

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 1537

**ANALIZA UČINKOVITOSTI
REKONSTRUKCIJE RAZLIČITIH
TRANSFORMACIJA KOD SAŽIMAJUĆEG
OČITAVANJA U SVRHU REPREZENTACIJE
SLIKE**

Maja Barić

Zagreb, lipanj 2017.

Zagreb, 3. ožujka 2017.

DIPLOMSKI ZADATAK br. 1537

Pristupnik: **Maja Barić (0036470903)**
Studij: Elektrotehnika i informacijska tehnologija
Profil: Elektroničko i računalno inženjerstvo

Zadatak: **Analiza učinkovitosti rekonstrukcije različitih transformacija kod sažimajućeg očitavanja u svrhu reprezentacije slike**

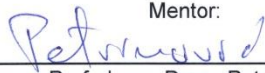
Opis zadatka:

Sažimajuće očitavanje je algoritam koji omogućuje reprezentaciju pojedinih klasa signala s mnogo manjim brojem uzoraka nego što to nalaže minimum određen Nyquist - Shannonovim teoremom. Radi se o signalima koji su u nekoj od transformacijskih domena rijetki, odnosno, reprezentiraju početni signal s malim brojem uzoraka značajne amplitude. Pojednim transformacijama će se dobiti rijetki prikaz nekih klasa signala, dok to neće biti slučaj za neke druge klase. U ovom diplomskom radu potrebno je analizirati signal slike. Zbog smanjenja numeričke složenosti postupka i izvedivosti postupka rekonstrukcije, ovaj dvodimenzionalni prirodni signal je potrebno raspodijeliti na manje dvodimenzionalne sekvence nad kojima se potom vrši daljnja obrada. U okviru rada analizirati utjecaj različitih linearnih transformacija koje definiraju transformacijsku matricu pri sažimajućem očitavanju takvog signala na kvalitetu rekonstrukcije slike.

Zadatak uručen pristupniku: 10. ožujka 2017.

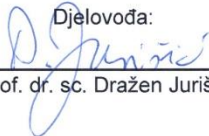
Rok za predaju rada: 29. lipnja 2017.

Mentor:



Prof. dr. sc. Davor Petrinović

Djelovođa:



Prof. dr. sc. Dražen Jurišić

Predsjednik odbora za
diplomski rad profila:



Prof. dr. sc. Mladen Vučić

Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Davoru Petrinoviću na savjetima i vođenju prilikom izrade ovog Diplomskog rada.

Posebno zahvaljujem mojoj obitelji na bezuvjetnoj pomoći, podršci, savjetima i razumijevanju tijekom mog cjelokupnog školovanja.

Hvala vam što ste mi omogućili da ostvarim svoje ciljeve.

Sadržaj

Uvod	1
1. Sažimajuće očitavanje	2
1.1 Matematički temelji sažimajućeg očitavanja.....	3
1.1.1 Uzimanje uzoraka	3
1.1.2 Rekonstrukcija	6
1.2 Sažimajuće očitavanje jednodimenzionalnog signala	9
2. Transformacije slike	14
2.1 Diskretna kosinusna transformacija.....	14
2.1.1 Primjena na prirodnoj slici	16
2.2 Valićna transformacija.....	18
2.2.1 Dvodimenzionalna valićna transformacija i primjena na prirodnoj slici	22
2.3 Huang – Hilbertova transformacija	25
2.3.1 Hilbertova transformacija	26
2.3.2 Empirijska dekompozicija signala.....	27
2.3.3 Primjena na prirodnoj slici	30
2.4 Karhunen – Loève transformacija	33
2.4.1 Primjena na prirodnoj slici	35
3. Utjecaj pojedinih transformacija slike na njenu rekonstrukciju kod sažimajućeg očitavanja.....	37
3.1 Diskretna kosinusna transformacija kod sažimajućeg očitavanja	37
3.2 Valićna transformacija kod sažimajućeg očitavanja	43
3.2.1 Primjena valićne transformacije nad blokovima slike.....	44
3.2.2 Primjena valićne transformacije nad cijelom slikom	46
3.3 Huang – Hilbertova transformacija kod sažimajućeg očitavanja	50

3.4	Karhunen – Loève transformacija kod sažimajućeg očitavanja	53
3.4.1	KLT transformacija u ulozi matrice transformacije	53
3.4.2	KLT transformacija u ulozi mjerne matrice	57
3.4.3	Usporedba performansi pri korištenju različitih mjernih matrica	64
3.5	Usporedba učinkovitosti rekonstrukcije transformacija	67
	Zaključak	74
	Literatura	76
	Sažetak.....	78
	Abstract.....	79
	Popis kratica	80

Uvod

Broj uređaja koji se svakodnevno koriste i olakšavaju čovjeku svakodnevni život kroz posljednjih nekoliko desetljeća se povećavao nevjerojatnom brzinom. Teško bi bilo zamisliti i jedan dan bez pametnog telefona, računala, tableta, televizije, radio prijamnika, medicinskih uređaja... Svi ti uređaji iz vanjskog svijeta primaju informacije na vrlo sličan način, pomoću raznih vrsta analogno – digitalnih pretvornika. Analogno – digitalni pretvornici općenito rade prema istom principu: uzimaju uzorke nekog signala u jednako razmaknutim vremenskim trenucima, a minimalna frekvencija uzimanja uzoraka je određena Nyquist – Shannonovim teoremom o otipkavanju. Prema tom teoremu, minimalna frekvencija uzorkovanja nekog signala mora biti barem dvostruko veća od najveće frekvencije u signalu.

Problem na koji se nailazi je taj da većina signala nema neku najvišu frekvenciju, već su im frekvencijske komponente razasute po cijelom spektru. Takvi su i prirodni signali, koji se najčešće i mjere. Da bi se signali ograničili, odnosno, da bi ipak postojala neka najviša frekvencija u signalu prema kojoj bi se mogla odrediti frekvencija otipkavanja, potrebno ih je filtrirati, što rezultira gubitkom informacije. Konačno, nakon obrade i kompresije prikupljenih uzoraka signala većina uzoraka se odbacuje budući da se informacija o signalu najčešće krije u relativno malom broju uzoraka. Budući da u svim segmentima raste potreba za prikupljanjem informacija, logično je tražiti alternativu takvom neoptimalnom postupku.

Sažimajuće očitavanje (engl. *Compressive Sensing*) je algoritam koji omogućuje prikupljanje informacije o signalu na način da zaobilazi prikupljanje velikog broja uzoraka jednakom frekvencijom uzorkovanja, već odmah uzima dovoljan broj uzoraka signala koji u sebi sadrže informacije o samom signalu. Broj redundantnih uzoraka se pritom značajno smanjuje u odnosu na klasičan način otipkavanja. Da bi to bilo moguće, signal mora zadovoljavati nekoliko osnovnih uvjeta koji će biti naknadno opisani.

U ovom radu centar razmatranja će biti signal slike: kako se uzimaju uzorci slike kod sažimajućeg očitavanja, kako pojedine transformacije slike utječu na njenu rekonstrukciju te kakva slika mora biti da bi to bilo moguće.

1. Sažimajuće očitavanje

Kao što je već bilo rečeno u uvodu, sažimajuće očitavanje je algoritam koji omogućuje uzimanje mnogo manjeg broja uzoraka signala nego što je to potrebno kod klasičnog uzorkovanja, pritom svejedno prikupljajući informaciju koju otipkavani signal u sebi nosi.

Ovaj algoritam se, ipak, ne može primijeniti na sve postojeće signale, već samo na pojedine klase signala koje moraju zadovoljavati dva uvjeta [1]:

- i. Signal u transformacijskoj domeni mora biti **rijedak** (engl. *sparse*), odnosno, mora imati samo konačan broj uzoraka značajne amplitude, dok su ostali jednaki ili gotovo jednaki nuli. Ti uzorci nose većinu informacije o signalu i njihova amplituda i položaj su dovoljni za reprezentaciju cjelokupnog signala.
- ii. **Nepovezanost** (engl. *incoherence*) – odnosi se na koherenciju između mjerne i transformacijske matrice: te dvije matrice bi trebale imati što manji koeficijent koherencije. Kao posljedica toga, potrebno je uzeti manje uzoraka kako bi se signal mogao točno rekonstruirati.

Pokazuje se da većina prirodnih signala, poput slike i zvuka, ispunjava ove uvjete, što znači da se uzorci tih signala mogu uzimati sažimajućim očitavanjem.

Nadalje, iz ovih uvjeta može se uočiti da se sažimajućim očitavanjem iskorištava svojstvo kompresije samog signala odmah u procesu uzimanja uzoraka. Uzorkovanje ulaznog signala se pritom ne odvija konstantnom frekvencijom. Sam postupak uzimanja uzoraka detaljnije je opisan u 1.1.1.

Konačno, prikupljeni uzorci ulaznog signala se obrađuju na računalu te se iz tih uzoraka, naoko nepotpunih i nepovezanih s početnim signalom, može rekonstruirati otipkavani signal.

Vrlo lako se mogu uočiti prednosti ovog algoritma uzimanja uzoraka u odnosu na klasičan način. Kako bi se uvidjela konkretna poboljšanja koja sažimajuće očitavanje unosi, u nastavku će se analizirati efekt tog algoritma najprije, za ilustraciju, na jednodimenzionalni signal, a potom i na signal slike koji je predmet razmatranja u ovom radu.

1.1 Matematički temelji sažimajućeg očitavanja

Kako bi se sažimajuće očitavanje bolje razumjelo i moglo detaljnije analizirati, potrebno je proučiti matematičku podlogu na kojoj se ono zasniva. Analiza će se, radi jednostavnosti, vršiti nad vremenski diskretnim signalima.

Jedan od uvjeta koji signal mora zadovoljavati da bi se mogao uzorkovati algoritmom sažimajućeg očitavanja je rijetkost u nekoj transformacijskoj domeni. Postoji velik broj transformacija koje transformiraju signal u neku drugu domenu: Fourierova, kosinusna, valićna, Huang – Hilbertova... Svaka od njih definirana je pomoću neke funkcije razlaganja koja određuje njena svojstva. Primjerice, funkcija razlaganja kod Fourierove transformacije je sinusoida, dok je kod valićne transformacije to neki po volji odabrani valić. Fourierova transformacija nekog signala je zapravo niz pripadajućih koeficijenata sinusa na određenim frekvencijama. Signal koji se doista može prikazati kao zbroj konačnog broja funkcija sinusa je u Fourierovoj domeni rijedak. Takav diskretni jednodimenzionalni signal je za ilustraciju analiziran u 1.2.

1.1.1 Uzimanje uzoraka

Neka je analizirani signal $x(t)$ duljine N uzoraka. Sažimajućim očitavanjem uzima se M uzoraka, pri čemu je M mnogo manji od N . Neka je promatrani signal $x(t)$ rijedak u transformacijskoj domeni ψ u kojoj ima samo K uzoraka različitih od nule. U tom slučaju signal $x(t)$ se može prikazati kao 1-1, pri čemu je y transformacija signala $x(t)$ u transformacijskoj domeni ψ .

$$x(t) = \sum_{i=1}^N y_i \psi_i(t) \quad (1-1)$$

Pritom je funkcija $\psi_i(t)$ funkcija razlaganja transformacije ψ . Samo K vrijednosti transformacije signala y je različito od nule (signal je K - rijedak) pa je tih K vrijednosti dovoljno za prikaz cjelokupnog signala, dok se ostalih $(N - K)$ uzoraka može odbaciti.

Ako je svih N uzoraka signala poznato, ovo je vrlo dobar način kompresije tog signala. Međutim, kod sažimajućeg očitavanja je cilj uzeti M uzoraka od N , i to takvih da se pomoću njih može opisati cjelokupni signal. Cjelokupna informacija o signalu sadržana je u lokaciji

i amplitudi K značajnih vrijednosti u transformacijskoj domeni, međutim, te vrijednosti najčešće nisu poznate. Pitanje koje se nameće je kako odabrati M od N uzoraka takvih da se dobiju sve potrebne informacije o signalu?

Da bi se dobio odgovor na to pitanje, treba razmotriti drugi uvjet koji mora biti zadovoljen da bi se signal mogao otipkati sažimajućim očitavanjem, a to je nepovezanost. Povezanost dviju matrica definira se izrazom 1-2.

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq k, j \leq N} |\langle \phi_k, \psi_j \rangle| \quad (1-2)$$

Ukoliko su matrice Φ i Ψ nepovezane, vrijednost koeficijenta koherencije μ je mala i bliska 1 [1].

Neka je matrica Φ mjerna matrica. Mjerna matrica i matrica transformacije Ψ moraju, dakle, biti nekorelirane da bi se sustav mogao razmatrati u kontekstu sažimajućeg očitavanja. Naime, budući da rijetki signal zauzima relativno mali broj dimenzija u prostoru signala, na taj način se uz minimalan broj mjerenja dobivaju informacije o dimenzijama u signalu. Pomoću tih informacija signal se može rekonstruirati uz minimalan broj iteracija rekonstrukcijskog algoritma.

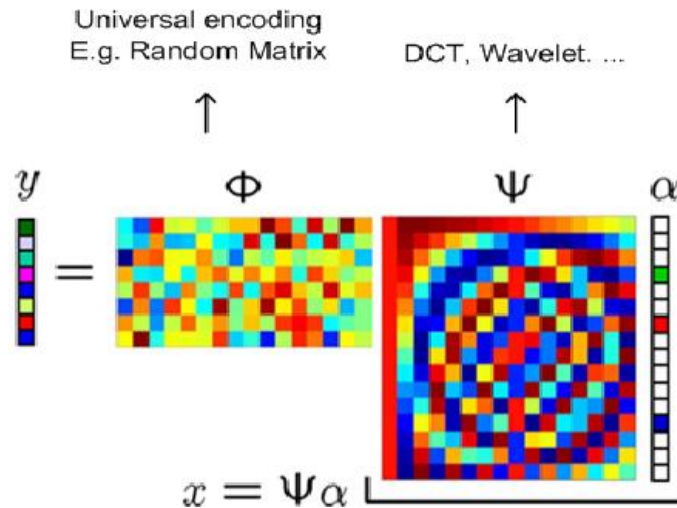
Pokazuje se da su matrice s nasumičnim vrijednostima nekorelirane s većinom drugih matrica zbog čega su vrlo pogodne za ovu primjenu. Za mjernu matricu se, dakle, može koristiti matrica s nasumičnim vrijednostima prema Gaussovoj razdiobi, matrica s Bernoullijevom razdiobom (sadrži nasumično poredane vrijednosti ± 1) i sl [1].

Cjelokupni postupak uzimanja uzoraka kod sažimajućeg očitavanja slikovito je prikazan slikom 1.1. Tom slikom je grafički prikazana matrična jednadžba uzimanja uzoraka sažimajućeg očitavanja opisana izrazom 1-3.

$$y = \Phi \cdot \Psi \cdot \alpha = \theta \cdot \alpha \quad (1-3)$$

Pritom je matrica Φ mjerna matrica dimenzija $M \times N$, matrica Ψ je transformacijska matrica dimenzija $N \times N$, a vektor α predstavlja prikaz početnog signala $x(t)$ u transformacijskoj domeni transformacije ψ i ima duljinu N . Kao rezultat ovog postupka dobiva se vektor uzoraka y duljine M uzoraka.

Na slici 1.1 može se slikovito uočiti da se doista radi o rijetkom signalu. Nadalje, može se uočiti da mjerna matrica Φ ni na koji način ne ovisi o početnom signalu $x(t)$, odnosno, proces uzorkovanja je neadaptivan.



Slika 1.1 Sažimajuće očitavanje – grafički prikaz¹

Bitno je razmotriti i utjecaj matrica Φ i Ψ na početni vektor α . Naime, umnožak tih matrica, odnosno matrica θ (izraz 1-3) ne smije utjecati na početni vektor na način da izmijeni informaciju koju on nosi. Naime, Euklidske udaljenosti između pojedinih uzoraka vektora α moraju ostati sačuvane. Vrijednosti u vektoru uzoraka y zapravo predstavljaju linearnu kombinaciju K stupaca matrice θ čiji redni brojevi odgovaraju rednim brojevima redaka vektora α koji sadrže vrijednost različitu od nule.

Da bi se zadržale Euklidske udaljenosti između uzoraka vektora α različitih od nule, matrica θ mora zadovoljavati tzv. *Restricted Isometry Property (RIP)*. Ovo svojstvo iskazano je izrazom 1-4 [1].

$$(1 - \delta_K) \|x\|_{l_2}^2 \leq \|\theta x\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_K) \|x\|_{l_2}^2 \quad (1-4)$$

Matrica θ zadovoljava RIP kriterij reda K ako δ_K nema vrijednost blizu 1. U tom slučaju matrica θ čuva Euklidsku udaljenost signala s K uzoraka različitih od nule, dakle, vektor α

¹ Izvor slike: http://www.web.me.iastate.edu/sbhattac/research_cs.html

ne može biti u nul-prostoru matrice θ . Pokazuje se da ako se uzme matrica Φ s uzorcima raspodijeljenim prema Gaussovoj razdiobi, matrica θ će za svaki Ψ zadovoljavati RIP [2].

1.1.2 Rekonstrukcija

Postupkom otipkavanja dobiva se vektor uzoraka y . Međutim, postavlja se pitanje mogućnosti rekonstrukcije početnog signala $x(t)$. Naime, matrica θ kojom se množi vektor α nije kvadratna, dakle, ona nema svoj inverz. Za rekonstrukciju početnog signala potrebno je riješiti sustav od M jednažbi s N nepoznanica. Rješenja takvog sustava ima beskonačno mnogo. Dakle, početni signal $x(t)$ ne može se jednoznačno rekonstruirati iz vektora uzoraka y .

Međutim, poznato je da su Euklidske udaljenosti između K uzoraka vektora α različitih od nule ostale sačuvane zbog RIP kriterija. Rješenje se, dakle, može dobiti minimizacijom neke od l_1 – normi. Potrebno je analizirati koja od l_1 – normi je najpovoljnija [2]. Naime, vektor α smješten je u K – dimenzionalnoj hiperravnini u prostoru \mathbf{R}^N . Budući da je $K \ll N$, α se nalazi blizu koordinatnih osi.

- i. l_0 norma se može iskazati izrazom 1-5.

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \sum_{j=1}^N 1 \{x_j \neq 0\} \quad (1-5)$$

Radi se o normi koja bi dala najtočnije rezultate o položaju i amplitudi K uzoraka vektora α različitih od nule budući da je α blizu koordinatnih osi (slika 1.2). Međutim, pokazuje se da se radi o numerički, ali i vremenski zahtjevnom postupku pa se ovaj postupak ne koristi pri rekonstrukciji.

- ii. l_1 norma iskazuje se izrazom 1-6.

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^N |x_j| \quad (1-6)$$

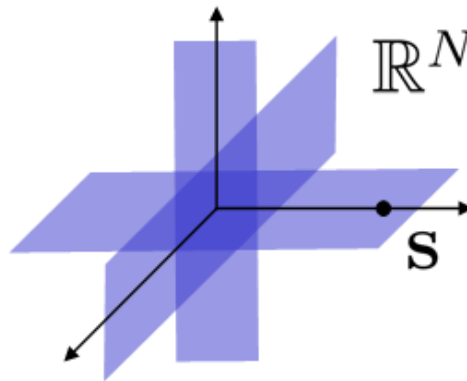
Traženje rješenja minimizacijom ove norme je slikovito prikazano slikom 1.3. Upravo minimizacija ove norme se najčešće koristi pri rekonstrukciji početnog vektora α . Postoji više algoritama za traženje rješenja ovog problema, od čega neki

rješavaju problem konveksne optimizacije, dok su drugi tzv. pohlepni (engl. *greedy*) algoritmi.

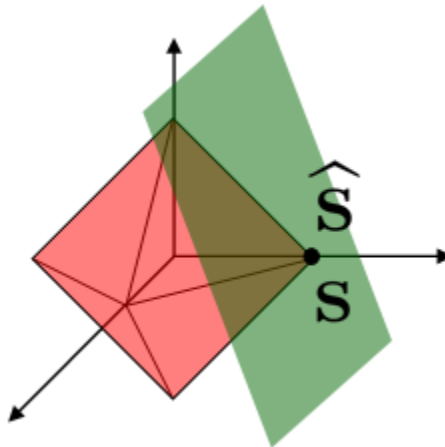
- iii. l_2 norma (izraz 1-7), odnosno njena minimizacija, često se koristi za pronalaženje rješenja inverznih problema.

