rješenje $\vec{x}^0$, a kao početna matrica $\underline{G}^0$ obično se uzima jedinična matrica. U svakom se koraku traži minimum na pravcu, počevši od neke točke $\vec{x}^k$, određenom smjerom po izrazu 4.19, čime dolazimo do točke $\vec{x}^{k+1}$. Potom se izračunavaju sljedeće formule:

$$\begin{aligned}
\Delta \vec{x}^k &= \vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k, \\
\Delta \vec{g}^k &= \nabla f(\vec{x}^{k+1}) - \nabla f(\vec{x}^k), \\
\underline{M}^k &= \frac{\Delta \vec{x}^k \cdot (\Delta \vec{x}^k)^T}{(\Delta \vec{x}^k)^T \cdot \Delta \vec{g}^k}, \\
\underline{N}^k &= \frac{\underline{G}^k \cdot \Delta \vec{g}^k \cdot (\Delta \vec{g}^k)^T \cdot \underline{G}^k}{(\Delta \vec{g}^k)^T \cdot \underline{G}^k \cdot \Delta \vec{g}^k},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

koje dovode do veličina potrebnih za izračunavanje matrice $\underline{G}$ u idućem koraku:

$$\underline{G}^{k+1} = \underline{G}^k + \underline{M}^k - \underline{N}^k. \tag{4.21}$$

Nakon izračunavanja nove matrice aproksimacije, ponovno se traži minimum na pravcu određenim smjerom u izrazu 4.19, počevši od posljednje dobivene točke. Postoji nekoliko načina na koji se računa matrica $\underline{G}$ u svakom koraku, ovisno o podvrsti postupka. U ovdje opisanoj metodi [TUR 89], matrica $\underline{M}$ u izrazu 4.21 postupno izgrađuje matricu drugih derivacija, a matrica $\underline{N}$ teži u konačnici jediničnoj matrici. Za kvadratnu funkciju postupak pronalazi stvarni minimum u $n+1$ iteraciji, dok je za ostale funkcije potreban veći broj koraka. No iskustvo pokazuje da postupak učinkovito vodi do minimuma za velik broj funkcija cilja. Algoritam postupka prikazan je na slici 8.5.

```

postavi  $\mathbf{x}^0, G$ ;
 $\mathbf{x}^S = \mathbf{x}^0$ ;
 $\mathbf{g}^S = \nabla f(\mathbf{x}^S)$ ;
ponavljaj
{
   $\mathbf{x}^N = \text{minimum od } \mathbf{x}^S \text{ u smjeru } G \cdot \nabla f$ ;
   $\mathbf{g}^N = \nabla f(\mathbf{x}^N)$ ;
   $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^N - \mathbf{x}^S$ ;
   $\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}^N - \mathbf{g}^S$ ;
  izračunaj  $G$  prema 4.20 i 4.21;
   $\mathbf{x}^S = \mathbf{x}^N$ ;
   $\mathbf{g}^S = \mathbf{g}^N$ ;
}
dok nije zadovoljen uvjet zaustavljanja
rješenje =  $\mathbf{x}^N$ ;

```

Slika 4.5 Algoritam postupka po Fletcheru i Powellu

Tijekom izvođenja postupka potrebno je još provjeravati i pozitivnu definitnost matrice $\underline{G}$ jer za funkcije koje nisu kvadratne, a i zbog toga što se minimum na pravcu ne određuje apsolutno točno, može se dogoditi da matrica aproksimacije ne bude pozitivno definitna. U tom slučaju postupak će divergirati; obično se, ako se uoči takvo ponašanje, za matricu $\underline{G}$ ponovno uzima jedinična matrica i postupak se nastavlja od zadnje dobivene točke.

4.2. Dodatne prilagodbe postupaka optimiranja

Prilikom primjene opisanih postupaka optimiranja u konkretnom problemu rješavanja unaprijedne kinematike heksapoda, važno je postići što bržu i sigurniju konvergenciju. Pojedini postupci su sami po sebi bolje ili lošije prilagođeni pojedinim funkcijama cilja, pa se odabirom 'dobre' kombinacije postižu i bolji rezultati. Međutim, vrlo su rijetki slučajevi u kojima neka metoda, u svom izvornom nepromijenjenom obliku, odmah u početku postiže zadovoljavajuće rezultate. Iskušano pravilo je da se neki postupak optimiranja pokušava što je više moguće, ako to uopće jest moguće, prilagoditi problemu kojega trenutno rješavamo. Te prilagodbe su uglavnom empirijske i uključuju promjene vrijednosti nekih parametara i slično. Na taj način moguće je doći do znatnih poboljšanja u procesu optimiranja.

Kod rješavanja unaprijedne kinematike također postoje načini kojima se pokušava popraviti učinak pojedine metode primijenjene na određenu funkciju cilja. Neki od njih opisani su u daljem tekstu.

4.2.1. Izračunavanje parcijalnih derivacija funkcija cilja

U poglavlju 3.2 definirane su četiri funkcije koje opisuju grešku za zadani vektor koji određuje položaj pomične platforme heksapoda. Primjena nekih postupaka optimiranja, kao što su metoda najbržeg spusta, Newton-Raphsonova metoda i postupak po Fletcheru i Powellu, iziskuju izračunavanje parcijalnih derivacija funkcija po pojedinoj varijabli. Zbog 'opširnosti' samih funkcija, izrazi za parcijalne derivacije mogu biti vrlo glomazni i nespretni za izračunavanje. Štoviše, može doći i do smanjenja preciznosti rezultata ako se u postupku računanja javljaju veličine čiji su međusobni omjeri preveliki. Pogodnost je u ovom slučaju što sve funkcije posjeduju istovjetan oblik, tj. zbroj kvadrata pojedinih 'podfunkcija':

$$F = \sum f_i^2(\vec{X}). \quad 4.22$$

Želimo li upotrijebiti npr. Newton-Raphsonov postupak za sustave jednadžbi, promatrat ćemo samo 'podfunkcije' i definirati matricu (Jacobijeva matrica sustava) koja sadrži sve parcijalne derivacije svih 'podfunkcija' (izraz 4.9). Imamo li definiranu tu matricu, tada parcijalnu derivaciju glavne funkcije F po varijabli x_j u nekoj točki $\vec{X}_0$ možemo dobiti derivirajući 4.22:

$$\frac{\partial F(\vec{X}_0)}{\partial x_j} = \sum 2f_i(\vec{X}_0) \frac{\partial f_i(\vec{X}_0)}{\partial x_j}. \quad 4.23$$

Uz izračunatu vrijednost funkcije u određenoj točki, na ovaj način se pojednostavljuje izračunavanje (i zapisivanje) parcijalne derivacije.

4.2.2. Učinkovito pronalaženje minimuma na pravcu

Velik dio postupaka optimiranja djeluje na principu pronalaženja minimuma funkcije više varijabli na pravcu, dok je algoritam odabira smjera u kojemu pravac leži ono što razlikuje jedan postupak od drugoga. Pri tome je ostavljena potpuna sloboda izbora metode za pronalaženje minimuma na pravcu, od kojih su najčešće korištene metoda zlatnoga reza i kvadratne interpolacije (poglavlje 4.1). Većina postupaka korištenih u ovome radu uključuje i pronalaženje minimuma na pravcu, pa je stoga važno razviti brz i učinkovit algoritam za tu namjenu.

Nažalost, prilikom pronalaženja minimuma ne možemo izbjeći opetovano izračunavanje funkcije cilja u svakoj iteraciji, što može potrošiti dosta procesorskog vremena. U slučaju nekih od četiri funkcije cilja definirane u 3. poglavlju, međutim, moguće je pojednostaviti pretraživanje po pravcu. Uzmimo, na primjer, funkciju F_1 i pripadno rješenje $\vec{X}_1$, gdje se kao varijable koriste koordinate položaja i kutovi orijentacije pomične platforme; parcijalne derivacije te funkcije po koordinatama položaja znatno su jednostavnije nego derivacije po kutevima:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial t_x} &= \sum_{i=1}^6 4[(t_x + a_{ix} - b_{ix})^2 + (t_y + a_{iy} - b_{iy})^2 + (t_z + a_{iz})^2 - l_i^2] \cdot (t_x + a_{ix} - b_{ix}), \\ \frac{\partial F_1}{\partial t_y} &= \sum_{i=1}^6 4[(t_x + a_{ix} - b_{ix})^2 + (t_y + a_{iy} - b_{iy})^2 + (t_z + a_{iz})^2 - l_i^2] \cdot (t_y + a_{iy} - b_{iy}), \\ \frac{\partial F_1}{\partial t_z} &= \sum_{i=1}^6 4[(t_x + a_{ix} - b_{ix})^2 + (t_y + a_{iy} - b_{iy})^2 + (t_z + a_{iz})^2 - l_i^2] \cdot (t_z + a_{iz}).\end{aligned}\quad 4.24$$

Vektori $\vec{a}_i$ povezuju središte pomične platforme sa hvatištima krakova na istoj platformi, a oznaka B pokazuje da su izračunati u referentnom koordinatnom sustavu, tj. onome od osnovne platforme, a dobivaju se množenjem sa rotacijskom matricom:

$$\vec{a}_i = {}^B R \cdot \vec{p}_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad 4.25$$

Želimo li naći minimum funkcije cilja na pravcu koji leži na jednoj od koordinatnih osi t_x , t_y ili t_z , parcijalnu derivaciju po određenoj varijabli treba izjednačiti s nulom. Tada se, primjerice za varijablu t_x , dobiva polinomska jednadžba trećega stupnja po t_x :

$$\frac{\partial F_1}{\partial t_x} = a \cdot t_x^3 + b \cdot t_x^2 + c \cdot t_x + d = 0. \quad 4.26$$

Rješenja ove jednadžbe, uz zadanu početnu vrijednost koju za pretraživanje na pravcu uvijek imamo, relativno je jednostavno pronaći algoritmom binarnog pretraživanja – potrebno je ograničiti nul-točku jednadžbe u zadani mali interval. U općenitom slučaju postoje tri rješenja ovakvoga polinoma, no samo dva od ta tri predstavljaju *minimum* funkcije, a odgovaraju situaciji kada derivacija u *uzlaznom* smjeru prolazi kroz nul-točku. Najčešće, međutim, postoji samo jedno realno rješenje za koji je polinom jednak nuli. To rješenje mora postojati jer je za njega odgovoran kubni član jednadžbe i ono ujedno

predstavlja jedan od dva moguća minimuma. No najvažnija je činjenica da je pronalaženje toga rješenja binarnim pretraživanjem i provjerom predznaka vrijednosti polinoma 4.26 puno brže od klasične metode traženja minimuma na pravcu uzastopnim izračunavanjem vrijednosti funkcije cilja. Koeficijenti dobivenog polinoma previše su glomazni i nečitki da bi se iznosili u tekstu, a mogu se naći u Prilogu B.

Jednaka analiza nije, nažalost, primjenjiva i na ostale tri varijable funkcije F_1 koje predstavljaju kut zakreta pomične platforme, a pronalaženje općeg minimuma funkcije ne može se osnivati na pretraživanju po samo tri varijable. No ovom metodom 'ubranog' pretraživanja po tri koordinatne osi može se, u većini slučajeva te u samo dvije-tri iteracije, na početku optimiranja doći do puno bolje aproksimacije rješenja unaprijedne kinematike. Posljedica toga je da se kod nekih postupaka optimiranja može smanjiti vrijeme potrebno za određivanje rješenja, a u nekim slučajevima i omogućiti samu konvergenciju, ako postupak inače nije uopće dolazio do rješenja. Ova modifikacija nazvana je *početno pretraživanje*, a učinci njene primjene prikazani su zajedno sa ostalim rezultatima u poglavlju 5.

Kanonski oblik jednadžbi unaprijedne kinematike, opisan u poglavlju 3.2.2, ima puno bolji oblik od bilo kojeg drugog prikaza jer sve varijable ulaze u jednadžbe najviše sa drugim stupnjem, odnosno četvrtim ako se uzme funkcija ukupne greške F_2 (3.43) ili F_3 (3.54). U parcijalnim derivacijama te funkcije po bilo kojoj varijabli dobiva se polinom trećeg stupnja, kao u gore navedenoj analizi. To zapravo znači da bismo isto 'ubranog' pretraživanje na pravcu mogli primijeniti za bilo koju od devet varijabli koliko ih ima vektor $\vec{X}_2$ ili šest u slučaju $\vec{X}_3$. Međutim, može se otići i korak dalje: zahvaljujući spomenutom svojstvu, moguće je izraziti parcijalnu derivaciju funkcije po nekom parametru λ koji množi vektor *proizvoljnoga* smjera:

$$F_2(\vec{X}) = F_2(\vec{X}^0 + \lambda \cdot \vec{v}). \quad 4.27$$

Parcijalnom derivacijom funkcije F_2 po parametru λ dobiva se također polinom u kome se λ javlja sa najvećom potencijom 3:

$$\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} = a \cdot \lambda^3 + b \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + d = 0. \quad 4.28$$

Sada se, već spomenutim postupkom binarnog pretraživanja, može pronaći minimum funkcije cilja na proizvoljnom pravcu u deveterodimenzijском prostoru, uz ista razmatranja kao i u prethodnom slučaju. Koeficijenti polinoma 4.28 mogu se naći u Prilogu B, a jednaka analiza primjenjiva je i na funkciju F_3 koja zadržava najveći stupanj potencija varijabli na 4. Ovaj način nalaženja minimuma na pravcu znatno ubrzava svaki postupak optimiranja koji koristi tu metodu.

4.2.3. Generiranje početnog rješenja eliminacijom varijabli

Redukcijom broja varijabli kanonskog oblika jednadžbi unaprijedne kinematike smanjujemo dimenziju prostora rješenja, što bi trebalo ubrzati pronalaženje minimuma u postupku optimiranja. Međutim, kada smanjimo broj nepoznanica na samo tri, vrijednost

ostalnih varijabli, koja se izračunava na kraju postupka, postaje određena konstantama koje ovise o trenutnoj konfiguraciji heksapoda. Već je prije uočeno da sa tri varijable nikako ne možemo jednoznačno odrediti jednu konfiguraciju heksapoda, tj. određen skup duljina šest krakova. Tri preostale varijable zapravo predstavljaju cijelu porodicu rješenja, od kojih će se neko konkretno odrediti tek postupkom 'dekodiranja' pomoću izračunatih konstanti (npr. u izrazima 3.53, 3.56). Fizikalne veličine konfiguracije heksapoda koje će biti predstavljene u prostoru rješenja ovise o odabiru varijabli koje ćemo eliminirati, odnosno onih koje će tvoriti vektor rješenja.

Primjerice, svedemo li kanonski oblik jednadžbi samo na nepoznanice n_x , o_x i o_y , jedan vektor rješenja sa ove tri varijable predstavljat će sve konfiguracije heksapoda u kojima su moguće bilo koje vrijednosti svih ostalih parametara. Odabrane varijable n_x , o_x i o_y sadržavaju informacije o orijentaciji pomične platforme jer su to zapravo određeni elementi rotacijske matrice. Podaci o položaju platforme, naprotiv, koji su određeni varijablama t_x , t_y i t_z , ne nalaze se unutar toga vektora od samo tri elementa. Tada će se svaka konfiguracija heksapoda koja odgovara jednakim vrijednostima n_x , o_x i o_y , dakle sa jednakom *orijentacijom* platforme, preslikati u isti vektor rješenja, neovisno o *položaju* pomične platforme u prostoru! Tek se postupkom izračunavanja vrijednosti eliminiranih varijabli, a pomoću prije određenih konstanti, jednoznačno određuje položaj i orijentacija pomične platforme. Pažljivim odabirom varijabli koje ćemo eliminirati, istovremeno se 'eliminiraju' i fizikalne veličine koje neće biti predstavljene u vektoru rješenja. Na primjer, da smo izveli redukciju tako da su nam ostale varijable t_y , n_y i o_y , što je savršeno moguće u slučaju standardnog heksapoda, izgubila bi se informacija o x i y koordinati pomične platforme, kao i o kutu zakreta platforme oko x osi. To znači da bi se svaka konfiguracija sa bilo kojim vrijednostima tih veličina, a jednakim vrijednostima koordinate z i ostala dva kuta, preslikala u isto rješenje. No što je još važnije, svaka takva konfiguracija ima i jednaku vrijednost funkcije cilja, što ima za posljedicu da bi konfiguracija sa *odgovarajućim* vrijednostima varijabli t_y , n_y i o_y , bez obzira kakve vrijednosti imale ostale veličine, imala funkciju cilja jednaku nuli. I zaista, probamo li kao početno rješenje problemu optimiranja zadati konfiguraciju heksapoda kojoj vrijednosti koordinate z i kutova zakreta oko x i y osi odgovaraju stvarnom rješenju, to će početno rješenje uvijek za funkciju cilja imati nulu, bez obzira na vrijednosti ostalih veličina.

Kako se ova zanimljiva pojava može upotrijebiti? Svedemo li kanonski oblik jednadžbi na varijable n_x , o_x i o_y , eliminirali smo sve konfiguracije sa različitim položajem platforme, dok je informacija o orijentaciji ostala očuvana. Postavimo li početno rješenje sa jednakom orijentacijom kao i stvarno rješenje, funkcija cilja će odmah biti jednaka nuli i u postupku dekodiranja, tj. izračunavanja ostalih varijabli, dobit će se prave vrijednosti položaja, neovisno o onima koje smo zadali. Ako orijentacija početnog rješenja ne odgovara istoj kod stvarnog rješenja, tada niti vrijednosti koordinata položaja neće odgovarati stvarnim; međutim, vrijednosti položaja koje bismo dobili na taj način mogle bi poslužiti kao vrlo dobra aproksimacija u postupku optimiranja. Predloženi postupak je sljedeći: za zadano početno rješenje odredimo n_x , o_x i o_y . Potom pomoću te tri vrijednosti i pomoću prethodno izračunatih konstanti, koje ovise o zadanim duljinama krakova, izračunamo vrijednosti varijabli t_x , t_y i t_z koje jednoznačno određuju koordinate položaja platforme. Te se vrijednosti koordinata uzimaju kao elementi početnog rješenja, dok vrijednosti kuteva ostavimo nepromijenjene.

Ako smo u početnom rješenju pogodili orijentaciju platforme, ovim postupkom odmah ćemo dobiti i točan položaj i pronalaženje rješenja je završeno. U većini slučajeva, ipak, orijentaciju ne možemo točno pogoditi, pa se i za koordinate položaja ne dobivaju prave vrijednosti. Međutim, ta aproksimacija je u većini slučajeva puno bolja od nekoga

univerzalnoga početnog položaja koji se koristi u općenitom slučaju. To bi moglo ubrzati cijeli postupak optimiranja a u nekim slučajevima i omogućiti pronalazak traženog rješenja. Vrijeme potrebno za izvođenje te transformacije je također zanemarivo u odnosu na trajanje cijelog postupka i na prosječnom osobnom računalu iznosi manje od 0.1 milisekunde.

4.3. Polinomski postupci

Problem pronalaženja svih postojećih rješenja unaprijedne kinematike heksapoda (problem dizajna) može se riješiti postupcima koji se zajednički mogu nazvati polinomskima, jer se u većini slučajeva formulacija problema transformira u polinom određenog (velikog) stupnja jedne nepoznanice. Ono što jedan postupak razlikuje od drugoga upravo je metodologija pretvorbe početnog problema u polinomski oblik, te primjenjivost algoritma pretvorbe na različite varijacije u izvedbi paralelnih manipulatora. Ovdje će biti navedene metode rješavanja unaprijedne kinematike za općenitu 6-6 inačicu heksapoda, dok će metode za pojednostavljene oblike biti obrađene u poglavlju 4.5.

U radu iz 1990. godine J.P. Merlet [MER 90] problem unaprijedne kinematike rješava diskretizacijom jedne od varijabli, u ovom slučaju jednoga od Eulerovih kuteva za predstavljanje orijentacije pomične platforme. Za svaku diskretnu vrijednost računa se posebno formulirani koeficijent, za čije se dostatno male vrijednosti pokreće postupak lokalne pretrage sa prethodno definiranom vrijednošću fiksirane varijable. U istom radu je predstavljena i polinomska formulacija problema; no iako je dobiveni polinom jedne varijable čak 352. stupnja (!), algoritam pronalazi najviše dvanaest rješenja. Veći broj rješenja može se naći ako se naiđe na singularnu konfiguraciju, u kojem slučaju algoritam daje više od 40 rješenja te može biti potrebno ponovno pokrenuti računanje za neki drugi zadani skup duljina krakova. Algoritam je prilagođen rješavanju 6-6 heksapoda sa planarnim platformama, ali su postavljena još neka ograničenja na položaje zglobova. Autor navodi da je za izvođenje algoritma u vrijeme pisanja rada bilo potrebno oko 30 sekundi; zahvaljujući dostupnosti kôda programa, rad algoritma je provjeren i na računalu koje je poslužilo kao referentni sustav i u ovome radu, a vrijeme izvođenja varira od nekoliko desetinki pa do dvije sekunde.

Od postupaka koji zapravo *ne* koriste polinomski prikaz valja spomenuti i prediktor-korektor postupak objavljen u radu iz 1996. godine [DAS 96]. Autori B. Dasgupta i T.S. Mruthyunyaya u prvom dijelu određuju područja u kojima bi se moglo nalaziti rješenje problema, tj. položaj pomične platforme, a zatim se za svako od određenih područja izvodi konvergencijsko rješavanje Powellovim postupkom. Postupak pronalazi samo fizikalno moguća rješenja, a ne i matematička u kojima se javljaju i kompleksne veličine. Iako je prilagođen 6-6 heksapodu s planarnom osnovnom i pomičnom platformom, autori tvrde da se uz minimalne izmjene algoritam može upotrijebiti i za platforme proizvoljne konfiguracije. Nedostatak algoritma je nepoznavanje broja najvećeg rješenja koje je moguće pronaći, a vrijeme rješavanja je sumjerljivo sa ostalim postupcima opisanim u ovom poglavlju i iznosi nekoliko sekundi, ovisno o broju dobivenih rješenja.

U nešto starijem radu iz 1993. godine [RAG 93] M. Raghavan opisuje postupak rješavanja unaprijedne kinematike metodom *polinomske kontinuacije* (engl. *polynomial continuation*). Dosta složeni algoritam postupno transformira problem u rješivi oblik: u svakom koraku glavnoga postupka provodi se dodatna prilagodba parametra Newton-Raphsonovom metodom, pa cijeli polinomski prikaz postupno konvergira u konstantni

oblik Empirijski je, ponavljanim rješavanjem za nekoliko ispitnih konfiguracija, utvrđen uvijek jednak broj od četrdeset mogućih rješenja. Valja napomenuti da su rješenja matematička, tj. da su sve veličine izražene u obliku kompleksnih brojeva. Od uvijek postojećih 40 kompleksnih rješenja, realnih rješenja može biti i manje. Postupak je primjenjiv na općeniti 6-6 heksapod kojemu platforme ne moraju biti planarne i ne ovisi o rasporedu hvatišta krakova.

Zanimljivi postupak pretvorbe u polinomski oblik predložili su Wen i Liang [WEN 93] 1993. godine. Njihova metodologija primjenjiva je na heksapod s planarnim platformama, no osim općenitog 6-6 modela problem se može opisati polinomski i za 6-5, 5-5 te 6-4 heksapod. Ovdje je potrebno napomenuti da se, u slučaju planarne platforme u heksapoda, rješenja unaprijedne kinematike uvijek javljaju u parovima kod kojih je jedno rješenje zrcalno simetrično na drugo u odnosu na osnovnu platformu. Kao što je već bilo spomenuto u reduciranju kanonskog oblika jednadžbi u poglavlju 3.2.4, dva zrcalno simetrična rješenja razlikuju se samo u predznaku z koordinate položaja pomične platforme. Tako se u predloženom postupku za heksapode 6-6, 6-5 i 5-5 oblika dobiva polinom jedne varijable 20 stupnja. Za svako od 20 rješenja postoji i njemu zrcalno simetrično, tako da je ukupni broj rješenja za ove tipove heksapoda jednak 40, kao što je već bilo empirijski provjereno u radu [RAG 93]. U slučaju heksapoda 6-4, stupanj polinoma smanjuje se na 16, što daje ukupno 32 rješenja. Ovi rezultati su neobično važni jer ograničavaju broj rješenja na analitički izvedenu vrijednost. Naravno, nađe li se manipulator u singularnoj konfiguraciji, broj rješenja teoretski raste u beskonačnost. Svih 40 mogućih rješenja u općenitom su slučaju opisana kompleksnim brojevima, dok će broj realnih rješenja, dakle broj stvarnih konfiguracija u kojima se manipulator fizikalno može naći, biti uvijek jednak ili manji od toga broja, a osim toga i paran, jer postoje zrcalno simetrični parovi. Osim toga, niti sva realna rješenja neće u općenitom slučaju biti moguće ostvariti s određenim primjerkom heksapoda zbog fizikalnih ograničenja radnog prostora i same konstrukcije.

Značajan rad na ovome području predstavlja i postupak pretvorbe problema u polinomski oblik pomoću kinematskog preslikavanja (*kinematic mapping*) iz 1994. godine [HUS 94]. Autor M. Husty predlaže algoritam kojim je moguće prikazati problem unaprijedne kinematike 6-6 heksapoda kao polinom jedne varijable 40. stupnja i to za bilo koji oblik platformi koje ne moraju biti planarne. I ovdje je najveći broj rješenja ograničen na 40, s tim da se u slučaju kad platforme nisu planarne rješenja ne javljaju u zrcalno simetričnim parovima. Husty prikazuje primjer sasvim proizvoljno u prostoru postavljenih 12 točaka osnovne i pomične platforme i proizvoljno određenih udaljenosti među tim točkama, da bi dobio ukupno 40 rješenja od kojih je 4 realno. Ovaj pristup predstavlja do sada najbolji postupak rješavanja unaprijedne kinematike za proizvoljnu konstrukciju paralelnih manipulatora.

Iako opisani postupci pronalaze sva (ili sva realna) rješenja problema unaprijedne kinematike heksapoda, oni ne mogu biti upotrebljeni u radu u stvarnom vremenu zbog relativno velikog vremena potrebnog za njihovo izvođenje. Možda će se u bliskoj budućnosti vrlo brižljivim rasporedom rada na nekom paralelnom računalnom sustavu uspjati ostvariti vrijeme rješavanja koje dopušta rad u stvarnom vremenu, no zbog složenosti samih algoritama to za sada nije tako izgledno. Osim toga, uvijek nakon dobivanja svih rješenja postoji problem odabira jednoga među njima koje predstavlja *stvarni* položaj u kome se heksapod trenutno nalazi. Bez nekakve dodatne informacije taj odabir nije moguće provesti samo na osnovu šest duljina krakova. Ipak, navedene metode neprocjenjive su pri planiranju i izgradnji paralelnog manipulatora te pri statičkoj analizi koja prethodi svakom dinamičkom procesu u korištenju heksapoda.

4.4. Rješavanje unaprijedne kinematike dodavanjem osjetnika

Još jedan pristup rješavanju problema unaprijedne kinematike heksapoda su i postupci korištenja podataka dobivenih pomoću dodatnih osjetnika (senzora). Tehnički gledano, doduše, to ne može biti smatrano samo 'postupkom' rješavanja u smislu drugačijeg algoritma jer je za provedbu takvih metoda potrebna intervencija unutar same konstrukcije paralelnog manipulatora. Najčešće se odluka o korištenju ovakvog pristupa problemu donosi već u projektantskom stupnju razvoja kada se najbolje može isplanirati položaj i ugradnja dodatnih osjetnika. Obično se dodatne fizikalne veličine dobivene tim putem pridružuju ulaznim veličinama (duljinama krakova) pri rješavanju problema.

U radu iz 1992. godine [CHE 93] Cheok, Overholt i Beck predlažu dva postupka rješavanja unaprijedne kinematike postavljanjem dodatnih osjetnika. U prvom pristupu između osnovne i pomične platforme ugrađuju se tri osjetnika duljine: na osnovnoj platformi spojeni su u tri simetrično raspoređene točke, a na pomičnoj platformi sva tri se spajaju u njeno središte. Takav raspored osjetnika omogućuje analitičko određivanje položaja pomične platforme, dok se orijentacija može izračunati iz dobivenih podataka. U drugom pristupu postavlja se šest dodatnih osjetnika, po dva na tri kraka heksapoda. Dva osjetnika dodana jednome kraku spojena su na dva odvojena mjesta na osnovnoj platformi i zajedno sa hvatištem određenoga kraka na pomičnoj platformi. Podaci dobiveni iz ovako postavljenih osjetnika omogućuju izravno određivanje orijentacije platforme, a položaj se potom može jednostavno izračunati. Izbor metode postavljanja osjetnika ovisi o zahtjevima za radnim prostorom manipulatora; osjetnici se u ovom slučaju nalaze između dvije platforme pa mogu dodatno ograničiti pokretljivost heksapoda, što treba imati na umu već kod planiranja izgradnje.

J.P. Merlet je u svom radu iz 1993. godine [MER 93] pokazao da je potrebno minimalno tri linearna (duljinska) osjetnika koje je potrebno postaviti da bi se izravno riješila unaprijedna kinematika. Ista analiza provedena je i za rotacijske osjetnike, koji se mogu postaviti na pasivne zglobove krakova i mjeriti njihov zakret. U ovom slučaju minimalni broj takvih osjetnika iznosi četiri.

Postupci određivanja rješenja unaprijedne kinematike korištenjem dodatnih podataka putem osjetnika imaju jednu značajnu prednost pred svim ostalim postupcima. Naime, bilo kod konvergencijskih ili polinomskih metoda, nemoguće je bez uvida u neko prijašnje stanje manipulatora, ili bez fizičkog pogleda na isti, utvrditi koje od mogućih (dobivenih) rješenja predstavlja aktualnu konfiguraciju heksapoda. Konvergencijske metode će u većini slučajeva naći upravo ono rješenje koje predstavlja stvarnu konfiguraciju, ali ta pouzdanost nikada nije stopostotna. Polinomske metode su pak u stanju naći sva rješenja problema (iako ne za aplikacije u stvarnom vremenu), no potrebni su dodatni podaci da bi se iz skupa dobivenih rješenja odabralo pravo. Jedino postupci rješavanja dodavanjem osjetnika imaju mogućnost određivanja stvarne, fizikalne a ne matematičke, konfiguracije manipulatora.

4.5. Unaprijedna kinematika drugih modela heksapoda

Za razliku od općenitog 6-6 heksapoda, postoji relativno velik broj radova s tematikom rješavanja unaprijedne kinematike inačica sa oznakama 6-3 i 3-3 te nešto rjeđe

za ostale modele. U većini slučajeva problem se također svodi na polinom jedne nepoznanice i pronalaženje svih korijena toga polinoma.

Za oba modela (6-3 i 3-3 inačica) problem se može svesti na polinom 16. stupnja u jednoj varijabli [GRI 89][INN 90][NAN 90]. Budući su u razmatranje uključene planarne osnovne i pomične platforme, rješenja se i ovdje javljaju u parovima zrcalno simetričnih konfiguracija u odnosu na osnovnu platformu, pa ukupno postoji 2×8 rješenja za te modele heksapoda. Nešto drugačiji pristup upotrijebili su u svom radu [LIU 93] Liu, Fitzgerald i Lewis, koji su problem predstavili sa sustavom od tri nelinearne jednadžbe sa tri nepoznanice. Sustav se rješava standardiziranim Newton-Raphsonovim postupkom i dobiva se, prema navođenju autora, najviše osam rješenja. U istom radu se, osim toga, algoritamski definira izračunavanje nekih ograničenja dohvatljivih konfiguracija koje određeni 6-3 manipulator može postići. Na taj način se iz dobivenih osam rješenja relativno jednostavno eliminiraju 'matematička', nemoguća rješenja koja manipulator ne može u stvarnosti zauzeti, iako su sva rješenja opisana realnim (ne-imaginarnim) veličinama.