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^N x_j^2} \quad (1-7)$$

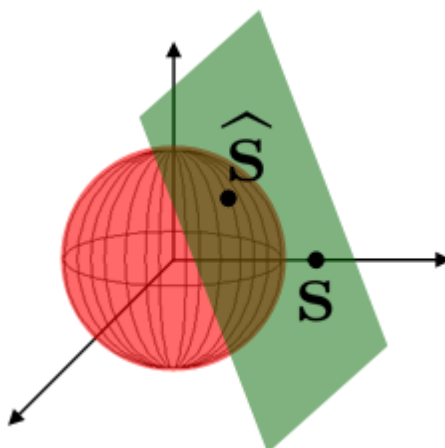
Traženje rješenja minimizacijom ove norme prikazano je na slici 1.4. Pokazuje se da ova norma nije prikladna za pronalaženje rekonstrukcije vektora α . Razlog tome može se vidjeti na slici 1.4: naime, vektor α se zbog svojih karakteristika nalazi blizu koordinatnih osi, dok će minimizacija l_2 norme dati rješenje daleko od koordinatnih osi (rješenje je točka dodira K – dimenzionalne hiperravnine i l_2 kugle).



Slika 1.2 Rekonstrukcija korištenjem norme l_0 [2]

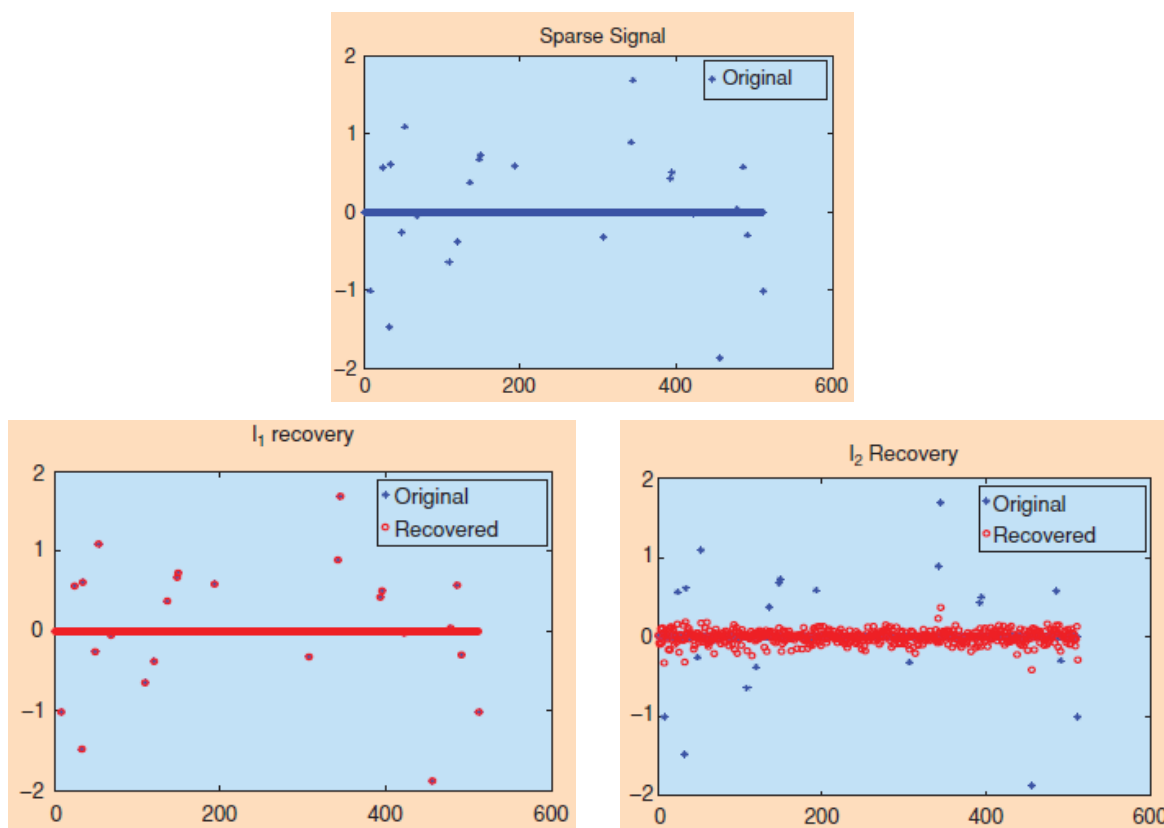


Slika 1.3 Rekonstrukcija korištenjem norme l_1 [2]



Slika 1.4 Rekonstrukcija korištenjem norme l_2 [2]

Usporedba rekonstrukcije rijetkog signala minimizacijom l_1 i l_2 norme prikazana je na slici 1.5. Rekonstruirani signal dobiven minimizacijom l_2 norme dobro prati osnovnu liniju signala s mnogo manjih pogrešaka, ali ne uspijeva detektirati točke u kojima je početni signal različit od nule. S druge strane, rekonstruirani signal dobiven minimizacijom l_1 norme je točno onakav kakav bi trebao biti.



Slika 1.5 Usporedba rekonstrukcije signala minimizacijom l_1 i l_2 normi [1]

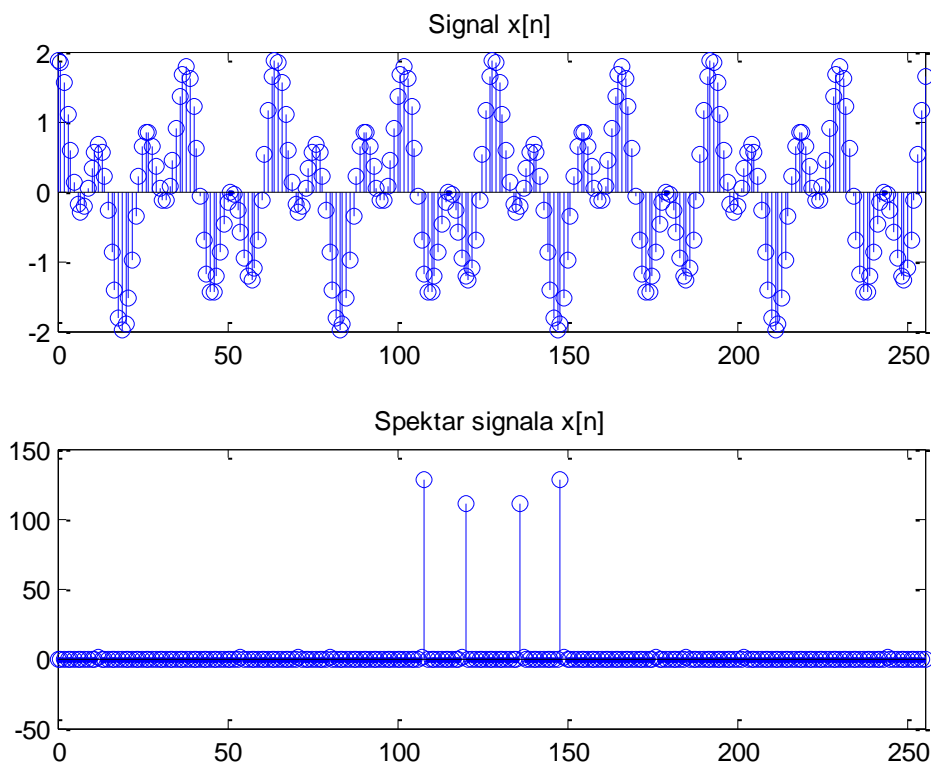
1.2 Sažimajuće očitavanje jednodimenzionalnog signala

Za ilustraciju algoritma sažimajućeg očitavanja, u narednom poglavlju će se prikazati taj postupak na jednodimenzionalnom signalu. Kao odabrani signal uzet je sinusni signal koji sadrži nekoliko frekvencijskih komponentata. Transformacija koja će se koristiti je Fourierova transformacija koja je i najpogodnija za takav signal. Budući da se analizira diskretni signal, koristit će se diskretna Fourierova transformacija (DFT).

Odabran je signal $x[n]$ opisan izrazom 1-8.

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{32}n\right) \quad (1-8)$$

Ovaj signal se sastoji od dvije frekvencijske komponente pa se očekuje da će u spektru dobivenom DFT transformacijom imati četiri šiljka. Odabrani signal i njegov spektar prikazani su slikom 1.6



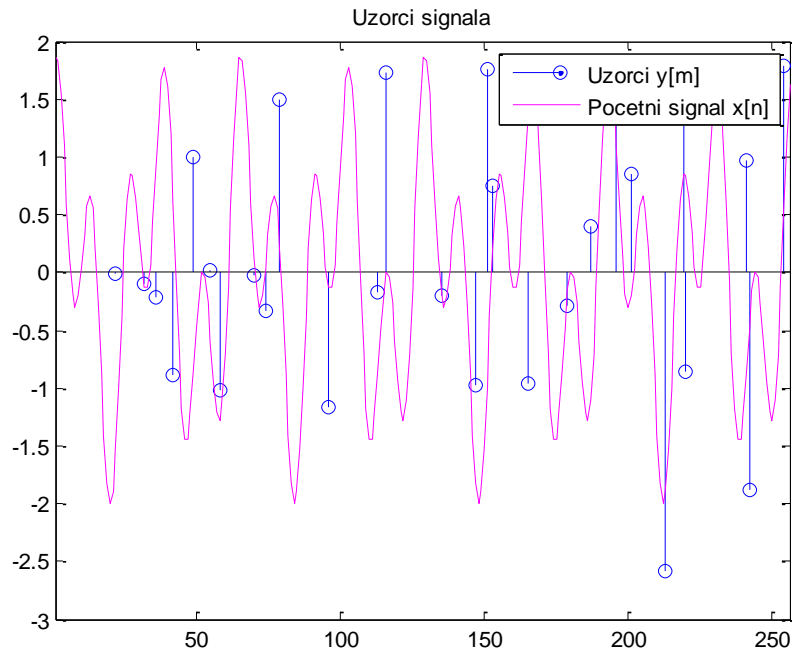
Slika 1.6 Signal $x[n]$ i njegov spektar

Također je generirana matrica Φ koja se postupkom SVD dekompozicije obradila da bude ortogonalna. Generirana je i matrica Ψ dimenzija koje odgovaraju duljini signala i koja sadrži koeficijente DFT transformacije. Ona je također ortogonalna.

Slijedi postupak transformacije početnog signala korištenjem DFT matrice i njegovo množenje s matricom Φ (izraz 1-3). Signal sadrži četiri komponente različite od nule, međutim, kako njihov položaj i amplituda nisu unaprijed poznati, treba uzeti više od četiri uzorka signala. Slika 1.7 prikazuje vektor uzoraka za slučaj da je uzeto 28 uzoraka signala od njih 256. Za ilustraciju njihove nepovezanosti s početnim signalom, prikazani su usporedno s početnim signalom na položajima kojima pripadaju. Pritom je početni signal iscrtan kao kontinuirani radi boljeg uočavanja samih uzetih uzoraka.

Algoritam uzimanja uzoraka radi na način da se nasumično odabere željeni broj redaka iz mjerne matrice Φ budući da je ona inicijalno kvadratna i dimenzija $N \times N$. Tako generirana matrica množi se s početnim signalom i daje vektor uzoraka y .

Rekonstrukcija signala vrši se pomoću l_1 MAGIC algoritma koji je razvijen na California Institute of Technology i besplatno dostupan na [3].



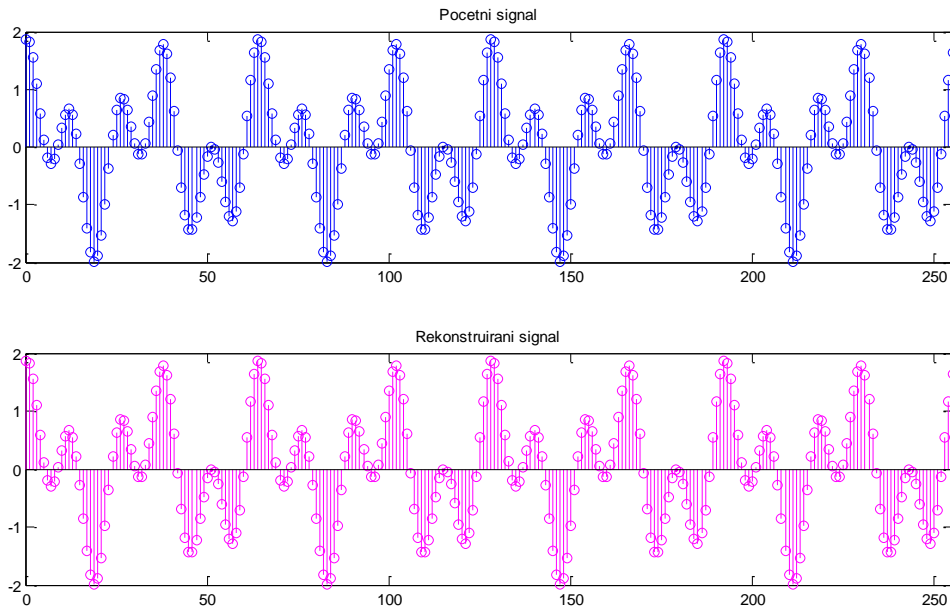
Slika 1.7 Početni signal i uzeti uzorci

Početni i rekonstruirani signal za uzetih 28 uzoraka od 256 prikazan je na slici 1.8. Može se uočiti da je iz uzetih uzoraka prikazanih slikom 1.7 doista bilo moguće rekonstruirati početni signal. Prema Nyquist – Shannonovom teoremu bi za ovaj signal bilo potrebno uzeti barem

40 uzoraka. Dakle, uspješno se rekonstruirao signal čak i ako je bilo uzeto manje uzoraka od teoretskog minimuma.

Međutim, postoji određena granica broja uzetih uzoraka ispod koje se ne dobiva točno rekonstruirani signal. Prema [1], ta granica se određuje prema izrazu 1-9.

$$M = K \cdot \ln(N) \quad (1-9)$$

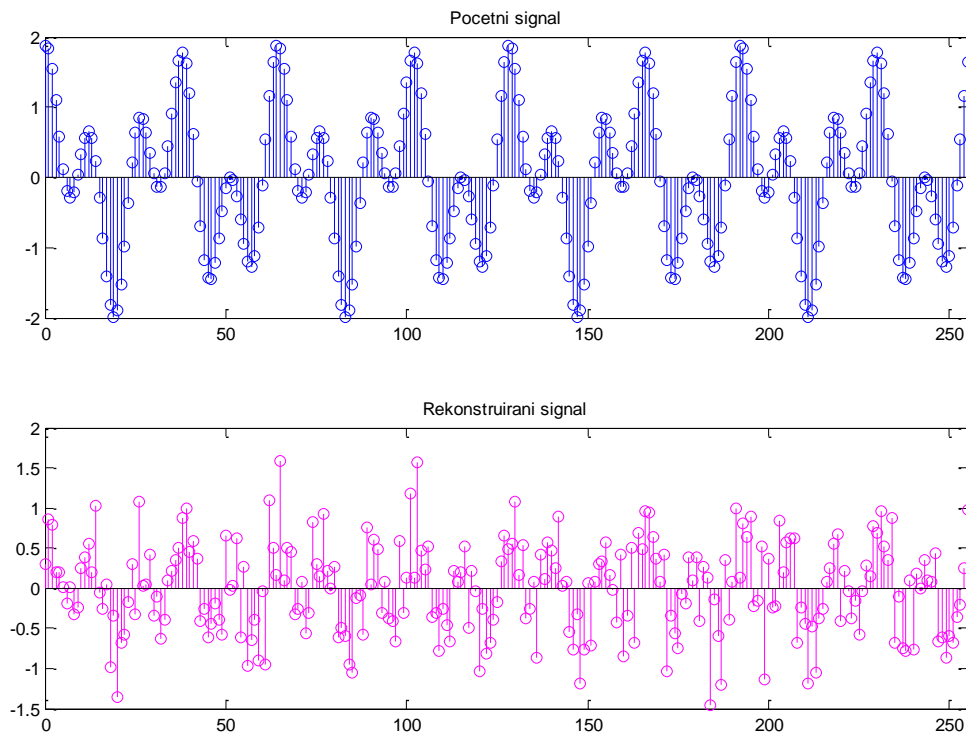


Slika 1.8 Početni i rekonstruirani signal

Pritom je N ukupan broj uzoraka, a K broj uzoraka transformacije signala različitih od nule. Za signal duljine 256 uzoraka s četiri uzorka različita od nule, ova formula kao rezultat daje da je potrebno 22.18, odnosno, 23 uzorka početnog signala da bi rekonstrukcija bila točna s dovoljno visokom vjerojatnošću. Za uzetih 20 uzoraka početnog signala rekonstruirani signal nema sličnosti s početnim (slika 1.9).

Pitanje koje se dodatno postavlja je s kolikom točnošću rekonstrukcije signal biva rekonstruiran na granici od 23 uzorka. Kako bi se to ispitalo, postupak otipkavanja i rekonstrukcije je ponovljen 100 puta i svaki put se provjerilo je li signal točno rekonstruiran ili ne. Kriterij po kojem se određivala točnost rekonstrukcije jest iznos srednje apsolutne pogreške (MAE), koji se računa prema izrazu 1-10.

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - x_{rec_i}|}{N} \quad (1-10)$$



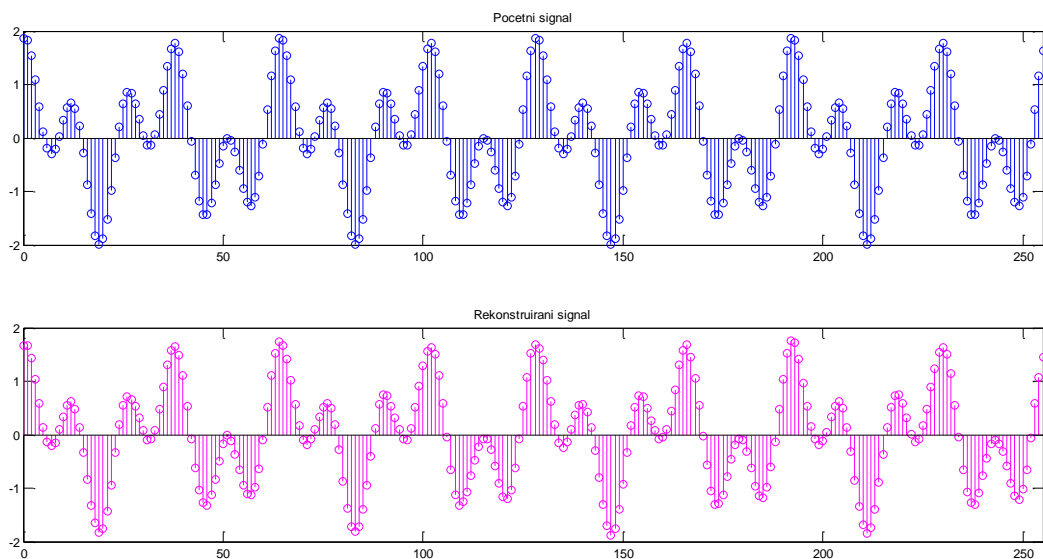
Slika 1.9 Pogrešna rekonstrukcija početnog signala

Granica točnosti rekonstrukcije uzeta je promatranjem rekonstruiranih signala. Pokazuje se da se pogreške u rekonstrukciji počinju uočavati kad vrijednost srednje apsolutne pogreške iznosi oko 0.1, ali njene vrijednosti su najčešće oko 0 za točno rekonstruirani, a oko 0.7 za pogrešno rekonstruirani signal. Rekonstruirani signal s vrijednošću srednje apsolutne pogreške od 0.0776 prikazan je na slici 1.10. Kod ovog signala mogu se uočiti već male razlike u odnosu na početni signal.

Ako se ovaj algoritam izvrši sto puta za $M = 23$, dobiva se da je 51 puta signal bio točno rekonstruiran, dakle, više od 50% puta. Može se zaključiti da je izraz 1-10 dobar za određivanje granice potrebnog broja uzoraka početnog signala koje treba uzeti kod sažimajućeg očitavanja.

Razlog zbog kojeg ponekad za isti broj uzoraka dolazi do točne, a ponekad do pogrešne rekonstrukcije je taj da se oni uzimaju na nasumičan način pa se ponekad uzme skup uzoraka nedovoljan za potpuni opis otipkavanog signala.

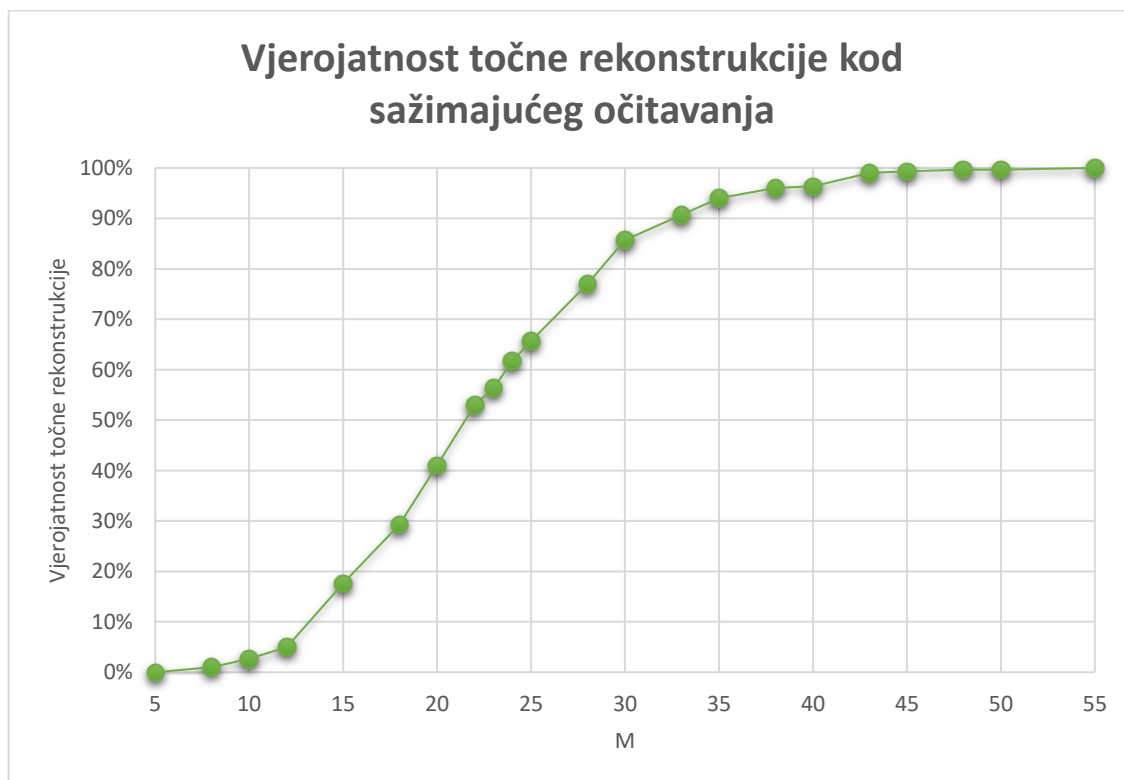
Isti postupak proveo se za nekoliko različitih vrijednosti parametra M . Grafikon 1.1 prikazuje ovisnost točnosti rekonstrukcije kod sažimajućeg očitavanja o broju uzetih uzoraka.



Slika 1.10 Rekonstrukcija na granici točnosti

Vjerojatnost točne rekonstrukcije je dobivena za svaku točku na osnovu pet mjerenja, od kojih su se najveća i najmanja vrijednost odbacile, dok se kao uzeta vrijednost vjerojatnosti uzimala aritmetička sredina preostala tri mjerenja. Na taj način se u dobroj mjeri otklonio utjecaj slučajnog procesa kojim nastaje slučajna mjerna matrica.

Grafikon 1.1 Ovisnost vjerojatnosti točne rekonstrukcije o broju uzoraka



2. Transformacije slike

Nakon kratke ilustracije postupka sažimajućeg očitavanja potrebno je proučiti kakvim se sve transformacijama može obraditi signal slike pa da se dobije njena rijetka reprezentacija. U ovom poglavlju proučit će se diskretna kosinusna transformacija (DCT, engl. *Discrete Cosine Transform*), valićna (engl. *Discrete Wavelet Transform*, DWT) transformacija, Huang – Hilbertova transformacija te Karhunen – Loève transformacija (KLT).

2.1 Diskretna kosinusna transformacija

Diskretna kosinusna transformacija je transformacija koja se vrlo često koristi u obradi signala slike. Radi se o linearnoj ortogonalnoj transformaciji i često se koristi u algoritmima za prepoznavanje uzoraka, kod Wienerovog filtra i u algoritmima za obradu slike (JPEG). Ona rastavlja signal na istosmjernu i izmjenične komponente. Prednost DCT transformacije je što postoje algoritmi kojima se ona može vrlo brzo izračunati. Također, performanse kod njenog izračunavanja su vrlo bliske optimalnim kakve se postižu KLT transformacijom [4], koja je detaljnije opisana u 2.4. Nadalje, radi se o transformaciji s realnim koeficijentima, za razliku od diskretne Fourierove transformacije. Izraz 2-1 predstavlja jednodimenzionalnu diskretnu kosinusnu transformaciju niza podataka $X(m)$, a $G_x(k)$ je k -ti DCT koeficijent [4].

$$G_x(0) = \frac{\sqrt{2}}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(m) \quad (2-1)$$

$$G_x(k) = \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(m) \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2M}, k = 1, 2, \dots, (M-1)$$

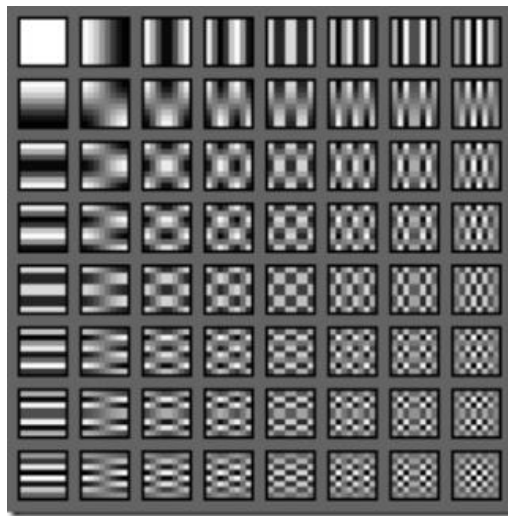
Međutim, za obradu slike se koristi dvodimenzionalna diskretna kosinusna transformacija nad manjim blokovima slike, najčešće dimenzija 8 x 8 piksela. Izraz 2-2 predstavlja dvodimenzionalnu diskretnu kosinusnu transformaciju [5].

$$F(u, v) = 2 \frac{C(u) \cdot C(v)}{\sqrt{M \cdot N}} \left[\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2M} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \right] \quad (2-2)$$

Pritom je M broj redaka bloka, N broj stupaca, $f(x, y)$ diskretna vrijednost pojedine točke u bloku s koordinatama (x, y) , a $C(u)$ i $C(v)$ su definirani izrazom 2-3 [5].

$$C(u) = C(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{za } u, v = 0 \\ 1, & \text{za } u, v \neq 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

Bazne funkcije DCT transformacije se slikovito mogu prikazati slikom 2.1. Bijelom bojom su pritom označene pozitivne, a crnom negativne vrijednosti bazne funkcije.



Slika 2.1 Slikovit prikaz baznih funkcija DCT transformacije²

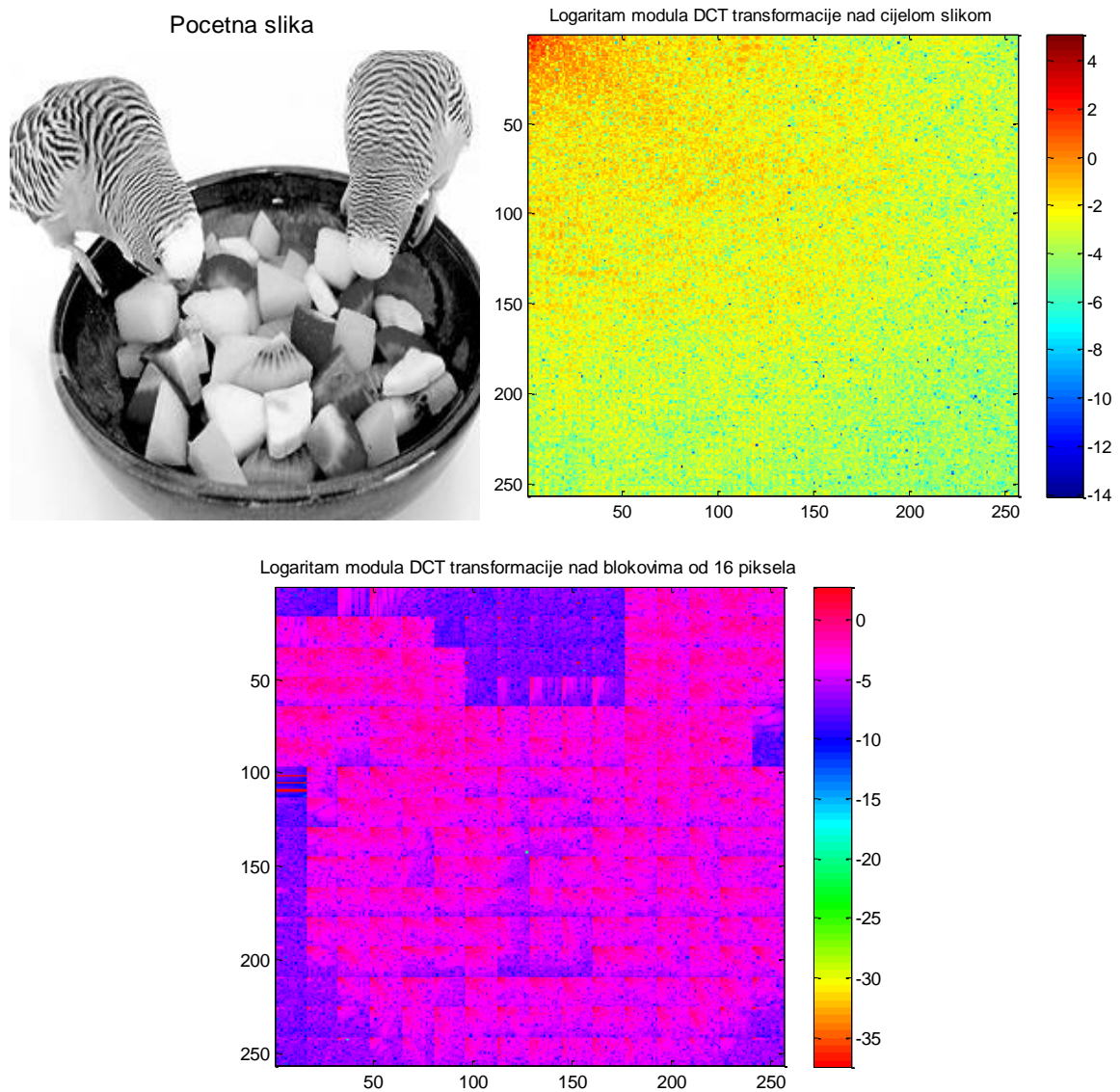
Bazna funkcija nulte frekvencije (DC vrijednost) nalazi se u gornjem lijevom kutu slike 2.1, a koordinate te funkcije su $(0, 0)$. Svi ostali koeficijenti su koeficijenti kosinusa frekvencije koja odgovara toj točki prema izrazu 2-2. Logično, što je koordinata funkcije veća, to je frekvencija kosinusa koji ju opisuje veća pa se i na slici 2.1 može razabrati veća frekvencija slike u njenom donjem desnom kutu.

Dakle, niskofrekvencijske informacije u bloku slike bit će opisane koeficijentima u gornjem lijevom kutu slike jer će s njima najviše korelirati, dok će visokofrekvencijske informacije biti smještene u donjem desnom kutu diskretne kosinusne transformacije bloka slike.

² Izvor slike: <http://digitude.com/?p=116>

2.1.1 Primjena na prirodnoj slici

U nastavku će biti ilustriran postupak transformacije slike korištenjem DCT-a. Analizirat će se slika 2.2.a) koja je odabrana zato jer sadrži i visoko i niskofrekvencijske informacije. Također, prilagođena je za obradu svojim dimenzijama od 256 x 256 piksela.



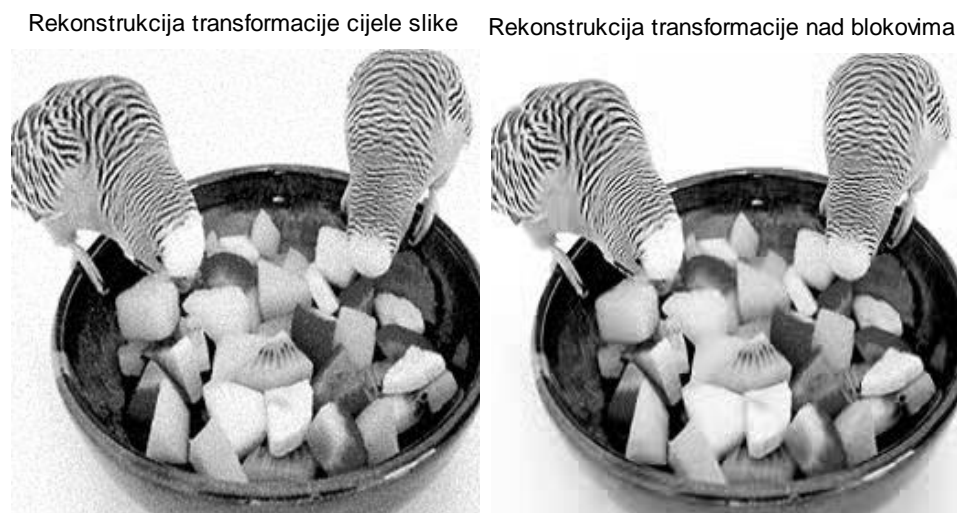
Slika 2.2 Slika za analizu: a) Početna slika³, b) DCT transformacija nad cijelom slikom, c) DCT transformacija nad blokovima slike

³ Izvor slike: <http://www.ptice.info/teme/5/>

Slika 2.2.b) prikazuje kako izgledaju koeficijenti DCT transformacije kad se ona izvodi nad cijelom slikom, odnosno, kad ona nije podijeljena u blokove. Proračun za veće slike (blokove koji se analiziraju) je ujedno i složeniji i sporiji jer se radi s većom količinom podataka. Iz prikaza transformacije ne može se iščitati sadržaj slike, ali se može uočiti da postoje određene visoke frekvencije u slici.

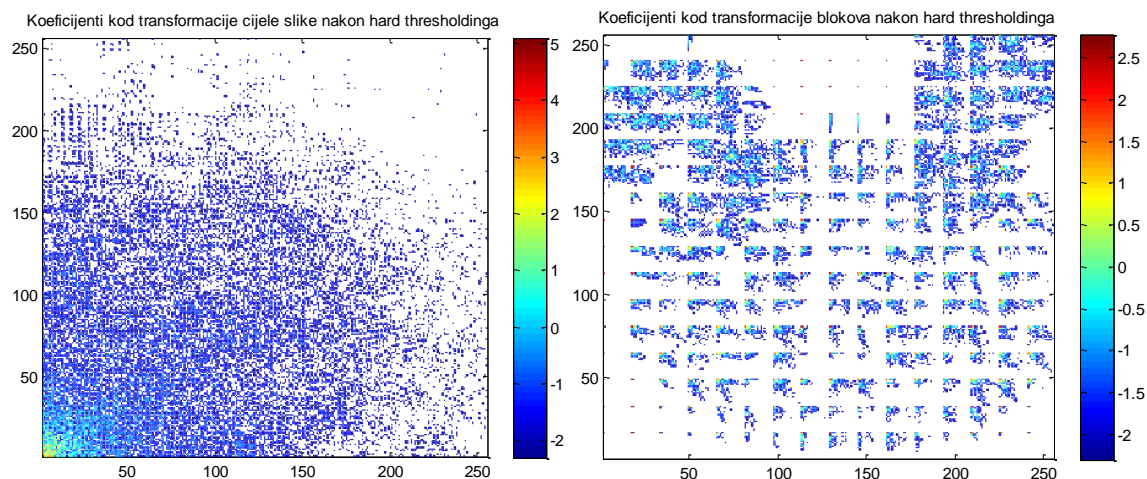
Slika 2.2.c) prikazuje DCT transformaciju slike kad se ona izvodi nad blokovima slike veličine 16 x 16 piksela. Ovakav proračun je matematički jednostavniji od onog kad se transformira cijela slika zbog manjeg broja uzoraka koji se transformiraju, ali ga je potrebno izvesti više puta. Već se na prvi pogled na ovoj slici mogu uočiti položaji papigica i zdjelice s voćem: radi se o blokovima u kojima ima više koeficijenata s visokim frekvencijama, dok blokovi koji su jednobojni i ne sadrže visokofrekvencijske promjene sadržavaju samo DC komponentu i nekoliko niskofrekvencijskih komponenata.

Da bi se smanjila količina nepotrebne informacije u slici, a što je posebno ključno kod sažimajućeg očitavanja, potrebno je koeficijente male vrijednosti izjednačiti s nulom. Pritom će se koristiti tzv. *hard thresholding*. Eksperimentalno je utvrđeno da će, ako se koeficijenti manji od 0.1 izjednače s nulom, rekonstrukcija biti zadovoljavajuća (slika 2.3).



Slika 2.3 Rekonstrukcija rijetkog prikaza slike, **a)** za slučaj transformacije cijele slike, **b)** za slučaj transformacije na blokovima

Sama rekonstrukcija je zadovoljavajuća, iako se na slici uočava pikselacija. Pikselacija je ipak manja na slici 2.3 b), kad se radila transformacija nad blokovima slike.



Slika 2.4 DCT Koefficienti nakon hard thresholdinga

Slika 2.4 prikazuje DCT koefficiente nakon što su se oni manji od 0.1 izjednačili s nulom. Može se uočiti da njih ima manje nego u početku (slika 2.2 b i c), ali ih ima još relativno puno. Dakle, postigla se određena kompresija, ali još uvijek relativno veliki broj DCT koefficienata nosi informaciju o samoj slici. Može se i uočiti kako je kod transformacije po blokovima ostvarena veća kompresija i dobivena bolja kvaliteta slike pa je takva transformacija pogodnija za daljnju analizu.

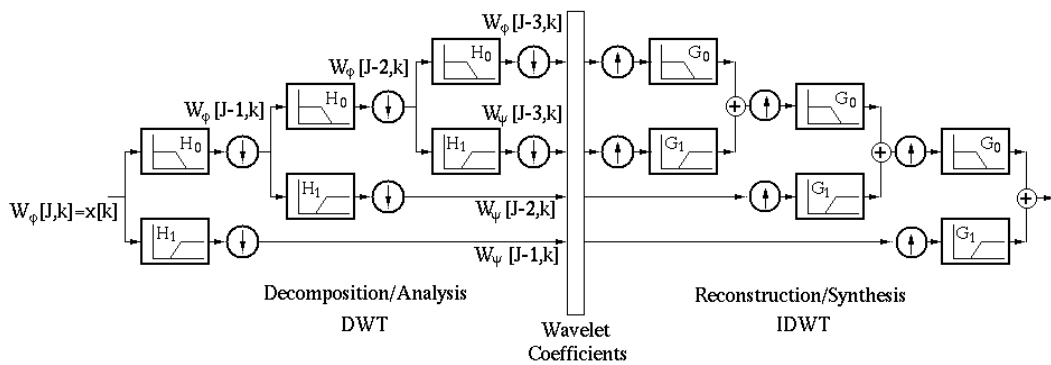
2.2 Valićna transformacija

Za razliku od diskretne kosinusne i Fourierove transformacije, valićna transformacija (engl. *wavelet transform*) nije linearna transformacija. Budući da se proračun izvodi na računalu, koristit će se diskretna valićna transformacija, DWT. Cilj analize načina rada ove transformacije je utvrditi koliko ona može komprimirati signal slike, odnosno, kako signal slike prikazati sa što manje uzoraka različitih od nule.