Posebno je zanimljiv rad McAreeja i Daniela iz 1995. godine [MCA 95] u kojemu iznose nekoliko algoritama za rješavanje unaprijedne kinematike 6-3 i 3-3 modela, sa posebnim naglaskom na ponašanja algoritama u blizini singularnih konfiguracija manipulatora. Naime, postupci su namijenjeni radu u stvarnom vremenu i posebna je pažnja posvećena stabilnosti postupka u blizini singularne konfiguracije, pri čemu algoritam ne smije znatno usporiti svoj rad. Autori navode da su opisane postupke uspješno upotrijebili u aplikaciji u stvarnom vremenu pri kojoj kontrolna petlja povratne veze radi na frekvenciji od 300Hz, što pretpostavlja učinkovito rješavanje problema u zadanim tolerancijama za manje od 3 milisekunde.

Od ostalih modela heksapoda, tu je i rad iz 1990. godine [LIN 90] u kojemu se rješava kinematika 4-4 paralelnog manipulatora. Autori Lin, Duffy i Griffis rastavljaju 4-4 mehanizam na 'virtualne' 3-3 manipulatore, čime se problem svodi na polinom jedne varijable 24. stupnja. I u ovom slučaju dobiva se 2×12 rješenja jer se, zbog planarnih platformi, rješenja javljaju u zrcalno simetričnim parovima.

Jedan od originalnijih pristupa problemu unaprijedne kinematike opisan je u radu [ZHA 92] iz 1992. godine. Autori D. Zhang i M. Song predlažu odvajanje jednoga stupnja slobode paralelnog manipulatora od ostalih pet, što se može fizikalno postići ako pet hvatišta krakova leže na istom pravcu, bilo na osnovnoj ili pomičnoj platformi. Na ovaj način moguće je postići stvarno analitičko rješenje gdje nisu potrebni nikakvi numerički algoritmi za rješavanje. U svom radu autori daju različite varijante paralelnih manipulatora sa šest krakova kod kojih pet hvatišta leže na istome pravcu. Odabranih pet hvatišta, međutim, ne moraju biti u različitim točkama nego se više krakova može spajati u jednome zglobu, pa tu dolazimo do različitih modela: npr. 6-3 inačica, ali u kojoj su tri kraka spojena u jedan, dva kraka u drugi i jedan krak u treći zglob na pomičnoj platformi (primjerice) što također ima za posljedicu da je pet hvatišta kolinearno. U nekim od tih modela javlja se odvajanje tri rotacijska stupnja slobode od tri translacijska, te se rješenje može dobiti izravno i brzo.

5. Ocjena učinkovitosti

Već je na početku prethodnoga poglavlja spomenuto kako se rješenje unaprijedne kinematike heksapoda traži u dva konteksta, ovisno o tome tražimo li sva rješenja (problem dizajna), za što nam je uglavnom na raspolaganju dosta vremena, ili tražimo samo jedno rješenje, ono najbliže prethodno utvrđenom položaju. Zbog opširnosti postupaka koji pronalaze sva rješenja unaprijedne kinematike, oni se, još uvijek, ne mogu upotrebljavati u primjenama gdje se izračunavanje stvarnoga položaja pomične platforme traži u što manjem mogućem vremenu. Za tu svrhu koriste se iterativni, konvergencijski postupci na kojima i leži naglasak ovoga rada.

Cilj konvergencijskih postupaka je rješavanje unaprijedne kinematike u dovoljno malom vremenu i dovoljno velikoj preciznosti koji bi omogućili eventualni rad u stvarnom vremenu. Kako ne postoje uređaji koji bi učinkovito mjerili položaj i orijentaciju pomične platforme, upravljanje paralelnim manipulatorima oslanja se većinom samo na inverznu kinematiku. Želimo li dovesti manipulator u neku zadanu konfiguraciju, izračunat ćemo potrebne duljine krakova i postaviti ih na izračunate vrijednosti (naravno, putem neke prethodno isplanirane trajektorije). Pri tome bez unaprijedne kinematike zapravo nemamo povratnu informaciju o stvarnom položaju platforme. Takva povratna informacija omogućuje korištenje manipulatora u mnogim drugim područjima te je neobično važna u kontrolnoj petlji u većini industrijskih primjena.

Dosadašnji naponi na ovome području bili su malobrojni, pa se tek u radu [NGU 91] (autori Nguyen, Zhou i Antrazi) opisuje uporaba konvergencijskog algoritma u praćenju rada paralelnog manipulatora. U konkretnom slučaju radi se o heksapodu izrađenom u NASA Goddard Space Flight Center-u (slika 2.5, poglavlje 2.3), za koji su autori razvili postupak rješavanja unaprijedne kinematike na osnovu Newton-Raphsonovog algoritma, koristeći položaj i orijentaciju kao varijable. U opisanom postupku manipulator se kretao po predefiniranoj putanji (mijenjajući, doduše, samo položaj, a ne i orijentaciju), dok je računalo rješavalo unaprijednu kinematiku u vremenskim razmacima od 50ms (frekvencija 20Hz). U tim uvjetima autori su postigli stabilan rad algoritma uz vrlo malu granicu pogreške. Ipak, frekvencija rješavanja bila je dosta mala zbog složenosti problema i tadašnje računalne podrške (1991. godina).

U ovom radu predstavljeno je pet različitih funkcija cilja za isti problem unaprijedne kinematike, šest postupaka optimiranja i nekoliko modifikacija koje bi trebale omogućiti bolju konvergenciju i smanjiti vrijeme optimiranja. Nastoji se pronaći takva kombinacija navedenih elemenata koja će omogućiti brzo i precizno rješavanje unaprijedne kinematike, dok su pretpostavke za rješavanje problema u ovome kontekstu poznata početna konfiguracija heksapoda i relativno male promjene položaja tijekom gibanja platforme u prostoru.

5.1. Kriteriji učinkovitosti

U primjeni konvergencijskih postupaka na rješavanje unaprijedne kinematike važne su sposobnosti brzina i preciznost. No osnovni preduvjet uspješnosti postupka je konvergencija ka najbližem rješenju, svojstvo koje algoritam mora posjedovati za

uporabu u ikakvom ozbiljnijem okruženju. Stoga se neophodna svojstva nekoga iterativnog postupka rješavanja unaprijedne kinematike mogu navesti kako slijedi:

1. sposobnost konvergencije ka najbližem rješenju,
2. brzina konvergencije uz zadanu preciznost,
3. maksimalna preciznost koja se može postići.

Prvim kriterijem ispitujemo da li dotični algoritam uopće konvergira, i u kojem postotku slučajeva. Za neku zadanu preciznost možemo usporediti vrijeme potrebno pojedinome algoritmu za pronalaženje rješenja. Konačno, imamo li zadan neki ograničeni vremenski interval, možemo utvrditi koja preciznost se može postići određenim postupkom.

Ispitivanje učinkovitosti pojedinih postupaka u ovom radu sastoji se od dva dijela. U prvom dijelu, statičkom ispitivanju, zadaje se početna konfiguracija heksapoda i skup duljina krakova izračunatih pomoću inverzne kinematike za neku ciljnu poziciju. Učinkovitost postupaka uspoređuje se potom s obzirom na *vrijeme* koje je bilo potrebno da neki algoritam nađe rješenje u okviru zadane preciznosti. Naravno, moguće je i da za određenu ispitnu situaciju pojedini algoritam uopće ne konvergira.

Drugi dio ispitivanja obavlja se u dinamičkim uvjetima. Definirana je putanja pomične platforme i vrijeme koje je na raspolaganju pojedinom algoritmu da izračuna novu konfiguraciju heksapoda, obrnuto proporcionalno frekvenciji uzorkovanja. Uspoređuju se pogreške između stvarnih i izračunatih koordinata pomične platforme tijekom cijelog ispitnog procesa. Karakteristike potonjeg načina rada su uvijek poznata početna pozicija pomične platforme na početku ispitivanja te relativno male promjene vrijednosti varijabli koje opisuju rješenje.

U nastavku ovoga poglavlja prvo su navedeni rezultati dobiveni statičkim ispitivanjem pojedinih algoritama i funkcija cilja. Potom su kombinacije koje najviše obećavaju (tj. imaju malo vrijeme konvergencije i veliku stabilnost postupka) upotrijebljene u dinamičkom ispitivanju, što najvjernije predstavlja 'stvarne' uvjete rada.

Simulacija dinamičkog rada i ispitivanje u statičkim uvjetima provedeni su na osobnom računalu sa PentiumII – Celeron procesorom uz radni takt od 300MHz, pod operacijskim sustavom MSWindows 2000.

5.2. Ispitne konfiguracije

Za potrebe statičkog ispitivanja učinkovitosti postupaka rješavanja valja definirati nekoliko ispitnih konfiguracija koje predstavljaju početne uvjete problema optimiranja. Svaka ispitna konfiguracija ima definirano početno rješenje, istovjetno za sve postupke optimiranja, i krajnji položaj na osnovu kojega su izračunate duljine krakova koje služe kao ulazni podaci. Odabrane ispitne konfiguracije prikazane su u tablici 5.1, a položaj i orijentacija pomične platforme opisani su *Rol-Pitch-Yaw* kutevima.

Ispitne konfiguracije podijeljene su u tri skupine: u prvoj skupini, prvih pet redaka tablice, navedeni su slučajevi u kojima se mijenjaju samo koordinate pomične platforme, a ne i kutevi. U drugoj skupini nalaze se znatno teži ispitni slučajevi u kojima se mora prijeći relativno veliki put unutar prostora rješenja da bi se došlo do minimuma. Konačno, u trećoj skupini nalazi se šest ispitnih konfiguracija u kojima su sve varijable promijenjene, ali za relativno mali iznos (5 stupnjeva po kutu i 0.5 po koordinati položaja). Treba napomenuti da su ispitni problemi iz druge skupine izuzetno teški za konvergencijske algoritme i da se uspješno rješavanje takvih situacija, u kojima se početno rješenje nalazi daleko od stvarnoga rješenja, može postići samo sa polinomskim

postupcima koji nalaze sva rješenja i nemaju početne točke pretraživanja. Tako se odmah može reći da niti jedan iterativni postupak prikazan u ovome radu nije uspio doći do *zadanoga* rješenja u svih deset slučajeva druge skupine. Pojedini postupak bi eventualno u svakom od tih slučajeva konvergirao i našao rješenje, ali ne ono zadano neko neko drugo na koje je algoritam prije naišao. Kako smo već rekli, bez nekih dodatnih informacija uz duljine krakova, jednostavno nije moguće odrediti koje od postojećih rješenja predstavlja stvarni položaj pomične platforme, pa ni u ovom slučaju to ne mora predstavljati veliki nedostatak određenoga postupka. Jedino što možemo učiniti je da damo što bolju početnu aproksimaciju rješenja i nadamo se da promjene varijabli nisu bile velike, što se može postići relativno malim vremenskim razmakom između dva mjerenja duljina, tj. dva izračunavanja rješenja.

Tablica 5.1 Prikaz ispitnih konfiguracija

	Početni položaj (početno rješenje)						Krajnji položaj (stvarno rješenje)					
	α	β	γ	x	y	z	α	β	γ	x	y	z
1	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	8
2	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	-1	7
3	0	0	0	0	0	5	0	0	0	2	-5	8
4	0	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	5	9
5	0	0	0	0	0	5	0	0	0	6	4	7
1	0	0	0	0	0	5	0	45	0	0	0	7
2	0	0	0	0	0	5	40	0	0	0	-5	9
3	0	0	0	0	0	5	10	-15	10	2	3	7
4	0	0	0	0	0	5	-40	40	40	1	-3	6
5	0	0	0	0	0	5	40	-40	-40	2	-5	7
6	0	0	0	0	0	5	20	-45	-10	-2	3	9
7	0	0	0	0	0	5	40	-40	-40	-2	3	9
8	0	0	0	0	0	5	50	-40	-50	1	3	6
9	0	0	0	0	0	5	90	-20	40	3	2	7
10	0	0	0	0	0	5	45	90	0	2	-5	8
1a	0	0	0	0	0	5	5	5	-5	0.4	-0.5	5.4
1b	0	0	0	0	0	5	-5	-5	5	-0.4	0.5	4.5
2a	15	-50	-5	-1.5	3.5	9.5	20	-45	-10	-2	3	9
2b	25	-40	-15	-2.5	2.5	8.5	20	-45	-10	-2	3	9
3a	-45	45	45	3.5	0.5	7.5	-50	40	50	3	1	7
3b	-55	35	55	2.5	1.5	6.5	-50	40	50	3	1	7

Zbog svega navedenog, ispitne konfiguracije iz treće skupine zapravo predstavljaju glavno mjerilo po kome će se odabrati postupci za rad u stvarnom vremenu. Ako neki postupak nije uspio naći rješenje u nekom od tih slučajeva, to najčešće znači da nije pogodan za dinamičko ispitivanje.

5.2.1. Učinkovitost prilagodbi postupaka optimiranja

Prije prikaza rezultata optimiranja, korisno je opisati učinak nekih modifikacija postupaka rješavanja unaprijedne kinematike opisanih u poglavlju 4.2. Ispitne situacije rješavanje su svim kombinacijama šest opisanih metoda optimiranja i pet definiranih funkcija cilja. No osim toga, u svakom od tih slučajeva još je isprobana i primjena dvije modifikacije: generiranje početnog rješenja eliminacijom varijabli i početno pretraživanje po koordinatama pomične platforme.

Generiranje početnog rješenja eliminacijom varijabli oslanja se na pretvorbu zadanoga početnog rješenja u reducirani kanonski oblik te zatim vraćanja u prvobitni oblik položaja i orijentacije. U konkretnoj implementaciji, eliminiranjem varijabli koje

opisuju položaj pomične platforme (x , y , i z koordinata) i ponovnim 'dekodiranjem' tih varijabli pomoću konstanti koje ovise o zadanim duljinama krakova, moguće je odmah odrediti točne vrijednosti koordinata ukoliko početne vrijednosti kuteva odgovaraju stvarnom rješenju. U većini slučajeva, naravno, početne vrijednosti kuteva *ne* odgovaraju krajnjem rješenju, ali se i u tom slučaju mogu dobiti koordinate koje su bliže krajnjem rješenju nego zadane početne vrijednosti. U tablici 5.2 prikazan je učinak generiranja početnog rješenja u ispitnim konfiguracijama koje se koriste u ovome radu.

Tablica 5.2 Početna rješenja generirana eliminacijom varijabli

	Rješenje						Generirane koordinate početnog rješenja		
	α	β	γ	x	y	z	x'	y'	z'
1	0	0	0	0	0	8	0	0	8
2	0	0	0	0	-1	7	0	-1	7
3	0	0	0	2	-5	8	2	-5	8
4	0	0	0	-2	5	9	-2	5	9
5	0	0	0	6	4	7	6	4	7
1	0	45	0	0	0	7	-0.848739	0	7.54036
2	40	0	0	0	-5	9	0.677951	-5	9.32621
3	10	-15	10	2	3	7	1.96873	2.0279	7.69824
4	-40	40	40	1	-3	6	0	0	5
5	40	-40	-40	2	-5	7	1.2304	-2.14625	8.68063
6	20	-45	-10	-2	3	9	-2.78544	3.71162	8.77487
7	40	-40	-40	-2	3	9	-2.7696	5.85375	7.44381
8	50	-40	-50	1	3	6	0.136534	6.40097	6.53874
9	90	-20	40	3	2	7	5.72302	-1.50065	8.02801
10	45	90	0	2	-5	8	-0.0490381	-5	10.2407
1a	5	5	-5	0.4	-0.5	5.4	0.401918	0.0031937	5.30802
1b	-5	-5	5	-0.4	0.5	4.5	-0.401918	-0.0031938	4.72672
2a	20	-45	-10	-2	3	9	-2.78544	3.71162	8.77487
2b	20	-45	-10	-2	3	9	-2.78544	3.71162	8.77487
3a	-50	40	50	3	1	7	4.32264	-2.40097	9.66642
3b	-50	40	50	3	1	7	4.32264	-2.40097	9.66642

Lijevi dio tablice sadrži zadana rješenja iz ispitnih konfiguracija, dok su u desnom dijelu prikazane vrijednosti koordinata x , y i z osi početnog rješenja, generirane eliminacijom varijabli. Iz tablice se može uočiti da predložena prilagodba zaista približava početno rješenje stvarnome, ali ga može i udaljiti ako je rješenje već relativno blizu, kao u slučaju ispitnih konfiguracija iz treće skupine. Vrijednosti kuteva iz originalnog početnog rješenja ostaju nepromijenjene, a generirane vrijednosti koordinata će biti točnije što su vrijednosti kuteva sličnije onima iz stvarnog rješenja. Tako se ovim postupkom za ispitne konfiguracije iz prve skupine, gdje su početni kutevi jednaki onima iz rješenja, odmah dobiva konačni rezultat. Izvođenje ove pretvorbe – na početku optimiranja - vrlo je kratko pa ne predstavlja nikakvo zamjetljivo dodatno procesorsko opterećenje.

Početno pretraživanje predstavlja traženje po koordinatnim osima (x , y i z) od zadanog početnog rješenja, a po postupku opisanom u poglavlju 4.2.2 u kojemu se minimum na pravcu traži kao nul-točka polinoma trećeg stupnja jedne varijable. Pretraživanje na taj način je dosta brzo a empirijski je ograničeno na tri iteracije. Cilj ove, kao i prethodne modifikacije, ubrzavanje je procesa optimiranja i eventualno poboljšavanje konvergentnih svojstava. Učinak početnog pretraživanja prikazan je u tablici 5.3.

Na prvi pogled se može uočiti da primjena ovoga postupka nije tako korisna, iako ima više uspjeha u slučaju relativno sličnoga početnoga rješenja, no u tome slučaju metoda optimiranja je ionako u stanju sama pronaći rješenje. Ipak, u nekim je ispitnim

konfiguracijama i kod određenih metoda i ova intervencija imala pozitivan učinak. Konačno, isprobana je i kombinacija dvije opisane modifikacije, u kojoj se prvo primjenjuje generiranje rješenja eliminacijom varijabli a zatim i početno pretraživanje. Ukupne posljedice koje oba postupka imaju na početno rješenje prikazane su u tablici 5.4, iako se njihova stvarna korisnost može ocijeniti tek pri cjelokupnom postupku optimiranja.

Tablica 5.3 Nova početna rješenja dobivena početnim pretraživanjem

	Rješenje						Koordinate dobivene početnim pretraživanjem		
	α	β	γ	x	y	z	x'	y'	z'
1	0	0	0	0	0	8	3.86553	0.0004668	7.00412
2	0	0	0	0	-1	7	-0.970714	-3.10108	6.28021
3	0	0	0	2	-5	8	7.09782	-4.87228	4.34532
4	0	0	0	-2	5	9	-8.16065	4.92575	4.37502
5	0	0	0	6	4	7	8.30911	3.69918	4.2749
1	0	45	0	0	0	7	3.80204	0	6.19268
2	40	0	0	0	-5	9	7.82936	-6.24552	2.9553
3	10	-15	10	2	3	7	4.28631	4.00345	5.35969
4	-40	40	40	1	-3	6	5.46616	-1.82108	5.19514
5	40	-40	-40	2	-5	7	-6.4577	-5.49673	3.65632
6	20	-45	-10	-2	3	9	-8.13642	2.6376	5.0209
7	40	-40	-40	-2	3	9	-8.17436	2.42831	5.34489
8	50	-40	-50	1	3	6	-2.93665	3.86176	5.63736
9	90	-20	40	3	2	7	6.66142	-0.64216	6.05794
10	45	90	0	2	-5	8	8.71407	-5.27815	2.44975
1a	5	5	-5	0.4	-0.5	5.4	0.621279	-0.793587	5.36285
1b	-5	-5	5	-0.4	0.5	4.5	-0.618239	0.66124	4.47541
2a	20	-45	-10	-2	3	9	-0.973149	2.12332	9.50528
2b	20	-45	-10	-2	3	9	-2.81422	3.21978	8.8311
3a	-50	40	50	3	1	7	2.58587	1.28152	7.38008
3b	-50	40	50	3	1	7	2.9959	0.730283	7.04088

Tablica 5.4 Kumulativni učinak postupaka generiranja početnog rješenja

	Rješenje						Koordinate poč. rješenja nakon primjenjene obje modifikacije		
	α	β	γ	x	y	z	x'	y'	z'
1	0	0	0	0	0	8	0	0	8
2	0	0	0	0	-1	7	0	-1	7
3	0	0	0	2	-5	8	2	-5	8
4	0	0	0	-2	5	9	-2	5	9
5	0	0	0	6	4	7	6	4	7
1	0	45	0	0	0	7	1.77884	0	7.0456
2	40	0	0	0	-5	9	0.452801	-5.87977	8.61757
3	10	-15	10	2	3	7	0.873645	2.57663	7.46485
4	-40	40	40	1	-3	6	5.46616	-1.82108	5.19514
5	40	-40	-40	2	-5	7	-1.63489	-4.6788	7.79234
6	20	-45	-10	-2	3	9	-4.34888	1.86975	8.71544
7	40	-40	-40	-2	3	9	-4.2353	3.72161	8.33645
8	50	-40	-50	1	3	6	-0.367361	2.67442	6.93033
9	90	-20	40	3	2	7	3.63096	-0.348478	8.25713
10	45	90	0	2	-5	8	3.65653	-4.12608	8.91069
1a	5	5	-5	0.4	-0.5	5.4	0.616181	-0.771734	5.36663
1b	-5	-5	5	-0.4	0.5	4.5	-0.618799	0.663021	4.47507
2a	20	-45	-10	-2	3	9	-1.19574	2.74063	9.32222
2b	20	-45	-10	-2	3	9	-2.11469	2.62731	9.21145
3a	-50	40	50	3	1	7	2.80311	1.31734	7.27932
3b	-50	40	50	3	1	7	2.76742	0.702732	7.15158

5.3. Ispitivanje u statičkim uvjetima

Ovaj dio ispitivanja učinkovitosti obavljen je koristeći prethodno definirane ispitne konfiguracije. Svaka od pet funkcija cilja kombinirana je sa šest algoritama, a najbolje kombinacije upotrebljene su u simulaciji dinamičkog rada u drugom dijelu ovoga poglavlja. Kako glavna namjena iterativnih metoda zapravo nije rad u statičkim uvjetima, jer se tada koriste postupci koji pronalaze sva rješenja, nijedna od isprobanih kombinacija nije u svakoj ispitnoj konfiguraciji konvergirala uvijek na zadano rješenje, nego se u postupku rješavanja nerijetko pronašlo neko drugo rješenje, koje također predstavlja jednakopravni minimum funkcije greške, no koje ne opisuje stvarni položaj pomične platforme. Postupci generiranja početnog rješenja su ponegdje i popravili udio uspješne konvergencije, ali su ponegdje imali i suprotan učinak.

Rezultati ispitivanja u statičkim uvjetima predstavljaju vrijeme u milisekundama potrebno određenom postupku da pronađe zadano rješenje. Postupak bi se zaustavljao kada bi se vrijednost funkcije cilja spustila ispod određene prethodno definirane vrijednosti koja je prilagođena tako da se za svaku funkciju postiže približno jednaka preciznost. Definirana minimalna preciznost u statičkim uvjetima nije rigorozna i iznosi oko 5×10^{-4} za koordinate položaja i oko 5×10^{-3} za vrijednosti kuteva (u stupnjevima). Vremena optimiranja prikazana su za svaku funkciju cilja i za svaki postupak posebno, a za svaku od tih kombinacija postoji ukupno četiri varijante, ovisno o primjeni pojedinog postupka generiranja i modificiranja početnog rješenja, pa su tako ispitane sljedeće inačice:

- ❑ nemodificirani algoritam, s oznakom 'A',
- ❑ algoritam uz generiranje početnog rješenja eliminacijom varijabli, s oznakom 'B',
- ❑ algoritam uz početno pretraživanje po koordinatama, s oznakom 'C' te
- ❑ algoritam uz generiranje početnog rješenja i početno pretraživanje, s oznakom 'D'.

Predstavljanje rezultata optimiranja u ovom je poglavlju organizirano po funkcijama cilja.

5.3.1. Optimiranje prikaza funkcijom F_1 – položaj i orijentacija

Funkcija F_1 i pripadni odabir varijabli kao koordinata položaja i kuteva orijentacije predstavljaju 'standard' u rješavanju unaprijedne kinematike, kao što je i najčešće upotrebljavana metoda optimiranja Newton-Raphsonov algoritam. Rezultati rješavanja unaprijedne kinematike u opisanim ispitnim konfiguracijama prikazani su u tablici 5.5.

U tablici su navedene vremenske vrijednosti u milisekundama koje su bile potrebne pojedinome algoritmu da pronađe rješenje. Varijante za svaki algoritam označene su slovima od **A** do **B**, ovisno o primjeni postupka generiranja početnog rješenja. Slučajevi kada je algoritam pronašao neko drugo rješenje umjesto zadanoga osjenčani su tamnije. Znak '-' označava da algoritam za konkretni ispitni problem nije uspio naći rješenje, a ta pojava uključuje nekoliko mogućnosti: ili ispitivani algoritam divergira ili je pronašao lokalni minimum ili jednostavno nije uspio s dovoljnom preciznošću odrediti rješenje u nekom razumnom vremenu.

Tablica 5.5 Rezultati optimiranja funkcije F_1

	Hooke-Jeeves postupak				Powellov postupak				Metoda najbržeg spusta			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	0.7	0.1	3.2	0.9	26	12	137	12.9	5.3	0.1	263	11
2	0.9	0.1	4.6	0.9	228	12	258	12.9	165	0.1	180	11
3	2.5	0.1	21.5	0.9	454	12	303	12.9	273	0.1	297	11
4	15	0.1	11.8	0.9	355	12	351	12.9	-	0.1	-	11
5	2.9	0.1	12.3	0.9	643	12	395	12.9	477	0.1	603	11
1	1	4	5	4.6	71	69	126	84	296	532	368	552
2	3	5.3	7.6	7.3	311	249	-	233	276	-	-	300
3	1.4	5.5	6.3	6.4	272	320	262	319	299	338	275	279
4	1.5	7.4	8.3	8.9	336	336	609	630	360	365	399	400
5	6.4	6.4	7.4	7.4	-	-	1775	-	-	305	-	-
6	32.5	42.3	57.2	36.8	320	216	605	296	-	-	-	-
7	11	9.3	9.2	10	494	287	-	415	-	-	-	-
8	13.9	12.5	14.4	14.7	914	-	532	328	1433	1765	-	1372
9	26.4	29.9	9.7	9.3	707	1040	632	613	-	-	1360	1342
10	689	14.3	10.8	13.2	212	223	-	264	319	-	1365	-
1a	3.5	3.3	4.2	4.1	201	111	108	144	190	243	173	175
1b	3.5	3.4	4.4	4.5	126	124	193	196	116	148	148	120
2a	2.2	7	7.4	7.4	213	137	299	191	-	-	-	-
2b	2.4	6.4	8.3	8.3	248	250	267	314	-	-	-	-
3a	19.9	13.9	19.6	15.1	454	409	444	258	-	-	-	-
3b	17.6	16.2	12.1	13.6	644	922	298	257	-	-	-	-
	Newton-Raphsonov postupak				Newton-Raphsonov postupak&konst. Jacobijan				Postupak po Fletcheru i Powellu			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	0.4	0.1	1.2	0.9	1.5	0.1	1.7	0.9	3.9	0.1	-	2.6
2	0.3	0.1	1.5	0.9	1.4	0.1	1.5	0.9	-	0.1	-	2.6
3	0.3	0.1	1.2	0.9	1.5	0.1	2.4	0.9	-	0.1	-	2.6
4	0.3	0.1	1.3	0.9	1.5	0.1	2.4	0.9	-	0.1	-	2.6
5	0.4	0.1	1.1	0.9	1.2	0.1	2.3	0.9	-	0.1	-	2.6
1	31	31	33	34	7.9	7.9	8.7	8.7	-	-	-	-
2	31	31	32	33	4.6	4.6	5.4	5.4	-	-	-	-
3	71	73	74	78	6.2	2	7	7	-	-	-	-
4	86	86	88	93	10.2	10.2	11	11	-	-	-	-
5	112	636	656	584	-	-	-	-	-	-	-	-
6	860	682	77	303	12.3	12.4	13.2	13.2	-	-	-	-
7	1800	3224	461	768	18.3	18.4	19.1	19.1	-	-	-	-
8	64	64	84	67	42.6	42.7	43.4	43.4	-	-	-	-
9	512	86	478	190	-	-	-	-	-	-	-	-
10	38	38.1	40	40	20.3	20.4	21.1	21.2	-	-	-	-
1a	32	32	33	34	6.7	6.7	7.4	7.4	-	-	-	-
1b	26	-	27	28	7.6	7.7	8.4	8.4	-	-	-	-
2a	-	81	432	66	10.3	10.3	11.1	13.1	-	-	-	-
2b	-	-	-	627	10.5	10.6	11.3	13.1	-	-	-	-
3a	705	1125	596	698	27	27.1	27.9	38.4	-	-	-	-
3b	241	106	882	840	26.5	26.3	26.9	38.3	-	-	-	-

Iz tablice se može vidjeti da je najuspješnija metoda optimiranja primijenjena na funkciju F_1 bilo Hooke-Jeeves postupak, dok je nešto manje uspješno prošao Newton-Raphsonov postupak s konstantnim Jacobijanom. Također se može uočiti kako je generiranje početnog rješenja, za Hooke-Jeevesov postupak, smanjilo broj slučajeva u kojemu algoritam nije uspio pronaći zadano rješenje. Potrebno vrijeme je za ovaj algoritam također u prihvatljivim granicama, što sugerira uporabu ove kombinacije u simulaciji dinamičkog rada.

5.3.2. Optimiranje prikaza funkcijom F_2 – kanonski oblik sa 9 varijabli

Kanonski oblik funkcije cilja nema transcendentnih trigonometrijskih funkcija, isto kao i izvedenice sa šest ili tri varijable, pa se može očekivati da će ovaj oblik biti

primjereniji optimiranju s algoritmima koji pretpostavljaju ponašanje ciljne funkcije slično kvadratnoj funkciji. Rezultati optimiranja prikazani su u tablici 5.6.