Valićna transformacija je relativno nova transformacija koje je, unatoč tome, vrlo raširena u primjenama. To može zahvaliti dobrim analitičkim svojstvima te numerički efikasnim realizacijama pomoću valićnih filtarskih slogova. Valićna transformacija razlaže signal uz linearnu vremensku i logaritamsku frekvencijsku os. Zbog toga nema jednoliku razlučivost u vremensko - frekvencijskoj ravnini pa se kod nje ne nailazi na ograničenja na koja se nailazi, primjerice, kod STFT (engl. *Short-Time Fourier Transform*, detaljnije u [6]). Upravo je to jedan od razloga njene široke primjene. Željena svojstva lokalizacije u obje domene

postiću se izborom valića koji najbolje odgovara promatranom signalu, a osim samog valića, predmet analize su i filtri koji se koriste u razlaganju početnog signala [6].

Velika prednost diskretne valićne transformacije je ta što postoje algoritmi za njeno brzo izračunavanje kod funkcija konačnog trajanja i oktavne frekvencijske podjele. Takva realizacija postiže se pomoću filtarskih slogova (slika 2.5). On se sastoji od analizirajuće strane, koja razlaže signal, i sintetizirajuće strane koja ga rekonstruira. Pritom su filtri H_0 niskopropusni, a H_1 visokopropusni (može se vidjeti na samoj slici). Takvo razlaganje pokazalo se jako dobrim za primjene poput potiskivanja šuma, kompresije i analize signala [6].



Slika 2.5 Filtarski slog⁴

Složeni signali, pa tako i signal slike, egzistiraju u nekom određenom rasponu frekvencija i pojavljuju se u nekom vremenskom intervalu. Vremensko – frekvencijska ravnina kod valićne transformacije nema jednoliku rezoluciju, ali velik broj prirodnih signala ima takva svojstva da ih ova vrsta transformacije može najbolje i opisati. Primjerice, ljudsko uho razlaže zvučni signal na sličan način, pomoću logaritamske frekvencijske skale, a ne linearne [6].

Kontinuirana valićna transformacija se definira pomoću izraza 2-4.

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt \quad (2-4)$$

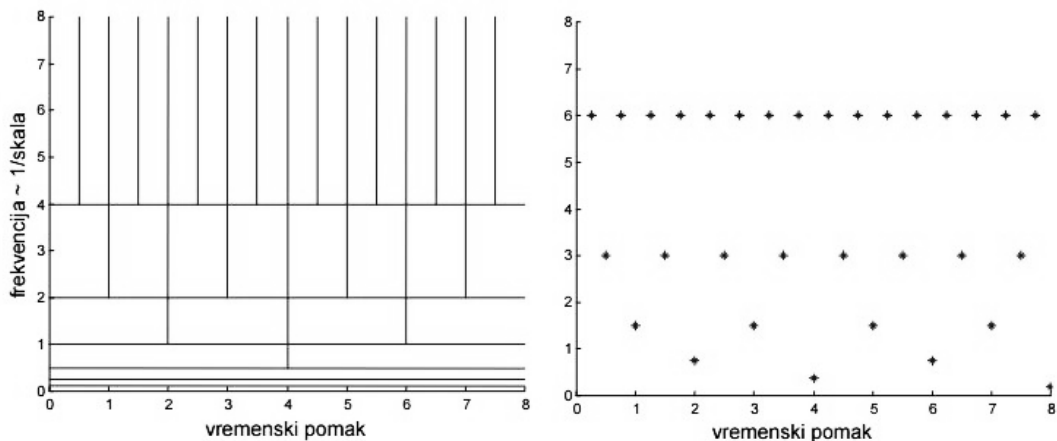
⁴ Izvor slike: <http://fourier.eng.hmc.edu/e161/lectures/wavelets/node7.html>

Pritom je τ vremenski pomak, a a faktor skale. Faktor skale se može definirati kao veličina obrnuto proporcionalna frekvenciji. Funkcija $\psi(t)$ je prototipni valić. Valićna transformacija se, dakle, može definirati kao mjera doprinosa valića $\psi_{\tau,a}$ analiziranom signalu $x(t)$ gdje se prototipni valić ψ pomiče za vremenski pomak τ te skalira za faktor a . Za niže frekvencije (veće vrijednosti faktora skale) je veća razlučivost skale, a za više frekvencije je veća razlučivost u vremenskoj osi [6] (ilustrirano na slici 2.6).

Međutim, pri obradi signala na računalu se koristi diskretna valićna transformacija. Ona je opisana izrazom 2-5.

$$X[m, n] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi^* \left(\frac{t}{a_0^m} - nT_0 \right) dt, \quad m, n \in \mathbf{Z} \quad (2-5)$$

Kod diskretne valićne transformacije računa se iznos kontinuirane valićne transformacije, ali samo za diskretne vrijednosti skale i vremenskog pomaka. Pritom su koraci skale i vremenskog pomaka usklađeni sa svojstvima razlučivosti valićne transformacije (slika 2.6).



Slika 2.6 Razlučivost valićne transformacije i DWT koeficijenata u vremensko - frekvencijskoj ravnini [6]

Kod oktavne frekvencijske podjele uzima se $a_0 = 2$, a valićna funkcija koja se uzima mora zadovoljavati uvjete konvergencije i regularnosti. Više o načinu odabira valićne funkcije i njenim svojstvima te povezanosti s filtrima u filtarskom slogu može se pronaći u [6]. Kao valićna funkcija se, međutim, najčešće uzima neki od poznatih valića, poput Haarovog valića, Daubechies valića itd. Pokazuje se da se valićna transformacija može računati rekurzivno (izraz 2-6), čiji se izvod također može pronaći u [6].

$$\begin{aligned}
X[m, k] &= \sum_{i=0}^{N_1} h_1[k] A[2m + i, k - 1] \\
A[m, k] &= \sum_{i=0}^{N_0} h_0[k] A[2m + i, k - 1]
\end{aligned}
\tag{2-6}$$

Pritom su $A[m, k]$ **aproksimacijski koeficijenti** i rezultat su niskopropusnog filtriranja u filtarskom slogu (slika 2.5, izlaz iz filtra H_0). Sam filter H_0 pritom ima impulsni odziv $h_0[n]$ koji se koristi u izrazu 2-6 i koji je određen korištenim valićem. Aproksimacijski koeficijenti su rezultat funkcije skale ϕ .

Koeficijenti $X[m, k]$ su tzv. **detalji** i oni su rezultat visokopropusnog filtriranja u filtarskom slogu (slika 2.5, izlaz iz filtra H_1). Sam filter H_1 pritom ima impulsni odziv $h_1[n]$ koji se koristi u izrazu 2-6 i koji je također određen korištenom valićnom funkcijom. Aproksimacijski koeficijenti su rezultat valićne funkcije ψ .

Funkcija skale ϕ i valićna funkcija ψ su međusobno povezane na način opisan izrazom 2-7 [6].

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_0} h_0[k] \phi(2t - k) \\
\psi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] \phi(2t - k)
\end{aligned}
\tag{2-7}$$

Početne aproksimacijske koeficijente $A[m, k_0]$ je potrebno izračunati korištenjem integrala, ali u praksi taj korak ponekad odradi i sam sensor (ukoliko je početna razina razlaganja $k_0 = 0$, taj integral se računa prema izrazu 2-8) [6].

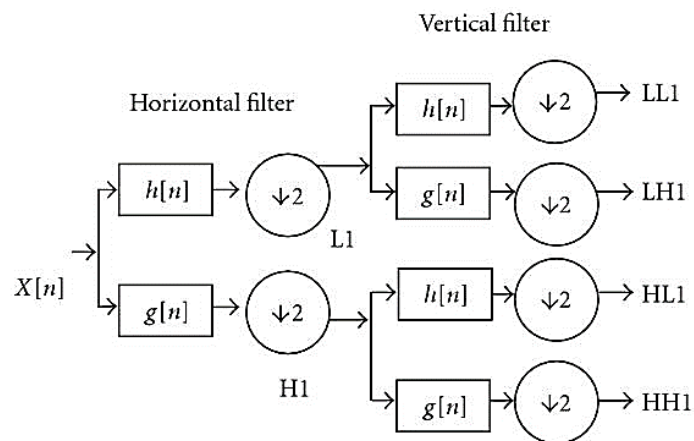
$$A[m, 0] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(t - m)
\tag{2-8}$$

2.2.1 Dvodimenzionalna valićna transformacija i primjena na prirodnoj slici

Dvodimenzionalna valićna transformacija je vrlo slična jednodimenzionalnoj, ali su funkcija skale i valićna funkcija funkcije dvije varijable, x i y . Pritom postoje i čak tri valićne funkcije, $\psi^H(x, y)$, $\psi^V(x, y)$ i $\psi^D(x, y)$ (horizontalna, vertikalna i dijagonalna valićna funkcija). Funkcija skale je, pak, niskofrekvencijska komponenta funkcije skale iz prethodnog stupnja [7].

Ako je valićna funkcija separabilna i može se pisati $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, funkcija skale $\phi(x, y)$ i valićne funkcije $\psi(x, y)$ se mogu prikazati izrazom 2-9 [7].

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \phi(x) \cdot \phi(y) \\ \psi^H(x, y) &= \psi(x) \cdot \phi(y) \\ \psi^V(x, y) &= \phi(x) \cdot \psi(y) \\ \psi^D(x, y) &= \psi(x) \cdot \psi(y)\end{aligned}\tag{2-9}$$



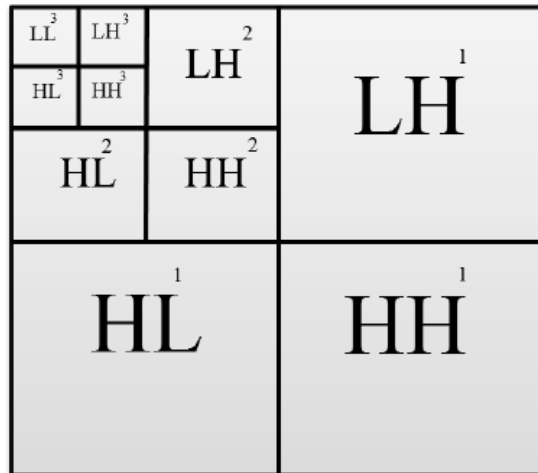
Slika 2.7 Filtarski slog za analizu dvodimenzionalnog signala⁵

Ako su valićna funkcija i funkcija skale separabilne, lakše ih je dizajnirati jer se mogu dizajnirati kao jednodimenzionalne funkcije. Kao rezultat toga, sama analiza dvodimenzionalnog signala je lakša. Signal slike se, dakle, ne analizira asimetričnim

⁵ Izvor slike: <https://www.hindawi.com/journals/vlsi/2008/512746/>

filtarskim slogom kakav je prikazan na slici 2.5, već simetričnim filtarskim slogom (slika 2.7).

Na slici 2.7 je filter $h[n]$ niskopropusni, a $g[n]$ visokopropusni filter. Kod analize slike pojedine njene komponente prikazane su na način prikazan na slici 2.8.



Slika 2.8 Format prikaza dekompozicije slike u tri razine pomoću 2D DWT⁶

Sami izračuni aproksimacije i detalja vrše se pomoću jednadžbi iz izraza 2-6, kao i kod jednodimenzionalnog signala, uz korištenje odgovarajućih filtera.

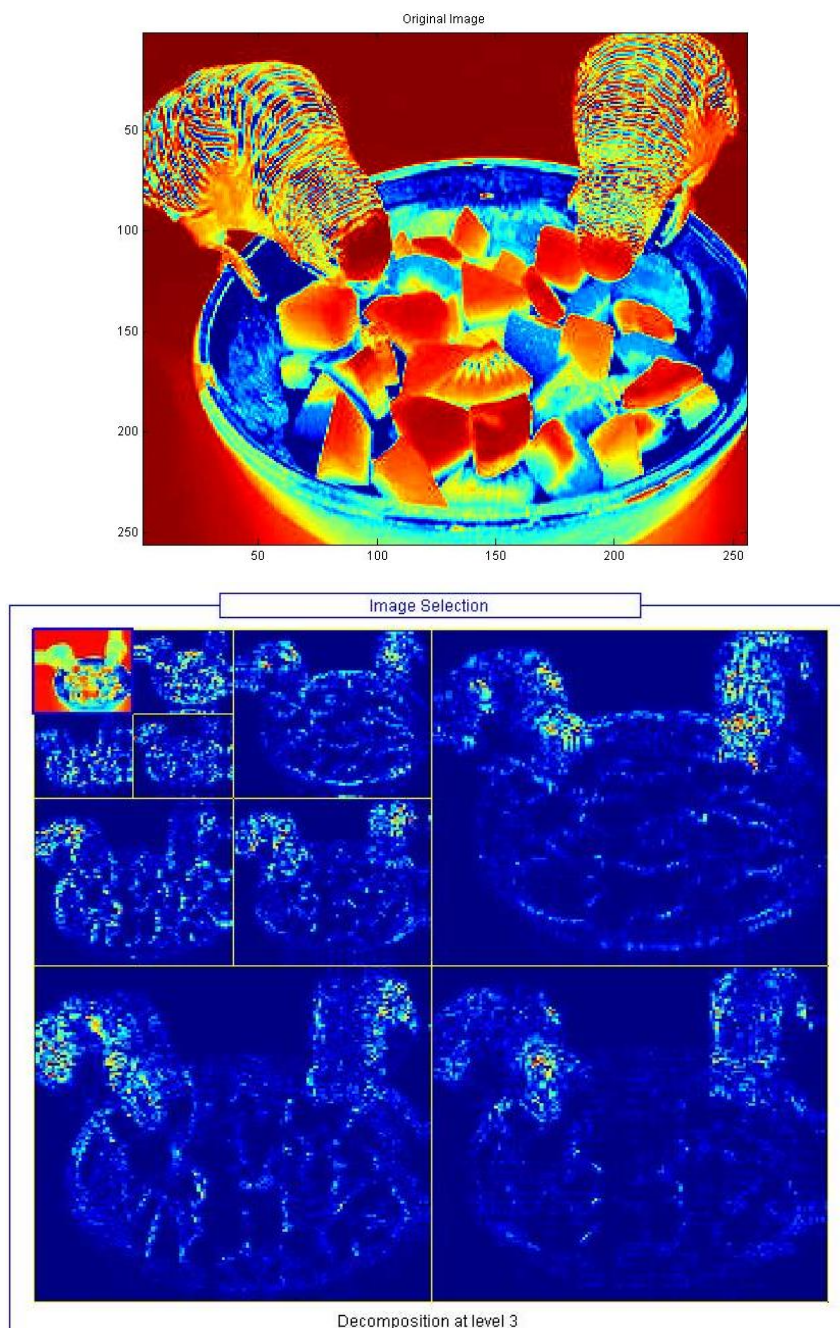
Takav postupak analize slike proveo se u programskom paketu *Matlab* korištenjem *Wavelet Toolboxa*. Analizirala se ista slika kao i u 2.1.1. Prikaz analize dane slike u tri razine korištenjem db4 valića⁷ prikazana je na slici 2.9 b). Za prikaz je korišten jet skup boja kako bi se bolje uočili detalji kod analize.

Na slici 2.9.b) se može uočiti da se u detaljima slike nastalih analizom horizontalnim valićem odlično uočavaju horizontalne crte na glavi papigice, dok se u analizi vertikalnim valićem odlično uočavaju vertikalne crte na glavi papigice. Sve informacije o boji pozadine i slično

⁶ Izvor slike: https://www.researchgate.net/figure/276060165_fig1_Figure-1-Third-Level-of-the-2D-DWT-Frame-Decomposition

⁷ Detaljnije o valiću: <http://wavelets.pybytes.com/wavelet/db4/>

nalaze se u aproksimaciji (gornji lijevi kut), dok detalji sadrže samo informacije o specifičnostima u pojedinim dijelovima slike, najčešće o rubovima u slici.



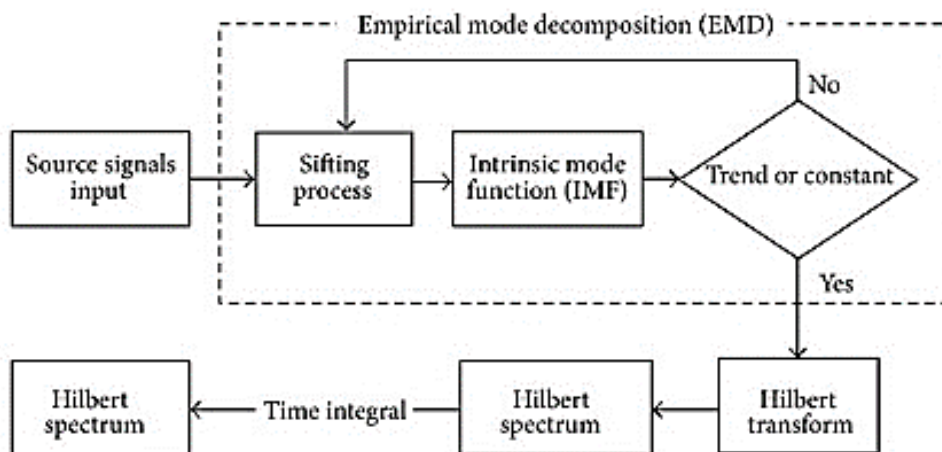
Slika 2.9 a) Originalna slika, b) 2D DWT dekompozicija slike u tri razine

Prednosti analize slike valićnom transformacijom su brojne: jednostavna implementacija algoritma valićne transformacije na računalu pri čemu je izvedba numerički efikasna, mogućnost potiskivanja šuma, mogućnost kompresije kao posljedica poništavanja polinoma u promatranom signalu itd. Zbog toga će ova transformacija biti vrlo zanimljiva za analizu kad će se primijeniti u algoritmu sažimajućeg očitavanja.

2.3 Huang – Hilbertova transformacija

Velika većina danas korištenih transformacija za obradu signala zahtijeva da sam signal bude linearan i vremenski nepromjenjiv (stacionaran). U tom slučaju se nad njim može provesti razna stroga matematička obrada koja se najčešće sastoji od konvolucije analiziranog signala s nekom baznom funkcijom (kosinus kod DCT, sinus i kosinus kod Fourierove transformacije, odabrani valić kod valićne transformacije...). Zbog tog ograničenja se često ne može izvući sva informacija u signalu koji se analizira budući da je većina prirodnih signala upravo nelinearna i vremenski promjenjiva. Rezultati koje ove transformacije daju više govore o matematičkim svojstvima signala nego o informacijama koje on u sebi krije.

Huang - Hilbertova transformacija, međutim, drugačije pristupa analizi signala od tradicionalnih transformacija. Radi se o relativno novoj transformaciji čiji je cilj obraditi signal na takav način da se signal „izražava sam“, umjesto da mu se nameće analiza preko predefiniраниh baznih funkcija. Dakle, ideja je da se način analize prilagođava prirodi analiziranog signala na način da se baza transformacije prilagodi i da proizlazi iz signala koji se analizira [8].



Slika 2.10 Algoritam Huang - Hilbertove transformacije⁸

⁸ Izvor slike: https://www.researchgate.net/figure/266680988_fig4_An-analysis-flowchart-for-the-Hilbert-Huang-transform

Huang – Hilbertova transformacija je naziv koji je dala NASA za kombinaciju Hilbertove spektralne analize (*engl. Hilbert Spectral Analysis, HAS*) i empirijske dekompozicije signala (*engl. Empirical Mode Decomposition, EMD*). Ključni dio ove transformacije je EMD koji omogućuje dekompoziciju bilo kakvog kompliciranog signala, čak i nelinearnog i nestacionarnog, u konačan i često malen skup jednostavnih svojstvenih funkcija (*engl. Intrinsic Mode Function, IMF*). Ovaj algoritam je prikazan slikom 2.10. Dekompozicija se pritom temelji na lokalnim svojstvima signala zbog čega je ova transformacija pogodna za proizvoljno komplicirane signale [8].

2.3.1 Hilbertova transformacija

Kod nestacionarnih i nelinearnih signala logično je da će se promatrati trenutna frekvencija i amplituda, odnosno, da one nisu konstantne. Upravo zbog toga se koristi Hilbertova transformacija (izraz 2-10).

$$y(t) = \frac{1}{\pi} (v. p.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2-10)$$

Pritom (*v. p.*) nekog integrala predstavlja Cauchyjevu principalnu vrijednost⁹ integrala kod kojeg postoji singularitet.