Tablica 5.6 Rezultati optimiranja funkcije F_2

	Hooke-Jeeves postupak				Powellov postupak				Metoda najbržeg spusta			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	12	0.1	114	0.9	1.1	0.6	-	1.3	9.1	2.4	9.4	4.1
2	0.8	0.1	12.1	0.9	-	0.6	-	1.3	4.6	2.4	5.7	4.1
3	220	0.1	156	0.9	-	0.6	-	1.3	11.8	2.4	14.3	4.1
4	670	0.1	218	0.9	-	0.6	-	1.3	9.3	2.4	4.4	4.1
5	138	0.1	79	0.9	-	0.6	-	1.3	16.4	2.4	5.7	4.1
1	10.5	10.9	274	69	-	40.4	-	-	2.9	2.9	5.8	5.6
2	150	41	71	97	-	-	-	-	9	3.4	-	4.6
3	110	130	90	142	-	-	-	-	-	4.3	7	3.9
4	120	119	91	95	-	-	-	-	6.3	6.3	6.7	15.6
5	295	190	149	151	-	-	-	-	9	10.2	19.2	15.8
6	120	120	126	95	-	-	-	-	5.1	4.2	4.4	5.4
7	172	83	144	155	-	-	-	-	6.9	7.9	-	6.9
8	156	107	163	122	-	-	-	-	6.4	6.4	7.2	7.2
9	94	468	364	259	-	-	-	-	14.4	10.8	9.8	8.7
10	116	105	140	112	-	-	-	-	5.8	4.4	11.4	10.6
1a	80	67	96	119	-	-	-	-	3.4	3.4	3.9	3.8
1b	89	106	89	99	-	-	-	-	3.5	3.4	4.7	3.8
2a	60	124	98	120	-	-	-	-	5.2	3.4	11.4	11.4
2b	96	80	112	105	-	-	-	-	3.4	3.3	4.7	3.8
3a	148	160	131	616	-	-	-	-	7.2	7.2	4.8	5.6
3b	152	150	273	478	-	-	-	-	10.9	10.8	5.3	7.7
	Newton-Raphsonov postupak				Newton-Raphsonov postupak&konst. Jacobian				Postupak po Fletcheru i Powellu			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	3.4	0.8	4.2	1.5	0.5	0.1	1.3	0.9	5.9	0.1	9.1	1
2	2.7	0.8	3.5	1.5	0.3	0.1	1.1	0.9	4.1	0.1	4.4	1
3	3.4	0.8	4.2	1.5	1.4	0.1	2.2	0.9	15.9	0.1	14.3	1
4	3.4	0.8	4.9	1.5	0.8	0.1	1.6	0.9	9.6	0.1	4.7	1
5	4.1	0.8	4.2	1.5	0.3	0.1	1.1	0.9	14.6	0.1	6.9	1
1	3.4	2.8	4.2	4.2	0.6	0.6	1.3	1.3	3.3	2.7	7.1	9.2
2	4.1	2.8	5.9	3.5	0.8	0.6	-	1.4	8.1	3.2	-	4.9
3	3.4	2.8	4.2	3.5	0.3	0.2	1.1	1.1	9.1	4.3	6.8	4.4
4	4.1	4.1	4.8	4.9	0.5	0.5	1.3	1.4	8.9	8.8	10.4	10.4
5	7.4	6.8	8.2	8.3	-	2.3	-	2.9	9.2	8.7	17.8	15.5
6	4.1	2.8	4.8	4.2	-	-	-	-	4.7	4	5.5	4.9
7	4.1	3.5	4.8	4.2	-	-	-	-	6.7	7.5	10.9	6.4
8	4.7	-	5.9	-	1	-	1.7	-	6.1	8.5	7.1	9.1
9	688	128	10.8	8.9	-	-	-	-	13.4	10.7	8.9	8.6
10	4.7	4.1	6.2	5.6	-	-	-	-	6.2	4.4	12.2	10.9
1a	2.7	2.8	3.5	3.5	0.1	0.1	0.9	0.9	3.2	3.2	3.8	3.2
1b	2.7	2.8	3.5	3.5	0.2	0.2	0.9	0.9	3.2	3.3	3.8	3
2a	2.7	2.8	3.5	3.5	-	-	-	-	12.4	3.2	11.2	10.8
2b	2.7	2.1	3.5	2.9	-	-	-	-	3.2	3	4.5	3.8
3a	4.1	3.4	3.5	4.2	0.6	0.6	1.6	1.6	6.8	7.1	4.6	5.6
3b	3.4	2.8	4.2	4.2	0.7	0.7	1.5	1.5	10.7	10.5	5.3	7.4

Uvjerljivo najbolje rezultate u za ovu funkciju cilja postigao je Newton-Raphsonov postupak, dok je inačica sa konstantnim Jacobianom bila dosta brža ali sa osjetno slabijim konvergencijskim svojstvima. Neočekivano slab učinak imao je postupak po Fletcheru i Powellu, za koji se očekivalo da će vrlo dobro pratiti funkciju polinorskog oblika. Međutim, u većini slučajeva algoritam je konvergirao ka nekom drugom rješenju, te zbog toga ne nudi dovoljno pouzdanosti.

5.3.3. Optimiranje prikaza funkcijom F_3 – kanonski oblik sa 6 varijabli

Ovaj oblik kanonskog prikaza problema unaprijedne kinematike ima najbolji omjer broja nepoznanica i složenosti funkcije jer je broj varijabli istovjetan onome kod položaja i orijentacije, dok je najveći stupanj potencija varijabli zadržan na 2, kao kod kanonskog oblika s devet varijabli. Za ovu funkciju cilja očekuju se slična konvergencijska svojstva kao i kod prethodne, s tim da je zbog smanjenog broja varijabli moguće smanjenje vremena optimiranja. Rezultati su za ovaj prikaz navedeni u tablici 5.7.

Tablica 5.7 Rezultati optimiranja funkcije F_3

	Hooke-Jeeves postupak				Powellov postupak				Metoda najbržeg spusta			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	7.5	0.1	7.5	0.9	1.3	0.7	2	1.4	10	1.5	27	2.3
2	15	0.1	7.6	0.9	1.9	0.7	2.7	1.4	6.4	1.5	5.1	11.8
3	5	0.1	5.5	0.9	1.3	0.7	2	1.4	9.7	1.5	11	4.3
4	25	0.1	85	0.9	1.3	0.7	2	1.4	3.4	1.5	3.8	2.8
5	21	0.1	14	0.9	1.3	0.7	2	1.4	10.5	1.5	13	3.3
1	7	5	8.3	5.7	227	58	142	-	3.9	2.3	3.5	3.9
2	3	2.3	-	4.2	61	-	-	-	5.2	2.4	-	5
3	12	13	24	11.8	35	90	51	192	6.9	3.4	7.3	3
4	34	18.9	25	6.9	752	-	951	-	7.7	7.7	6.7	6.8
5	10	30.7	6.7	26.8	108	-	-	-	5.4	8.5	11.8	6.4
6	34	18.7	45	20	31	-	-	-	-	3.2	-	4.2
7	24	23.3	26	18	-	-	-	-	11.2	6.5	12	6.9
8	20	38	16	23	-	-	-	-	10	9.8	9.9	10
9	12	14	20	15.6	-	-	-	-	4.3	3.1	6.8	8.7
10	6.1	4	7.1	5.5	-	24.8	-	-	5.5	5.8	7.4	6.6
1a	3.8	3.7	5.5	4.7	31	14.4	31	-	3.3	2.3	3.3	3.3
1b	4.3	4.4	6.3	7.1	23	20.2	-	-	2.7	2.3	3.6	3.4
2a	17	1108	16	16	-	29.5	-	-	4.9	2.3	5.5	4
2b	-	16.1	38	14.2	-	32.1	-	-	7.7	2.3	8.2	3.2
3a	30	28.3	34	34	-	-	-	-	10.1	5.8	4.9	7.3
3b	31	45	34	36	-	-	-	-	10.8	9.2	6.6	7.7
	Newton-Raphsonov postupak				Newton-Raphsonov postupak&konst. Jacobian				Postupak po Fletcheru i Powellu			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	1.8	0.4	2.3	1.2	0.3	0.1	1	0.9	8.4	0.1	4.4	1
2	1.4	0.4	2.3	1.2	0.2	0.1	1	0.9	6	0.1	4.5	1
3	1.8	0.4	2.6	1.2	0.2	0.1	1	0.9	8.5	0.1	10.9	1
4	1.8	0.4	2.6	1.2	-	0.1	-	0.9	3.9	0.1	3.5	1
5	1.4	0.4	2.6	1.2	0.2	0.1	1	0.8	9.5	0.1	11.6	1
1	1.8	1.4	2.6	2.1	0.2	0.1	1	1	3.6	2.1	4.6	3.9
2	2.1	1.4	2.9	2.2	-	-	-	-	6.7	2.4	-	4.4
3	1.4	1.4	2.2	2.1	0.2	0.2	1	1	6	3.2	6.2	3.5
4	2.1	2	2.9	2.8	-	-	-	-	5.8	5.8	6.2	6.3
5	3.8	3.5	4.7	4.1	0.8	1.2	1.5	1.9	9.6	8.4	21	7.6
6	2.1	1.4	2.9	2.2	-	-	-	-	6.6	5.1	-	3.7
7	2.1	1.7	3.7	2.5	-	-	-	-	8.9	10.5	9.8	6.7
8	2.4	3011	3.3	-	0.4	-	1.2	-	5.8	10.9	9.7	9.3
9	-	-	-	-	-	-	-	-	8.6	3.1	15.3	3.8
10	2.8	2.1	4	2.8	-	-	-	-	4.4	5.7	9.1	6.5
1a	1.8	1.4	2.2	2.2	0.1	0.1	0.9	0.9	2.4	2.2	3.1	3
1b	1.4	1.4	2.2	2.2	0.1	0.1	0.9	0.9	2.4	2	3.2	3.1
2a	1.4	1.1	2.2	1.8	-	-	-	-	6.6	2.1	5.3	7.8
2b	1.4	1.1	2.2	1.8	-	-	-	-	6.6	2.2	4.1	8.1
3a	3.5	1.7	4.6	2.5	-	-	-	-	8.1	5.5	4.6	10.6
3b	1.8	1.4	2.6	2.2	-	-	-	-	8.1	7.7	6.5	6.7

Već se na prvi pogled može uočiti kako su najbolji rezultati (nažalost, i jedini prihvatljivi) postignuti Newton-Raphsonovim postupkom, te kako je utrošeno vrijeme optimiranja izuzetno malo. Dobiveni rezultati upućuju na uporabu ove i prethodne

funkcije u kombinaciji sa Newton-Raphsonovim algoritmom za simulaciju dinamičkog rješavanja unaprijedne kinematike.

5.3.4. Optimiranje prikaza funkcijom F_4 – kanonski oblik sa 3 varijable

Reducirani oblik kanonskog prikaza ima samo tri varijable, što omogućuje relativno brzo pretraživanje u prostoru rješenja. Međutim, smanjivanje broja varijabli nerijetko ima za posljedicu i pogoršavanje konvergencijskih svojstava, što bi u ovom slučaju bila prevelika cijena. U tablici 5.8 prikazani su rezultati optimiranja za ovu funkciju.

Tablica 5.8 Rezultati optimiranja funkcije F_4

	Hooke-Jeeves postupak				Powellov postupak				Metoda najbržeg spusta			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	0.1	0.1	-	0.9	4.6	4.6	21	5.3	-	65	-	-
2	0.1	0.1	2.3	0.9	4.6	4.6	19	5.3	-	110	-	-
3	-	0.1	-	0.9	-	4.6	21	5.3	108	234	-	-
4	-	0.1	-	0.9	14.7	4.6	-	5.3	-	154	-	-
5	145	0.1	3	0.9	-	4.6	16	5.3	-	143	-	-
1	12	20	-	25	-	128	127	22	-	320	-	-
2	0.1	2	-	2.3	4.6	-	28	-	-	354	-	-
3	3.7	21	-	41	-	85	-	-	70	72	-	-
4	42	75	-	-	-	-	-	-	170	-	-	-
5	85	-	-	-	-	-	-	-	-	143	-	-
6	84	-	-	-	-	-	-	-	-	29	-	-
7	39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	24	-	-	-	81	-	-	-	-	46	-	-
9	13.9	-	80	76	1097	-	-	-	-	-	-	-
10	-	2.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1a	32	92	-	95	-	258	-	134	56	-	74	-
1b	64	-	-	-	-	118	-	-	-	-	-	42
2a	22	43	37.5	49	-	-	-	-	-	-	-	-
2b	44	22	42	35	-	-	-	-	-	-	-	-
3a	3.1	-	238	208	-	-	-	-	-	-	-	-
3b	67	55	69	58	-	-	-	-	-	-	-	-
	Newton-Raphsonov postupak				Newton-Raphsonov postupak&konst. Jacobian				Postupak po Fletcheru i Powellu			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	0.2	0.2	2.6	1	0.05	0.05	-	-	0.05	0.1	-	2
2	0.2	0.2	2.6	1	0.05	0.05	-	-	0.05	0.1	31	2
3	-	0.2	2.6	1	-	0.05	-	0.9	76	0.1	-	2
4	1.9	0.2	-	1	-	0.05	-	0.9	-	0.1	-	2
5	-	0.2	2.8	1	-	0.05	-	0.9	61	0.1	230	2
1	1	1.8	2.8	2.8	-	-	-	-	-	289	-	-
2	1.3	1.6	2.6	2.2	-	-	-	-	0.05	322	-	-
3	1	0.9	1.7	1.7	-	-	-	-	18.4	74	61	-
4	10.2	10.1	1.8	1.8	-	-	-	-	-	11.5	-	-
5	-	-	-	1.6	2.4	0.5	-	-	-	64	-	-
6	-	1.1	-	-	-	-	-	-	76.1	28.7	-	-
7	0.9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	1	-	1.7	-	0.6	-	-	-	45.6	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	41.4	231	-	278
10	2.5	2.1	-	-	-	-	-	-	382	-	-	-
1a	-	1	-	1.8	-	-	-	-	89	70	-	-
1b	1	-	1.9	-	0.7	-	1.5	-	52	-	75	-
2a	0.6	0.8	1.4	-	-	-	-	-	55	103	-	54
2b	0.6	0.6	1.5	1.4	-	-	-	-	-	36	-	59
3a	0.6	0.9	1.8	2.1	-	-	-	-	114	91	120	89
3b	0.7	0.7	1.4	1.5	-	-	-	-	181	116	55	129

Iako reducirani kanonski oblik sa samo tri varijable izgleda dobro 'na papiru', pri optimiranju, na žalost, nije postigao zadovoljavajuće rezultate. Moguće je da bi uporaba nekog posebno prilagođenog algoritma polučila bolji učinak s ovom funkcijom, no u ovome radu nije pronađen postupak sa odgovarajućim svojstvima.

5.3.5. Optimiranje prikaza funkcijom F_5 – položaj i orijentacija po Reboulet-u

Funkcija F_5 izračunava se na identičan način kao i F_1 , samo što je prethodno iz varijabli koje opisuju rotaciju potrebno izračunati elemente rotacijske matrice. Rezultati optimiranja ove funkcije prikazani su u tablici 5.9.

Tablica 5.9 Rezultati optimiranja funkcije F_5

	Hooke-Jeeves postupak				Powellov postupak				Metoda najbržeg spusta			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	4.7	0.1	3.1	0.9	25.4	11.9	92	12.7	91	340	199	258
2	0.6	0.1	3.7	0.9	219	11.9	170	12.7	171	222	173	218
3	11.3	0.1	9.4	0.9	699	11.9	-	12.7	-	380	124	523
4	3.6	0.1	8.2	0.9	472	11.9	1066	12.7	-	223	-	138
5	3.3	0.1	12.2	0.9	574	11.9	215	12.7	208	344	-	1237
1	3.3	3.3	4.1	4.3	269	64	238	138	-	-	1331	-
2	5.3	5.0	-	5.6	-	-	-	175	-	-	-	-
3	5.2	4.9	5.8	6.3	233	188	-	322	-	-	-	-
4	8.2	7.1	10.2	5.5	-	-	358	357	-	-	-	-
5	7	21.2	6.5	20.8	-	-	2320	-	-	-	-	-
6	10.6	6.2	40.9	5.8	-	199	-	267	-	342	-	-
7	-	7.3	-	9.1	419	210	-	311	-	-	-	-
8	-	8.5	11.8	9.7	245	-	-	517	-	-	-	-
9	8.2	6.5	10.3	13.9	-	968	-	811	-	-	-	-
10	-	9.2	-	8.3	-	-	754	-	-	-	528	-
1a	4	4.2	4.7	4.7	220	196	112	-	-	133	273	254
1b	4.2	4.2	4.4	4.5	126	112	185	181	180	-	233	235
2a	5.3	6.9	7	6.5	149	-	165	-	-	339	-	-
2b	4.8	5.4	6.9	6.4	156	-	142	-	-	252	-	-
3a	13.1	11.8	14	12.1	-	-	-	-	95	-	-	-
3b	10.5	9.6	9.7	9.8	-	-	-	-	87	-	-	-
	Newton-Raphsonov postupak				Newton-Raphsonov postupak&konst. Jacobian				Postupak po Fletcheru i Powellu			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	0.5	0.4	1.3	1.2	0.4	0.1	1.2	0.8	200	23	-	26
2	0.4	0.4	1.7	1.2	0.2	0.1	1.1	0.8	29	32	-	30
3	0.5	0.4	1.3	1.2	0.5	0.1	1.3	0.8	-	292	-	84
4	0.6	0.4	1.4	1.2	0.9	0.1	1.8	0.8	80	222	-	83
5	0.7	0.4	1.3	1.2	0.3	0.1	1.1	0.8	-	26	-	24
1	0.8	0.5	1.9	1.3	0.4	0.4	1.2	1.1	34	-	38	-
2	0.6	0.4	1.4	1.2	-	-	-	-	-	-	-	-
3	0.7	0.5	1.3	1.3	0.2	0.2	1	1	-	-	-	-
4	-	-	2.6	2.2	0.4	0.4	1.2	1.2	-	-	-	-
5	1.6	1.8	2.6	2.6	0.6	0.6	-	-	-	-	-	-
6	0.6	0.5	1.5	1.3	-	-	-	-	-	-	-	-
7	0.7	0.9	1.6	1.7	4	3.5	4.6	3.9	-	-	-	-
8	-	-	-	-	0.6	0.6	1.4	1.4	-	-	-	-
9	2.4	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	0.8	-	1.6	2.1	2.1	2.1	2.1	-	-	-	-
1a	0.5	0.5	1.3	1.2	0.1	0.1	0.9	0.9	-	-	-	-
1b	0.4	0.4	1.4	1.3	0.1	0.1	0.9	0.9	-	-	-	-
2a	0.4	0.5	1.3	1.3	-	-	-	-	-	-	-	-
2b	0.4	0.5	1.2	1.3	-	-	-	-	-	-	-	-
3a	-	-	-	-	0.8	0.8	1.6	1.6	-	-	-	-
3b	-	-	-	-	0.5	0.5	1.6	1.6	-	-	-	-

Kada je orijentacija pomične platforme identična orijentaciji osnovne platforme, tj. kada su sva tri kuta jednaka nuli, tada vektor rotacije postaje nedefiniran, a derivacija funkcije u takvoj točki teži ka beskonačnosti. Zbog toga je početno rješenje pri rješavanju funkcije F_5 izmijenjeno u odnosu na početno rješenje za ostale funkcije cilja, i to tako da je kut rotacije oko x osi postavljen na 10 stupnjeva umjesto nula. To izmjena je potrebna u primjeni algoritama koji koriste derivacije funkcije ili Jacobijevu matricu sustava jednadžbi, kao što su metoda najbržeg spusta, Newton-Raphsonov postupak te postupak po Fletcheru i Powellu.

Iz rezultata se može vidjeti da je postupak optimiranja ove funkcije u pravilu brži nego kod većine ostalih funkcija, no zbog slabe konvergencije funkcija je primjenjiva jedino uz Hooke-Jeevesov algoritam. U toj kombinaciji postižu se vrlo dobra vremena optimiranja, a postotak konvergencije za zadane ispitne konfiguracije je u ovom slučaju najveći, uz nezanemariv pozitivni utjecaj postupka generiranja početnog rješenja (stupac B, Hooke-Jeevesov algoritam).

5.4. Ispitivanje u dinamičkim uvjetima

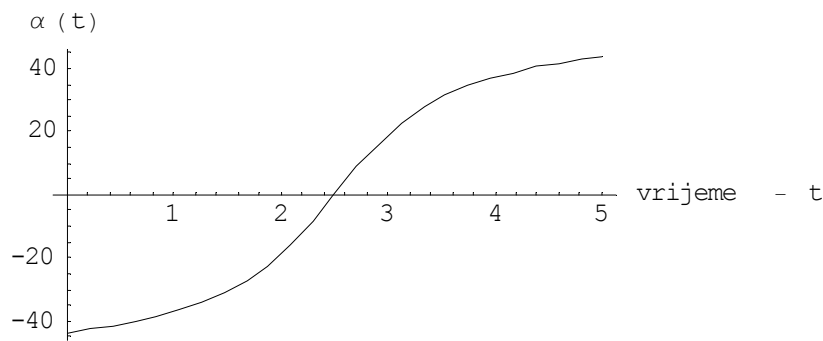
Drugi dio ispitivanja učinkovitosti rješavanja unaprijedne kinematike odvija se u simuliranim dinamičkim uvjetima. Uz poznati početni položaj definirane su putanje pomične platforme koje postupak mora 'slijediti' u određenim vremenskim intervalima. Simulacija je provedena tako da se na početku daje početna konfiguracija heksapoda, a zatim se u jednakim vremenskim razmacima generiraju nove vrijednosti duljina krakova koje predstavljaju pomak pomične platforme. Unutar toga vremenskog razmaka algoritam optimiranja mora što bolje izračunati novu poziciju pomične platforme, koja u sljedećem intervalu postaje početna točka novog procesa rješavanja. Na kraju svakoga intervala izračunava se razlika (pogreška) između stvarnog i izračunatog rješenja unaprijedne kinematike.

Za potrebe simulacije u ovom radu definirano je nekoliko pomaka heksapoda na osnovu kojih se računaju duljine krakova koje služe kao ulazna informacija postupka optimiranja. Prvi pomak je najjednostavniji i 'najlakši' jer uključuje promjene samo tri veličine, dvije koordinate položaja platforme i jednoga kuta:

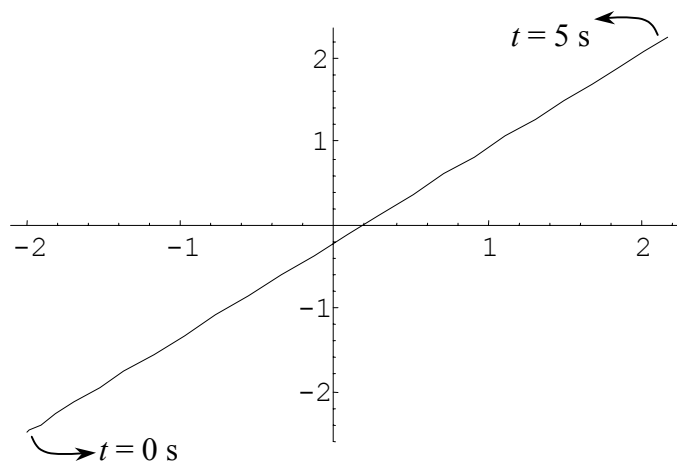
$$\begin{aligned} x(t) &= -2 + 7 \cdot \left[1 + 3 \cdot \exp\left(-t \frac{3.5}{7.5}\right) - 4 \cdot \exp\left(-t \frac{3.5}{10}\right) \right], \\ y(t) &= -2.5 + 8 \cdot \left[1 + 3 \cdot \exp\left(-t \frac{3.5}{7.5}\right) - 4 \cdot \exp\left(-t \frac{3.5}{10}\right) \right], \\ \alpha(t) &= 35 \cdot \arctan(1.2 \cdot t - 3), \\ \beta &= \gamma = 0, \quad z = 7, \\ 0 &\leq t \leq 5. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Parametar t označava vrijeme i u prvom se pomaku mijenja od nula do 5 sekundi. Središte pomične platforme u ovome pomaku se kreće po pravcu, iako ne konstantnom brzinom, pa je gibanje relativno lako pratiti. U isto se vrijeme kut α mijenja po inverznoj tangens funkciji. Definicija prvoga pomaka preuzeta je iz [NGU 91] uz dodatak mijenjanja vrijednosti kuta α , koji je u ispitnome gibanju u navedenome radu ostajao

konstantnoga iznosa. Funkcija kuta α u ovisnosti o vremenu prikazana je na slici 5.1, a na slici 5.2 prikazano je gibanje središta pomične platforme u x - y ravnini.



Slika 5.1 Kut α kao funkcija vremena – prvi pomak



Slika 5.2 Kretanje središta pomične platforme u x - y ravnini – prvi pomak

Drugi pomak definiran je izrazima 5.2, a u njemu se središte pomične platforme giba po elipsi u x - y ravnini čineći zatvorenu krivulju u vremenskom razmaku od ukupno 4 sekunde. U isto vrijeme mijenjaju se i sve ostale varijable po različitim frekvencijama i amplitudama, što ovaj pomak čini umnogome kompliciranijim.

$$x(t) = 2 \cdot \sin\left(t \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y(t) = 2.2 \cdot \cos\left(t \frac{\pi}{2}\right),$$

$$z(t) = 7 + 1.5 \cdot \sin(2t),$$

$$\alpha(t) = 25 \cdot \sin(1.8t),$$

$$\beta(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 5 \cdot \cos(4t),$$

$$\gamma(t) = 15 \cdot \arctan(2t - 4),$$

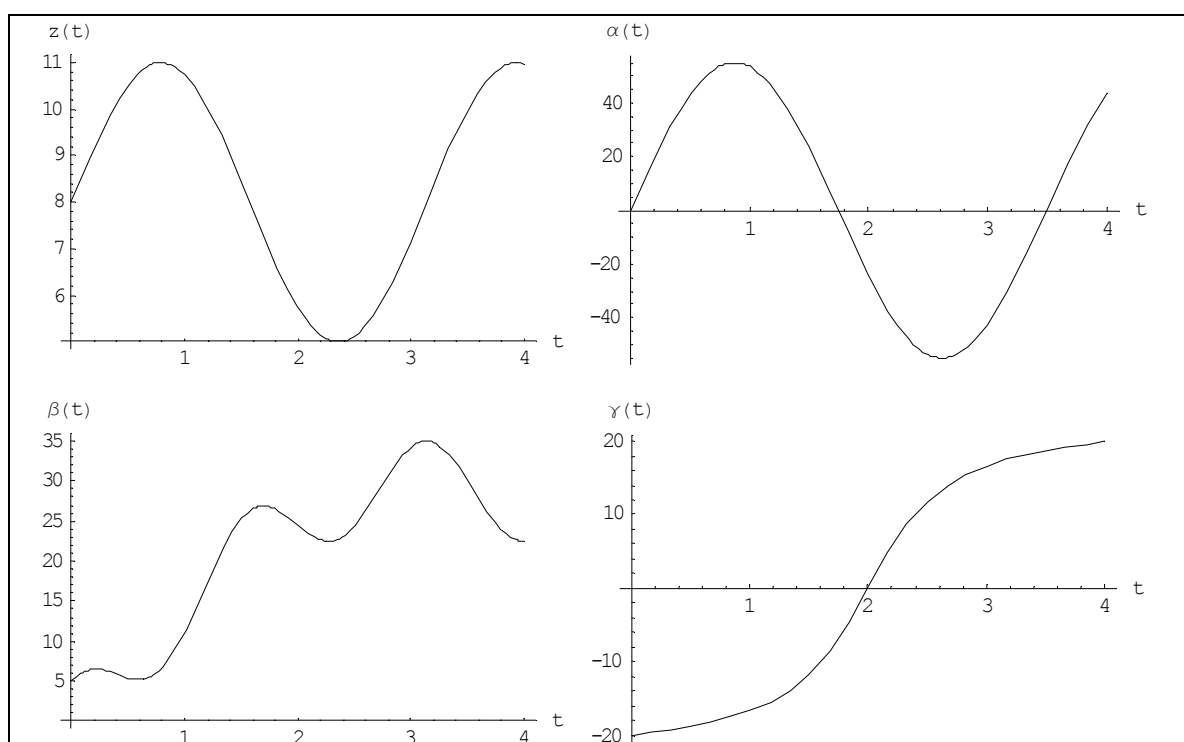
$$0 \leq t \leq 4.$$

5.2

Konačno, s obzirom da su ispitivani algoritmi relativno lako pratili i drugi pomak, definirana je treća vrsta gibanja u kojoj su samo povećane amplitude nekih vrijednosti u odnosu na drugi pomak. Promijenjene vrijednosti su u izrazima 5.3 ispisane tamnije.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 2 \cdot \sin\left(t \frac{\pi}{2}\right), \\
 y(t) &= 2.2 \cdot \cos\left(t \frac{\pi}{2}\right), \\
 z(t) &= 8 + 3 \cdot \sin(2t), \\
 \alpha(t) &= 55 \cdot \sin(1.8t), \\
 \beta(t) &= 30 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 5 \cdot \cos(4t), \\
 \gamma(t) &= 15 \cdot \arctan(2t - 4), \\
 0 \leq t \leq 4.
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Funkcije z koordinate te sva tri kuta rotacije u ovisnosti o vremenu za treći pomak prikazane su na slici 5.3.



Slika 5.3 Ovisnosti z koordinate i kuteva rotacije o vremenu – treći pomak

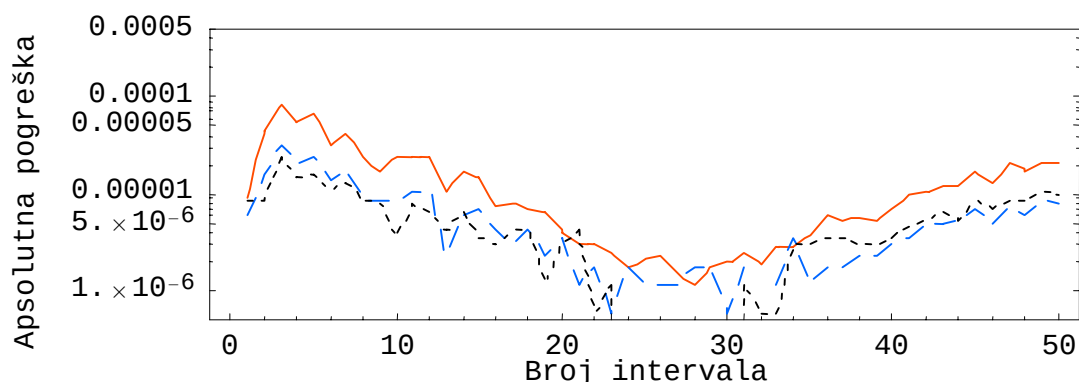
5.4.1. Izbor odgovarajućeg postupka rješavanja

Pomoću rezultata ispitivanja u statičkim uvjetima potrebno je odabrati odgovarajuću kombinaciju postupka optimiranja i funkcije cilja koja će poslužiti za

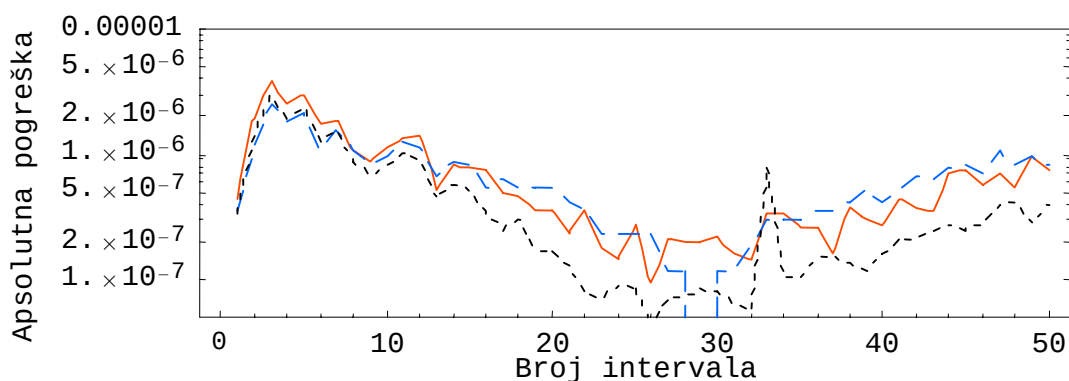
uspješno rješavanje problema i u dinamičkim uvjetima. Prvi definirani pomak heksapoda iskorišten je kao pokazatelj učinkovitosti pojedinoga postupka. Sve uporabljene kombinacije uključuju i generiranje početnog rješenja eliminacijom varijabli (stupac **B** u tablicama).

Važan parametar koji se mora definirati pri simulaciji dinamičkog rada je i frekvencija uzorkovanja, tj. ekvivalentna duljina vremenskog intervala između dva izračunavanja duljina krakova inverznom kinematikom, što je u stvarnim uvjetima zamijenjeno mjerenjem duljina. Poželjno je da je to vremensko razdoblje što manje jer se na taj način omogućuje bolja kontrola rada paralelnog manipulatora.

Ispitivanje praćenja prvoga pomaka simulirano je najprije sa Hooke-Jeeves algoritmom za funkciju F_1 , uz generiranje početnog rješenja eliminacijom varijabli. Perioda je ograničena na 10 milisekundi, što odgovara frekvenciji uzorkovanja od 100Hz. Rezultati simulacije prikazani su u obliku apsolutnih iznosa razlike između stvarnih i izračunatih koordinata i kuteva orijentacije pomične platforme na kraju svakog intervala. Međutim, zbog velikog broja podataka i različitog broja podataka u ovisnosti o frekvenciji uzorkovanja, pogreška se ispisuje nakon svakih 100 milisekundi. Pri tome se uzima najveća vrijednost pogreške u zadnjih 100 ms, tako da prikazani rezultati označavaju najlošiju dobivenu aproksimaciju stvarnoga rješenja između dva ispisa. Vrijednosti su osim toga prikazane u *logaritamskom* mjerilu zbog velike raznolikosti i osjetljivosti samoga postupka.



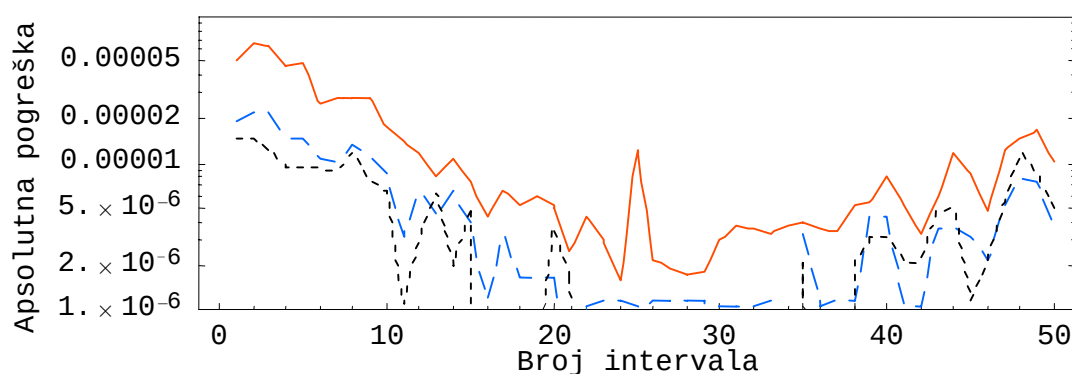
Slika 5.4 Pogreške u kutevima ($\alpha =$ —, $\beta =$ - - -, $\gamma =$ ····), Hooke-Jeeves postupak i funkcija F_1 , prvi pomak



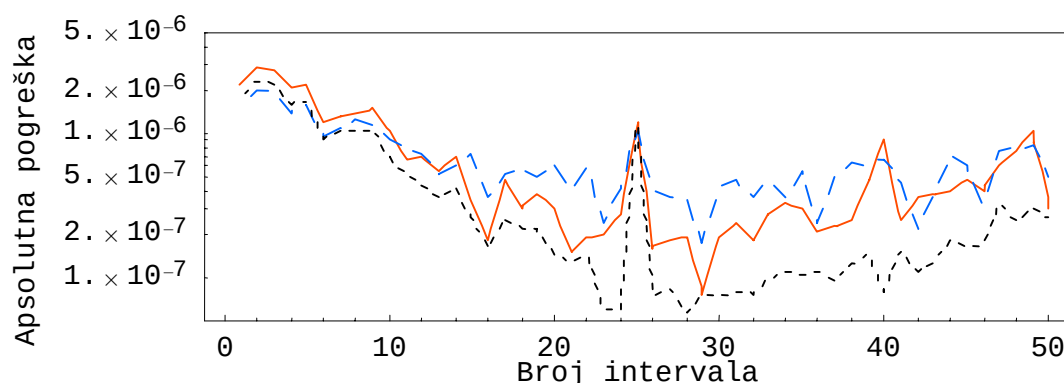
Slika 5.5 Pogreške u koordinatama ($x =$ —, $y =$ - - -, $z =$ ····), Hooke-Jeeves postupak i funkcija F_1 , prvi pomak

Na slikama 5.4 i 5.5 nalaze se rezultati simuliranja dinamičkog rada po prvome pomaku, uz Hooke-Jeevesov algoritam i funkciju cilja F_1 . Kutevi su izraženi u stupnjevima, pa je i apsolutna greška po iznosu veća nego kod koordinata položaja. Smanjivanje intervala uzorkovanja ima za posljedicu povećavanje iznosa pogrešaka. Tako na, primjerice, 5 ms algoritam i dalje uspješno prati zadanu putanju platforme, no pogreške u tom slučaju prekoračuju iznos od 1×10^{-3} za koordinate platforme i 1×10^{-2} za vrijednosti kuteva rotacije, pa se daljnje smanjivanje periode ne preporučuje.

Isti postupak za prvi pomak ponovljen je i sa Hooke-Jeevesovim algoritmom uz funkciju F_5 , gdje je rotacija zadana rotacijskim vektorom. Perioda je i ovdje 10 ms, a rezultati simulacije prikazani su na slikama 5.6 i 5.7.

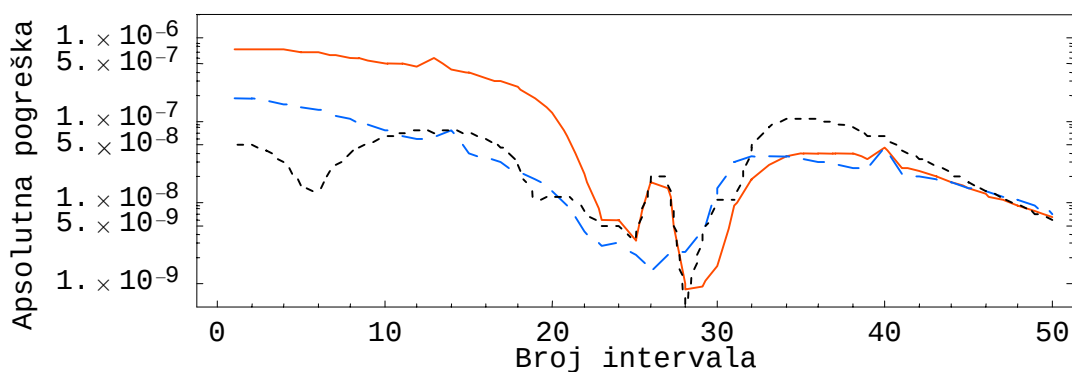


Slika 5.6 Pogreške u kutevima ($\alpha =$ —, $\beta =$ - - -, $\gamma =$ ), Hooke-Jeeves postupak i funkcija F_5 , prvi pomak

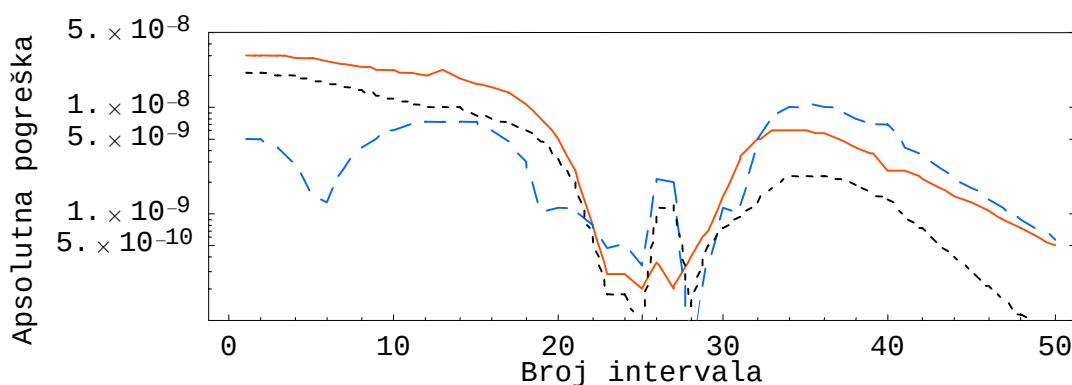


Slika 5.7 Pogreške u koordinatama ($x =$ —, $y =$ - - -, $z =$ ), Hooke-Jeeves postupak i funkcija F_5 , prvi pomak

Simulacija je zatim provedena pomoću Fletcher-Powell algoritma uz uporabu funkcija kanonskog oblika sa devet i šest varijabli. U potonjem slučaju (šesterodimenzijaska funkcija F_3) postiže se veća preciznost, a vrijeme računanja se može smanjiti na samo 2 ms. Greške su za tu kombinaciju prikazane na slikama 5.8 i 5.9.

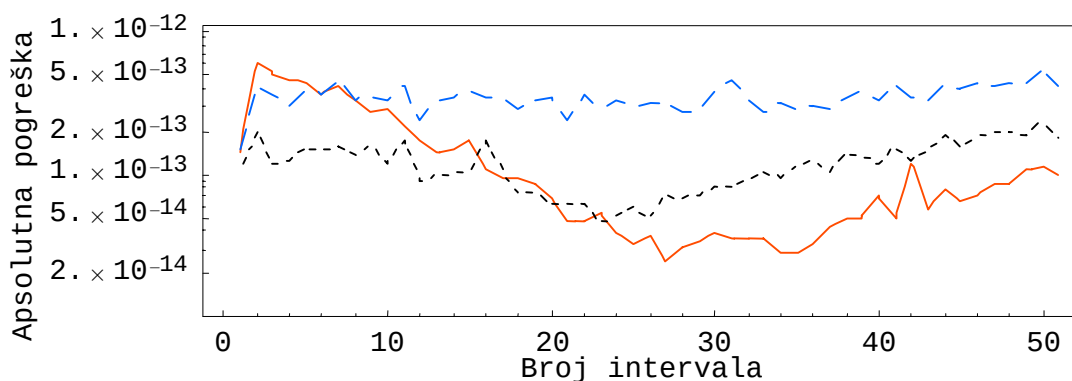


Slika 5.8 Pogreške u kutevima ($\alpha =$ —, $\beta =$ - - -, $\gamma =$ ·····), Fletcher-Powell postupak i funkcija F_3 , prvi pomak

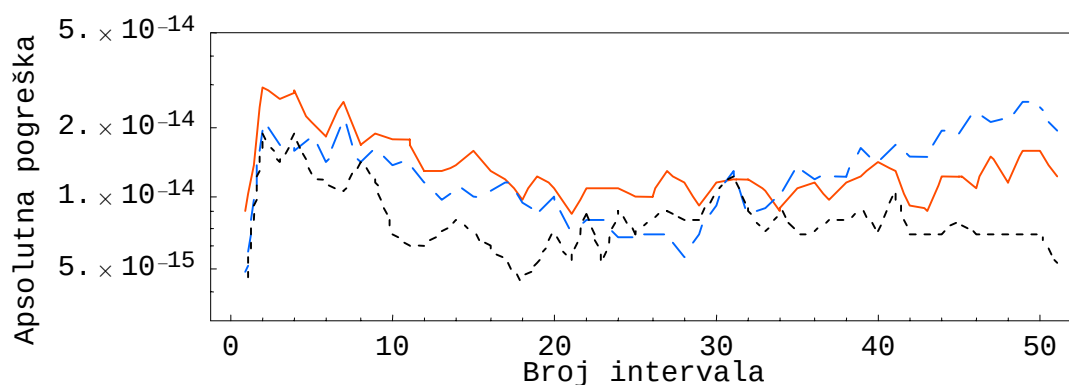


Slika 5.9 Pogreške u koordinatama ($x =$ —, $y =$ - - -, $z =$ ·····), Fletcher-Powell postupak i funkcija F_3 , prvi pomak

Naposljetku, uvjerljivo najbolji rezultati postignuti su uporabom Newton-Raphsonovog algoritma primijenjenog na funkciju F_3 , kanonskoga oblika sa šest varijabli. Rezultati ispitivanja su za ovu metodu bili puno bolji, pa se i perioda uzorkovanja mogla spustiti na 2 ms sa i dalje iznenađujuće dobrom preciznošću. Duljina intervala pri ovako malim vrijednostima zapravo nije cijeli broj zbog diskretnosti samoga postupka: jedna iteracija optimiranja, uz računanje inverzije Jacobijana u svakom koraku, traje oko 0.3 ms na ispitnom računalu. Točnija vrijednost periode bi zapravo bila oko 1.9 ms, no zaokružena je na prvi veći cijeli broj. Pogreške praćenja položaja pomične platforme prikazane su na slikama 5.10 i 5.11.



Slika 5.10 Pogreške u kutevima ($\alpha =$ —, $\beta =$ - - -, $\gamma =$ ·····), Newton-Raphsonov postupak i funkcija F_3 , prvi pomak

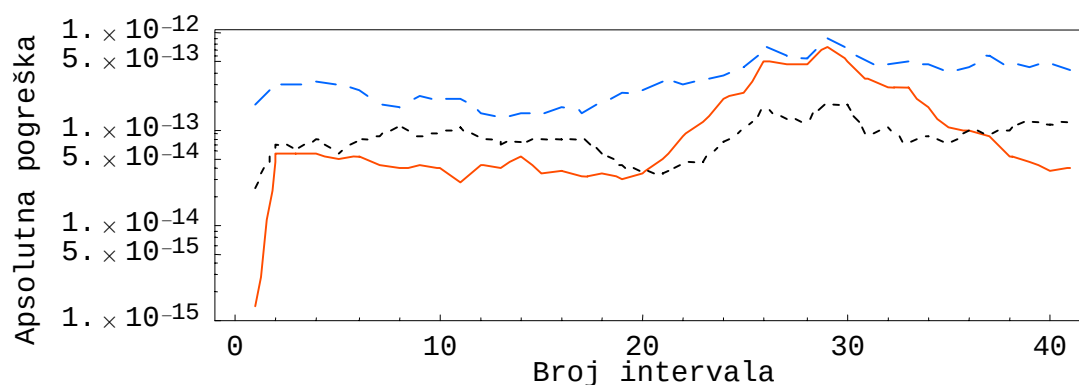


Slika 5.11 Pogreške u koordinatama ($x =$ —, $y =$ - - -, $z =$ - - - -), Newton-Raphsonov postupak i funkcija F_3 , prvi pomak

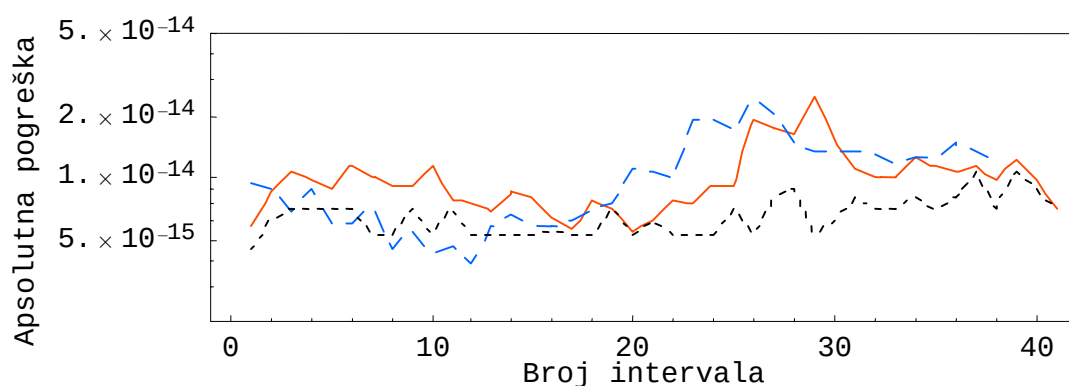
Iz prethodnih slika se može uočiti jako dobra preciznost postupka. Potrebno je napomenuti da se slični rezultati dobivaju i uporabom funkcije F_2 sa devet varijabli, s tim da je trajanje jedne iteracije nešto dulje zbog veće dimenzije sustava. Više ili manje učestali 'šiljci' u funkciji greške uzrokovani su neizbježnim nepreciznostima u mjerenju vremena na osobnom računalu te povremenom zauzeću procesora. Ponovi li se ispitivanje nekoliko puta, šiljci će uvijek biti na drugim mjestima i u različitom broju, no to još uvijek ne utječe znatno na ukupan učinak. Zanimljivo je i da se preciznost postupka bitno ne povećava nakon što se u svakom intervalu obavi najmanje 4-5 iteracija (oko 1.5 ms), jer algoritam do tada dovoljno precizno odredi položaj minimuma, dok su sve naknadne iteracije samo osciliranje oko rješenja.

5.4.2. Simulacija složenijih pomaka

Ispitivanje rada u dinamičkim uvjetima za drugi pomak (definiran izrazima 5.2) provedeno je uporabom Newton-Raphsonovog algoritma i funkcije cilja F_3 . Perioda uzorkovanja ostala je 2 ms, što odgovara frekvenciji uzorkovanja od 500Hz. Apsolutne pogreške postupka rješavanja prikazane su na slikama 5.12 i 5.13.

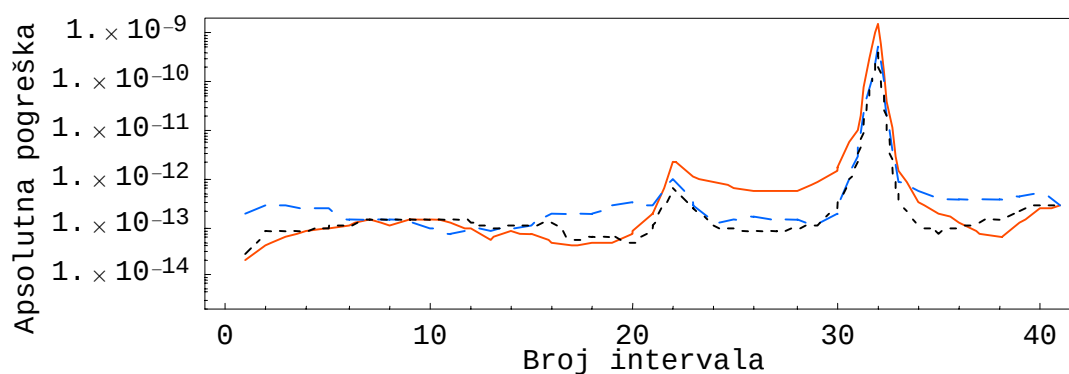


Slika 5.12 Pogreške u kutevima ($\alpha =$ —, $\beta =$ - - -, $\gamma =$ - - - -), N-R postupak i funkcija F_3 , drugi pomak

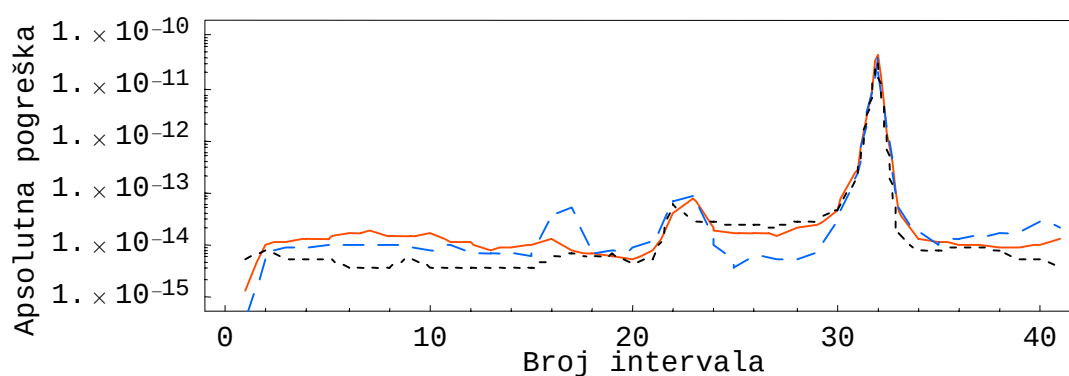


Slika 5.13 Pogreške u koordinatama ($x =$ —, $y =$ —, $z =$ —), N-R postupak i funkcija F_3 , drugi pomak

S obzirom da je postupak optimiranja relativno lako svladao gibanje u kojemu su se istovremeno mijenjale sve varijable, u trećem pomaku su povećane neke amplitude (izrazi 5.3). Vremenski interval uzorkovanja je i dalje 2 ms, a rezultati su za ovaj slučaj prikazani na slikama 5.14 i 5.15.



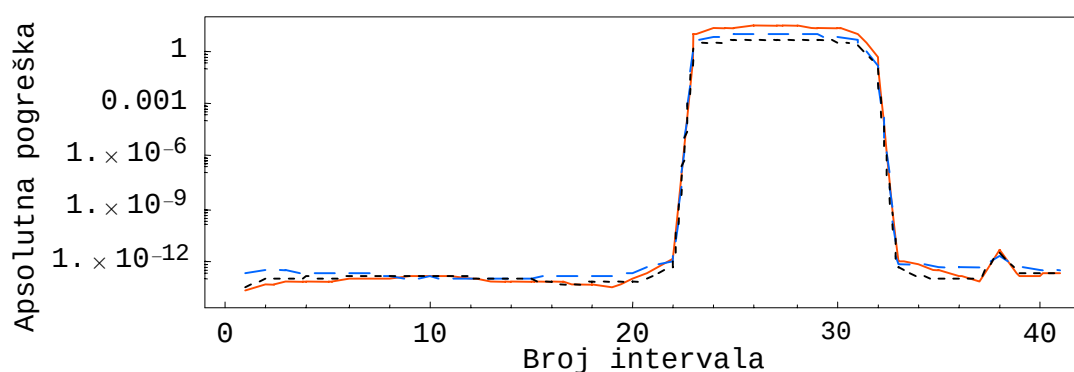
Slika 5.14 Pogreške u kutevima ($\alpha =$ —, $\beta =$ —, $\gamma =$ —), N-R postupak i funkcija F_3 , treći pomak



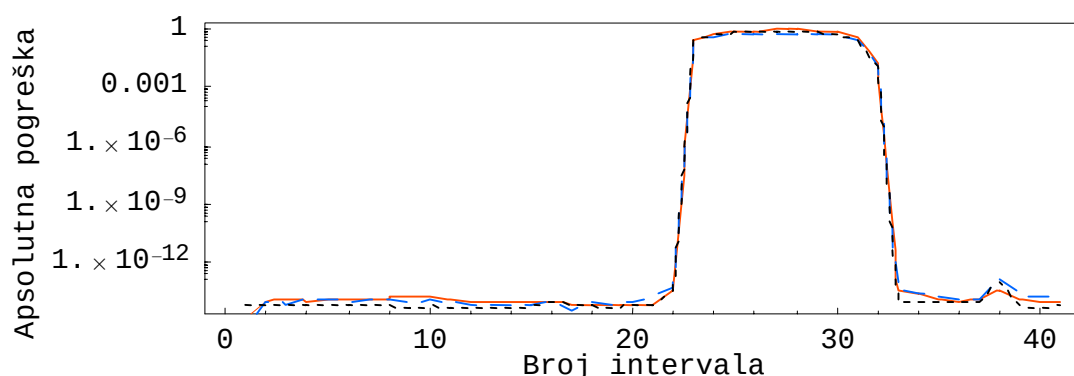
Slika 5.15 Pogreške u koordinatama ($x =$ —, $y =$ —, $z =$ —), N-R postupak i funkcija F_3 , treći pomak

Čini se da i u ovoj situaciji algoritam uvijek uspješno slijedi zadano gibanje, uz relativno veliku frekvenciju i vrlo male pogreške. Nažalost, pokazalo se da to nije sasvim točno. Dva izražena 'šiljka', koji se jasno mogu uočiti na funkciji grešaka, lakša su posljedica jedne zanimljive ali krajnje nepoželjne pojave. Naime, kako je već rečeno,

rješenje unaprijedne kinematike nije jedinstveno, nego se za zadani skup duljina krakova u općenitom slučaju može naći veći broj rješenja – do dvadeset u jednom poluprostoru, što su pokazali polinomski postupci. Prilikom kretanja, heksapod može promijeniti konfiguraciju na taj način da se promijeni i broj postojećih rješenja za trenutne vrijednosti duljina krakova. Na primjer, za vrijednosti duljina krakova u jednoj konfiguraciji neka postoji samo jedno rješenje, a za vrijednosti u nekoj drugoj konfiguraciji neka postoje dva rješenja. Ovakvo razmatranje je sasvim moguće, samo što je teško ograničiti područja sa jednakim brojem rješenja. Ako zatim pomična platforma svojim gibanjem prelazi iz područja u kojemu postoji samo jedno rješenje u područje u kojemu postoje dva (ili više njih), doći će do svojevrsnog *grananja* na prijelazu između ta dva područja. U točki grananja manipulator može nastaviti gibanje po dvije ili više putanja, a da duljine nogu ostaju jednake bez obzira kojim putem se kretanje nastavlja! Upravo takva pojava se može uočiti kod trećega pomaka, što ima za posljedicu to da algoritam ne slijedi uvijek zadano gibanje pomične platforme, nego s jednakom vjerojatnošću može krenuti i drugim putem. Pogreške u takvom slučaju prikazane su na slikama 5.16 i 5.17.



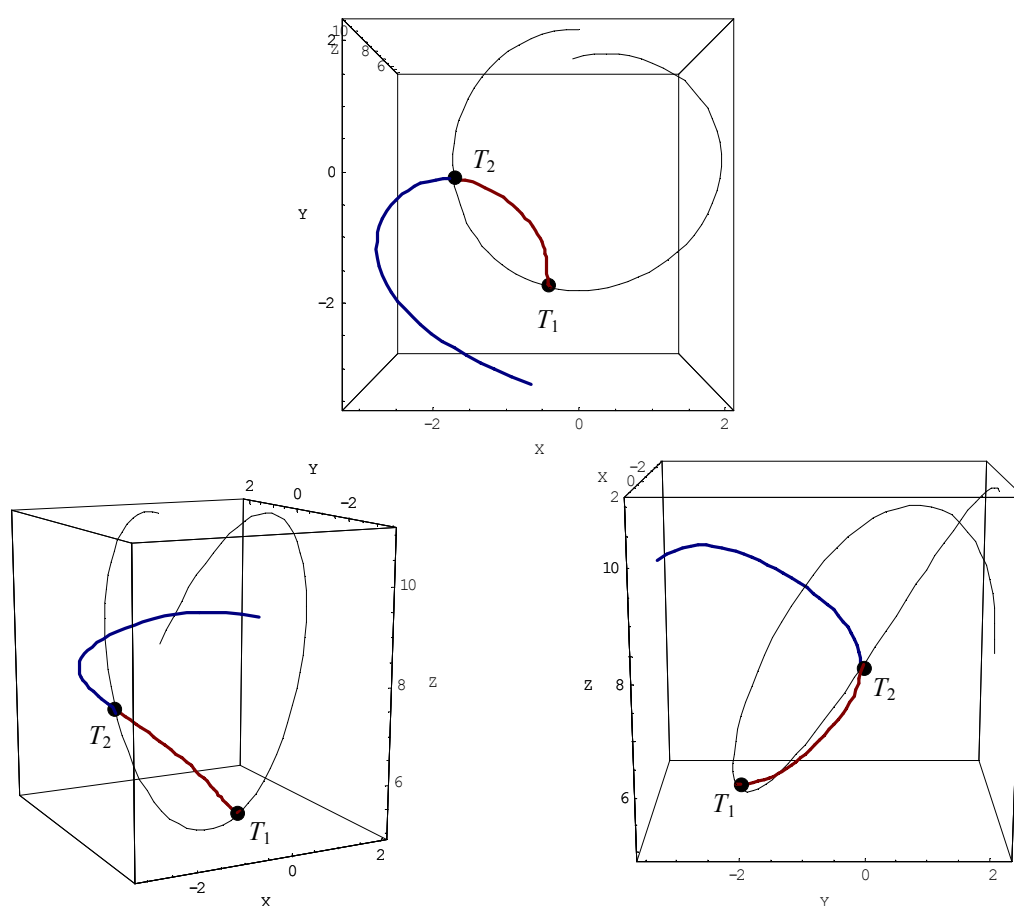
Slika 5.16 Pogreške u kutevima ($\alpha =$ —, $\beta =$ —, $\gamma =$ —), N-R postupak i funkcija F_3 , treći pomak - razilaženje



Slika 5.17 Pogreške u koordinatama ($x =$ —, $y =$ —, $z =$ —), N-R postupak i funkcija F_3 , treći pomak - razilaženje

Pogreške izračunate pri razilaženju zapravo izražavaju udaljenost dvije putanje sa jednakim duljinama krakova. Vremenska analiza pokazuje da eventualno razilaženje i ponovno sastajanje nastupaju uvijek u istim trenucima, što se može i uočiti oglednom usporedbom prikaza. Potrebno je napomenuti da funkcija cilja ostaje na jednakoj, vrlo niskoj razini (u području od otprilike 10^{-30} do 10^{-20}) i u jednom i u drugom slučaju! Drugim riječima, algoritam optimiranja uredno radi svoj posao i u svakom koraku nalazi

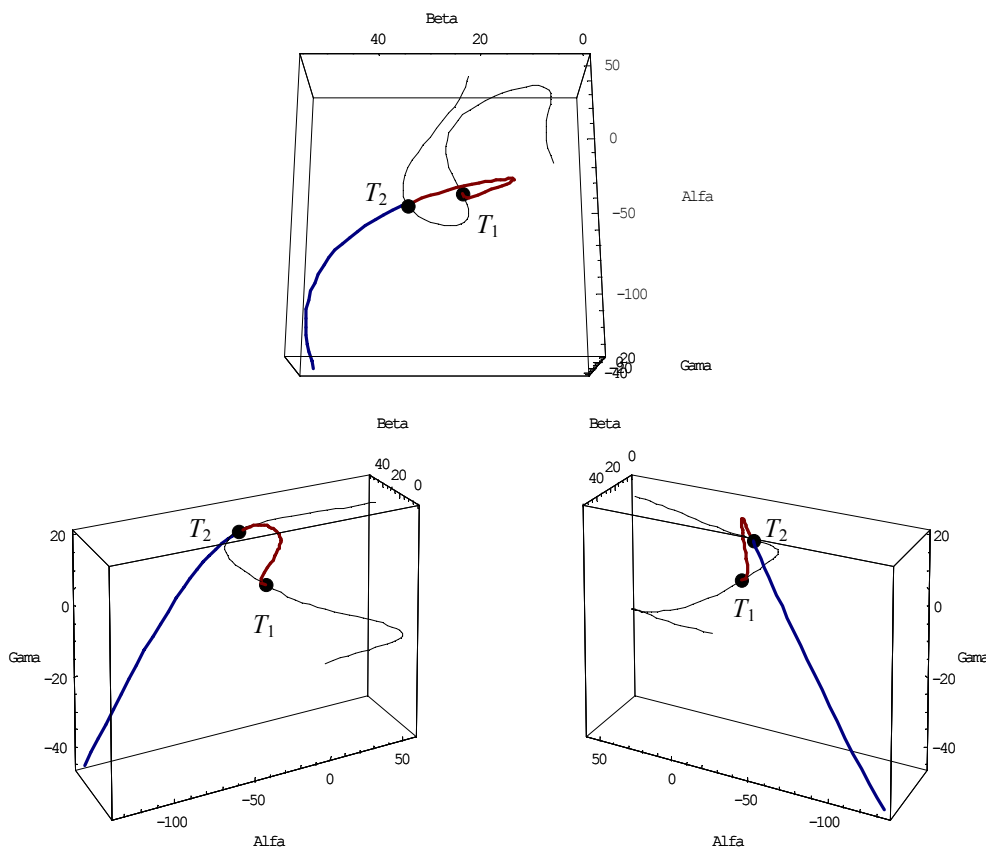
minimum funkcije cilja. Problem je u tome što minimuma može u ovakvim situacijama biti više, a oblik funkcije i početna točka pretraživanja u svakome intervalu vode u samo jedan od njih. Pokazalo se da algoritam može krenuti drugim putem i nakon ponovnoga sastajanja, što znači da za zadano gibanje postoji *ekvivalentna krivulja* po kojoj se platforma može kretati a da su duljine krakova u svakoj točki jednake. Ponovljenim ispitivanjem ta krivulja je rekonstruirana i može se promatrati odvojeno u prostoru koordinata središta pomične platforme i prostoru kuteva zakreta. Na slikama 5.18 i 5.19 zajedno su iz nekoliko točaka promatranja prikazane zadana putanja heksapoda i ekvivalentno gibanje sa jednakim duljinama krakova. Tanje nacrtana linija predstavlja zadano gibanje, točke križanja krivulja prikazane su podebljano, a ekvivalentna putanja nacrtana je od točke prvoga grananja pa do kraja definiranog gibanja. Vremenske točke u kojima se dvije krivulje gibanja križaju kritične su za postupak optimiranja; na slikama su označene sa ' T_1 ' i ' T_2 ', a nastupaju približno u trenucima $t_1 \approx 2$ sekunde i $t_2 \approx 3$ sekunde.