Hilbertova transformacija kao rezultat daje funkciju vremena. Hilbertova transformacija funkcije $y(t)$ i funkcija $x(t)$ zajedno čine analitičku funkciju (izraz 2-11).

$$z(t) = x(t) + iy(t) = a(t) \cdot e^{i\theta(t)} \quad (2-11)$$

Pritom je i imaginarna jedinica i njena vrijednost je $\sqrt{-1}$. Pomoću analitičke funkcije moguće je izraziti trenutnu amplitudu (izraz 2-12) i trenutnu fazu (izraz 2-13) signala [8].

$$a(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (2-12)$$

⁹ *Cauchyjeva principalna vrijednost* predstavlja način dodjele vrijednosti divergentnom integralu pod pretpostavkom da svaka granica konvergira jednakom brzinom (<http://www.pitt.edu/~jwheeler/Principal%20Values.pdf>)

$$\theta(t) = \arctg \frac{y(t)}{x(t)} \quad (2-13)$$

Trenutna frekvencija dobiva se na jednostavan način, deriviranjem trenutne faze (izraz 2-14).

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad (2-14)$$

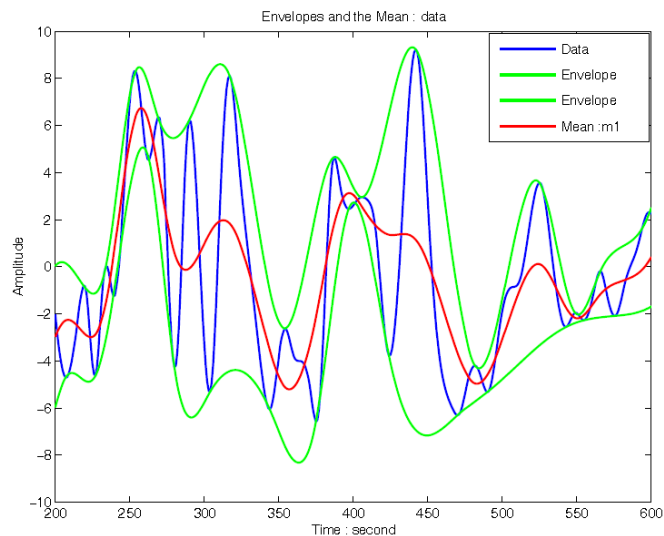
2.3.2 Empirijska dekompozicija signala

Empirijska dekompozicija signala (EMD) rezultat daje, kao i Hilbertova transformacija, u vremenskoj domeni. Intuitivna je, direktna, prilagodljiva, a bazna funkcija se kod nje određuje *a posteriori* na temelju signala koji se analizira. Zasniva se na jednostavnoj pretpostavci da se u svakom trenutku funkcija sastoji od mnogo jednostavnih oscilatornih funkcija različitih frekvencija koje su međusobno superponirane. Pritom se svaka od tih funkcija definira kao jednostavna svojstvena funkcija (IMF) koja zadovoljava sljedeće uvjete:

- i. funkcija mora biti takva da na promatranom području broj ekstrema i prolazaka kroz nulu bude jednak ili se razlikuje najviše za jedan
- ii. u svakom trenutku srednja vrijednost ovojnice koja prolazi kroz lokalne maksimume i ovojnice koja prolazi kroz lokalne minimume mora biti jednaka nuli

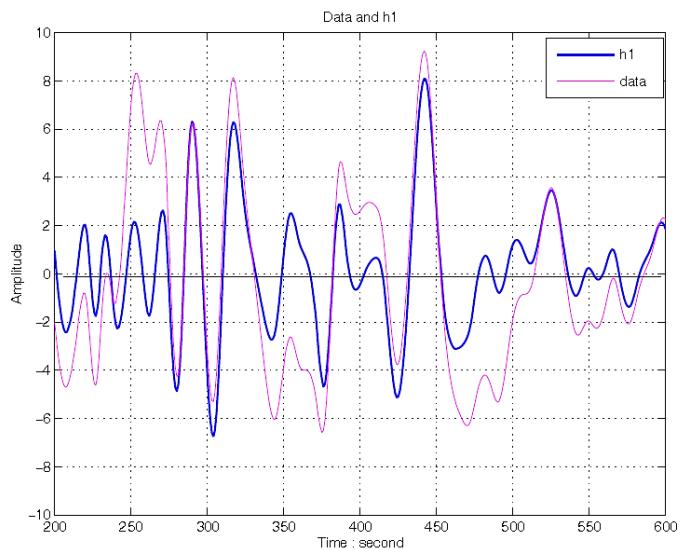
IMF funkcije se dobivaju kroz proces filtriranja (engl. *sifting process*) [8].

Najprije se na ulaznom signalu označe lokalni maksimumi i minimumi, nakon čega se kroz lokalne maksimume pomoću splajnova provuče gornja, a kroz lokalne minimume donja ovojnica. Potom je potrebno izračunati srednju vrijednost ovojnica. Ove funkcije su prikazane na slici 2.11.



Slika 2.11 Postupak filtriranja¹⁰

Prva IMF analiziranog signala se potom dobiva na način da se od početnog signala oduzme srednja vrijednost ovojnica. Međutim, ona najčešće ne zadovoljava gornja dva kriterija pa je potrebno ovaj postupak ponavljati (slika 2.12). Zbog toga se prva IMF naziva i proto-IMF [8].

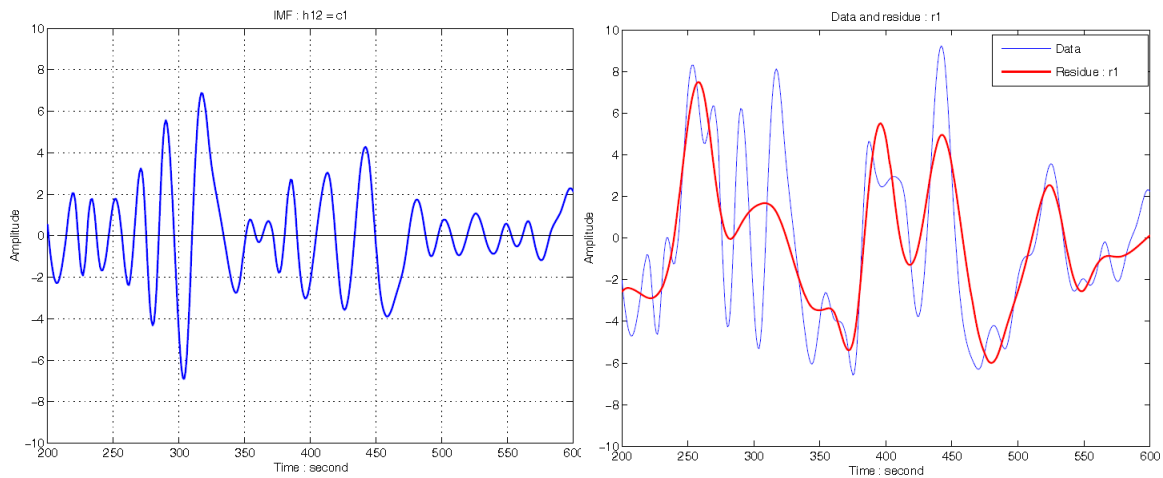


Slika 2.12 Početni signal i proto-IMF¹⁰

¹⁰ Izvor slike: <https://www.slideshare.net/puneet4gupta/hilbert-huang-transformhht>

Postoje različiti kriteriji za prestanak ponavljanja ovog procesa, ali u [8] se navodi kriterij naziva *S stoppage*. Prema njemu, postupak završava kad je razlika broja ekstrema i prolazaka kroz nulu najviše jedan ili kad je konstantna kroz nekoliko iteracija. Napominje se kako je optimalna vrijednost iteracija između 3 i 8. Nakon što se IMF doista dobije (slika 2.13 a), razlikom početne funkcije i IMF funkcije dobiva se rezidual (izraz 2-15, prikazani na slici 2.13 b).

$$x(t) - c_1 = r_1 \quad (2-15)$$



Slika 2.13 a) IMF, b) Početni signal i rezidual¹⁰

Rezidual se potom opet obrađuje postupkom filtriranja istim postupkom kao što se obrađuje početni signal te kao rezultat daje drugi IMF. Ovaj postupak se ponavlja sve dok rezidual nije monotona funkcija ili ima samo jedan ekstrem. Konačno, početni signal se može zapisati kao suma svih IMF funkcija i reziduala (izraz 2-16) [8].

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j + r_n \quad (2-16)$$

Prednost ovog postupka je ta što se dobivaju IMF funkcije bez DC vrijednosti koja predstavlja problem kod Hilbertove transformacije.

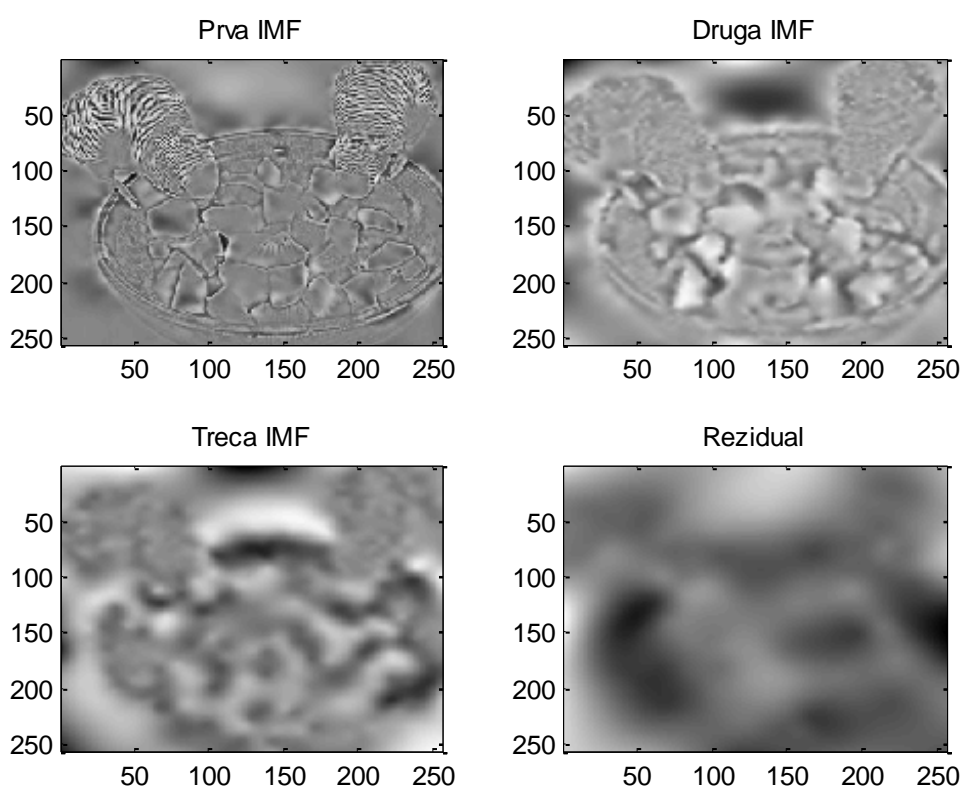
2.3.3 Primjena na prirodnoj slici

Bidimenzionalna empirijska dekompozicija signala (*engl. Bidimensional Empirical Mode Decomposition, BEMD*) predstavlja prilagodbu algoritma EMD za obradu dvodimenzionalnog signala, posebice slike. Ima svojstvo lociranja prostornih frekvencija.

Kod obrade dvodimenzionalnih signala poput slike nailazi se na čitav niz problema na koji se ne nailazi kod jednodimenzionalnih signala. Zbog toga obrada zasebnih redaka EMD postupkom ne daje dobre rezultate. Primjerice, ima više definicija ekstrema dvodimenzionalnih signala pa je i postupak njihovog pronalaženja kompliciraniji. Primjerice, pitanje je treba li rub sedla razmatrati kao niz maksimuma? Drugi problem je generiranje glatke plohe kroz detektirane minimume, odnosno maksimume [8].

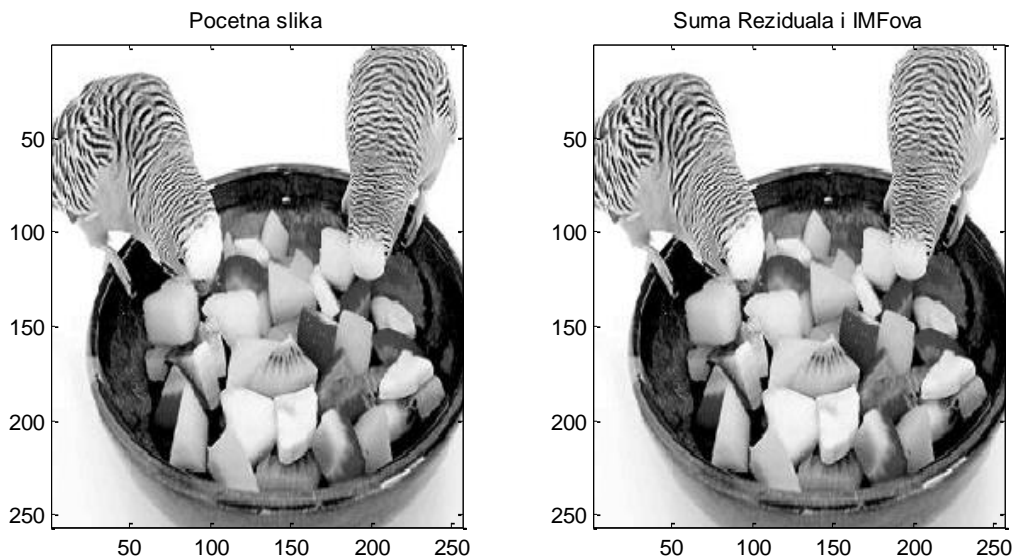
Postupkom bidimenzionalne empirijske dekompozicije signala slika se rastavlja na IMF-ove i rezidual. Pritom IMF-ovi zadovoljavaju uvjete iz 2.3.2. Postupak filtriranja je također ekvivalentan onom opisanom u 2.3.2.

Slika 2.14 prikazuje postupak bidimenzionalne empirijske dekompozicije slike 2.2 a.



Slika 2.14 BEMD u 3 razine

Može se uočiti da prva IMF funkcija sadrži najviše frekvencije iz signala, dok svaka iduća sadrži sve niže frekvencije. Rezidual sadrži praktički samo pozadinske boje. Ukoliko se Rezidual i 3 IMF-a zbroje, dobiva se početna slika (slika 2.15).



Slika 2.15 Početna i rekonstruirana slika

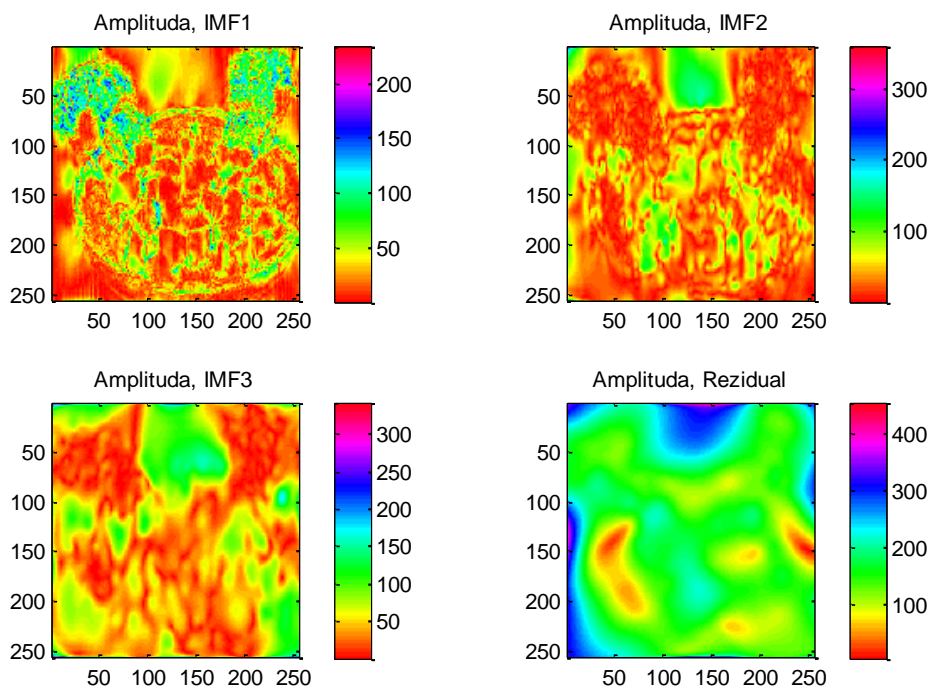
Za izvedbu ovog algoritma korišten je javno dostupan, besplatan kod¹¹. Za potpunu izvedbu algoritma Huang – Hilbertove transformacije, nakon postupka BEMD potrebno je dobivene IMF-ove i rezidual obraditi Hilbertovom transformacijom. Koristi se Hilbertova transformacija u dvije dimenzije koja zapravo radi jednodimenzionalnu Hilbertovu transformaciju nad stupcima slike¹².

Hilbertovom transformacijom su obrađena sva tri IMF-a i rezidual. Kao rezultat, Hilbertova transformacija daje amplitudu (slika 2.16) i trenutnu frekvenciju (slika 2.17). Rezultati su prikazani pomoću HSV boja¹³ da bi se bolje uočile značajne vrijednosti amplitude u slikama.

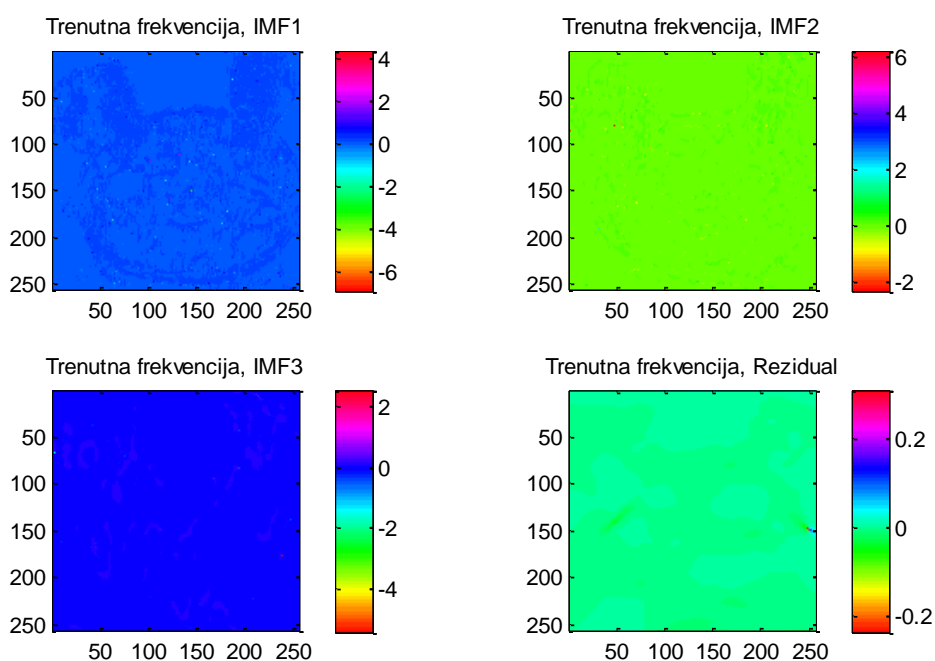
¹¹ Kod dostupan na: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/28761-bi-dimensional-empirical-mode-decomposition--bemd>

¹² Kod dostupan na: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29072-hilbert2>

¹³ Detaljnije na: <http://infohost.nmt.edu/tcc/help/pubs/colortheory/web/hsv.html>



Slika 2.16 Huang - Hilbertova transformacija – amplituda



Slika 2.17 Huang - Hilbertova transformacija - trenutna frekvencija

Vrijednosti amplitude su značajne i u postupku sažimajućeg očitavanja će zauzimati veći dio sakupljene informacije. S druge strane, značajnih vrijednosti frekvencije ima doista malo. U sve četiri funkcije ima ukupno 62 točke od njih 262 144 s trenutnom frekvencijom većom od 1 Hz. Takav rezultat je izrazito pogodan za iskorištavanje kod sažimajućeg očitavanja.

2.4 Karhunen – Loève transformacija

Karhunen – Loève transformacija (KLT) je linearna transformacija koja omogućuje uklanjanje redundancije iz signala slike dekokreliranjem informacije koju ona sadrži.