Slika 5.18 Krivulje gibanja središta pomične platforme s jednakim duljinama krakova

O čemu ovisi na koji stranu će postupak krenuti? Ponavljano ispitivanje pokazalo je da postotak uspjeha može u određenoj mjeri ovisiti o broju iteracija koje algoritam obavlja u svakom intervalu. Međutim, na osnovi toga svojstva ne može se ostvariti metoda koja će uvijek pratiti pravo rješenje. Povećavanje perioda uzorkovanja u pravilu ne pomaže jer, iako je postupak u osnovi deterministički, algoritam će odabrati jednu ili drugu putanju ovisno o neizbježnim razlikama u trajanju dotadašnjih iteracija, razlikama u mjerenju vremena, trenutnom opterećenju procesora i slično. Smanjivanje vremenskog intervala pokazalo se jednako korisnim kao i povećavanje. Pojava je, dakle, u praktičnim uvjetima nepredvidiva. Mijenjanjem parametara putanje pomične platforme može se

izbjeći problem, no to nam ne daje rješenje za zadano gibanje. Brzina promjene varijabli u principu ne predstavlja ključni element, jer se pojava razilaženja može izbjeći i *povećavanjem* amplituda nekih varijabli (npr. povećavanjem amplitude sinusoidalne funkcije kod $z(t)$).



Slika 5.19 Krivulje jednakih duljina krakova u prostoru kuteva

Naknadnim ispitivanjem pokazalo se da i uporaba svih drugih kombinacija metoda optimiranja i funkcija predstavljenih u ovom radu uzrokuje jednaku pojavu, tako da problem nije u algoritmu. Već je prije spomenuto da samo na osnovu zadanih duljina krakova nije moguće odrediti koje od postojećih rješenja predstavlja stvarnu konfiguraciju heksapoda. Tako se i u ovom slučaju ne može sa sigurnošću odrediti ispravno rješenje, jer su sa gledišta optimiranja oba rješenja jednako dobra. Međutim, uz određene pretpostavke moguće je usmjeriti postupak rješavanja na zadano gibanje.

Promatramo li dio zadane putanje u prostoru rješenja unutar samo nekoliko perioda uzorkovanja, točke u kojima se nalazi heksapod leže na blago zakrivljenoj liniji. Pretpostavimo li da je krivulja po kojoj se kreće heksapod, gledano u vrlo malom vremenskom razdoblju, slična pravcu, moguće je predvidjeti gdje će se otprilike naći novo rješenje u sljedećem intervalu. Neka je rješenje dobiveno u jednome intervalu jednako $\vec{P}_0$ te neka su rješenja u prethodnom i prije dva koraka jednaka $\vec{P}_1$ i $\vec{P}_2$, tim redom. Pretpostavka je da se početno rješenje za optimiranje u sljedećem intervalu, $\vec{X}_0$, nalazi blizu pravca kojega čine prethodno dobivena rješenja. Novo početno rješenje se tada može izračunati na tri predložena načina: pomoću zadnje dvije točke (prema 5.4), pomoću trenutne točke i one prije dva koraka (prema 5.5) te pomoću aritmetičkih sredina između sve tri dobivene točke (prema 5.6).

$$\vec{X}_0 = 2 \cdot \vec{P}_0 - \vec{P}_1 \quad 5.4$$

$$\vec{X}_0 = 1.5 \cdot \vec{P}_0 - 0.5 \cdot \vec{P}_2 \quad 5.5$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{T}_1 &= 0.5 \cdot (\vec{P}_0 + \vec{P}_1) \\ \vec{T}_2 &= 0.5 \cdot (\vec{P}_1 + \vec{P}_2) \\ \vec{X}_0 &= 2.5 \cdot \vec{T}_1 - 1.5 \cdot \vec{T}_2 \end{aligned} \right\} \quad 5.6$$

Svaka od ovih prilagodbi isprobana je s Newton-Raphsonovim algoritmom i funkcijom cilja F_3 u simuliranju praćenja trećeg pomaka. Rezultati su vrlo dobri: za zadani pomak uz bilo koju prilagodbu postupak uvijek prati stvarno gibanje heksapoda, bez obzira na broj ponovljenih ispitivanja.

Nažalost, dobri rezultati u praćenju jednoga pomaka ne znače da će algoritam biti uspješan u nekom proizvoljnom gibanju. Potrebno je stoga identificirati uvjete pod kojima postoji mogućnost da postupak krene ekvivalentnom putanjom. Taj događaj je moguć ako nije zadovoljena pretpostavka o sličnosti zadane putanje sa pravcem na malom vremenskom odsječku. Taj uvjet neće biti zadovoljen ako su promjene parametara gibanja relativno brze ili ako je perioda uzorkovanja dovoljno velika. U praktičnoj primjeni se perioda uzorkovanja ionako nastoji što više smanjiti, no isti se učinak postiže ubrzavanjem gibanja heksapoda jer promjene postaju veće unutar jednoga intervala.

Da bi ispitali 'izdržljivost' prilagođenih postupaka, gibanje u trećem pomaku je ubrzano nekoliko puta, uz jednaku periodu od 2 ms. Ubrza li se gibanje dva ili četiri puta, pri čemu se ukupno trajanje smanjuje sa četiri na dvije odnosno jednu sekundu, postupak i dalje prati pravo rješenje za sve tri metode prilagodbe. Tek pri ubrzanju od osam puta, gdje je trajanje pomaka prilično nerealnih pola sekunde, počinju se u trenucima križanja (točke T_1 i T_2) javljati greške čiji je iznos reda veličine 10^{-1} za kuteve i 10^{-2} za koordinate položaja. Postupak, međutim, ni u ovom slučaju ne skreće na ekvivalentnu putanju, nego se vraća na zadanu krivulju nakon nekoliko kritičnih intervala. Tek se ovdje može primijetiti razlika između tri predložena načina računanja početnog rješenja. Postavimo li granicu tolerancije greške na 10^{-3} za kuteve i 10^{-5} za koordinate, tada će postotak prekoračenja zadanih granica pogreške biti za sve tri prilagodbe približno jednak onome prikazanom u tablici 5.10, uz obavljenih minimalno 200 ponavljanja za sva tri načina.

Tablica 5.10 Vjerojatnosti prekoračenja granica greške

Postupak prilagodbe	Prema 5.4	Prema 5.5	Prema 5.6
Postotak prekoračenja granice greške	6 %	11 %	3.6 %

Poveća li se trajanje intervala na, recimo, 5 ms, povećat će se i broj prekoračenja dozvoljene apsolutne greške zbog veće promjene parametara unutar jednog intervala.

Primjer gibanja pri kojemu je pretpostavka o blagoj zakrivljenosti putanje zadovoljena u najmanjoj mjeri može biti i pomak u kojemu se sve varijable istovremeno mijenjaju po nekoj funkciji, recimo po pravcu, da bi se u jednom trenutku počele jednakom brzinom kretati točno unatrag po istoj funkciji. Jedno takvo gibanje opisano je sljedećim izrazima 5.7.

$$\left. \begin{aligned}
 x(t) &= 2 \cdot t \\
 y(t) &= -2.5 \cdot t \\
 z(t) &= 5 + 3 \cdot t \\
 \alpha(t) &= 50 \cdot t \\
 \beta(t) &= -60 \cdot t, \\
 \gamma(t) &= 30 - 60 \cdot t
 \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1,$$

$$\left. \begin{aligned}
 x(t) &= 2 \cdot (2 - t) \\
 y(t) &= -2.5 \cdot (2 - t) \\
 z(t) &= 5 + 3 \cdot (2 - t) \\
 \alpha(t) &= 50 \cdot (2 - t) \\
 \beta(t) &= -60 \cdot (2 - t), \\
 \gamma(t) &= 30 - 60 \cdot (2 - t)
 \end{aligned} \right\} 1 \leq t \leq 2.$$
5.7

U ovom gibanju sve se varijable u prvoj sekundi kreću po pravcu, a zatim se u drugoj sekundi vraćaju po istoj funkciji. Pri ovako oštroj promjeni smjera, postupak optimiranja, uz opisanu prilagodbu ili bez nje, jednostavno ne može uvijek pratiti zadani pomak, već u neodređenom broju slučajeva nastavlja pratiti imaginarnu ekvivalentnu putanju. Pitanje je koliko je ovakvo gibanje izvedivo u stvarnim uvjetima, gdje uvijek postoje masa i neizbježna inercija pokretnog dijela manipulatora, te javljaju li se slični pomaci u praktičnoj primjeni. Osim toga, smanje li se amplitude nekih parametara (dovoljno je samo vrijednosti u izrazima za kuteve smanjiti na polovicu), postupak ponovno uspijeva pratiti stvarni položaj heksapoda, što je provjereno i za osnovni algoritam i za algoritam sa računanjem novoga početnog rješenja po nekom od izraza 5.4 - 5.6.

6. Zaključak

Problem unaprijedne kinematike paralelnih mehanizama puno je složeniji nego kod njihovih slijednih ekvivalenata. Zbog svoje jednostavne i zatvorene konstrukcije, paralelni manipulatori imaju neke prednosti pred slijednima koje ih sve više i više stavljaju u praktičnu uporabu. Međutim, relativno jednostavna struktura ima za posljedicu neobično kompleksne matematičke odnose između veličina koje opisuju njen položaj i kretanje. Zbog toga se velik dio današnjih paralelnih manipulatora upravlja samo korištenjem analitički dobivenih zakonitosti inverzne kinematike, bez povratne informacije o stvarnom položaju pomičnog dijela.

Iako rješenje unaprijedne kinematike nije analitički izvedivo, postoje metode koje mogu polučiti upotrebljive rezultate. One se mogu podijeliti u tri glavne skupine: postupci koji pronalaze sva postojeća rješenja, postupci koji optimiranjem pronalaze jedno, najbliže rješenje i postupci koji korištenjem dodatnih mjernih podataka učinkovitije, u nekim slučajevima i egzaktno, dolaze do rješenja koje predstavlja stvarnu konfiguraciju manipulatora.

U ovome radu proučavani su konvergentni postupci iz druge skupine, koji nekim algoritmom optimiranja primijenjenim na funkciju cilja pronalaze jedno rješenje. Ako je brzina algoritma dovoljno velika, takav se postupak može upotrijebiti unutar sustava nadziranja rada paralelnog manipulatora u stvarnom vremenu. Glavna svojstva koji takav postupak mora imati su pouzdanost, tj. sposobnost konvergiranja ka rješenju, te zahtijevana brzina i preciznost. U svrhu pronalaženja i implementacije takvoga postupka definirano je pet funkcija cilja koje predstavljaju zadani problem.

U cilju učinkovitijeg rješavanja, predložene su neke prilagodbe postupaka optimiranja. Za određene funkcije cilja moguće je problem pronalaženja na pravcu svesti na problem nalaženja korijena polinoma jedne varijable trećega stupnja. Na taj način postignuta je ušteda u vremenu optimiranja, iako sama prilagodba ne utječe na druga svojstva postupka. Posebna je pažnja posvećena odabiru minimuma bližega početnoj točki pretraživanja: polinom trećega stupnja može imati najviše tri realna korijena, od kojih samo dva predstavljaju lokalne *minimume* osnovne funkcije, jer derivacija u tim nul-točkama mora imati uzlazni smjer. Taj uvjet je ekvivalentan uvjetu pozitivnoga iznosa druge derivacije.

Isto tako, predložena su dva postupka modificiranja početnog rješenja poradi povećavanja stupnja konvergencije i skraćivanja vremena optimiranja. Postupak generiranja početnog rješenja eliminacijom varijabli oslanja se na reducirani kanonski oblik funkcije cilja, u kojemu je pažljivim odabirom nepoznanica za eliminaciju izuzeta informacija o koordinatama položaja pomične platforme. Na taj se način automatski dobiva točno rješenje za svaku aproksimaciju u kojoj su početne vrijednosti kuteva jednake onima u stvarnome rješenju. U praktičnoj primjeni to naravno nije slučaj, no i za različite vrijednosti kuteva dobivaju se nove koordinate položaja koje su u većini slučajeva puno bliže stvarnom rješenju. Ova prilagodba nema jednak učinak na različite metode optimiranja, ali se pokazalo da za neke od njih može koristiti, bez obzira na zadanu ispitnu konfiguraciju. Odabirom drugih nepoznanica za eliminaciju moguće je, naravno, isključiti i druge veličine koje opisuju položaj i orijentaciju. Međutim, generiranje početne vrijednosti za neke kuteve, umjesto koordinata, rezultiralo je više kaotičnim nego korisnim veličinama u slučaju razlike među drugim varijablama.

Drugi postupak modifikacije početnog rješenja sastoji se od malog broja iteracija (2-3) pretraživanja minimuma po pravcu u smjeru koordinatnih osi x , y i z u prostoru rješenja. Postupak koristi već opisani način nalaženja minimuma na pravcu svođenjem na rješavanje polinoma trećega stupnja, pa se obavlja relativno brzo i ne utječe puno na ukupno vrijeme optimiranja. Međutim, utjecaj ove prilagodbe na većinu metoda bio je više negativan nego koristan, osim u rijetkim slučajevima kada je primijenjen zajedno sa generiranjem početnog rješenja eliminacijom varijabli. Zbog toga se u pravilu ne preporučuje korištenje ovoga postupka, barem ne bez početne provjere za konkretnu funkciju cilja i algoritam optimiranja.

Kombiniranjem funkcija cilja sa raznim algoritmima prepoznati su učinkoviti postupci pronalaženja rješenja unaprijedne kinematike. Navedeni postupci nisu, u principu, namijenjeni pronalaženju rješenja u statičkim uvjetima, tj. bez informacije o prethodnom položaju manipulatora i s relativno velikim odmakom platforme od početne točke. Međutim, u uvjetima male promjene položaja i poznate polazišne točke, moguće je vrlo brzo i precizno pronaći rješenje koje odgovara novoj konfiguraciji heksapoda. Vremena optimiranja su za odabrane postupke manja od 10ms, a granice preciznosti dostatno male. Iz prikazanih rezultata se može vidjeti da najbolje kombinacije uključuju Hooke-Jeevesov, Fletcher-Powellov te gotovo uvijek uspješni Newton-Raphsonov postupak, uz uporabu položaja i orijentacije za prvi te kanonskog oblika funkcije cilja za druga dva algoritma. Po vremenu rješavanja i ostvarenoj preciznosti prednjači kombinacija Newton-Raphsonovog algoritma, uz izračunavanje inverzije Jacobijeve matrice u svakom koraku, sa kanonskim oblikom funkcije cilja sa šest varijabli.

Spomenuti postupci upotrebljeni su u simulaciji dinamičkih uvjeta rada u stvarnome vremenu, pri čemu je definirano gibanje pomične platforme koje metoda optimiranja mora pratiti. Za većinu definiranih pomaka ostvareno je uspješno rješavanje unaprijedne kinematike u vrlo malim vremenskim razmacima te sa zanemarivim razlikama između stvarnog i izračunatog položaja pomične platforme. Međutim, naknadno je uočeno postojanje *ekvivalentnih gibanja* čije točke su položaji pomične platforme za koje su duljine krakova u svakom trenutku jednake onima kod zadanoga gibanja. Ova je pojava posljedica postojanja više rješenja unaprijedne kinematike heksapoda. Kako je različitim područjima radnog prostora manipulatora pridružen i različit broj rješenja, pri prelasku heksapoda iz jednog u drugo područje zadano i ekvivalentno gibanje se dodiruju i međusobno križaju. U točkama križanja postupak rješavanja može s jednakom vjerojatnošću nastaviti pratiti neku od ekvivalentnih putanja. Sa gledišta optimiranja sva rješenja su jednakovrijedna, no samo jedno predstavlja stvarni položaj manipulatora.

U cilju rješavanja opisanoga problema, predložene su neke heurističke prilagodbe postupka optimiranja kojima se predviđa položaj manipulatora u sljedećem intervalu. Dobivene vrijednosti tada postaju nove početne točke pretraživanja umjesto zadnjeg izračunatog položaja. Ispitivanjem je pokazano da predložene prilagodbe omogućuju učinkovito praćenje zadanih putanja manipulatora. Pri tome mora biti ispunjen uvjet relativno male promjene smjera gibanja u odnosu na trajanje jedne periode uzorkovanja. Ubrzavanjem gibanja pomične platforme ili povećavanjem periode uzorkovanja povećava se vjerojatnost skretanja sa zadane putanje. U praktičnoj primjeni to znači da kretanje pomične platforme ne smije biti prebrzo u usporedbi sa duljinom intervala uzorkovanja.

Svakodnevnim povećavanjem dostupne računalne moći, u rješavanju složenog problema kao što je unaprijedna kinematika heksapoda dostatno je sve manje procesorskog vremena. Polinomski postupci koji pronalaze sva rješenja još uvijek su prespori za rad u stvarnom vremenu. Osim toga, iz skupa mogućih rješenja potrebno je

odrediti ono koje predstavlja stvarnu konfiguraciju Stewartove platforme, što se sa sigurnošću može učiniti jedino uz pomoć informacija dobivenih pomoću dodatnih osjetnika. Iterativni postupci, uz vrlo malo vrijeme računanja i dovoljno veliku preciznost, u tom smislu nude izvedivu alternativu rješavanja ovoga problema. Međutim, zbog prirode samoga problema i postojanja više od jednog rješenja, potrebna su prethodna iscrpna ispitivanja stabilnosti postupaka u dinamičkom radu. U uvjetima gdje su zadovoljene potrebne pretpostavke uspješnosti postupka, iznesene u ovom radu, moguća je uporaba konvergentnih postupaka u praćenju paralelnog manipulatora u stvarnom vremenu.

Literatura

- [BRU 96] H. Bruyninckx, J. De Schutter, "**A Class of Fully Parallel Manipulators with Closed Form Forward Position Kinematics**", in *Recent Advantages in Robot Kinematics*, (J. Lenarčič, V. Parenti-Castelli, editors), pp. 411-419, Portorož-Bernardin, Slovenia, 1996.
- [BRU 99] H. Bruyninckx, J. De Schutter, "**Comments on 'Closed Form Forward Kinematics Solution to a Class of Hexapod Robots'**", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 1999.
- [CHE 93] K. Cheok, J. Overholt, R. Beck, "**Exact Methods for Determining the Kinematics of a Stewart Platform using Additional Displacement Sensors**", *Journal of Robotic Systems*, Vol. 10, No. 5, pp. 689-707, 1993.
- [DAS 94] B. Dasgupta, T.S. Mruthyunjaya, "**A Canonical Formulation of the Direct Position Kinematics Problem for a General 6-6 Stewart Platform**", *Mech. Mach. Theory*, Vol. 29, No. 6, pp. 819-827, 1994.
- [DAS 96] B. Dasgupta, T.S. Mruthyunjaya, "**A Constructive Predictor-Corrector Algorithm for the Direct Position Kinematics Problem for a General 6-6 Stewart Platform**", *Mech. Mach. Theory*, Vol. 31, No. 6, pp. 799-811, 1996.
- [GOS 93] C. Gosselin, "**Parallel Computational Algorithms for the Kinematics and Dynamics of Parallel Manipulators**", in *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 1, pp. 883-888, 1994.
- [GOU 62] V. E. Gough, S.G. Whitehall, "**Universal Tyre Test Machine**", *Proc. of the 9th Int. Tech. Congr. F.I.S.I.T.A.*, pp. 117-137, 1962.
- [GRI 89] M. Griffis, J. Duffy, "**A Forward Displacement Analysis of a Class of Stewart Platforms**", *Journal of Robotic Systems*, Vol. 6, No. 6, pp. 703-720, 1989.
- [HUA 98] T. Huang, D.J. Whitehouse, J. Wang, "**The Local Dexterity, Optimal Architecture and Design Criteria of Parallel Machine Tools**", *Annals of CIRP*, Vol. 47, No. 1, pp. 347-351, 1998.
- [HUS 94] M. Husty, "**An Algorithm for Solving the Direct Kinematic Of Stewart-Gough-Type Platforms**", <ftp://ftp.mercim.mcgill.edu/pub/techrep/1994/CIM-94-01.pdf>, 1994.
- [INN 90] C. Innocenti, V. Parenti-Castelli, "**Direct Position Analysis of the Stewart Platform Mechanism**", *Mech. Mach. Theory*, Vol. 25, No. 6, pp.611-621, 1990.
- [LIN 90] W. Lin, J. Duffy, M. Griffis, "**Forward displacement Analysis of the 4-4 Stewart platforms**", in *Proc. 21st Biennial Mech. Conf. ASME*, Chicago, Vol. DE-25, pp. 263-269, 1990.

- [LIU 93] K. Liu, J. Fitzgerald, F.L. Lewis, "**Kinematic Analysis of a Stewart Platform Manipulator**", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 40, No. 2, pp. 282-293, 1993.
- [MCA 95] P.R. McAree, R.W. Daniel, "**A Fast, Robust Solution to the Stewart Platform Forward Kinematics**", *Journal of Robotic Systems*, Vol. 13, No. 7, pp. 407-427, 1996.
- [MER 88] J.-P. Merlet, "**Parallel Manipulators, Part 2: Theory**", <ftp://zenon.inria.fr/pub/rapports/RR-791.ps.gz>, 1988.
- [MER 90] J.-P. Merlet, "**An algorithm for the Forward kinematics of general 6 d.o.f parallel manipulators**", <ftp://zenon.inria.fr/pub/rapports/RR-1331.ps.gz>, 1990.
- [MER 92] J.-P. Merlet, "**Direct Kinematics of Parallel Manipulators**", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 6, pp. 842-845, 1993.
- [MER 93] J.-P. Merlet, "**Direct Kinematics of Parallel Manipulators**", ***
- [MER 93] J.-P. Merlet, "**Closed Form Resolution of the Direct Kinematics of Parallel Manipulators using Extra Sensors Data**", in *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 200-204, 1993.
- [MER 94] J.-P. Merlet, D. Lazard, "**The (true) Stewart Platform has 12 configurations**", in *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 3, pp. 2160-2165, 1994.
- [NAN 90] P. Nanua, K. Waldron, V. Murthy, "**Direct Kinematic Solution of a Stewart Platform**", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 6, pp. 438-444, 1990.
- [NGU 91] C. Nguyen, Z.L. Zhou, S.S. Antrazi, "**Efficient Computation of Forward Kinematics and Jacobian Matrix of a Stewart Platform-Based Manipulator**", *IEEE Southeast Conference*, Vol. II, pp. 869-874, 1991.
- [PAU 81] R. P. Paul, "**Robot Manipulators**", *The MIT Press*, Cambridge, 1981.
- [RAG 93] M. Raghavan, "**The Stewart Platform of General Geometry has 40 Configurations**", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 277-282, June 1993.
- [SRE 94] S. V. Sreenivasan, K. J. Waldron, P. Nanua, "**Closed Form Direct Displacement Analysis of a 6-6 Stewart Platform**", *Mech. Mach. Theory*, Vol. 29, No. 6, pp 885-864, 1994.
- [STE 66] D. Stewart, "**A Platform with Six Degrees of Freedom**", *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 180, part I, no. 5, pp. 371-386, 1965-1966.
- [TUR 89] S. Turk, L. Budin, "**Analiza i projektiranje računalom**", *Školska knjiga*, Zagreb, 1989.
- [WAN 97] Y. Wang, H. Zou, M.Y. Zhao, Q.M. Li, "**Design and Kinematics of a Parallel Manipulator for Manufacturing**", ***

- [WAR 98] H.-J. Warnecke, R. Neugebauer, F. Wieland, "**Development of Hexapod Based Machine Tool**", *Annals of CIRP*, Vol. 47/1/1998, pp.337-340, 1998.
- [WEN 93] F. Wen, C. Liang, "**Displacement Analysis of the 6-6 Stewart Platform Mechanisms**", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, No. 4, pp. 547-557, 1994.
- [YAN 98] J. Yang, Z. J. Geng, "**Closed Form Forward Kinematics Solution to a Class of Hexapod Robots**", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 14, No. 3, pp.503-508, June 1998.
- [ZHA 92] C.D. Zhang, S.M. Song, "**Forward Kinematics of a Class of Parallel (Stewart) Platforms with Closed Form Solutions**", *Journal of Robotics Systems*, Vol. 9, pp. 93-112, January 1992.

Prilog A: Parcijalne derivacije funkcija cilja

Funkcija F_1 – položaj i orijentacija kao varijable

$$\begin{aligned} F_1(t_x, t_y, t_z, \alpha, \beta, \gamma) = & \\ & (-11^2 + (t_z + py1 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px1 \sin[\beta])^2 + \\ & \quad (-bx1 + tx + px1 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py1 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ & \quad (-by1 + ty + px1 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py1 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)^2 + \\ & (-12^2 + (t_z + py2 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px2 \sin[\beta])^2 + \\ & \quad (-bx2 + tx + px2 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py2 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ & \quad (-by2 + ty + px2 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py2 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)^2 + \\ & (-13^2 + (t_z + py3 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px3 \sin[\beta])^2 + \\ & \quad (-bx3 + tx + px3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ & \quad (-by3 + ty + px3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)^2 + \\ & (-14^2 + (t_z + py4 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px4 \sin[\beta])^2 + \\ & \quad (-bx4 + tx + px4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ & \quad (-by4 + ty + px4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)^2 + \\ & (-15^2 + (t_z + py5 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px5 \sin[\beta])^2 + \\ & \quad (-bx5 + tx + px5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ & \quad (-by5 + ty + px5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)^2 + \\ & (-16^2 + (t_z + py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px6 \sin[\beta])^2 + \\ & \quad (-bx6 + tx + px6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ & \quad (-by6 + ty + px6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial t_x} = & \\ & 4 (-bx1 + tx + px1 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py1 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\ & \quad (-11^2 + (t_z + py1 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px1 \sin[\beta])^2 + \\ & \quad \quad (-bx1 + tx + px1 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py1 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ & \quad \quad (-by1 + ty + px1 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py1 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)^2 + \\ & 4 (-bx2 + tx + px2 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py2 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\ & \quad (-12^2 + (t_z + py2 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px2 \sin[\beta])^2 + \\ & \quad \quad (-bx2 + tx + px2 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py2 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ & \quad \quad (-by2 + ty + px2 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py2 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)^2 + \\ & 4 (-bx3 + tx + px3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\ & \quad (-13^2 + (t_z + py3 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px3 \sin[\beta])^2 + \\ & \quad \quad (-bx3 + tx + px3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ & \quad \quad (-by3 + ty + px3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)^2 + \\ & 4 (-bx4 + tx + px4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\ & \quad (-14^2 + (t_z + py4 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px4 \sin[\beta])^2 + \\ & \quad \quad (-bx4 + tx + px4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ & \quad \quad (-by4 + ty + px4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4 \left(-bx5 + tx + px5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]) \right) \\
& \left(-15^2 + (tz + py5 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px5 \sin[\beta])^2 + \right. \\
& \left. (-bx5 + tx + px5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \right. \\
& \left. (-by5 + ty + px5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2 \right) + \\
& 4 \left(-bx6 + tx + px6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]) \right) \\
& \left(-16^2 + (tz + py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px6 \sin[\beta])^2 + \right. \\
& \left. (-bx6 + tx + px6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \right. \\
& \left. (-by6 + ty + px6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t_y} =$$

$$4 \left(-by_1 + ty + px_1 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_1 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \right) \\ (-11^2 + (tz + py_1 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px_1 \sin[\beta])^2 + \\ (-bx_1 + tx + px_1 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py_1 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ (-by_1 + ty + px_1 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_1 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\ 4 \left(-by_2 + ty + px_2 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_2 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \right) \\ (-12^2 + (tz + py_2 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px_2 \sin[\beta])^2 + \\ (-bx_2 + tx + px_2 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py_2 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ (-by_2 + ty + px_2 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_2 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\ 4 \left(-by_3 + ty + px_3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \right) \\ (-13^2 + (tz + py_3 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px_3 \sin[\beta])^2 + \\ (-bx_3 + tx + px_3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py_3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ (-by_3 + ty + px_3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\ 4 \left(-by_4 + ty + px_4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \right) \\ (-14^2 + (tz + py_4 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px_4 \sin[\beta])^2 + \\ (-bx_4 + tx + px_4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py_4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ (-by_4 + ty + px_4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\ 4 \left(-by_5 + ty + px_5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \right) \\ (-15^2 + (tz + py_5 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px_5 \sin[\beta])^2 + \\ (-bx_5 + tx + px_5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py_5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ (-by_5 + ty + px_5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\ 4 \left(-by_6 + ty + px_6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \right) \\ (-16^2 + (tz + py_6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px_6 \sin[\beta])^2 + \\ (-bx_6 + tx + px_6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py_6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\ (-by_6 + ty + px_6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py_6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t_z} =$$

$$4 \left(t_z + p_{y1} \cos[\beta] \sin[\alpha] - p_{x1} \sin[\beta] \right)$$

$$\left(-11^2 + \left(t_z + p_{y1} \cos[\beta] \sin[\alpha] - p_{x1} \sin[\beta] \right)^2 + \right.$$

$$\left(-b_{x1} + t_x + p_{x1} \cos[\beta] \cos[\gamma] + p_{y1} \left(\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma] \right) \right)^2 +$$

$$\left. \left(-b_{y1} + t_y + p_{x1} \cos[\beta] \sin[\gamma] + p_{y1} \left(\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma] \right) \right)^2 \right) +$$

$$4 \left(t_z + p_{y2} \cos[\beta] \sin[\alpha] - p_{x2} \sin[\beta] \right)$$

$$\left(-12^2 + \left(t_z + p_{y2} \cos[\beta] \sin[\alpha] - p_{x2} \sin[\beta] \right)^2 + \right.$$

$$\left(-b_{x2} + t_x + p_{x2} \cos[\beta] \cos[\gamma] + p_{y2} \left(\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma] \right) \right)^2 +$$

$$\left. \left(-b_{y2} + t_y + p_{x2} \cos[\beta] \sin[\gamma] + p_{y2} \left(\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma] \right) \right)^2 \right) +$$

$$\begin{aligned}
& 4 (tz + py3 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px3 \sin[\beta]) \\
& (-13^2 + (tz + py3 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px3 \sin[\beta])^2 + \\
& (-bx3 + tx + px3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& (-by3 + ty + px3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 4 (tz + py4 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px4 \sin[\beta]) \\
& (-14^2 + (tz + py4 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px4 \sin[\beta])^2 + \\
& (-bx4 + tx + px4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& (-by4 + ty + px4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 4 (tz + py5 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px5 \sin[\beta]) \\
& (-15^2 + (tz + py5 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px5 \sin[\beta])^2 + \\
& (-bx5 + tx + px5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& (-by5 + ty + px5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 4 (tz + py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px6 \sin[\beta]) \\
& (-16^2 + (tz + py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px6 \sin[\beta])^2 + \\
& (-bx6 + tx + px6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& (-by6 + ty + px6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} =$$

$$\begin{aligned}
& 2 (2 py1 \cos[\alpha] \cos[\beta] (tz + py1 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px1 \sin[\beta]) + \\
& 2 py1 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] \sin[\beta] + \sin[\alpha] \sin[\gamma]) \\
& (-bx1 + tx + px1 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py1 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& 2 py1 (-\cos[\gamma] \sin[\alpha] + \cos[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& (-by1 + ty + px1 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py1 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) + \\
& (-11^2 + (tz + py1 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px1 \sin[\beta])^2 + \\
& (-bx1 + tx + px1 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py1 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& (-by1 + ty + px1 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py1 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 (2 py2 \cos[\alpha] \cos[\beta] (tz + py2 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px2 \sin[\beta]) + \\
& 2 py2 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] \sin[\beta] + \sin[\alpha] \sin[\gamma]) \\
& (-bx2 + tx + px2 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py2 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& 2 py2 (-\cos[\gamma] \sin[\alpha] + \cos[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& (-by2 + ty + px2 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py2 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) + \\
& (-12^2 + (tz + py2 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px2 \sin[\beta])^2 + \\
& (-bx2 + tx + px2 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py2 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& (-by2 + ty + px2 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py2 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 (2 py3 \cos[\alpha] \cos[\beta] (tz + py3 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px3 \sin[\beta]) + \\
& 2 py3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] \sin[\beta] + \sin[\alpha] \sin[\gamma]) \\
& (-bx3 + tx + px3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& 2 py3 (-\cos[\gamma] \sin[\alpha] + \cos[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& (-by3 + ty + px3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) + \\
& (-13^2 + (tz + py3 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px3 \sin[\beta])^2 + \\
& (-bx3 + tx + px3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& (-by3 + ty + px3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 (2py4 \cos[\alpha] \cos[\beta] (tz + py4 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px4 \sin[\beta]) + \\
& \quad 2py4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] \sin[\beta] + \sin[\alpha] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-bx4 + tx + px4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2py4 (-\cos[\gamma] \sin[\alpha] + \cos[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-by4 + ty + px4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])))) \\
& (-14^2 + (tz + py4 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px4 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx4 + tx + px4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by4 + ty + px4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 (2py5 \cos[\alpha] \cos[\beta] (tz + py5 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px5 \sin[\beta]) + \\
& \quad 2py5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] \sin[\beta] + \sin[\alpha] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-bx5 + tx + px5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2py5 (-\cos[\gamma] \sin[\alpha] + \cos[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-by5 + ty + px5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])))) \\
& (-15^2 + (tz + py5 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px5 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx5 + tx + px5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by5 + ty + px5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 (2py6 \cos[\alpha] \cos[\beta] (tz + py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px6 \sin[\beta]) + \\
& \quad 2py6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] \sin[\beta] + \sin[\alpha] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-bx6 + tx + px6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2py6 (-\cos[\gamma] \sin[\alpha] + \cos[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-by6 + ty + px6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])))) \\
& (-16^2 + (tz + py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px6 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx6 + tx + px6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by6 + ty + px6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta} =$$

$$\begin{aligned}
& 2 (2 (tz + py1 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px1 \sin[\beta]) (-px1 \cos[\beta] - py1 \sin[\alpha] \sin[\beta]) + \\
& \quad 2 (py1 \cos[\beta] \cos[\gamma] \sin[\alpha] - px1 \cos[\gamma] \sin[\beta]) \\
& \quad (-bx1 + tx + px1 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py1 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (py1 \cos[\beta] \sin[\alpha] \sin[\gamma] - px1 \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-by1 + ty + px1 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py1 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])))) \\
& (-11^2 + (tz + py1 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px1 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx1 + tx + px1 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py1 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by1 + ty + px1 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py1 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 (2 (tz + py2 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px2 \sin[\beta]) (-px2 \cos[\beta] - py2 \sin[\alpha] \sin[\beta]) + \\
& \quad 2 (py2 \cos[\beta] \cos[\gamma] \sin[\alpha] - px2 \cos[\gamma] \sin[\beta]) \\
& \quad (-bx2 + tx + px2 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py2 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (py2 \cos[\beta] \sin[\alpha] \sin[\gamma] - px2 \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-by2 + ty + px2 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py2 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])))) \\
& (-12^2 + (tz + py2 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px2 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx2 + tx + px2 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py2 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by2 + ty + px2 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py2 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 (2 (tz + py3 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px3 \sin[\beta]) (-px3 \cos[\beta] - py3 \sin[\alpha] \sin[\beta]) + \\
& \quad 2 (py3 \cos[\beta] \cos[\gamma] \sin[\alpha] - px3 \cos[\gamma] \sin[\beta]) \\
& \quad (-bx3 + tx + px3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (py3 \cos[\beta] \sin[\alpha] \sin[\gamma] - px3 \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-by3 + ty + px3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-13^2 + (tz + py3 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px3 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx3 + tx + px3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by3 + ty + px3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 (2 (tz + py4 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px4 \sin[\beta]) (-px4 \cos[\beta] - py4 \sin[\alpha] \sin[\beta]) + \\
& \quad 2 (py4 \cos[\beta] \cos[\gamma] \sin[\alpha] - px4 \cos[\gamma] \sin[\beta]) \\
& \quad (-bx4 + tx + px4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (py4 \cos[\beta] \sin[\alpha] \sin[\gamma] - px4 \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-by4 + ty + px4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-14^2 + (tz + py4 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px4 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx4 + tx + px4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by4 + ty + px4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 (2 (tz + py5 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px5 \sin[\beta]) (-px5 \cos[\beta] - py5 \sin[\alpha] \sin[\beta]) + \\
& \quad 2 (py5 \cos[\beta] \cos[\gamma] \sin[\alpha] - px5 \cos[\gamma] \sin[\beta]) \\
& \quad (-bx5 + tx + px5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (py5 \cos[\beta] \sin[\alpha] \sin[\gamma] - px5 \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-by5 + ty + px5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-15^2 + (tz + py5 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px5 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx5 + tx + px5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by5 + ty + px5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 (2 (tz + py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px6 \sin[\beta]) (-px6 \cos[\beta] - py6 \sin[\alpha] \sin[\beta]) + \\
& \quad 2 (py6 \cos[\beta] \cos[\gamma] \sin[\alpha] - px6 \cos[\gamma] \sin[\beta]) \\
& \quad (-bx6 + tx + px6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] \sin[\gamma] - px6 \sin[\beta] \sin[\gamma]) \\
& \quad (-by6 + ty + px6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-16^2 + (tz + py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px6 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx6 + tx + px6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by6 + ty + px6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \gamma} =$$

2

$$\begin{aligned}
& (2 (-bx1 + tx + px1 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py1 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-px1 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py1 (-\cos[\alpha] \cos[\gamma] - \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (px1 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py1 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-by1 + ty + px1 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py1 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-11^2 + (tz + py1 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px1 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx1 + tx + px1 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py1 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by1 + ty + px1 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py1 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(-bx^2 + tx + px^2 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^2 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]) \right) \\
& \quad (-px^2 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^2 (-\cos[\alpha] \cos[\gamma] - \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (px^2 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^2 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-by^2 + ty + px^2 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^2 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-12^2 + (tz + py^2 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px^2 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx^2 + tx + px^2 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^2 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by^2 + ty + px^2 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^2 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 \\
& \quad 2 (-bx^3 + tx + px^3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-px^3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^3 (-\cos[\alpha] \cos[\gamma] - \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (px^3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-by^3 + ty + px^3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-13^2 + (tz + py^3 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px^3 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx^3 + tx + px^3 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^3 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by^3 + ty + px^3 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^3 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 \\
& \quad 2 (-bx^4 + tx + px^4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-px^4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^4 (-\cos[\alpha] \cos[\gamma] - \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (px^4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-by^4 + ty + px^4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-14^2 + (tz + py^4 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px^4 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx^4 + tx + px^4 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^4 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by^4 + ty + px^4 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^4 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 \\
& \quad 2 (-bx^5 + tx + px^5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-px^5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^5 (-\cos[\alpha] \cos[\gamma] - \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (px^5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-by^5 + ty + px^5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-15^2 + (tz + py^5 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px^5 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx^5 + tx + px^5 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^5 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by^5 + ty + px^5 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^5 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2) + \\
& 2 \\
& \quad 2 (-bx^6 + tx + px^6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-px^6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^6 (-\cos[\alpha] \cos[\gamma] - \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) + \\
& \quad 2 (px^6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-by^6 + ty + px^6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) \\
& \quad (-16^2 + (tz + py^6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px^6 \sin[\beta])^2 + \\
& \quad (-bx^6 + tx + px^6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py^6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + \\
& \quad (-by^6 + ty + px^6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py^6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)
\end{aligned}$$

Funkcija F_2 – kanonski oblik sa devet varijabli

$$\begin{aligned}
& F_2(n_x, n_y, n_z, o_x, o_y, o_z, t_x, t_y, t_z) = \\
& (-1 + nx^2 + ny^2 + nz^2)^2 + (nx ox + ny oy + nz oz)^2 + (-1 + ox^2 + oy^2 + oz^2)^2 + \\
& (-C4 + C42 nx + C45 ny + C43 ox + C46 oy + C41 tx + C44 ty)^2 + \\
& (-C5 + C52 nx + C55 ny + C53 ox + C56 oy + C51 tx + C54 ty)^2 + \\
& (-C6 + C62 nx + C65 ny + C63 ox + C66 oy + C61 tx + C64 ty)^2 + (-A - A2 nx - A1 tx + nx tx + ny ty + nz tz)^2 + \\
& (-B - B2 nx - B5 ny - B3 ox - B6 oy - B1 tx + ox tx - B4 ty + oy ty + oz tz)^2 + (-11^2 + tx^2 + ty^2 + tz^2)^2
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n_x} =$$

$$4 n_x (-1 + n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) + 2 \alpha_x (n_x \alpha_x + n_y \alpha_y + n_z \alpha_z) +$$

$$2 C_{42} (-C_4 + C_{42} n_x + C_{45} n_y + C_{43} \alpha_x + C_{46} \alpha_y + C_{41} t_x + C_{44} t_y) +$$

$$2 C_{52} (-C_5 + C_{52} n_x + C_{55} n_y + C_{53} \alpha_x + C_{56} \alpha_y + C_{51} t_x + C_{54} t_y) +$$

$$2 C_{62} (-C_6 + C_{62} n_x + C_{65} n_y + C_{63} \alpha_x + C_{66} \alpha_y + C_{61} t_x + C_{64} t_y) +$$

$$2 (-A_2 + t_x) (-A - A_2 n_x - A_1 t_x + n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z) -$$

$$2 B_2 (-B - B_2 n_x - B_5 n_y - B_3 \alpha_x - B_6 \alpha_y - B_1 t_x + \alpha_x t_x - B_4 t_y + \alpha_y t_y + \alpha_z t_z)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n_y} =$$

$$4 n_y (-1 + n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) + 2 \alpha_y (n_x \alpha_x + n_y \alpha_y + n_z \alpha_z) +$$

$$2 C_{45} (-C_4 + C_{42} n_x + C_{45} n_y + C_{43} \alpha_x + C_{46} \alpha_y + C_{41} t_x + C_{44} t_y) +$$

$$2 C_{55} (-C_5 + C_{52} n_x + C_{55} n_y + C_{53} \alpha_x + C_{56} \alpha_y + C_{51} t_x + C_{54} t_y) +$$

$$2 C_{65} (-C_6 + C_{62} n_x + C_{65} n_y + C_{63} \alpha_x + C_{66} \alpha_y + C_{61} t_x + C_{64} t_y) + 2 t_y (-A - A_2 n_x - A_1 t_x + n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z) -$$

$$2 B_5 (-B - B_2 n_x - B_5 n_y - B_3 \alpha_x - B_6 \alpha_y - B_1 t_x + \alpha_x t_x - B_4 t_y + \alpha_y t_y + \alpha_z t_z)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n_z} =$$

$$4 n_z (-1 + n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) + 2 \alpha_z (n_x \alpha_x + n_y \alpha_y + n_z \alpha_z) + 2 t_z (-A - A_2 n_x - A_1 t_x + n_x t_x + n_y t_y + n_z t_z)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_x} =$$

$$2 n_x (n_x \alpha_x + n_y \alpha_y + n_z \alpha_z) + 4 \alpha_x (-1 + \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) +$$

$$2 C_{43} (-C_4 + C_{42} n_x + C_{45} n_y + C_{43} \alpha_x + C_{46} \alpha_y + C_{41} t_x + C_{44} t_y) +$$

$$2 C_{53} (-C_5 + C_{52} n_x + C_{55} n_y + C_{53} \alpha_x + C_{56} \alpha_y + C_{51} t_x + C_{54} t_y) +$$

$$2 C_{63} (-C_6 + C_{62} n_x + C_{65} n_y + C_{63} \alpha_x + C_{66} \alpha_y + C_{61} t_x + C_{64} t_y) +$$

$$2 (-B_3 + t_x) (-B - B_2 n_x - B_5 n_y - B_3 \alpha_x - B_6 \alpha_y - B_1 t_x + \alpha_x t_x - B_4 t_y + \alpha_y t_y + \alpha_z t_z)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_y} =$$

$$2 n_y (n_x \alpha_x + n_y \alpha_y + n_z \alpha_z) + 4 \alpha_y (-1 + \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) +$$

$$2 C_{46} (-C_4 + C_{42} n_x + C_{45} n_y + C_{43} \alpha_x + C_{46} \alpha_y + C_{41} t_x + C_{44} t_y) +$$

$$2 C_{56} (-C_5 + C_{52} n_x + C_{55} n_y + C_{53} \alpha_x + C_{56} \alpha_y + C_{51} t_x + C_{54} t_y) +$$

$$2 C_{66} (-C_6 + C_{62} n_x + C_{65} n_y + C_{63} \alpha_x + C_{66} \alpha_y + C_{61} t_x + C_{64} t_y) +$$

$$2 (-B_6 + t_y) (-B - B_2 n_x - B_5 n_y - B_3 \alpha_x - B_6 \alpha_y - B_1 t_x + \alpha_x t_x - B_4 t_y + \alpha_y t_y + \alpha_z t_z)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial o_z} = 2nz (nx ox + ny oy + nz oz) + 4oz (-1 + ox^2 + oy^2 + oz^2) + 2tz (-B - B2nx - B5ny - B3ox - B6oy - B1tx + ox tx - B4ty + oy ty + oz tz)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t_z} = 2C41 (-C4 + C42nx + C45ny + C43ox + C46oy + C41tx + C44ty) + 2C51 (-C5 + C52nx + C55ny + C53ox + C56oy + C51tx + C54ty) + 2C61 (-C6 + C62nx + C65ny + C63ox + C66oy + C61tx + C64ty) + 2(-A1 + nx) (-A - A2nx - A1tx + ntxt + nyty + nztz) + 2(-B1 + ox) (-B - B2nx - B5ny - B3ox - B6oy - B1tx + ox tx - B4ty + oy ty + oz tz) + 4tx (-1l^2 + tx^2 + ty^2 + tz^2)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t_y} = 2C44 (-C4 + C42nx + C45ny + C43ox + C46oy + C41tx + C44ty) + 2C54 (-C5 + C52nx + C55ny + C53ox + C56oy + C51tx + C54ty) + 2C64 (-C6 + C62nx + C65ny + C63ox + C66oy + C61tx + C64ty) + 2ny (-A - A2nx - A1tx + ntxt + nyty + nztz) + 2(-B4 + oy) (-B - B2nx - B5ny - B3ox - B6oy - B1tx + ox tx - B4ty + oy ty + oz tz) + 4ty (-1l^2 + tx^2 + ty^2 + tz^2)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t_z} = 2nz (-A - A2nx - A1tx + ntxt + nyty + nztz) + 2oz (-B - B2nx - B5ny - B3ox - B6oy - B1tx + ox tx - B4ty + oy ty + oz tz) + 4tz (-1l^2 + tx^2 + ty^2 + tz^2)$$

Funkcija F_3 – kanonski oblik sa šest varijabli

$$F_3(n_x, n_z, o_x, o_y, o_z, t_z) = (-1 + nx^2 + nz^2 + (F3 + F31nx + F32ox + F33oy)^2)^2 + (nx ox + oy (F3 + F31nx + F32ox + F33oy) + nz oz)^2 + (-1 + ox^2 + oy^2 + oz^2)^2 + (-A - A2nx - A1(F1 + F11nx + F12ox + F13oy) + nx(F1 + F11nx + F12ox + F13oy) + (F2 + F21nx + F22ox + F23oy)(F3 + F31nx + F32ox + F33oy) + nztz)^2 + (-B - B2nx - B3ox - B6oy - B1(F1 + F11nx + F12ox + F13oy) + ox(F1 + F11nx + F12ox + F13oy) - B4(F2 + F21nx + F22ox + F23oy) + oy(F2 + F21nx + F22ox + F23oy) - B5(F3 + F31nx + F32ox + F33oy) + oz tz)^2 + ((F1 + F11nx + F12ox + F13oy)^2 + (F2 + F21nx + F22ox + F23oy)^2 - 1l^2 + tz^2)^2$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial n_x} =$$

$$2 (2 n_x + 2 F_{31} (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y)) (-1 + n_x^2 + n_z^2 + (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y)^2) +$$

$$2 (o_x + F_{31} o_y) (n_x o_x + o_y (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) + n_z o_z) +$$

$$2 (-A_2 + F_1 - A_1 F_{11} + 2 F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y + F_{31} (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) +$$

$$F_{21} (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y))$$

$$(-A - A_2 n_x - A_1 (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + n_x (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) +$$

$$(F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) + n_z t_z) +$$

$$2 (-B_2 - B_1 F_{11} - B_4 F_{21} - B_5 F_{31} + F_{11} o_x + F_{21} o_y)$$

$$(-B - B_2 n_x - B_3 o_x - B_6 o_y - B_1 (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + o_x (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) -$$

$$B_4 (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) + o_y (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) - B_5 (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) +$$

$$o_z t_z) + 2 (2 F_{11} (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + 2 F_{21} (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) +$$

$$((F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y)^2 + (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y)^2 - S_1^2 + t_z^2)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial n_z} =$$

$$4 n_z (-1 + n_x^2 + n_z^2 + (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y)^2) + 2 o_z (n_x o_x + o_y (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) + n_z o_z) +$$

$$2 t_z (-A - A_2 n_x - A_1 (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + n_x (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) +$$

$$(F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) + n_z t_z)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial o_x} =$$

$$4 F_{32} (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) (-1 + n_x^2 + n_z^2 + (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y)^2) +$$

$$2 (n_x + F_{32} o_y) (n_x o_x + o_y (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) + n_z o_z) + 4 o_x (-1 + o_x^2 + o_y^2 + o_z^2) +$$

$$2 (-A_1 F_{12} + F_{12} n_x + F_{32} (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) + F_{22} (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y))$$

$$(-A - A_2 n_x - A_1 (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + n_x (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) +$$

$$(F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) + n_z t_z) +$$

$$2 (-B_3 + F_1 - B_1 F_{12} - B_4 F_{22} - B_5 F_{32} + F_{11} n_x + 2 F_{12} o_x + F_{13} o_y + F_{22} o_y)$$

$$(-B - B_2 n_x - B_3 o_x - B_6 o_y - B_1 (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + o_x (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) -$$

$$B_4 (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) + o_y (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) - B_5 (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) +$$

$$o_z t_z) + 2 (2 F_{12} (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + 2 F_{22} (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) +$$

$$((F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y)^2 + (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y)^2 - S_1^2 + t_z^2)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial o_y} =$$

$$4 F_{33} (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) (-1 + n_x^2 + n_z^2 + (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y)^2) +$$

$$2 (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + 2 F_{33} o_y) (n_x o_x + o_y (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) + n_z o_z) +$$

$$4 o_y (-1 + o_x^2 + o_y^2 + o_z^2) +$$

$$2 (-A_1 F_{13} + F_{13} n_x + F_{33} (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) + F_{23} (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) +$$

$$(-A - A_2 n_x - A_1 (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + n_x (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) +$$

$$(F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) + n_z t_z) +$$

$$2 (-B_6 - B_1 F_{13} + F_2 - B_4 F_{23} - B_5 F_{33} + F_{21} n_x + F_{13} o_x + F_{22} o_x + 2 F_{23} o_y)$$

$$(-B - B_2 n_x - B_3 o_x - B_6 o_y - B_1 (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + o_x (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) -$$

$$B_4 (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) + o_y (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) - B_5 (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) +$$

$$o_z t_z) + 2 (2 F_{13} (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + 2 F_{23} (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) +$$

$$((F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y)^2 + (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y)^2 - S_1^2 + t_z^2)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial o_z} =$$

$$2 n_z (n_x o_x + o_y (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) + n_z o_z) + 4 o_z (-1 + o_x^2 + o_y^2 + o_z^2) +$$

$$2 t_z (-B - B_2 n_x - B_3 o_x - B_6 o_y - B_1 (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + o_x (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) -$$

$$B_4 (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) + o_y (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) - B_5 (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) + o_z t_z)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial t_z} =$$

$$2 n_z (-A - A_2 n_x - A_1 (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + n_x (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) +$$

$$(F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) + n_z t_z) +$$

$$2 o_z (-B - B_2 n_x - B_3 o_x - B_6 o_y - B_1 (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) + o_x (F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y) -$$

$$B_4 (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) + o_y (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y) - B_5 (F_3 + F_{31} n_x + F_{32} o_x + F_{33} o_y) +$$

$$o_z t_z) + 4 t_z ((F_1 + F_{11} n_x + F_{12} o_x + F_{13} o_y)^2 + (F_2 + F_{21} n_x + F_{22} o_x + F_{23} o_y)^2 - S_1^2 + t_z^2)$$

Funkcija F_4 – kanonski oblik sa tri varijable

$$F_4(n_x, o_x, o_y) =$$

$$(-(D_1 + D_{12} n_x + D_{11} o_x + D_{13} o_y)^2 - (D_2 + D_{22} n_x + D_{21} o_x + D_{23} o_y)^2 - (E + E_2 n_x + E_1 o_x + E_3 o_y)^2 +$$

$$11^2 (1 - o_x^2 - o_y^2) + (-o_y (D_1 + D_{12} n_x + D_{11} o_x + D_{13} o_y) + o_x (D_2 + D_{22} n_x + D_{21} o_x + D_{23} o_y))^2 +$$

$$2 (E + E_2 n_x + E_1 o_x + E_3 o_y) (o_x (D_1 + D_{12} n_x + D_{11} o_x + D_{13} o_y) + o_y (D_2 + D_{22} n_x + D_{21} o_x + D_{23} o_y))^2 +$$

$$(1 - n_x^2 - o_x^2 - o_y^2 - (D_3 + D_{32} n_x + D_{31} o_x + D_{33} o_y)^2 + (n_x o_y - o_x (D_3 + D_{32} n_x + D_{31} o_x + D_{33} o_y))^2)^2 +$$

$$(-(D_1 + D_{12} n_x + D_{11} o_x + D_{13} o_y)^2 - (D_2 + D_{22} n_x + D_{21} o_x + D_{23} o_y)^2 -$$

$$(A + A_2 n_x + A_1 (D_1 + D_{12} n_x + D_{11} o_x + D_{13} o_y))^2 +$$

$$(n_x (D_2 + D_{22} n_x + D_{21} o_x + D_{23} o_y) - (D_1 + D_{12} n_x + D_{11} o_x + D_{13} o_y) (D_3 + D_{32} n_x + D_{31} o_x + D_{33} o_y))^2 +$$

$$2 (A + A_2 n_x + A_1 (D_1 + D_{12} n_x + D_{11} o_x + D_{13} o_y) +$$

$$(n_x (D_1 + D_{12} n_x + D_{11} o_x + D_{13} o_y) + (D_2 + D_{22} n_x + D_{21} o_x + D_{23} o_y) (D_3 + D_{32} n_x + D_{31} o_x + D_{33} o_y)) +$$

$$11^2 (1 - n_x^2 - (D_3 + D_{32} n_x + D_{31} o_x + D_{33} o_y)^2))^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_4}{\partial n_x} = & 2 (-2 D12 (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) - 2 D22 (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy) - 2 E2 (E + E2 nx + E1 ox + E3 oy) + \\
& 2 (D12 ox + D22 oy) (E + E2 nx + E1 ox + E3 oy) + \\
& 2 (D22 ox - D12 oy) (-oy (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) + ox (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy)) + \\
& 2 E2 (ox (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) + oy (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy))) \\
& (- (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy)^2 - (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy)^2 - (E + E2 nx + E1 ox + E3 oy)^2 + \\
& 11^2 (1 - ox^2 - oy^2) + (-oy (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) + ox (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy))^2 + \\
& 2 (E + E2 nx + E1 ox + E3 oy) (ox (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) + oy (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy))) + \\
& 2 (-2 nx - 2 D32 (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy) + 2 (-D32 ox + oy) (nx oy - ox (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy)) + \\
& (1 - nx^2 - ox^2 - oy^2 - (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy)^2 + (nx oy - ox (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy))^2) + \\
& 2 (-2 D12 (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) - 2 D22 (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy) - \\
& 2 (A2 + A1 D12) (A + A2 nx + A1 (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy)) + \\
& 2 (A + A2 nx + A1 (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy)) \\
& (D1 + 2 D12 nx + D11 ox + D13 oy + D32 (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy) + D22 (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy)) + \\
& 11^2 (-2 nx - 2 D32 (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy)) + \\
& 2 (D2 + 2 D22 nx + D21 ox + D23 oy - D32 (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) - D12 (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy)) \\
& (nx (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy) - (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy)) + \\
& 2 (A2 + A1 D12) \\
& (nx (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) + (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy) (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy))) \\
& (- (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy)^2 - (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy)^2 - \\
& (A + A2 nx + A1 (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy))^2 + \\
& (nx (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy) - (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy))^2 + \\
& 2 (A + A2 nx + A1 (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy)) \\
& (nx (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) + (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy) (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy)) + \\
& 11^2 (1 - nx^2 - (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy)^2)) \\
& (- (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy)^2 - (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy)^2 - \\
& (A + A2 nx + A1 (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy))^2 + \\
& (nx (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy) - (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy))^2 + \\
& 2 (A + A2 nx + A1 (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy)) \\
& (nx (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) + (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy) (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy)) + \\
& 11^2 (1 - nx^2 - (D3 + D32 nx + D31 ox + D33 oy)^2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_4}{\partial o_x} = & 2 (-2 11^2 ox - 2 D11 (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) - 2 D21 (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy) - \\
& 2 E1 (E + E2 nx + E1 ox + E3 oy) + 2 (D1 + D12 nx + 2 D11 ox + D13 oy + D21 oy) (E + E2 nx + E1 ox + E3 oy) + \\
& 2 (D2 + D22 nx + 2 D21 ox - D11 oy + D23 oy) \\
& (-oy (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) + ox (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy)) + \\
& 2 E1 (ox (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) + oy (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy))) \\
& (- (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy)^2 - (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy)^2 - (E + E2 nx + E1 ox + E3 oy)^2 + \\
& 11^2 (1 - ox^2 - oy^2) + (-oy (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) + ox (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy))^2 + \\
& 2 (E + E2 nx + E1 ox + E3 oy) (ox (D1 + D12 nx + D11 ox + D13 oy) + oy (D2 + D22 nx + D21 ox + D23 oy))) +
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
& (-2 \alpha x - 2 D_{31} (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y) + \\
& 2 (-D_3 - D_{32} nx - 2 D_{31} \alpha x - D_{33} \alpha y) (nx \alpha y - \alpha x (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) \\
& (1 - nx^2 - \alpha x^2 - \alpha y^2 - (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)^2 + (nx \alpha y - \alpha x (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y))^2) + \\
& 2 (-2 D_{11} (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) - 2 D_{21} (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) - \\
& 2 D_{31} l_1^2 (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y) - 2 A_1 D_{11} (A + A_2 nx + A_1 (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y)) + \\
& 2 (A + A_2 nx + A_1 (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y)) \\
& (D_{11} nx + D_{31} (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) + D_{21} (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) + \\
& 2 (D_{21} nx - D_{31} (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) - D_{11} (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) \\
& (nx (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) - (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) + 2 A_1 D_{11} \\
& (nx (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) + (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) \\
& (- (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y)^2 - (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y)^2 - \\
& (A + A_2 nx + A_1 (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y))^2 + \\
& (nx (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) - (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y))^2 + \\
& 2 (A + A_2 nx + A_1 (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y)) \\
& (nx (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) + (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) + \\
& l_1^2 (1 - nx^2 - (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)^2)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial \alpha_y} =$$

$$\begin{aligned}
& 2 (-2 l_1^2 \alpha y - 2 D_{13} (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) - 2 D_{23} (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) - \\
& 2 E_3 (E + E_2 nx + E_1 \alpha x + E_3 \alpha y) + 2 (D_2 + D_{22} nx + D_{13} \alpha x + D_{21} \alpha x + 2 D_{23} \alpha y) (E + E_2 nx + E_1 \alpha x + E_3 \alpha y) + \\
& 2 (-D_1 - D_{12} nx - D_{11} \alpha x + D_{23} \alpha x - 2 D_{13} \alpha y) \\
& (-\alpha y (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) + \alpha x (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y)) + \\
& 2 E_3 (\alpha x (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) + \alpha y (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y)) \\
& (- (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y)^2 - (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y)^2 - (E + E_2 nx + E_1 \alpha x + E_3 \alpha y)^2 + \\
& l_1^2 (1 - \alpha x^2 - \alpha y^2) + (-\alpha y (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) + \alpha x (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y))^2 + \\
& 2 (E + E_2 nx + E_1 \alpha x + E_3 \alpha y) (\alpha x (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) + \alpha y (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y))) + \\
& 2 (-2 \alpha y - 2 D_{33} (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y) + 2 (nx - D_{33} \alpha x) (nx \alpha y - \alpha x (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) \\
& (1 - nx^2 - \alpha x^2 - \alpha y^2 - (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)^2 + (nx \alpha y - \alpha x (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y))^2) + \\
& 2 (-2 D_{13} (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) - 2 D_{23} (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) - \\
& 2 D_{33} l_1^2 (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y) - 2 A_1 D_{13} (A + A_2 nx + A_1 (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y)) + \\
& 2 (A + A_2 nx + A_1 (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y)) \\
& (D_{13} nx + D_{33} (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) + D_{23} (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) + \\
& 2 (D_{23} nx - D_{33} (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) - D_{13} (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) \\
& (nx (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) - (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) + \\
& 2 A_1 D_{13} (nx (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) + (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) \\
& (- (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y)^2 - (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y)^2 - \\
& (A + A_2 nx + A_1 (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y))^2 + \\
& (nx (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) - (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y))^2 + \\
& 2 (A + A_2 nx + A_1 (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y)) \\
& (nx (D_1 + D_{12} nx + D_{11} \alpha x + D_{13} \alpha y) + (D_2 + D_{22} nx + D_{21} \alpha x + D_{23} \alpha y) (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)) + \\
& l_1^2 (1 - nx^2 - (D_3 + D_{32} nx + D_{31} \alpha x + D_{33} \alpha y)^2)
\end{aligned}$$