Informacije koje sadrže pojedini pikseli u slici formiraju osi vektorskog prostora čijom rotacijom se može ukloniti njihova korelacija. Bazni vektori novoformiranog vektorskog prostora tada definiraju linearnu transformaciju nad analiziranom slikom. Bazni vektori KLT transformacije su zapravo svojstveni vektori matrice kovarijance slike koji ju, nakon transformacije, čine dijagonalnom i na taj način uklanjaju korelaciju između susjednih piksela [9].

U većini slika su susjedni pikseli međusobno korelirani. Do manje korelacije između susjednih piksela dolazi samo na područjima rubova u slici. Taj efekt se mogao vidjeti već i kod prethodnih transformacija: kod valične transformacije aproksimacija sadrži informaciju o pozadinskim bojama u slici, dok detalji nose podatke o rubovima, odnosno, o dijelovima slike čija korelacija sa susjednim pikselima je mala. Isto se vidi i kod Huang – Hilbertove transformacije: IMF-ovi nose podatke o višim frekvencijama u slici, što su opet rubovi, dok rezidual čuva dijelove slike koji su međusobno izrazito korelirani.

Signal x je dekokreliran ako vrijedi izraz 2-17.

$$E(x_i \cdot x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2, & i = j \end{cases} \quad (2-17)$$

Pritom je $E(\cdot)$ operator očekivanja. Vektor vrijednosti pojedinih piksela za blok slike koji sadrži N piksela može se iskazati izrazom 2-18.

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N] \quad (2-18)$$

Matrica kovarijance za ovaj vektor se definira izrazom 2-19.

$$[\mathbf{C}]_x = E[(\mathbf{x} - \mathbf{m})(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T] \quad (2-19)$$

Pritom je \mathbf{m} srednja vrijednost vektora \mathbf{x} i definira se kao $\mathbf{m} = E(\mathbf{x})$. U nastavku će se pretpostaviti da je srednja vrijednost \mathbf{m} jednaka nuli [9].

Cilj ove transformacije je pronaći matricu linearne transformacije $[\mathbf{W}]$ koja će, kad se transponira, rotirati vektor \mathbf{x} što će kao rezultat dati dijagonalnu matricu transformacije \mathbf{y} (izraz 2-20). Matrica $[\mathbf{W}]$ je pritom ortonormalna matrica.

$$\mathbf{y} = [\mathbf{W}]^T \cdot \mathbf{x} \quad (2-20)$$

Pritom je svaki stupac matrice $[\mathbf{W}]$ vektor \mathbf{w}_i koji predstavlja bazni vektor novog vektorskog prostora. Dakle, svaki element vektora \mathbf{y} se može izračunati pomoću izraza 2-21.

$$y_i = \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{x} \quad (2-21)$$

Budući da je matrica $[\mathbf{W}]$ ortonormalna matrica, rekonstrukcija početnog vektora \mathbf{x} se postiže vrlo jednostavno (izraz 2-22).

$$\mathbf{x} = [\mathbf{W}] \cdot \mathbf{y} \quad (2-22)$$

Nadalje, može se uočiti da ova transformacija čuva energiju signala (izraz 2-23) [9].

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = ([\mathbf{W}]^T \cdot \mathbf{x})^T ([\mathbf{W}]^T \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T [\mathbf{W}] [\mathbf{W}]^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \quad (2-23)$$

Kako bi se pronašla matrica transformacije za niz piksela s proizvoljnom matricom kovarijance, potrebno je pronaći svojstvene vektore matrice kovarijance. Kako je ona realna i simetrična, i svojstveni vektori su joj realni. Neka je $[\mathbf{C}]_y$ matrica kovarijance transformiranog signala. Kao što je već bilo napomenuto, ona je dijagonalna, a na dijagonali sadrži varijance dobivene na temelju podataka u slici (izraz 2-24).

$$[\mathbf{C}]_y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

Ova matrica se može izračunati iz početne matrice kovarijance (izraz 2-25).

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}]_y &= E[\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T] = E\left([\mathbf{W}]^T \cdot \mathbf{x} \cdot ([\mathbf{W}]^T \cdot \mathbf{x})^T\right) = E([\mathbf{W}]^T \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T [\mathbf{W}]) \\ &= [\mathbf{W}]^T [\mathbf{C}]_x [\mathbf{W}] \end{aligned} \quad (2-25)$$

Ekvivalentno vrijedi izraz 2-26 [9].

$$[\mathbf{C}]_x [\mathbf{W}] = [\mathbf{W}] [\mathbf{C}]_y \quad (2-26)$$

Budući da je matrica $[C]_y$ dijagonalna, vrijedi izraz 2-27.

$$[C]_x \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i \quad (2-27)$$

Dobivene vrijednosti λ_i i \mathbf{w}_i za $i = 1, \dots, N$ su svojstveni vektori matrice $[C]_x$, odnosno, svaki stupac matrice $[W]$ je svojstveni vektor matrice kovarijance $[C]_x$. Kako bi se osigurala ortonormalnost matrice $[W]$, može se nad njom provesti Gram – Schmidt ortogonalizacija [9].

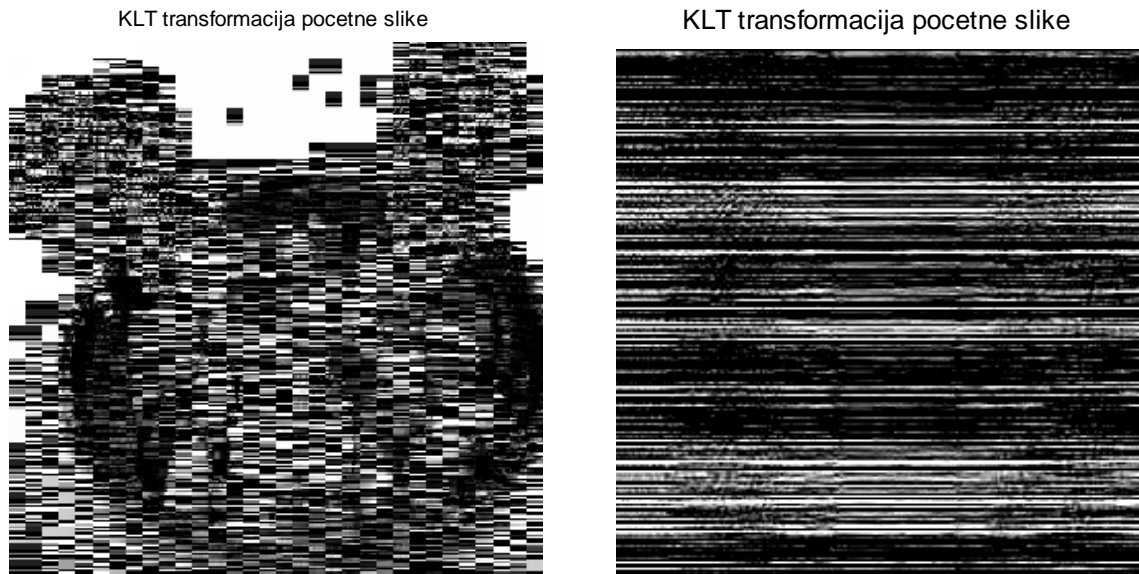
Prema [9], za procjenu matrice kovarijance slike nije potrebno raditi analizu nad cijelom slikom, već je dovoljno analizirati $10 \times N$ uzoraka slike, gdje je N dimenzija visine slike u pikselima.

2.4.1 Primjena na prirodnoj slici

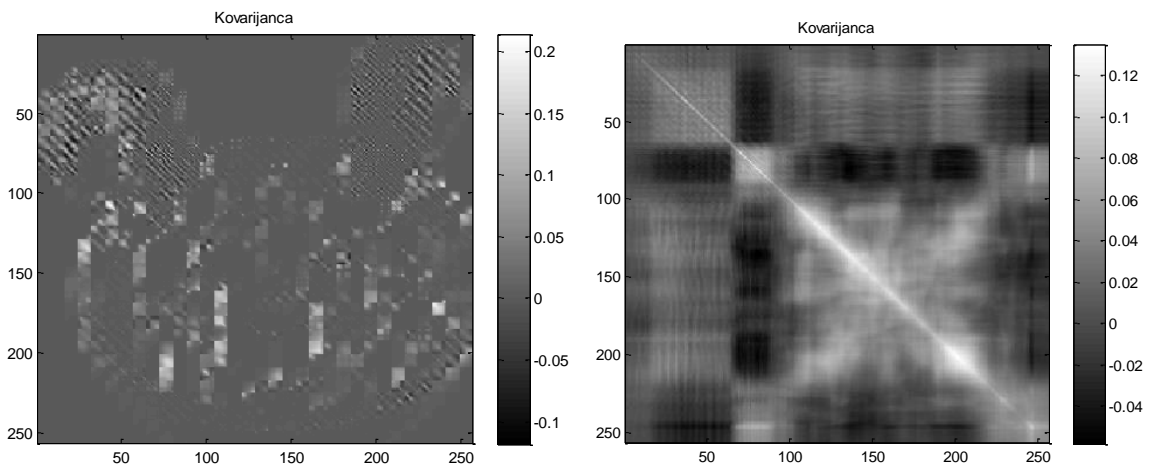
KL transformacija se može primijeniti na cijeloj slici, ali i, kao što se to demonstriralo kod DCT transformacije, na njenim blokovima. Što je blok slike koji se analizira veći, to je veća dekorelacija unutar slike. Najveća dekorelacija će se, naravno, postići ako se transformira slika kao cjelina. Međutim, u tom je slučaju postupak numerički mnogo zahtjevniji, posebno kod slika većih dimenzija. Naime, broj potrebnih aritmetički operacija raste linearno s porastom dimenzije slike koja se analizira [9]. Nadalje, budući da dimenzija matrice kovarijance odgovara broju piksela koji se analizira, za analizu cijele slike ona bi bila velika čak za slike relativno malih dimenzija. Dakle, kod odabira dimenzije bloka koji će se koristiti pri analizi potrebno je napraviti kompromis između stupnja dekorelacije i numeričke složenosti algoritma.

Slika 2.18 a) prikazuje KL transformaciju slike 2.2 a). Radila se transformacija nad blokovima dimenzija 8×8 piksela. Odlično se mogu uočiti položaju papigica i blokovi koji sadrže više frekvencije (pruge na glavama papiga). Slika 2.18 b) prikazuje KL transformaciju nad istom slikom, ali kad se transformacija radi nad cijelom slikom dimenzija 256×256 piksela.

Slika 2.19 vizualno prikazuje matrice kovarijanca u blokovima ove slike kod analize nad blokovima dimenzija 8 x 8 piksela i kod analize cijele slike.



Slika 2.18 KL transformacija slike 3.2 a) nad blokovima veličine a) 8 x 8, b) 256 x 256 piksela



Slika 2.19 Kovarijanca kod analize a) blokova dimenzija 8 x 8, b) cijele slike

Na slici 2.19 a) se odlično mogu uočiti dijelovi slike gdje su pikseli manje korelirani: rubovi i voće u zdjeli i papigice išarane prugama. Kod analize cijele slike (slika 2.19 b) kovarijanca ima najveću vrijednost na dijagonali, što se objašnjava povezanošću susjednih piksela u slici [9].

Priroda izračuna ove transformacije odlično se uklapa u algoritam sažimajućeg očitavanja. Nudi veliku mogućnost kompresije pa će biti vrlo zanimljiva u daljnjoj analizi.

3. Utjecaj pojedinih transformacija slike na njenu rekonstrukciju kod sažimajućeg očitavanja

Nakon analize pojedinih transformacija, opisane će se transformacije upotrijebiti u algoritmu sažimajućeg očitavanja koji je opisan u poglavlju 2.

3.1 Diskretna kosinusna transformacija kod sažimajućeg očitavanja

U poglavlju 2.1 opisana je diskretna kosinusna transformacija i prikazana je njena primjena na prirodnoj slici. U ovom poglavlju će biti prikazana njena primjena kod sažimajućeg očitavanja. Analizirat će se slika 3.1 koja je originalno u nekomprimiranom formatu (Bitmap¹⁴).



Slika 3.1 Slika za analizu¹⁵

Analizirat će se blokovi slike veličine 8 x 8 piksela. U svakom bloku, dakle, ima 64 piksela. Kako bi se ova slika mogla „provući“ kroz algoritam sažimajućeg očitavanja, ona mora imati

¹⁴ Detaljnije na: <http://www.baotic.net/graficki-formati-na-webu/rasterski/bmp/>

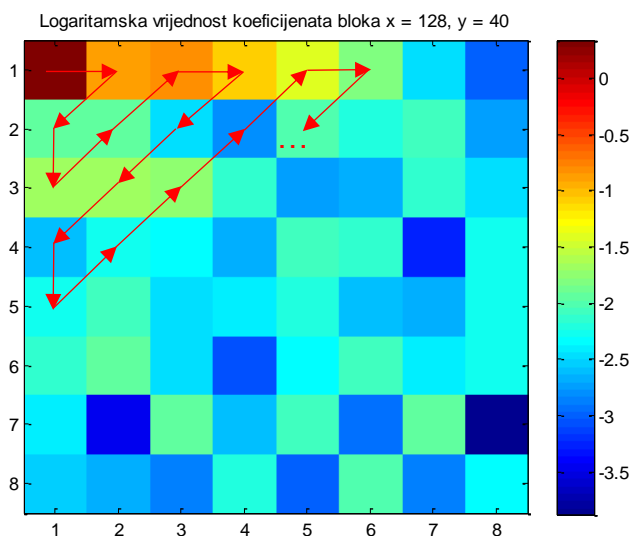
¹⁵ Izvor slike: <http://extras.springer.com/2005/978-0-387-25280-3/images>

samo konačan broj uzoraka u DCT domeni većih od nule. U 2.1 se već mogla vidjeti struktura transformirane slike u DCT domeni i moglo se uočiti da je doista većina uzoraka gotovo jednaka nuli i da se izjednačavanjem uzoraka male amplitude s nulom ne gubi puno na kvaliteti slike jer ti uzorci ne nose mnogo informacije u slici.

Za dobivanje mjernog vektora kod sažimajućeg očitavanja, postupak koji treba provesti nad svakim blokom slike je sljedeći:

1. Provesti dvodimenzionalnu DCT transformaciju nad svakim blokom slike (logaritamski prikaz koeficijenata na slici 3.2)
2. Cik – cak analiziranjem prenijeti dvodimenzionalni blok DCT koeficijenata u jednodimenzionalni niz (ilustrirano na slici 3.2, prikaz sortiranih koeficijenata na slici 3.3)
3. Sortirati koeficijente i odabrati K najvećih (detaljnije u 1.1.1)
4. Sve koeficijente u DCT domeni slike osim K najvećih izjednačiti s nulom

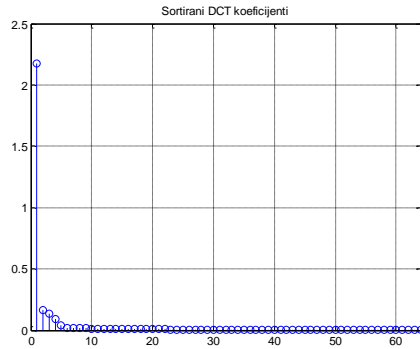
Dobivenu transformaciju slike se potom množi s nasumičnom, ortonormalnom matricom dimenzija $M \times N$.



Slika 3.2 DCT koeficijenti jednog bloka

Na slici 3.3 se može posebice uočiti koliko malo uzoraka u bloku ima vrijednost veću od nule. Samo desetak vrijednosti ima značajnu amplitudu, dok su ostale gotovo jednake nuli. Na slici 3.2 se može uočiti da se radi o niskofrekvencijskim uzorcima.

U analizi se, stoga, uzelo 15 uzoraka od njih 64, dok su ostali izjednačeni s nulom. Početna slika i inverzna transformacija tako obrađene slike mogu se vidjeti na slici 3.4.

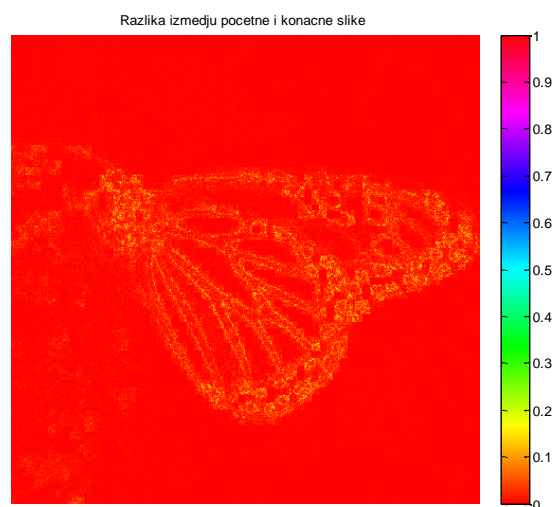


Slika 3.3 Sortirani koeficijenti iz gornjeg bloka



Slika 3.4 a) Početna slika, *b)* Slika nakon opisane obrade

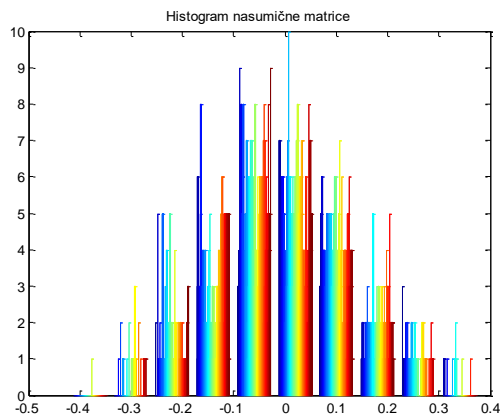
Razlika između ove dvije slike je vizualno vrlo mala. Čini se da je boja na obrađenoj slici malo bljeđa, do čega dolazi zbog veće maksimalne vrijednosti amplitude u obrađenoj slici pa se njen vizualni prikaz mijenja. Slika 3.5 prikazuje razliku između početne i obrađene slike.



Slika 3.5 Razlika između početne i obrađene slike

Razlike se pojavljuju samo na oštrim rubovima u slici i one su vrlo male, a dobivena slika zadovoljava svojstvo rijetkosti s $K = 15$.

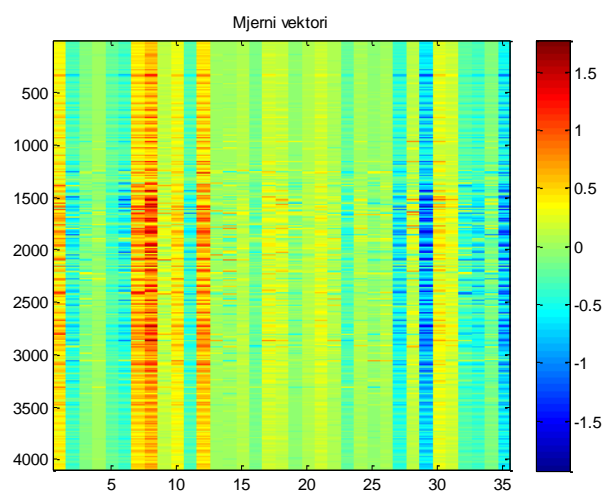
Sada je potrebno generirati mjernu matricu s nasumičnim vrijednostima i odabrati broj uzetih uzoraka M . Mjerna matrica s vrijednostima prema Gaussovoj razdiobi se rastavlja pomoću SVD dekompozicije i ortogonalizira. Pritom vrijednosti u matrici zadržavaju Gaussovu razdiobu (slika 3.6).



Slika 3.6 Gaussova razdioba vrijednosti u mjernoj matrici

Mjerna matrica je dimenzija $M \times 64$ (ako je blok dimenzija 8×8). Naime, uzorkuje se blok po blok što je praktičnije i zbog manje numeričke složenosti postupka. Blok se s mjernom matricom množi kao jednodimenzionalni signal, i to M puta.

Kao rezultat množenja dobiva se niz mjernih vektora čiji broj je jednak broju blokova u slici (slika 3.7). Pritom je uzimano 35 uzoraka u bloku od njih 64. Rekonstrukcija se izvršava pomoću algoritma l_1 MAGIC [3].

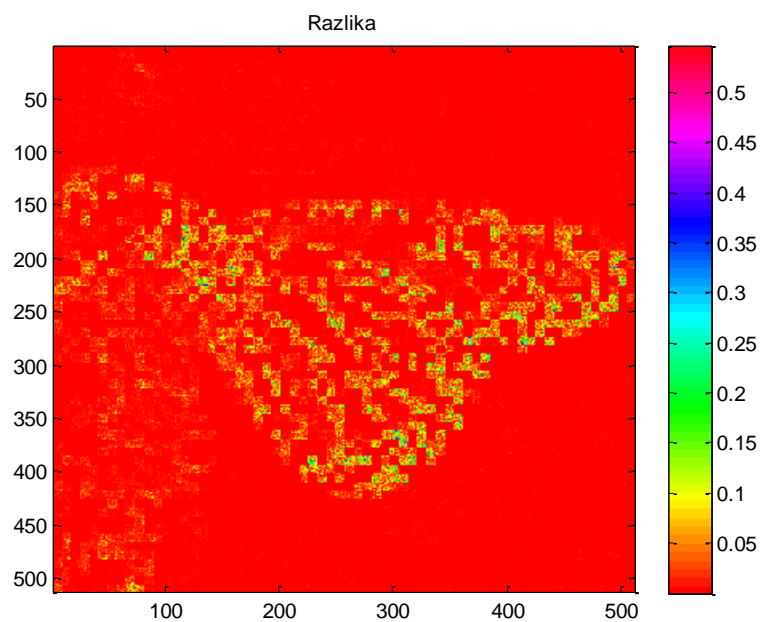


Slika 3.7 Mjerni vektori

Slika 3.8 prikazuje sliku koja je rezultat takve rekonstrukcije. Kvaliteta dobivene slike je veoma dobra. Razlika između početne slike u rijetkom prikazu (slika 3.4 b) prikazana je na slici 3.9.



Slika 3.8 Rekonstruirana slika



Slika 3.9 Razlika početne i rekonstruirane slike

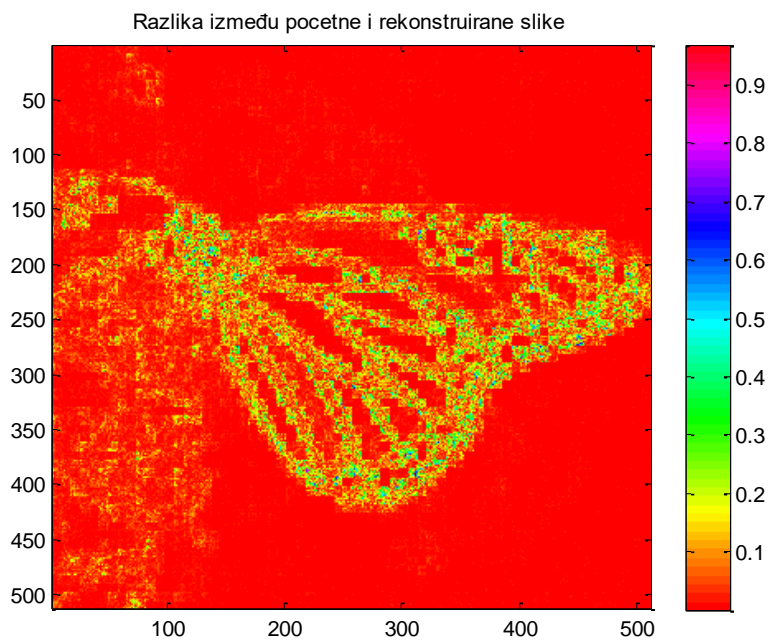
Razlika je najveća u blokovima koji sadrže oštre rubove i veći broj značajnih koeficijenata u području visokih frekvencija.

Ukoliko se uzme samo 20 uzoraka od njih 64 u bloku, pri čemu ima 15 uzoraka u bloku većih od nule, kvaliteta rekonstruirane slike se znatno smanjuje, ali sadržaj slike je još uvijek dobro prepoznatljiv (slika 3.10).



Slika 3.10 Rekonstrukcija kod uzetih 20 uzoraka

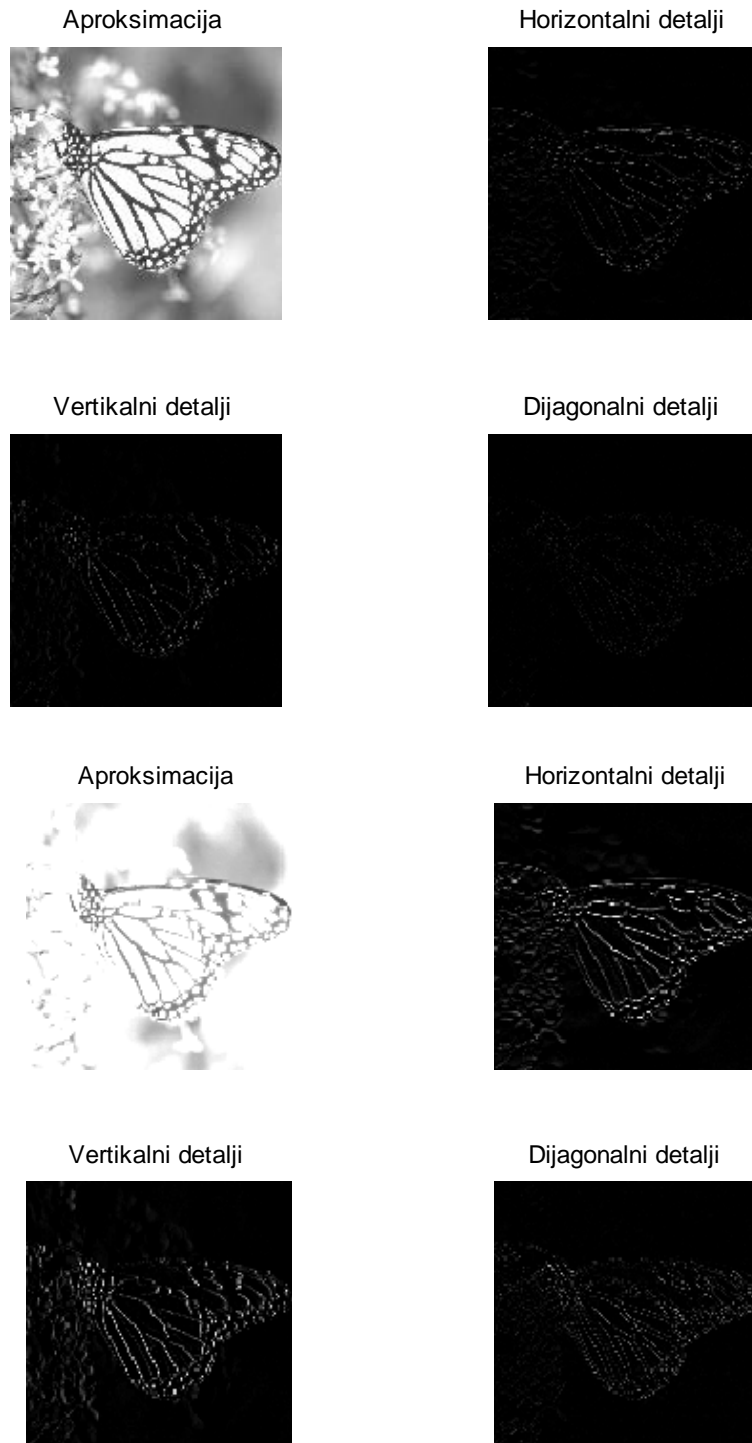
Razlika između početne slike i rekonstrukcije je prikazana na slici 3.11. Razlika je mnogo veća nego na slici 3.9. Znatno se povećala u blokovima u kojima postoje više frekvencije.



Slika 3.11 Razlika između početne i rekonstruirane slike za uzetih 20 uzoraka

3.2 Valićna transformacija kod sažimajućeg očitavanja

Valićna transformacija nad slikom dobivena korištenjem Wavelet Toolboxa koji je dio MATLAB programskog paketa prikazana je u 2.2. U nastavku će biti prikazana njena primjena u algoritmu sažimajućeg očitavanja.



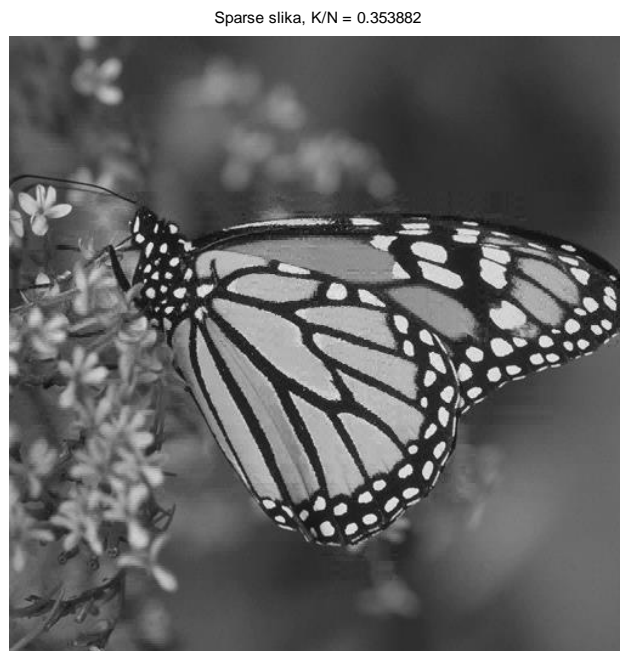
Slika 3.12 a) Prva razina transformacija, b) druga razina transformacije

Proučena su dva slučaja njene primjene u tom algoritmu: primjena nad blokovima slike i primjena nad slikom kao cjelinom. Rekonstrukcija se u oba slučaja vrši pomoću $l_1 - MAGIC$ algoritma koji rekonstruira jednodimenzionalne signale.

Valićna transformacija slike 3.1 korištenjem Haarovog valića u 2 stupnja prikazana je slikom 3.12.

3.2.1 Primjena valićne transformacije nad blokovima slike

U ovom slučaju kao matrica transformacije Ψ koristi se matrica za dvodimenzionalnu transformaciju slike. Budući da u algoritam sažimajućeg očitavanja ulazi jednodimenzionalni signal, ona je dimenzija $N^2 \times N^2$, gdje je N veličina analiziranog bloka.



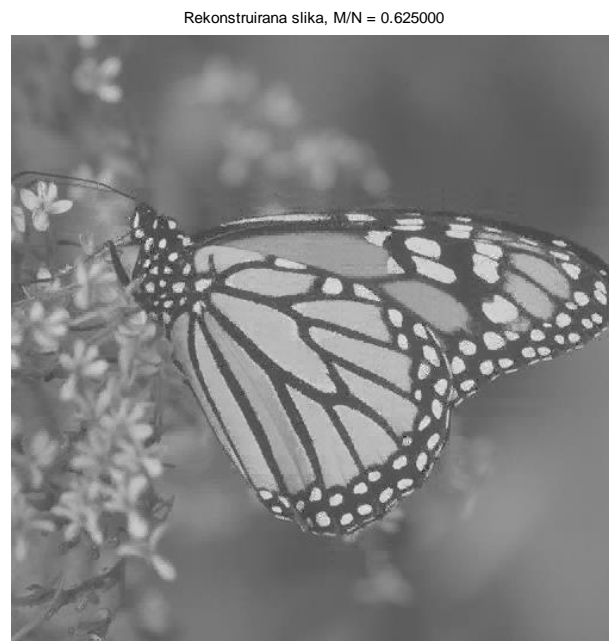
Slika 3.13 Slika koja zadovoljava uvjet rijetkosti po blokovima

Ukoliko bi se na ovaj način analizirala slika kao cjelina, matrice ϕ i Ψ bi bile jako velikih dimenzija što algoritam znatno usporava. Zato se ovim načinom odabralo analizirati sliku po blokovima veličine 16 x 16 piksela. Pri analizi se koristio Haarov valić¹⁶. Zbog dimenzija

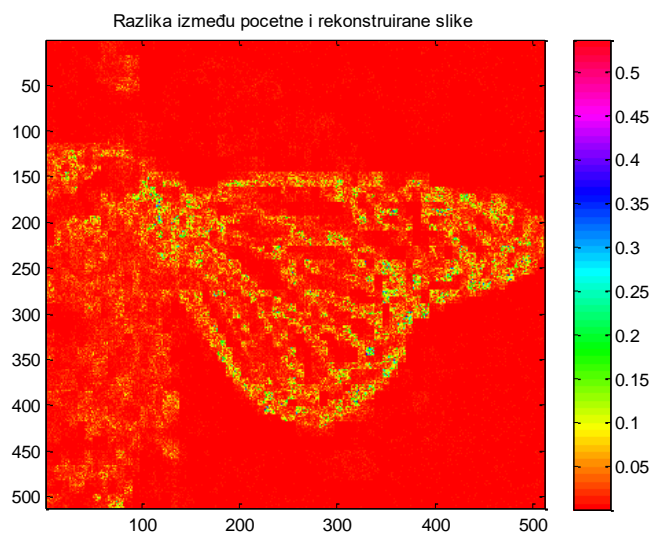
¹⁶ Detaljnije o Haarovom valiću na: <http://wavelets.pybytes.com/wavelet/haar/>

bloka slike jedino se valićem s kratkom funkcijom skale i valićnom funkcijom može postići razlaganje bloka slike.

Valićnom transformacijom se transformira blok po blok slike te se po bloku odabire K najvećih uzoraka, dok se ostali izjednačuju s nulom. Na taj način blokovi slike zadovoljavaju uvjet da signal kod sažimajućeg očitavanja mora biti rijedak. Utvrđeno je da za zadovoljavajuću kvalitetu slike treba zadržati oko 40% vrijednosti uzoraka. Slika 3.13 je prošla kroz ovaj postupak. Iako se vidi gubitak informacije u slici, kvaliteta je još uvijek dovoljno dobra.



Slika 3.14 Rekonstruirana slika



Slika 3.15 Razlika između početne i rekonstruirane slike

Nakon što se blok po blok ove slike pomnožio sa slučajnom mjernom matricom i provela se rekonstrukcija korištenjem $l_1 - MAGIC$ algoritma, za uzetih 62.5% uzoraka dobivena je rekonstrukcija prikazana slikom 3.14.

Razlika između početne (slika 3.13) i rekonstruirane (slika 3.14) slike je prikazana na slici 3.15. Razlika je najveća u područjima slike s oštrim rubovima.

3.2.2 Primjena valične transformacije nad cijelom slikom

U ovom slučaju cijela slika se množi s matricom za jednodimenzionalnu DWT transformaciju nakon čega se zadržava K uzoraka slike najveće amplitude, dok se ostali izjednačuju s nulom. Kako bi se mogla raditi usporedba s 3.2.1, opet se za analizu koristi Haarov valić (slika 3.16).

Rijetki prikaz slike, K/N = 0.354607



Slika 3.16 Rijetki prikaz početne slike kod analize cijele slike

Kvaliteta ove slike je već na prvi pogled veća nego kod slike 3.13, ali se na njoj u područjima s malo detalja uočavaju kvadratični artefakti koji su rezultat oblika Haarovog valića.

Razlog veće kvalitete slike kod obrade cijele slike u odnosu na obradu blokova leži u činjenici da se u ovom slučaju zadržava K najvećih koeficijenata u cijeloj slici, dok se oni manji, koji nose i manju količinu informacije, odbacuju. U slučaju analize po blokovima, radila se valična transformacija u svakom bloku pa se u svakom bloku zadržalo K najvećih

koeficijenata. U blokovima koji nose manju količinu informacije tako je zadržan veći broj koeficijenata nego što je to možda potrebno, dok je u blokovima s više informacije zadržano premalo koeficijenata. Posljedično, slika gubi na kvaliteti.

Slijedeći korak je sažimajuće očitavanje. U ovom slučaju mjerna matrica ϕ se množi s cijelim signalom slike. Broj redaka ove matrice određuje koliki će biti omjer M/N . Za isti omjer M/N kao u gornjem slučaju, mjerna matrica će biti dimenzija 318 x 512 (slika 3.17).

Rekonstrukcija se vrši po stupcima slike pa su stupci koji sadrže više oštih rubova rekonstruirani s većom pogreškom.

Rekonstruirana slika, $M/N = 0.621094$



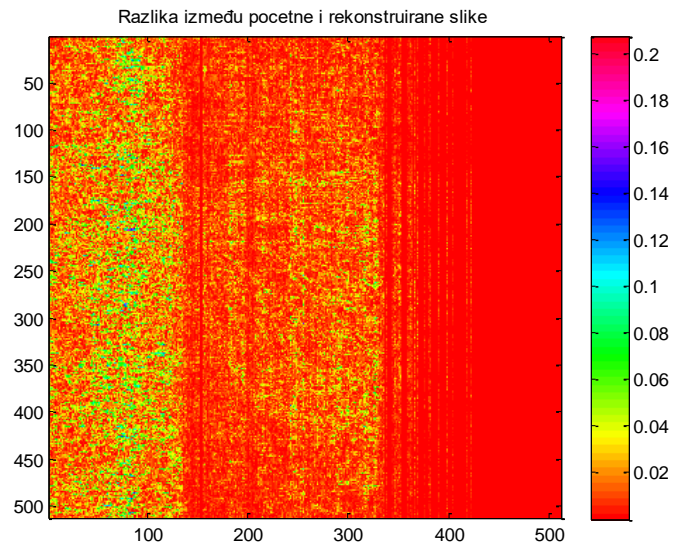
Slika 3.17 Rekonstruirana slika za $M/N = 0.6211$

Razlika između početne (slika 3.16) i rekonstruirane (slika 3.17) slike je prikazana slici 3.18. Za razliku od 3.2.1, gdje je pogreška najveća u blokovima s rubovima, ovdje je to veća što stupac sadrži više rubova i raspodijeljena je po cijelom stupcu.

Međutim, pokazuje se da je u ovom slučaju puno bolji odabir koristiti valić $db4$ ¹⁷. U 3.2.1 se ovaj valić nije mogao koristiti jer su dimenzije bloka bile premale da bi se blok rastavio

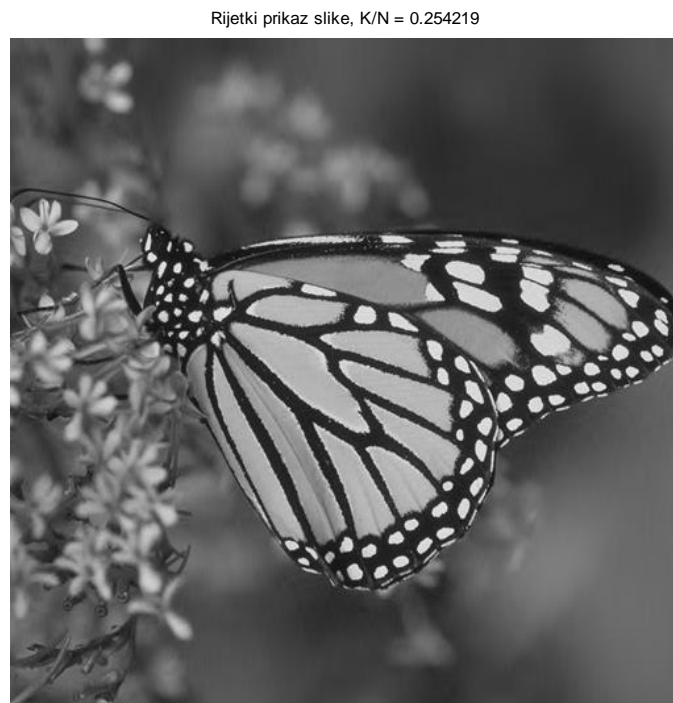
¹⁷ Detaljnije o $db4$ valiću na: <http://wavelets.pybytes.com/wavelet/db4/>

u dovoljnom broju stupnjeva. Zbog toga se morao koristiti valić s najkraćom valićnom funkcijom i funkcijom skale.



Slika 3.18 Razlika između početne i rekonstruirane slike

Ukoliko se koristi ovaj valić, dovoljno je zadržati samo 25% najvećih koeficijenata slike, a da se kvaliteta slike vidljivo ne smanji (slika 3.19).