Funkcija F_5 – položaj i rotacijski vektor

$F_5(t_x \ t_y \ t_z \ r_x \ r_y \ r_z) =$ istovjetno funkciji F_1 nakon izračuna rotacijske matrice

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_5}{\partial t_x} = & \sum_{i=1}^6 \left[4 \left(-b_{xi} + t_x + a_{xi} \left(\frac{r_x^2 (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} + \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}] \right) + \right. \right. \\ & a_{yi} \left(\frac{r_x r_y (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} - \frac{r_z \sin[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}]}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \right) \left. \right) \\ & \left(-l_i^2 + \right. \\ & \left(t_z + a_{yi} \left(\frac{r_y r_z (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} + \frac{r_x \sin[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}]}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \right) - \right. \\ & \left. a_{xi} \left(\frac{r_x r_z (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} - \frac{r_y \sin[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}]}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \right) \right)^2 + \\ & \left(-b_{xi} + t_x + a_{xi} \left(\frac{r_x^2 (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} + \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}] \right) + \right. \\ & \left. a_{yi} \left(\frac{r_x r_y (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} - \frac{r_z \sin[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}]}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \right) \right)^2 + \\ & \left(-b_{yi} + t_y + a_{yi} \left(\frac{r_y^2 (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} + \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}] \right) + \right. \\ & \left. a_{xi} \left(\frac{r_x r_y (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} + \frac{r_z \sin[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}]}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \right) \right)^2 \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_5}{\partial t_y} = & \sum_{i=1}^6 \left[\left(4 \left(-b_{yi} + t_y + a_{yi} \left(\frac{r_y^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. a_{xi} \left(\frac{rx \, ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \right. \\
& \left(-l_i^2 + \left(t_z + a_{yl} \left(\frac{ry \, rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rx \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. a_{xi} \left(\frac{rx \, rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{ry \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \right)^2 + \\
& \left(-b_{xi} + t_x + a_{xi} \left(\frac{rx^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\
& \left. a_{yi} \left(\frac{rx \, ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right)^2 + \\
& \left(-b_{yi} + t_y + a_{yi} \left(\frac{ry^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\
& \left. \left. a_{xi} \left(\frac{rx \, ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \right)^2 \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_5}{\partial t_z} = & \sum_{i=1}^6 \left[4 \left(t_z + a_{yi} \left(\frac{r_y r_z (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} + \frac{r_x \sin[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}]}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \right) - \right. \\
& a_{xi} \left(\frac{r_x r_z (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} - \frac{r_y \sin[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}]}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \right) \Bigg] \\
& \left(-l_i^2 + \right. \\
& \left(t_z + a_{yi} \left(\frac{r_y r_z (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} + \frac{r_x \sin[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}]}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \right) - \right. \\
& a_{xi} \left(\frac{r_x r_z (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} - \frac{r_y \sin[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}]}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \right) \Bigg)^2 + \\
& \left(-b_{xi} + t_x + a_{xi} \left(\frac{r_x^2 (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} + \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}] \right) + \right. \\
& a_{yi} \left(\frac{r_x r_y (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} - \frac{r_z \sin[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}]}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \right) \Bigg)^2 + \\
& \left(-b_{yi} + t_y + a_{yi} \left(\frac{r_y^2 (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} + \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}] \right) + \right. \\
& a_{xi} \left(\frac{r_x r_y (1 - \cos[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}])}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} + \frac{r_z \sin[\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}]}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \right) \Bigg)^2 \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_5}{\partial r_x} = & \sum_{i=1}^6 \left[2 \right. \\
& \left. \left(-\text{axi} \left(-\frac{2 r x^2 r z (1 - \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}])}{(r x^2 + r y^2 + r z^2)^2} + \frac{r z (1 - \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}])}{r x^2 + r y^2 + r z^2} - \right. \right. \\
& \left. \frac{r x r y \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{r x^2 + r y^2 + r z^2} + \frac{r x r y \sin[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{(r x^2 + r y^2 + r z^2)^{3/2}} + \frac{r x^2 r z \sin[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{(r x^2 + r y^2 + r z^2)^{3/2}} \right) + \\
& \text{ayi} \left(-\frac{2 r x r y r z (1 - \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}])}{(r x^2 + r y^2 + r z^2)^2} + \frac{r x^2 \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{r x^2 + r y^2 + r z^2} - \right. \\
& \left. \frac{r x^2 \sin[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{(r x^2 + r y^2 + r z^2)^{3/2}} + \frac{r x r y r z \sin[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{(r x^2 + r y^2 + r z^2)^{3/2}} + \frac{\sin[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}} \right) \Bigg] \\
& \left(\text{tz} + \text{ayi} \left(\frac{r y r z (1 - \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}])}{r x^2 + r y^2 + r z^2} + \frac{r x \sin[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}} \right) - \right. \\
& \left. \text{axi} \left(\frac{r x r z (1 - \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}])}{r x^2 + r y^2 + r z^2} - \frac{r y \sin[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}} \right) \right) + \\
& \left(\text{ayi} \left(-\frac{2 r x^2 r y (1 - \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}])}{(r x^2 + r y^2 + r z^2)^2} + \frac{r y (1 - \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}])}{r x^2 + r y^2 + r z^2} - \frac{r x r z \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{r x^2 + r y^2 + r z^2} + \right. \right. \\
& \left. \frac{r x^2 r y \sin[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{(r x^2 + r y^2 + r z^2)^{3/2}} + \frac{r x r z \sin[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{(r x^2 + r y^2 + r z^2)^{3/2}} \right) + \\
& \left. \text{axi} \left(-\frac{2 r x^3 (1 - \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}])}{(r x^2 + r y^2 + r z^2)^2} + \frac{2 r x (1 - \cos[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}])}{r x^2 + r y^2 + r z^2} + \frac{r x^3 \sin[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{(r x^2 + r y^2 + r z^2)^{3/2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{r x \sin[\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}]}{\sqrt{r x^2 + r y^2 + r z^2}} \right) \right) \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-bxi + tx + axi \left(\frac{rx^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\
& \quad \left. ayi \left(\frac{rx ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) + \\
& \quad 2 \left(axi \left(-\frac{2 rx^2 ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \frac{rx rz \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rx^2 ry \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} - \frac{rx rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} \right) + \\
& \quad \left. ayi \left(-\frac{2 rx ry^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{rx ry^2 \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} - \frac{rx \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \\
& \left(-byi + ty + ayi \left(\frac{ry^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\
& \quad \left. axi \left(\frac{rx ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \\
& \left(-li^2 + \right. \\
& \quad \left(tz + ayi \left(\frac{ry rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rx \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) - \right. \\
& \quad \left. axi \left(\frac{rx rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{ry \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right)^2 + \\
& \quad \left(-bxi + tx + axi \left(\frac{rx^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\
& \quad \left. ayi \left(\frac{rx ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right)^2 +
\end{aligned}$$

$$\left(-by_i + ty + ay_i \left(\frac{ry^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\ \left. ax_i \left(\frac{rx ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right)^2 \Bigg]$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial r_y} = \sum_{i=1}^6 \left[2 \right. \\ \left. \left(2 \right. \right. \\ \left. \left(ay_i \left(-\frac{2 ry^2 rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \frac{rx ry \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{rx ry \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} + \frac{ry^2 rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} \right) - \\ \left. ax_i \left(-\frac{2 rx ry rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} - \frac{ry^2 \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \right. \right. \\ \left. \frac{ry^2 \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} + \frac{rx ry rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} - \frac{\sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \Bigg] \\ \left(tz + ay_i \left(\frac{ry rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rx \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) - \right. \\ \left. ax_i \left(\frac{rx rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{ry \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) + \\ 2 \\ \left(ay_i \left(-\frac{2 rx ry^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{rx (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{ry rz \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \right. \right. \\ \left. \frac{rx ry^2 \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} + \frac{ry rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& \text{axi} \left(-\frac{2rx^2ry(1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{rx^2ry \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} - \frac{ry \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \\
& \left(-\text{bxi} + \text{tx} + \text{axi} \left(\frac{rx^2(1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\
& \left. \text{ayi} \left(\frac{rxry(1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) + \\
& 2 \\
& \left(\text{axi} \left(-\frac{2rxry^2(1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{rx(1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \right. \right. \\
& \left. \frac{ryrz \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rxry^2 \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} - \frac{ryrz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} \right) + \\
& \left. \text{ayi} \left(-\frac{2ry^3(1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{2ry(1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{ry^3 \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{ry \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \\
& \left(-\text{byi} + \text{ty} + \text{ayi} \left(\frac{ry^2(1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\
& \left. \text{axi} \left(\frac{rxry(1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \\
& \left(-\text{li}^2 + \right. \\
& \left. \left(\text{tz} + \text{ayi} \left(\frac{ryrz(1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rx \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. \text{axi} \left(\frac{rxrz(1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{ry \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \right)^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-bxi + tx + axi \left(\frac{rx^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\
& \quad \left. ayi \left(\frac{rx ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right)^2 + \\
& \left(-byi + ty + ayi \left(\frac{ry^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\
& \quad \left. axi \left(\frac{rx ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right)^2 \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F_5}{\partial r_z} = \\
& \sum_{i=1}^6 \left[2 \right. \\
& \quad \left. 2 \right. \\
& \quad \left(-ax6 \left(-\frac{2 rx rz^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{rx (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \right. \right. \\
& \quad \left. \frac{ry rz \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{ry rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} + \frac{rx rz^2 \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} \right) + \\
& \quad ay6 \left(-\frac{2 ry rz^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \right. \\
& \quad \left. \frac{rx rz \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{rx rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} + \frac{ry rz^2 \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} \right) \Bigg) \\
& \quad \left(tz + ay6 \left(\frac{ry rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rx \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) - \right. \\
& \quad \left. ax6 \left(\frac{rx rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{ry \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \Bigg] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(-bx_6 + tx + ax_6 \left(\frac{rx^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\
& \quad \left. ay_6 \left(\frac{rx ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \\
& \left(ay_6 \left(-\frac{2 rx ry rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} - \frac{rz^2 \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rx ry rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{rz^2 \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} - \frac{\sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) + \right. \\
& \quad \left. ax_6 \left(-\frac{2 rx^2 rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{rx^2 rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} - \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) + \\
& 2 \left(ax_6 \left(-\frac{2 rx ry rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{rz^2 \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rx ry rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{rz^2 \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} + \frac{\sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) + \right. \\
& \quad \left. ay_6 \left(-\frac{2 ry^2 rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^2} + \frac{ry^2 rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{(rx^2 + ry^2 + rz^2)^{3/2}} - \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \\
& \left(-by_6 + ty + ay_6 \left(\frac{ry^2 (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}] \right) + \right. \\
& \quad \left. ax_6 \left(\frac{rx ry (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rz \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right) \\
& \left(-11^2 + \right. \\
& \quad \left(tz + ay_6 \left(\frac{ry rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rx \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) - \right. \\
& \quad \left. ax_6 \left(\frac{rx rz (1 - \cos[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}])}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{ry \sin[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right)^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-bx_6 + tx + ax_6 \left(\frac{rx^2 \left(1 - \cos \left[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2} \right] \right)}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos \left[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2} \right] \right) + \right. \\
& \quad \left. ay_6 \left(\frac{rx \, ry \left(1 - \cos \left[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2} \right] \right)}{rx^2 + ry^2 + rz^2} - \frac{rz \sin \left[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2} \right]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right)^2 + \\
& \left(-by_6 + ty + ay_6 \left(\frac{ry^2 \left(1 - \cos \left[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2} \right] \right)}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \cos \left[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2} \right] \right) + \right. \\
& \quad \left. ax_6 \left(\frac{rx \, ry \left(1 - \cos \left[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2} \right] \right)}{rx^2 + ry^2 + rz^2} + \frac{rz \sin \left[\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2} \right]}{\sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2}} \right) \right)^2 \Bigg]
\end{aligned}$$

Prilog B: Parcijalne derivacije u polinomskom obliku

Funkcija F_1 – parcijalne derivacije po t_x , t_y i t_z

$$\frac{\partial F_1}{\partial t_x} = a \cdot t_x^3 + b \cdot t_x^2 + c \cdot t_x + d = 0$$

$$a = 24$$

$$b =$$

$$\sum_{i=1}^6 [4 (-bxi + pxi \cos[\beta] \cos[\gamma] + pyi (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) + 2 (-bxi + pxi \cos[\beta] \cos[\gamma] + pyi (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])))]$$

$$c =$$

$$\sum_{i=1}^6 [4 (-16^2 + (tz + py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px6 \sin[\beta])^2 + 3 (-bx6 + px6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + (-by6 + ty + px6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)]$$

$$d =$$

$$\sum_{i=1}^6 [4 (-bx6 + px6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma])) (-16^2 + (tz + py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - px6 \sin[\beta])^2 + (-bx6 + px6 \cos[\beta] \cos[\gamma] + py6 (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 + (-by6 + ty + px6 \cos[\beta] \sin[\gamma] + py6 (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2)]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t_y} = a \cdot t_y^3 + b \cdot t_y^2 + c \cdot t_y + d = 0$$

$$a = 24$$

$$b =$$

$$\sum_{i=1}^6 [4 (-byi + pxi \cos[\beta] \sin[\gamma] + pyi (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])) + 2 (-byi + pxi \cos[\beta] \sin[\gamma] + pyi (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma])))]$$

$$c =$$

$$\sum_{i=1}^6 [4(-li^2 + (tz + pyi \cos[\beta] \sin[\alpha] - pxi \sin[\beta])^2 +$$

$$(-bxi + tx + pxi \cos[\beta] \cos[\gamma] + pyi (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 +$$

$$3(-byi + pxi \cos[\beta] \sin[\gamma] + pyi (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2]$$

$$d =$$

$$\sum_{i=1}^6 [4(-byi + pxi \cos[\beta] \sin[\gamma] + pyi (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))$$

$$(-li^2 + (tz + pyi \cos[\beta] \sin[\alpha] - pxi \sin[\beta])^2 +$$

$$(-bxi + tx + pxi \cos[\beta] \cos[\gamma] + pyi (\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] - \cos[\alpha] \sin[\gamma]))^2 +$$

$$(-byi + pxi \cos[\beta] \sin[\gamma] + pyi (\cos[\alpha] \cos[\gamma] + \sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma]))^2]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t_z} = a \cdot t_z^3 + b \cdot t_z^2 + c \cdot t_z + d = 0$$

$$a = 24$$

$$b =$$

$$12py1 \cos[\beta] \sin[\alpha] + 12py2 \cos[\beta] \sin[\alpha] + 12py3 \cos[\beta] \sin[\alpha] + 12py4 \cos[\beta] \sin[\alpha] +$$

$$12py5 \cos[\beta] \sin[\alpha] + 12py6 \cos[\beta] \sin[\alpha] - 12px1 \sin[\beta] - 12px2 \sin[\beta] - 12px3 \sin[\beta] -$$

$$12px4 \sin[\beta] - 12px5 \sin[\beta] - 12px6 \sin[\beta]$$

$$c =$$

$$4 \left(bx1^2 + bx2^2 + bx3^2 + bx4^2 + bx5^2 + bx6^2 + by1^2 + by2^2 + by3^2 + by4^2 + by5^2 + by6^2 - len2^2 - len1^2 - \right.$$

$$len3^2 - len4^2 - len5^2 - len6^2 - 2bx1x - 2bx2x - 2bx3x - 2bx4x - 2bx5x - 2bx6x + 6x^2 - 2by1y -$$

$$2by2y - 2by3y - 2by4y - 2by5y - 2by6y + 6y^2 + (ay1^2 + ay2^2 + ay3^2 + ay4^2 + ay5^2 + ay6^2) \cos[\alpha]^2 +$$

$$\frac{1}{2} (2ax1^2 + 2ax2^2 + 2ax3^2 + 2ax4^2 + 2ax5^2 + 2ax6^2 + 3ay1^2 + 3ay2^2 + 3ay3^2 + 3ay4^2 + 3ay5^2 +$$

$$3ay6^2 - 3(ay1^2 + ay2^2 + ay3^2 + ay4^2 + ay5^2 + ay6^2) \cos[2\alpha] \cos[\beta]^2 -$$

$$2(ay1bx1 + ay2bx2 + ay3bx3 + ay4bx4 + ay5bx5 + ay6bx6 - ay1x - ay2x - ay3x - ay4x - ay5x - ay6x)$$

$$\cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta] + 3(ax3^2 + ax4^2 + ax5^2 + ax6^2) \sin[\beta]^2 +$$

$$(ay1^2 + ay2^2 + ay3^2 + ay4^2 + ay5^2 + ay6^2) \cos[\gamma]^2 \sin[\alpha]^2 \sin[\beta]^2 +$$

$$(ax1ay1 + ax2ay2 + ax3ay3 + ax4ay4 + ax5ay5 + ax6ay6) \cos[\gamma]^2 \sin[\alpha] \sin[2\beta] -$$

$$2(ay1by1 + ay2by2 + ay3by3 + ay4by4 + ay5by5 + ay6by6 - ay1y - ay2y - ay3y - ay4y - ay5y - ay6y)$$

$$\sin[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma] + (ay1^2 + ay2^2 + ay3^2 + ay4^2 + ay5^2 + ay6^2) \sin[\alpha]^2 \sin[\beta]^2 \sin[\gamma]^2 +$$

$$(ax1ay1 + ax2ay2 + ax3ay3 + ax4ay4 + ax5ay5 + ax6ay6) \sin[\alpha] \sin[2\beta] \sin[\gamma]^2 -$$

$$2\cos[\alpha]$$

$$((ay2by2 + ay3by3 + ay4by4 + ay5by5 + ay6by6 + ay1(by1 - y) - ay2y - ay3y - ay4y - ay5y - ay6y) \cos[\gamma] +$$

$$(-ay2bx2 - ay3bx3 - ay4bx4 - ay5bx5 - ay6bx6 + ay2x + ay3x + ay4x + ay5x + ay6x + ay1(-bx1 + x))$$

$$\sin[\gamma]) -$$

$$2\cos[\beta]$$

$$((ax2bx2 + ax3bx3 + ax4bx4 + ax5bx5 + ax6bx6 + ax1(bx1 - x) - ax2x - ax3x - ax4x - ax5x - ax6x) \cos[\gamma] +$$

$$3(ax1ay1 + ax2ay2 + ax3ay3 + ax4ay4 + ax5ay5 + ax6ay6) \sin[\alpha] \sin[\beta] +$$

$$(ax1by1 + ax2by2 + ax3by3 + ax4by4 + ax5by5 + ax6by6 - ax1y - ax2y - ax3y - ax4y - ax5y - ax6y)$$

$$\sin[\gamma]) \Big)$$

$d =$

$$\begin{aligned}
& 4 (ay_1 bx_1^2 + ay_2 bx_2^2 + ay_3 bx_3^2 + ay_4 bx_4^2 + ay_5 bx_5^2 + ay_6 bx_6^2 + ay_1 by_1^2 + ay_2 by_2^2 + ay_3 by_3^2 + \\
& \quad ay_4 by_4^2 + ay_5 by_5^2 + ay_6 by_6^2 - ay_1 l_1^2 - ay_2 l_2^2 - ay_3 l_3^2 - ay_4 l_4^2 - ay_5 l_5^2 - ay_6 l_6^2 - \\
& \quad 2 ay_1 bx_1 x - 2 ay_2 bx_2 x - 2 ay_3 bx_3 x - 2 ay_4 bx_4 x - 2 ay_5 bx_5 x - 2 ay_6 bx_6 x + ay_1 x^2 + ay_2 x^2 + \\
& \quad ay_3 x^2 + ay_4 x^2 + ay_5 x^2 + ay_6 x^2 - 2 ay_1 by_1 y - 2 ay_2 by_2 y - 2 ay_3 by_3 y - 2 ay_4 by_4 y - 2 ay_5 by_5 y - \\
& \quad 2 ay_6 by_6 y + ay_1 y^2 + ay_2 y^2 + ay_3 y^2 + ay_4 y^2 + ay_5 y^2 + ay_6 y^2) \cos[\beta] \sin[\alpha] - \\
& 8 (ay_1^2 by_1 + ay_2^2 by_2 + ay_3^2 by_3 + ay_4^2 by_4 + ay_5^2 by_5 + ay_6^2 by_6 - ay_1^2 y - ay_2^2 y - ay_3^2 y - ay_4^2 y - \\
& \quad ay_5^2 y - ay_6^2 y) \cos[\alpha] \cos[\beta] \cos[\gamma] \sin[\alpha] - \\
& 8 (ax_1 ay_1 bx_1 + ax_2 ay_2 bx_2 + ax_3 ay_3 bx_3 + ax_4 ay_4 bx_4 + ax_5 ay_5 bx_5 + ax_6 ay_6 bx_6 - ax_1 ay_1 x - \\
& \quad ax_2 ay_2 x - ax_3 ay_3 x - ax_4 ay_4 x - ax_5 ay_5 x - ax_6 ay_6 x) \cos[\beta]^2 \cos[\gamma] \sin[\alpha] + \\
& 4 (ay_1^3 + ay_2^3 + ay_3^3 + ay_4^3 + ay_5^3 + ay_6^3) \cos[\alpha]^2 \cos[\beta] \cos[\gamma]^2 \sin[\alpha] + \\
& 4 (ax_1^2 ay_1 + ax_2^2 ay_2 + ax_3^2 ay_3 + ax_4^2 ay_4 + ax_5^2 ay_5 + ax_6^2 ay_6) \cos[\beta]^3 \cos[\gamma]^2 \sin[\alpha] + \\
& 4 (ay_1^3 + ay_2^3 + ay_3^3 + ay_4^3 + ay_5^3 + ay_6^3) \cos[\beta]^3 \sin[\alpha]^3 - \\
& 4 (ax_1 bx_1^2 + ax_2 bx_2^2 + ax_3 bx_3^2 + ax_4 bx_4^2 + ax_5 bx_5^2 + ax_6 bx_6^2 + ax_1 by_1^2 + ax_2 by_2^2 + ax_3 by_3^2 + \\
& \quad ax_4 by_4^2 + ax_5 by_5^2 + ax_6 by_6^2 - ax_1 l_1^2 - ax_2 l_2^2 - ax_3 l_3^2 - ax_4 l_4^2 - ax_5 l_5^2 - ax_6 l_6^2 - \\
& \quad 2 ax_1 bx_1 x - 2 ax_2 bx_2 x - 2 ax_3 bx_3 x - 2 ax_4 bx_4 x - 2 ax_5 bx_5 x - 2 ax_6 bx_6 x + ax_1 x^2 + ax_2 x^2 + \\
& \quad ax_3 x^2 + ax_4 x^2 + ax_5 x^2 + ax_6 x^2 - 2 ax_1 by_1 y - 2 ax_2 by_2 y - 2 ax_3 by_3 y - 2 ax_4 by_4 y - 2 ax_5 by_5 y - \\
& \quad 2 ax_6 by_6 y + ax_1 y^2 + ax_2 y^2 + ax_3 y^2 + ax_4 y^2 + ax_5 y^2 + ax_6 y^2) \sin[\beta] + \\
& 8 (ax_1 ay_1 by_1 \cos[\alpha] + ax_2 ay_2 by_2 \cos[\alpha] + ax_3 ay_3 by_3 \cos[\alpha] + ax_4 ay_4 by_4 \cos[\alpha] + ax_5 ay_5 by_5 \cos[\alpha] + \\
& \quad ax_6 ay_6 by_6 \cos[\alpha] - ax_1 ay_1 y \cos[\alpha] - ax_2 ay_2 y \cos[\alpha] - ax_3 ay_3 y \cos[\alpha] - ax_4 ay_4 y \cos[\alpha] - \\
& \quad ax_5 ay_5 y \cos[\alpha] - ax_6 ay_6 y \cos[\alpha] + ax_1^2 bx_1 \cos[\beta] + ax_2^2 bx_2 \cos[\beta] + ax_3^2 bx_3 \cos[\beta] + \\
& \quad ax_4^2 bx_4 \cos[\beta] + ax_5^2 bx_5 \cos[\beta] + ax_6^2 bx_6 \cos[\beta] - ax_1^2 x \cos[\beta] - ax_2^2 x \cos[\beta] - ax_3^2 x \cos[\beta] - \\
& \quad ax_4^2 x \cos[\beta] - ax_5^2 x \cos[\beta] - ax_6^2 x \cos[\beta]) \cos[\gamma] \sin[\beta] - \\
& 4 (ax_1 ay_1^2 + ax_2 ay_2^2 + ax_3 ay_3^2 + ax_4 ay_4^2 + ax_5 ay_5^2 + ax_6 ay_6^2) \cos[\alpha]^2 \cos[\gamma]^2 \sin[\beta] - \\
& 4 (ax_1^3 + ax_2^3 + ax_3^3 + ax_4^3 + ax_5^3 + ax_6^3) \cos[\beta]^2 \cos[\gamma]^2 \sin[\beta] - \\
& 12 (ax_1 ay_1^2 + ax_2 ay_2^2 + ax_3 ay_3^2 + ax_4 ay_4^2 + ax_5 ay_5^2 + ax_6 ay_6^2) \cos[\beta]^2 \sin[\alpha]^2 \sin[\beta] - \\
& 8 (ay_1^2 bx_1 + ay_2^2 bx_2 + ay_3^2 bx_3 + ay_4^2 bx_4 + ay_5^2 bx_5 + ay_6^2 bx_6 - ay_1^2 x - ay_2^2 x - ay_3^2 x - ay_4^2 x - \\
& \quad ay_5^2 x - ay_6^2 x) \cos[\beta] \cos[\gamma] \sin[\alpha]^2 \sin[\beta] + \\
& 8 (ax_1 ay_1^2 + ax_2 ay_2^2 + ax_3 ay_3^2 + ax_4 ay_4^2 + ax_5 ay_5^2 + ax_6 ay_6^2) \cos[\beta]^2 \cos[\gamma]^2 \sin[\alpha]^2 \sin[\beta] + \\
& 12 (ax_1^2 ay_1 + ax_2^2 ay_2 + ax_3^2 ay_3 + ax_4^2 ay_4 + ax_5^2 ay_5 + ax_6^2 ay_6) \cos[\beta] \sin[\alpha] \sin[\beta]^2 + \\
& 8 (ax_1 ay_1 bx_1 + ax_2 ay_2 bx_2 + ax_3 ay_3 bx_3 + ax_4 ay_4 bx_4 + ax_5 ay_5 bx_5 + ax_6 ay_6 bx_6 - ax_1 ay_1 x - \\
& \quad ax_2 ay_2 x - ax_3 ay_3 x - ax_4 ay_4 x - ax_5 ay_5 x - ax_6 ay_6 x) \cos[\gamma] \sin[\alpha] \sin[\beta]^2 - \\
& 8 (ax_1^2 ay_1 + ax_2^2 ay_2 + ax_3^2 ay_3 + ax_4^2 ay_4 + ax_5^2 ay_5 + ax_6^2 ay_6) \cos[\beta] \cos[\gamma]^2 \sin[\alpha] \sin[\beta]^2 + \\
& 4 (ay_1^3 + ay_2^3 + ay_3^3 + ay_4^3 + ay_5^3 + ay_6^3) \cos[\beta] \cos[\gamma]^2 \sin[\alpha]^3 \sin[\beta]^2 - \\
& 4 (ax_1^3 + ax_2^3 + ax_3^3 + ax_4^3 + ax_5^3 + ax_6^3) \sin[\beta]^3 - \\
& 4 (ax_1 ay_1^2 + ax_2 ay_2^2 + ax_3 ay_3^2 + ax_4 ay_4^2 + ax_5 ay_5^2 + ax_6 ay_6^2) \cos[\gamma]^2 \sin[\alpha]^2 \sin[\beta]^3 + \\
& 8 (ay_1^2 bx_1 + ay_2^2 bx_2 + ay_3^2 bx_3 + ay_4^2 bx_4 + ay_5^2 bx_5 + ay_6^2 bx_6 - ay_1^2 x - ay_2^2 x - ay_3^2 x - ay_4^2 x - \\
& \quad ay_5^2 x - ay_6^2 x) \cos[\alpha] \cos[\beta] \sin[\alpha] \sin[\gamma] - \\
& 8 (ax_1 ay_1 by_1 + ax_2 ay_2 by_2 + ax_3 ay_3 by_3 + ax_4 ay_4 by_4 + ax_5 ay_5 by_5 + ax_6 ay_6 by_6 - ax_1 ay_1 y - ax_2 ay_2 y - \\
& \quad ax_3 ay_3 y - ax_4 ay_4 y - ax_5 ay_5 y - ax_6 ay_6 y) \cos[\beta]^2 \sin[\alpha] \sin[\gamma] - \\
& 8 (ax_1 ay_1 bx_1 + ax_2 ay_2 bx_2 + ax_3 ay_3 bx_3 + ax_4 ay_4 bx_4 + ax_5 ay_5 bx_5 + ax_6 ay_6 bx_6 - ax_1 ay_1 x - \\
& \quad ax_2 ay_2 x - ax_3 ay_3 x - ax_4 ay_4 x - ax_5 ay_5 x - ax_6 ay_6 x) \cos[\alpha] \sin[\beta] \sin[\gamma] + \\
& 8 (ax_1^2 by_1 + ax_2^2 by_2 + ax_3^2 by_3 + ax_4^2 by_4 + ax_5^2 by_5 + ax_6^2 by_6 - ax_1^2 y - ax_2^2 y - ax_3^2 y - ax_4^2 y - \\
& \quad ax_5^2 y - ax_6^2 y) \cos[\beta] \sin[\beta] \sin[\gamma] - \\
& 8 (ay_1^2 by_1 + ay_2^2 by_2 + ay_3^2 by_3 + ay_4^2 by_4 + ay_5^2 by_5 + ay_6^2 by_6 - ay_1^2 y - ay_2^2 y - ay_3^2 y - ay_4^2 y - \\
& \quad ay_5^2 y - ay_6^2 y) \cos[\beta] \sin[\alpha]^2 \sin[\beta] \sin[\gamma] + \\
& 8 (ax_1 ay_1 by_1 + ax_2 ay_2 by_2 + ax_3 ay_3 by_3 + ax_4 ay_4 by_4 + ax_5 ay_5 by_5 + ax_6 ay_6 by_6 - ax_1 ay_1 y - \\
& \quad ax_2 ay_2 y - ax_3 ay_3 y - ax_4 ay_4 y - ax_5 ay_5 y - ax_6 ay_6 y) \sin[\alpha] \sin[\beta]^2 \sin[\gamma] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4 (ay_1^3 + ay_2^3 + ay_3^3 + ay_4^3 + ay_5^3 + ay_6^3) \cos[\alpha]^2 \cos[\beta] \sin[\alpha] \sin[\gamma]^2 + \\
& 4 (ax_1^2 ay_1 + ax_2^2 ay_2 + ax_3^2 ay_3 + ax_4^2 ay_4 + ax_5^2 ay_5 + ax_6^2 ay_6) \cos[\beta]^3 \sin[\alpha] \sin[\gamma]^2 - \\
& 4 (ax_1 ay_1^2 + ax_2 ay_2^2 + ax_3 ay_3^2 + ax_4 ay_4^2 + ax_5 ay_5^2 + ax_6 ay_6^2) \cos[\alpha]^2 \sin[\beta] \sin[\gamma]^2 - \\
& 4 (ax_1^3 + ax_2^3 + ax_3^3 + ax_4^3 + ax_5^3 + ax_6^3) \cos[\beta]^2 \sin[\beta] \sin[\gamma]^2 + \\
& 8 (ax_1 ay_1^2 + ax_2 ay_2^2 + ax_3 ay_3^2 + ax_4 ay_4^2 + ax_5 ay_5^2 + ax_6 ay_6^2) \cos[\beta]^2 \sin[\alpha]^2 \sin[\beta] \sin[\gamma]^2 - \\
& 8 (ax_1^2 ay_1 + ax_2^2 ay_2 + ax_3^2 ay_3 + ax_4^2 ay_4 + ax_5^2 ay_5 + ax_6^2 ay_6) \cos[\beta] \sin[\alpha] \sin[\beta]^2 \sin[\gamma]^2 + \\
& 4 (ay_1^3 + ay_2^3 + ay_3^3 + ay_4^3 + ay_5^3 + ay_6^3) \cos[\beta] \sin[\alpha]^3 \sin[\beta]^2 \sin[\gamma]^2 - \\
& 4 (ax_1 ay_1^2 + ax_2 ay_2^2 + ax_3 ay_3^2 + ax_4 ay_4^2 + ax_5 ay_5^2 + ax_6 ay_6^2) \sin[\alpha]^2 \sin[\beta]^3 \sin[\gamma]^2
\end{aligned}$$

Funkcija F_2 – parcijalna derivacija po parametru λ

$$\frac{\partial F_2(\vec{X}_0 + \lambda \cdot \vec{v})}{\partial \lambda} = a \cdot \lambda^3 + b \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + d = 0$$

$$\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} n_{x0} & n_{y0} & n_{z0} & o_{x0} & o_{y0} & o_{z0} & t_{x0} & t_{y0} & t_{z0} \end{bmatrix}^T$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} n_{xv} & n_{yv} & n_{zv} & o_{xv} & o_{yv} & o_{zv} & t_{xv} & t_{yv} & t_{zv} \end{bmatrix}^T$$

$a =$

$$\begin{aligned}
& 2 (nxv^2 + nyv^2 + nzv^2) (2nxv^2 + 2nyv^2 + 2nzv^2) + 2 (nxv oxv + nyv oyv + nzv ozv) (2nxv oxv + 2nyv oyv + 2nzv ozv) + \\
& 2 (oxv^2 + oyv^2 + ozv^2) (2oxv^2 + 2oyv^2 + 2ozv^2) + \\
& 2 (nxv txv + nyv tyv + nzv tzv) (2nxv txv + 2nyv tyv + 2nzv tzv) + \\
& 2 (oxv txv + oyv tyv + ozv tzv) (2oxv txv + 2oyv tyv + 2ozv tzv) + 2 (txv^2 + tyv^2 + tzv^2) (2txv^2 + 2tyv^2 + 2tzv^2)
\end{aligned}$$

$b =$

$$\begin{aligned}
& 2 ((2nx0 nxv + 2ny0 nyv + 2nz0 nzv) (nxv^2 + nyv^2 + nzv^2) + \\
& \quad (2nx0 nxv + 2ny0 nyv + 2nz0 nzv) (2nxv^2 + 2nyv^2 + 2nzv^2)) + \\
& 2 ((nxv ox0 + nx0 oxv + nyv oy0 + ny0 oyv + nzv oz0 + nz0 ozv) (nxv oxv + nyv oyv + nzv ozv) + \\
& \quad (nxv ox0 + nx0 oxv + nyv oy0 + ny0 oyv + nzv oz0 + nz0 ozv) (2nxv oxv + 2nyv oyv + 2nzv ozv)) + \\
& 2 ((2ox0 oxv + 2oy0 oyv + 2oz0 ozv) (oxv^2 + oyv^2 + ozv^2) + \\
& \quad (2ox0 oxv + 2oy0 oyv + 2oz0 ozv) (2oxv^2 + 2oyv^2 + 2ozv^2)) + \\
& 2 ((-A2 nxv + nxv tx0 - A1 txv + nx0 txv + nyv ty0 + ny0 tyv + nzv tz0 + nz0 tzv) (nxv txv + nyv tyv + nzv tzv) + \\
& \quad (-A2 nxv + nxv tx0 - A1 txv + nx0 txv + nyv ty0 + ny0 tyv + nzv tz0 + nz0 tzv) \\
& \quad (2nxv txv + 2nyv tyv + 2nzv tzv)) + \\
& 2 \\
& ((-B2 nxv - B5 nyv - B3 oxv - B6 oyv + oxv tx0 - B1 txv + ox0 txv + oyv ty0 - B4 tyv + oy0 tyv + ozv tz0 + oz0 tzv) \\
& \quad (oxv txv + oyv tyv + ozv tzv) + \\
& \quad (-B2 nxv - B5 nyv - B3 oxv - B6 oyv + oxv tx0 - B1 txv + ox0 txv + oyv ty0 - B4 tyv + oy0 tyv + ozv tz0 + oz0 tzv) \\
& \quad (2oxv txv + 2oyv tyv + 2ozv tzv)) + \\
& 2 ((2tx0 txv + 2ty0 tyv + 2tz0 tzv) (txv^2 + tyv^2 + tzv^2) + \\
& \quad (2tx0 txv + 2ty0 tyv + 2tz0 tzv) (2txv^2 + 2tyv^2 + 2tzv^2))
\end{aligned}$$

$c =$

$$\begin{aligned}
 & 2 \left((2nx_0nx_v + 2ny_0ny_v + 2nz_0nz_v)^2 + (-1 + nx_0^2 + ny_0^2 + nz_0^2) (2nx_v^2 + 2ny_v^2 + 2nz_v^2) \right) + \\
 & 2 \left((nx_vox_0 + nx_0ox_v + ny_voy_0 + ny_0oy_v + nz_voz_0 + nz_0oz_v)^2 + \right. \\
 & \quad \left. (nx_0ox_0 + ny_0oy_0 + nz_0oz_0) (2nx_vox_v + 2ny_voy_v + 2nz_voz_v) \right) + \\
 & 2 \left((2ox_0ox_v + 2oy_0oy_v + 2oz_0oz_v)^2 + (-1 + ox_0^2 + oy_0^2 + oz_0^2) (2ox_v^2 + 2oy_v^2 + 2oz_v^2) \right) + \\
 & 2 (C42nx_v + C45ny_v + C43ox_v + C46oy_v + C41tx_v + C44ty_v)^2 + \\
 & 2 (C52nx_v + C55ny_v + C53ox_v + C56oy_v + C51tx_v + C54ty_v)^2 + \\
 & 2 (C62nx_v + C65ny_v + C63ox_v + C66oy_v + C61tx_v + C64ty_v)^2 + \\
 & 2 \left((-A2nx_v + nx_vtx_0 - A1tx_v + nx_0tx_v + ny_vty_0 + ny_0ty_v + nz_vtz_0 + nz_0tz_v)^2 + \right. \\
 & \quad \left. (-A - A2nx_0 - A1tx_0 + nx_0tx_0 + ny_0ty_0 + nz_0tz_0) (2nx_vtx_v + 2ny_vty_v + 2nz_vtz_v) \right) + \\
 & 2 \\
 & \left((-B2nx_v - B5ny_v - B3ox_v - B6oy_v + ox_vtx_0 - B1tx_v + ox_0tx_v + oy_vty_0 - B4ty_v + oy_0ty_v + oz_vtz_0 + oz_0tz_v)^2 + \right. \\
 & \quad \left. (-B - B2nx_0 - B5ny_0 - B3ox_0 - B6oy_0 - B1tx_0 + ox_0tx_0 - B4ty_0 + oy_0ty_0 + oz_0tz_0) \right. \\
 & \quad \left. (2ox_vtx_v + 2oy_vty_v + 2oz_vtz_v) \right) + \\
 & 2 \left((2tx_0tx_v + 2ty_0ty_v + 2tz_0tz_v)^2 + (-11^2 + tx_0^2 + ty_0^2 + tz_0^2) (2tx_v^2 + 2ty_v^2 + 2tz_v^2) \right)
 \end{aligned}$$

$d =$

$$\begin{aligned}
 & 2 (-1 + nx_0^2 + ny_0^2 + nz_0^2) (2nx_0nx_v + 2ny_0ny_v + 2nz_0nz_v) + \\
 & 2 (nx_0ox_0 + ny_0oy_0 + nz_0oz_0) (nx_vox_0 + nx_0ox_v + ny_voy_0 + ny_0oy_v + nz_voz_0 + nz_0oz_v) + \\
 & 2 (-1 + ox_0^2 + oy_0^2 + oz_0^2) (2ox_0ox_v + 2oy_0oy_v + 2oz_0oz_v) + \\
 & 2 (-C4 + C42nx_0 + C45ny_0 + C43ox_0 + C46oy_0 + C41tx_0 + C44ty_0) \\
 & \quad (C42nx_v + C45ny_v + C43ox_v + C46oy_v + C41tx_v + C44ty_v) + \\
 & 2 (-C5 + C52nx_0 + C55ny_0 + C53ox_0 + C56oy_0 + C51tx_0 + C54ty_0) \\
 & \quad (C52nx_v + C55ny_v + C53ox_v + C56oy_v + C51tx_v + C54ty_v) + \\
 & 2 (-C6 + C62nx_0 + C65ny_0 + C63ox_0 + C66oy_0 + C61tx_0 + C64ty_0) \\
 & \quad (C62nx_v + C65ny_v + C63ox_v + C66oy_v + C61tx_v + C64ty_v) + \\
 & 2 (-A - A2nx_0 - A1tx_0 + nx_0tx_0 + ny_0ty_0 + nz_0tz_0) \\
 & \quad (-A2nx_v + nx_vtx_0 - A1tx_v + nx_0tx_v + ny_vty_0 + ny_0ty_v + nz_vtz_0 + nz_0tz_v) + \\
 & 2 (-B - B2nx_0 - B5ny_0 - B3ox_0 - B6oy_0 - B1tx_0 + ox_0tx_0 - B4ty_0 + oy_0ty_0 + oz_0tz_0) \\
 & \quad (-B2nx_v - B5ny_v - B3ox_v - B6oy_v + ox_vtx_0 - B1tx_v + ox_0tx_v + oy_vty_0 - B4ty_v + oy_0ty_v + oz_vtz_0 + oz_0tz_v) + \\
 & 2 (-11^2 + tx_0^2 + ty_0^2 + tz_0^2) (2tx_0tx_v + 2ty_0ty_v + 2tz_0tz_v)
 \end{aligned}$$

Funkcija F_3 – parcijalna derivacija po parametru λ

$$\frac{\partial F_3(\vec{X}_0 + \lambda \cdot \vec{v})}{\partial \lambda} = a \cdot \lambda^3 + b \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + d = 0$$

$$\vec{X}_o = [n_{x_0} \quad n_{z_0} \quad o_{x_0} \quad o_{y_0} \quad o_{z_0} \quad t_{z_0}]^T$$

$$\vec{v} = [n_{x_v} \quad n_{z_v} \quad o_{x_v} \quad o_{y_v} \quad o_{z_v} \quad t_{z_v}]^T$$

$$(F11 \cdot n_{x_0} + F12 \cdot o_{x_0} + F13 \cdot o_{y_0} + F1) = t_{x_0}$$

$$(F21 \cdot n_{x_0} + F22 \cdot o_{x_0} + F23 \cdot o_{y_0} + F2) = t_{y_0}$$

$$(F31 \cdot n_{x_0} + F32 \cdot o_{x_0} + F33 \cdot o_{y_0} + F3) = n_{y_0}$$

$a =$

$$4 \left(\left((1 + F31^2) nxv^2 + nzv^2 + 2 F31 nxv (F32 oxv + F33 oyv) + (F32 oxv + F33 oyv)^2 \right)^2 + \right. \\
(F32 oxv oyv + F33 oyv^2 + nxv (oxv + F31 oyv) + nzv ozv)^2 + (oxv^2 + oyv^2 + ozv^2)^2 + \\
(F11 nxv^2 + F12 nxv oxv + F22 F31 nxv oxv + F22 F32 oxv^2 + F13 nxv oyv + F23 F31 nxv oyv + \\
F23 F32 oxv oyv + F22 F33 oxv oyv + F23 F33 oyv^2 + F21 nxv (F31 nxv + F32 oxv + F33 oyv) + nzv tzv)^2 + \\
(F11 nxv oxv + F12 oxv^2 + F21 nxv oyv + F13 oxv oyv + F22 oxv oyv + F23 oyv^2 + ozv tzv)^2 + \\
(F11^2 nxv^2 + F21^2 nxv^2 + F12^2 oxv^2 + F22^2 oxv^2 + 2 F12 F13 oxv oyv + 2 F22 F23 oxv oyv + F13^2 oyv^2 + \\
F23^2 oyv^2 + 2 F11 nxv (F12 oxv + F13 oyv) + 2 F21 nxv (F22 oxv + F23 oyv) + tzv^2)^2 \Big)$$

 $b =$

2

$$(2 (nx0 nxv + F31 nxv ny + nz0 nzv + F32 ny oxv + F33 ny oyv) \\
((1 + F31^2) nxv^2 + nzv^2 + 2 F31 nxv (F32 oxv + F33 oyv) + (F32 oxv + F33 oyv)^2) + \\
4 (nxv^2 + nzv^2 + (F31 nxv + F32 oxv + F33 oyv)^2) \\
(nz0 nzv + F31 F32 nxv ox0 + F32^2 ox0 oxv + F31 F33 nxv oy0 + F32 F33 oxv oy0 + F32 F33 ox0 oyv + \\
F33^2 oy0 oyv + F3 (F31 nxv + F32 oxv + F33 oyv) + nx0 (nxv + F31^2 nxv + F31 F32 oxv + F31 F33 oyv)) + \\
2 (nx0 oxv + F32 oxv oy0 + nxv (ox0 + F31 oy0) + ny oyv + F33 oy0 oyv + nzv oz0 + nz0 ozv) \\
(F32 oxv oyv + F33 oyv^2 + nxv (oxv + F31 oyv) + nzv ozv) + \\
(nx0 oxv + F32 oxv oy0 + nxv (ox0 + F31 oy0) + ny oyv + F33 oy0 oyv + nzv oz0 + nz0 ozv) \\
(nxv oxv + oyv (F31 nxv + F32 oxv + F33 oyv) + nzv ozv) + 6 (ox0 oxv + oy0 oyv + oz0 ozv) (oxv^2 + oyv^2 + ozv^2) + \\
3 (-A2 nxv + F11 nx0 nxv + F21 nxv ny + F12 nx0 oxv + F22 ny oxv + F13 nx0 oyv + F23 ny oyv - \\
A1 (F11 nxv + F12 oxv + F13 oyv) + nxv tx + F31 nxv ty + F32 oxv ty + F33 oyv ty + nzv tz0 + nz0 tzv) \\
(nxv (F11 nxv + F12 oxv + F13 oyv) + (F21 nxv + F22 oxv + F23 oyv) (F31 nxv + F32 oxv + F33 oyv) + nzv tzv) + \\
3 (-B2 nxv - B3 oxv - B6 oyv - B1 (F11 nxv + F12 oxv + F13 oyv) + ox0 (F11 nxv + F12 oxv + F13 oyv) - \\
B4 (F21 nxv + F22 oxv + F23 oyv) + oy0 (F21 nxv + F22 oxv + F23 oyv) - B5 (F31 nxv + F32 oxv + F33 oyv) + \\
oxv tx + oyv ty + ozv tz0 + oz0 tzv) \\
(oxv (F11 nxv + F12 oxv + F13 oyv) + oyv (F21 nxv + F22 oxv + F23 oyv) + ozv tzv) + \\
2 (F11 nxv tx + F12 oxv tx + F13 oyv tx + F21 nxv ty + F22 oxv ty + F23 oyv ty + tz0 tzv) \\
(F11^2 nxv^2 + F21^2 nxv^2 + F12^2 oxv^2 + F22^2 oxv^2 + 2 F12 F13 oxv oyv + 2 F22 F23 oxv oyv + F13^2 oyv^2 + \\
F23^2 oyv^2 + 2 F11 nxv (F12 oxv + F13 oyv) + 2 F21 nxv (F22 oxv + F23 oyv) + tzv^2) + \\
4 (F11^2 nx0 nxv + F21^2 nx0 nxv + F11 F12 nxv ox0 + F21 F22 nxv ox0 + F11 F12 nx0 oxv + F21 F22 nx0 oxv + \\
F12^2 ox0 oxv + F22^2 ox0 oxv + F11 F13 nxv oy0 + F21 F23 nxv oy0 + F12 F13 oxv oy0 + F22 F23 oxv oy0 + \\
F11 F13 nx0 oyv + F21 F23 nx0 oyv + F12 F13 ox0 oyv + F22 F23 ox0 oyv + F13^2 oy0 oyv + F23^2 oy0 oyv + \\
F1 (F11 nxv + F12 oxv + F13 oyv) + F2 (F21 nxv + F22 oxv + F23 oyv) + tz0 tzv) \\
((F11 nxv + F12 oxv + F13 oyv)^2 + (F21 nxv + F22 oxv + F23 oyv)^2 + tzv^2))$$

 $c =$

2

$$(2 (-1 + F3^2 + 2 F3 F31 nx0 + nx0^2 + F31^2 nx0^2 + nz0^2 + F32^2 ox0^2 + 2 F32 F33 ox0 oy0 + F33^2 oy0^2 + \\
2 (F3 + F31 nx0) (F32 ox0 + F33 oy0)) (nxv^2 + nzv^2 + (F31 nxv + F32 oxv + F33 oyv)^2) + \\
4 (nx0 nxv + F31 nxv ny + nz0 nzv + F32 ny oxv + F33 ny oyv) \\
(nz0 nzv + F31 F32 nxv ox0 + F32^2 ox0 oxv + F31 F33 nxv oy0 + F32 F33 oxv oy0 + F32 F33 ox0 oyv + \\
F33^2 oy0 oyv + F3 (F31 nxv + F32 oxv + F33 oyv) + nx0 (nxv + F31^2 nxv + F31 F32 oxv + F31 F33 oyv)) + \\
(nxv ox0 + nx0 oxv + F31 nxv oy0 + F32 oxv oy0 + ny oyv + F33 oy0 oyv + nzv oz0 + nz0 ozv)^2 + \\
2 (nx0 ox0 + ny oy0 + nz0 oz0) (F32 oxv oyv + F33 oyv^2 + nxv (oxv + F31 oyv) + nzv ozv) + \\
4 (ox0 oxv + oy0 oyv + oz0 ozv)^2 + 2 (-1 + ox0^2 + oy0^2 + oz0^2) (oxv^2 + oyv^2 + ozv^2) +$$

$$\begin{aligned}
& (-A2 \, nxv + F11 \, nx0 \, nxv + F21 \, nxv \, ny + F12 \, nx0 \, oxv + F22 \, ny \, oxv + F13 \, nx0 \, oyv + F23 \, ny \, oyv - \\
& \quad A1 \, (F11 \, nxv + F12 \, oxv + F13 \, oyv) + nxv \, tx + F31 \, nxv \, ty + F32 \, oxv \, ty + F33 \, oyv \, ty + nzv \, tz0 + nz0 \, tzv) \, ^2 + \\
& \quad 2 \, (-A - A2 \, nx0 - A1 \, tx + nx0 \, tx + ny \, ty + nz0 \, tz0) \\
& \quad (nxv \, (F11 \, nxv + F12 \, oxv + F13 \, oyv) + (F21 \, nxv + F22 \, oxv + F23 \, oyv) \, (F31 \, nxv + F32 \, oxv + F33 \, oyv) + nzv \, tzv) + \\
& \quad (B2 \, nxv + B3 \, oxv + B6 \, oyv + B1 \, (F11 \, nxv + F12 \, oxv + F13 \, oyv) - ox0 \, (F11 \, nxv + F12 \, oxv + F13 \, oyv) + \\
& \quad \quad B4 \, (F21 \, nxv + F22 \, oxv + F23 \, oyv) - oy0 \, (F21 \, nxv + F22 \, oxv + F23 \, oyv) + B5 \, (F31 \, nxv + F32 \, oxv + F33 \, oyv) - \\
& \quad \quad oxv \, tx - oyv \, ty - ozv \, tz0 - oz0 \, tzv) \, ^2 - \\
& \quad 2 \, (B + B2 \, nx0 + B5 \, ny + B3 \, ox0 + B6 \, oy0 + B1 \, tx - ox0 \, tx + B4 \, ty - oy0 \, ty - oz0 \, tz0) \\
& \quad (F11 \, nxv \, oxv + F12 \, oxv^2 + F21 \, nxv \, oyv + F13 \, oxv \, oyv + F22 \, oxv \, oyv + F23 \, oyv^2 + ozv \, tzv) + \\
& \quad 4 \, (F11^2 \, nx0 \, nxv + F21^2 \, nx0 \, nxv + F11 \, F12 \, nxv \, ox0 + F21 \, F22 \, nxv \, ox0 + F11 \, F12 \, nx0 \, oxv + F21 \, F22 \, nx0 \, oxv + \\
& \quad \quad F12^2 \, ox0 \, oxv + F22^2 \, ox0 \, oxv + F11 \, F13 \, nxv \, oy0 + F21 \, F23 \, nxv \, oy0 + F12 \, F13 \, oxv \, oy0 + F22 \, F23 \, oxv \, oy0 + \\
& \quad \quad F11 \, F13 \, nx0 \, oyv + F21 \, F23 \, nx0 \, oyv + F12 \, F13 \, ox0 \, oyv + F22 \, F23 \, ox0 \, oyv + F13^2 \, oy0 \, oyv + F23^2 \, oy0 \, oyv + \\
& \quad \quad F1 \, (F11 \, nxv + F12 \, oxv + F13 \, oyv) + F2 \, (F21 \, nxv + F22 \, oxv + F23 \, oyv) + tz0 \, tzv) \\
& \quad (F11 \, nxv \, tx + F12 \, oxv \, tx + F13 \, oyv \, tx + F21 \, nxv \, ty + F22 \, oxv \, ty + F23 \, oyv \, ty + tz0 \, tzv) + \\
& \quad 2 \, (F1^2 + F2^2 + 2 \, F1 \, F11 \, nx0 + 2 \, F2 \, F21 \, nx0 + F11^2 \, nx0^2 + F21^2 \, nx0^2 + F12^2 \, ox0^2 + F22^2 \, ox0^2 + 2 \, F12 \, F13 \, ox0 \, oy0 + \\
& \quad \quad 2 \, F22 \, F23 \, ox0 \, oy0 + F13^2 \, oy0^2 + F23^2 \, oy0^2 + 2 \, (F1 + F11 \, nx0) \, (F12 \, ox0 + F13 \, oy0) + \\
& \quad \quad 2 \, (F2 + F21 \, nx0) \, (F22 \, ox0 + F23 \, oy0) - S1^2 + tz0^2) \\
& \quad ((F11 \, nxv + F12 \, oxv + F13 \, oyv)^2 + (F21 \, nxv + F22 \, oxv + F23 \, oyv)^2 + tzv^2))
\end{aligned}$$

$d =$

2

$$\begin{aligned}
& (2 \, (-1 + F3^2 + 2 \, F3 \, F31 \, nx0 + nx0^2 + F31^2 \, nx0^2 + nz0^2 + F32^2 \, ox0^2 + 2 \, F32 \, F33 \, ox0 \, oy0 + F33^2 \, oy0^2 + \\
& \quad 2 \, (F3 + F31 \, nx0) \, (F32 \, ox0 + F33 \, oy0) \, (nx0 \, nxv + F31 \, nxv \, ny + nz0 \, nzv + F32 \, ny \, oxv + F33 \, ny \, oyv) + \\
& \quad (nx0 \, ox0 + ny \, oy0 + nz0 \, oz0) \\
& \quad (nx0 \, oxv + F32 \, oxv \, oy0 + nxv \, (ox0 + F31 \, oy0) + ny \, oyv + F33 \, oy0 \, oyv + nzv \, oz0 + nz0 \, ozv) + \\
& \quad 2 \, (-1 + ox0^2 + oy0^2 + oz0^2) \, (ox0 \, oxv + oy0 \, oyv + oz0 \, ozv) + \\
& \quad (-A - A2 \, nx0 - A1 \, tx + nx0 \, tx + ny \, ty + nz0 \, tz0) \\
& \quad (-A2 \, nxv + F11 \, nx0 \, nxv + F21 \, nxv \, ny + F12 \, nx0 \, oxv + F22 \, ny \, oxv + F13 \, nx0 \, oyv + F23 \, ny \, oyv - \\
& \quad \quad A1 \, (F11 \, nxv + F12 \, oxv + F13 \, oyv) + nxv \, tx + F31 \, nxv \, ty + F32 \, oxv \, ty + F33 \, oyv \, ty + nzv \, tz0 + nz0 \, tzv) + \\
& \quad (B + B2 \, nx0 + B5 \, ny + B3 \, ox0 + B6 \, oy0 + B1 \, tx - ox0 \, tx + B4 \, ty - oy0 \, ty - oz0 \, tz0) \\
& \quad (B2 \, nxv + B4 \, F21 \, nxv + B5 \, F31 \, nxv - F11 \, nxv \, ox0 + B3 \, oxv + B4 \, F22 \, oxv + B5 \, F32 \, oxv - F12 \, ox0 \, oxv - \\
& \quad \quad F21 \, nxv \, oy0 - F22 \, oxv \, oy0 + B6 \, oyv + B4 \, F23 \, oyv + B5 \, F33 \, oyv - F13 \, ox0 \, oyv - F23 \, oy0 \, oyv + \\
& \quad \quad B1 \, (F11 \, nxv + F12 \, oxv + F13 \, oyv) - oxv \, tx - oyv \, ty - ozv \, tz0 - oz0 \, tzv) + \\
& \quad 2 \, (F1^2 + F2^2 + 2 \, F1 \, F11 \, nx0 + 2 \, F2 \, F21 \, nx0 + F11^2 \, nx0^2 + F21^2 \, nx0^2 + F12^2 \, ox0^2 + F22^2 \, ox0^2 + \\
& \quad \quad 2 \, F12 \, F13 \, ox0 \, oy0 + 2 \, F22 \, F23 \, ox0 \, oy0 + F13^2 \, oy0^2 + F23^2 \, oy0^2 + 2 \, (F1 + F11 \, nx0) \, (F12 \, ox0 + F13 \, oy0) + \\
& \quad \quad 2 \, (F2 + F21 \, nx0) \, (F22 \, ox0 + F23 \, oy0) - S1^2 + tz0^2) \\
& \quad (F11 \, nxv \, tx + F12 \, oxv \, tx + F13 \, oyv \, tx + F21 \, nxv \, ty + F22 \, oxv \, ty + F23 \, oyv \, ty + tz0 \, tzv))
\end{aligned}$$

Sažetak

U radu su izloženi postupci rješavanja problema unaprijedne kinematike Stewartovih paralelnih mehanizama. Opisane su osnovne inačice Stewartove platforme (heksapoda) i njihova uporaba. Odabrana je standardizirana izvedba mehanizma poradi jednoznačne ocjene učinkovitosti ispitivanih postupaka.

Definirano je pet matematičkih opisa zadanoga problema. Svaki je pristup detaljno analiziran i određena su njegova najvažnija svojstva. Opisano je nekoliko načina rješavanja problema unaprijedne kinematike te je posebna pažnja posvećena konvergentnim postupcima optimiranja koji omogućuju rad u stvarnom vremenu. Predloženo je nekoliko novih načina poboljšanja rada algoritama optimiranja primijenjenih na zadani problem.

Opisani postupci rješavanja iscrpno su ispitani u statičkim i dinamičkim uvjetima rada. Uočen je problem ekvivalentnih gibanja heksapoda uzrokovan postojanjem više rješenja unaprijedne kinematike. Predložene su prilagodbe postupaka rješavanja u cilju izbjegavanja praćenja ekvivalentnih gibanja. Rezultati upućuju na korisnost predloženih postupaka i mogućnost uporabe u većini praktičnih primjena.

Ključne riječi: Stewartova platforma (heksapod), unaprijedna kinematika, iterativni postupci, rad u stvarnom vremenu

Summary

Title: "The Evaluation of Problem Solving Methods for Stewart Parallel Mechanism Kinematics"

In this work the problem solving methods for Stewart parallel mechanisms forward displacement analysis are presented. The most usual variants of Stewart platform mechanism (hexapod) and their applications are described. The standard model is defined in order to uniformly evaluate the effectiveness of presented methods.

Five mathematical formulations of the problem are given. Each one is thoroughly investigated and its main features are recognized. Several approaches to solving forward kinematics are described. The iterative methods, which can be used in real-time applications, are presented in detail. A few new ways to improve the algorithms' efficiency are proposed.

The described problem solving procedures are thoroughly investigated and tested in both static and dynamic environment. The appearance of equivalent trajectories, caused by the existence of more than one solution to the problem, is discovered. Heuristic modifications are proposed in order to overcome the tracking of equivalent trajectories. The results point out to the possible use of described methods in the majority of real-world applications.

Key words: Stewart platform mechanism (hexapod), forward displacement analysis, iterative methods, real-time application

Životopis

Domagoj Jakobović je rođen 11. srpnja 1973. u Našicama, požeška županija. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja nekoliko je puta sudjelovao na natjecanjima iz informatike na republičkom nivou. Maturirao je 1992. godine kao jedan od učenika oslobođenih mature s odličnim uspjehom po programu matematičke gimnazije. Po završetku srednje škole upisao je studij na Fakultetu elektrotehnike i računarstva (FER) u Zagrebu. Za vrijeme studija obavljao je stručnu praksu u inozemstvu (Tunis, Slovačka) posredstvom organizacije IAESTE. Diplomirao je u redovnom roku u prosincu 1996. godine, po programu sa naglaskom na znanstveno-istraživački rad, sa temom optimizacije genetskih algoritama. Dobitnik je priznanja "Josip Lončar" za uspjeh na 4. godini studija.

U travnju 1997. godine započeo je s radom kao znanstveni novak na FER-u, Zavod za elektroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave. U međuvremenu je objavio osam znanstvenih radova u časopisima i konferencijama. Aktivno sudjeluje u održavanju nastave u nekoliko kolegija.