Slika 3.19 Rijetki prikaz slike za $K/N = 0.2542$

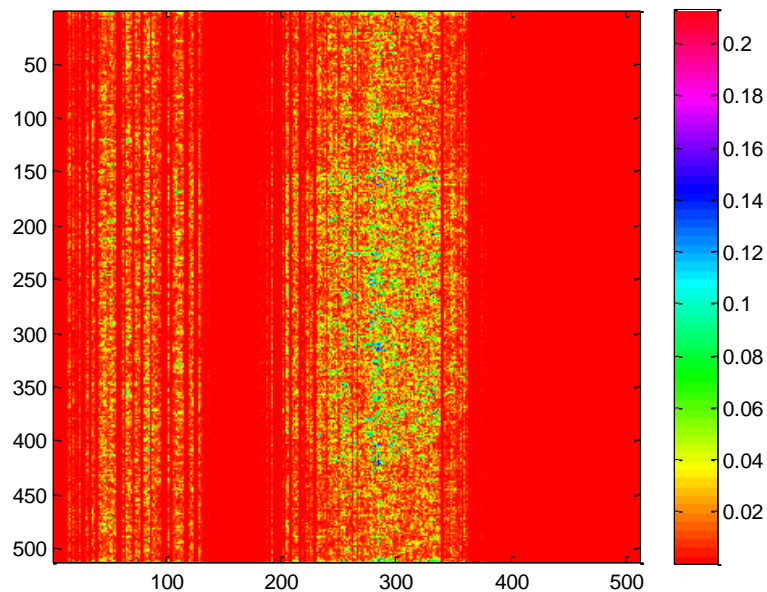
Kvaliteta slike doista nije u velikoj mjeri narušena, iako je zadržano samo 25% najvećih koeficijenata. Za isti postotak uzetih uzoraka kao u 3.2.1 dobiva se puno kvalitetnija rekonstrukcija (slika 3.20). Razlika između početne i rekonstruirane slike je prikazana na slici 3.21. Najveća je u stupcima gdje ima najviše oštih rubova. Greška je vidljivo manja nego na slici 3.17 i kvaliteta rekonstruirane slike je viša.

Rekonstruirana slika, $M/N = 0.621094$



Slika 3.20 Rekonstruirana slika za $M/N = 0.6211$

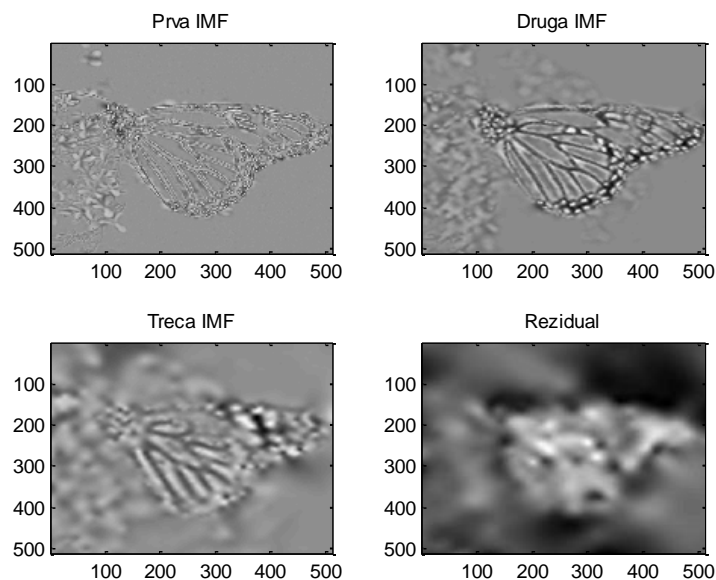
Razlika između početne i rekonstruirane slike



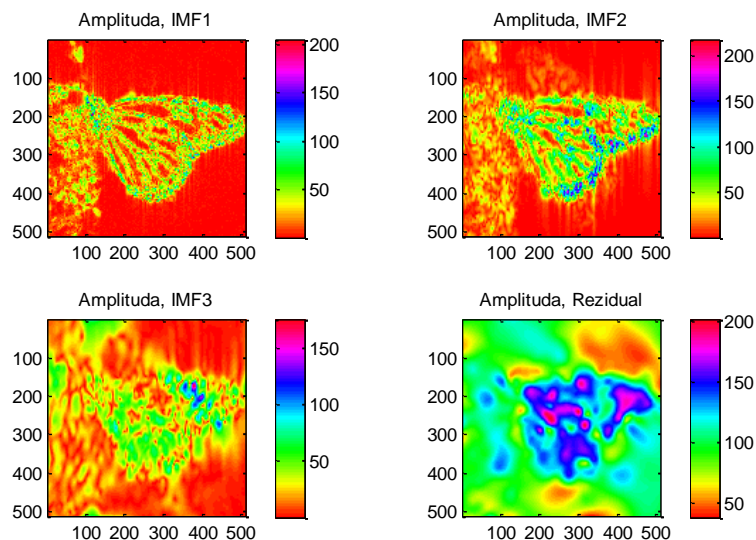
Slika 3.21 Razlika između početne i rekonstruirane slike

3.3 Huang – Hilbertova transformacija kod sažimajućeg očitavanja

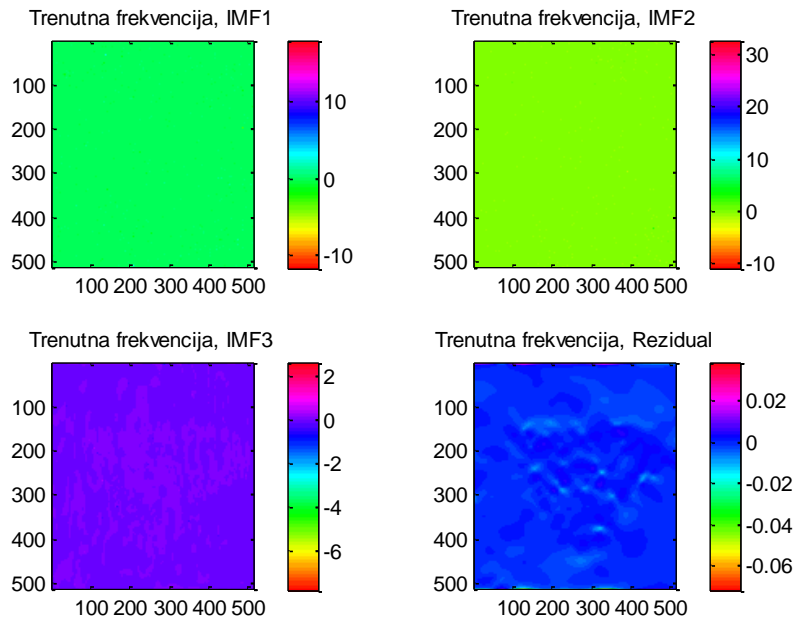
U 2.3 se opisao postupak dobivanja Huang - Hilbertove transformacije slike i došlo se do zaključka kako ta transformacija ima veliki potencijal za korištenje kod sažimajućeg očitavanja. U ovom poglavlju se isti postupak provodi nad slikom 3.1. Rezultat BEMD postupka prikazan je slici 3.22. Rezultat Hilbertove su ovojnica svake IMF funkcije (slika 3.23) i trenutna frekvencija (slika 3.24). Na prvi pogled čini se da se doista radi o rijetkom prikazu početne slike, posebice u pogledu trenutne frekvencije kod koje ima mali broj značajnih vrijednosti.



Slika 3.22 IMF i rezidual

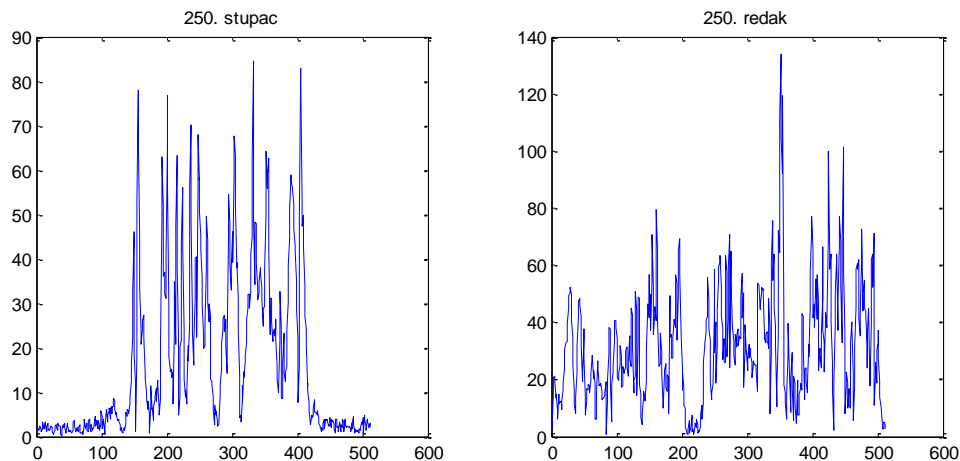


Slika 3.23 Huang – Hilbertova transformacija – amplituda



Slika 3.24 Huang - Hilbertova transformacija - trenutna frekvencija

U sve četiri IMF funkcije ima samo 354 točke sa značajnom vrijednošću frekvencije (kao granica je uziman 1 Hz). Amplituda Hilbertove transformacije IMF-ova bi se također mogla svesti na rijetki oblik uz određeni gubitak informacije i to *hard thresholdingom* po stupcima. Naime, stupci imaju bolja svojstva za taj postupak od redaka (slika 3.25). Uzeti su redak i stupac iz sredine slike budući da u tom dijelu ima najveći broj oštih rubova.



Slika 3.25 Prikaz jednog retka i stupca u formi funkcije

Međutim, ima nekoliko problema na koje se nailazi kad se ova transformacija želi primijeniti u postupku sažimajućeg očitavanja.

Kod DWT se, zbog decimacije, kao rezultat transformacije dobiva slika istih dimenzija kao početna slika. Kod HHT se dobiva amplituda i trenutna frekvencija Hilbertove

transformacije reziduala i onolikog broja IMF-ova na koliko se dana slika postupkom empirijske dekompozicije može rastaviti. U ovom slučaju radi se o 3 IMF-a. Dakle, kao rezultat transformacije dobiva se čak 8 slika istih dimenzija kao prethodna slika koje bi se trebale obraditi. Sama ta činjenica stavlja u pitanje efikasnost takvog postupka.

Slijedeći problem predstavlja matrica transformacije Ψ . Umnožak te matrice i početne slike trebao bi dati njen rijetki prikaz. Međutim, kod HHT, takav postupak bez dodatne obrade nije moguć. Čak i ukoliko bi se kao početni signal uzimali IMF-ovi i rezidual, Hilbertova transformacija čiji rezultat je amplituda i trenutna frekvencija ne može se dobiti samo postupkom množenja. Budući da se u postupku rekonstrukcije kod sažimajućeg očitavanja matrica Ψ koristi kao dio matrice θ , u taj postupak nije moguće ubaciti dodatnu obradu koja bi dala željene rezultate.

Ipak, HHT bi mogla unijeti poboljšanja u način funkcioniranja drugih transformacija. Nakon postupka HHT dobiva se rijetki prikaz slike koji bi se mogao obraditi, primjerice, diskretnom kosinusnom transformacijom (zbog sinusnog oblika IMF-ova i reziduala). Transforma bi bio rijetkih svojstava i pogodan za sažimajuće očitavanje. Rekonstrukcijom bi se dobila HHT početne slike. Kreiranjem analitičkog signala i uzimanjem njegove realne vrijednosti dobili bi se IMF-ovi i rezidual. Njihovim zbrajanjem došlo bi se do početne slike. Izvedba ovog postupka u okviru ovog Diplomskog rada nije izvedena.

Postoje brojni načini primjene HHT u obradi slike [10], poput dobivanja funkcija vremena i položaja nekih elemenata u slici, broja valova, amplitude i energije. Primjenu pronalazi i u medicinskim obradama slike, u uređajima poput CT-a, magnetske rezonancije i rendgena. U tim primjenama omogućuje prepoznavanje uzoraka koji upućuju na epileptičke napadaje (kod EEG signala), nepravilnog rada srca (kod EKG signala) i sl. Pokazuje se idealnim alatom za prepoznavanje uzoraka u slici.

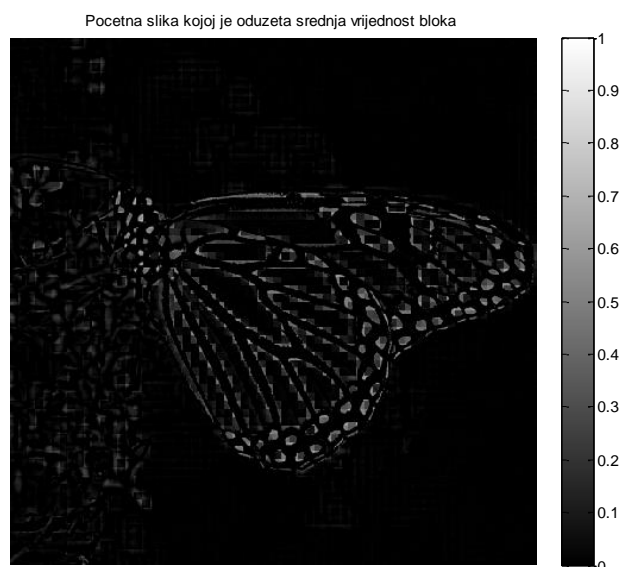
Huang – Hilbertova transformacija je odlična za detekciju rubova, proučavanja valova na površini mora i jezera, geofizici [8], algoritmima prepoznavanja uzoraka u obradi slike [10], itd., ali se ne može koristiti u svrhu obrade slike na način kakav se proučava u okviru ovog Diplomskog rada.

3.4 Karhunen – Loève transformacija kod sažimajućeg očitavanja

KLT transformacija se nakon njene analize u 2.4 činila vrlo pogodnom za primjenu u algoritmu sažimajućeg očitavanja. U ovom poglavlju bit će opisana njena primjena u ulozi matrice transformacije, ali i u ulozi mjerne matrice.

3.4.1 KLT transformacija u ulozi matrice transformacije

I kod ove transformacije analizirala se slika 3.1. Analiza se provodila nakon što se svakom bloku slike oduzela njegova srednja vrijednost (slika 3.26). Naime, u 2.4 se KLT transformacija analizirala na signalu čija je srednja vrijednost jednaka nuli pa se i ovdje odmah u početku napravila ista obrada.



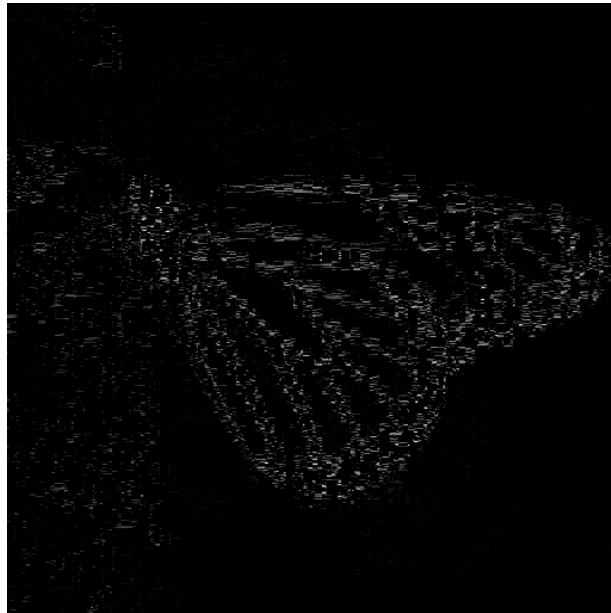
Slika 3.26 Početna slika kod koje je svakom bloku oduzeta njegova srednja vrijednost

Prvi korak je prilagodba transformacije slike kako bi se zadovoljio uvjet rijetkosti. Ova transformacija je takve prirode da se kao njen rezultat ne dobiva prikaz slike u rijetkom obliku. Transformacija slike je prikazana na slici 3.27. Sliku je, dakle, potrebno svesti na rijetki oblik.

Nakon analize različitih vrsta transformacije i rekonstrukcije ustanovljeno je da je kod analize slike u svrhu sažimajućeg očitavanja puno pogodnije koristiti analizu po blokovima.

To se može zaključiti i analizom slike 3.18. Analiza se provodila nad blokovima veličine 8 x 8 piksela.

Transformacija slike kojoj je oduzeta srednja vrijednost



Slika 3.27 Transformacija početne slike

Naime, KLT transformacija slike ima veći broj koeficijenata veće amplitude u dijelovima slike s više detalja, dok dijelovi slike s manje detalja sadrže koeficijente manje amplitude (slika 2.18). Ukoliko se izvrši *hard thresholding* nad transformacijom slike kao cjelinom, dijelovi slike s više detalja ostaju kakvi su bili, dok se na dijelovima slike s manje detalja uočavaju greške. Zbog toga se *hard thresholding* u dijelovima slike s manje detalja vrši s nižom granicom, dok se u dijelovima slike s više detalja vrši s višom granicom. Granice su utvrđene empirijski da se dobije što bolja kvaliteta slike za što niži omjer K/N uz pokušaj dobivanja sličnog iznosa omjera u svim dijelovima slike. Rijetki prikaz slike prikazan je slici 3.28.

Greška je pritom vidljivo veća na dijelovima slike s manje detalja, ali kvaliteta slike je i dalje visoka. Pritom je samo 25.77% uzoraka slike u transformacijskoj domeni različito od nule, što je jako dobar rezultat.

Kako bi se kvaliteta rekonstrukcije mogla usporediti s valičnom transformacijom, u algoritmu sažimajućeg očitavanja uzeto je 62.5% uzoraka kao što je to bilo kod slika 3.14 i 3.17 (slika 3.29).

Rijetki prikaz slike, $K/N = 0.257702$



Slika 3.28 Rijetki prikaz slike kod KLT transformacije

Iako se ni kod valične transformacije kod rekonstrukcije za taj postotak uzetih uzoraka nisu dobile slike visoke kvalitete, slika dobivena u ovom slučaju se jako niske kvalitete, iako se sadržaj može raspoznati. Za kvalitetniju rekonstrukciju potrebni su gotovo svi uzorci, iako ni u tom slučaju rekonstrukcija nije savršena (slika 3.30).

Rekonstruirana slika nakon CS, $M/N = 0.625000$



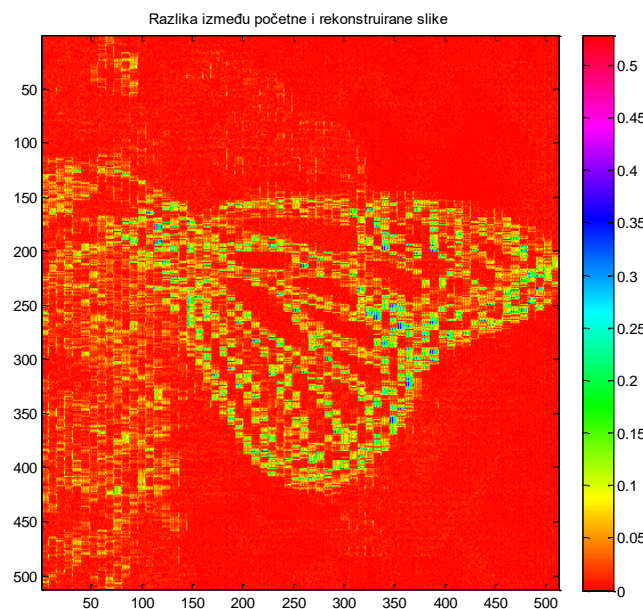
Slika 3.29 Rekonstruirana slika za $M/N = 62.5\%$

Rekonstruirana slika nakon CS, $M/N = 0.875000$



Slika 3.30 Rekonstruirana slika za $M/N = 87.5\%$

Razlika između početne i rekonstruirane slike za 87.5% uzetih uzoraka prikazan je slici 3.31. Može se uočiti da je razlika najveća u blokovima koji sadrže više detalja, kao što se to moglo zaključiti i kod prethodnih transformacija.



Slika 3.31 Razlika između početne i rekonstruirane slike kod KLT transformacije

Može se zaključiti da KLT transformacija baš i nije najidealnija za primjenu kod sažimajućeg očitavanja, ali se pomoću nje slika može prikazati u rijetkom obliku uz očuvanje kvalitete budući da je KLT transformacija prilagođena signalu koji se analizira.

3.4.2 KLT transformacija u ulozi mjerne matrice

U [11] se spominje kako se umjesto slučajne matrice ϕ čije su vrijednosti raspodijeljene prema Gaussovoj razdiobi može koristiti KLT matrica te da će rezultati rekonstrukcije biti bolji od onih koji se dobivaju pri Gaussovoj razdiobi. U [11] se analiza radi nad EKG signalom, a matrica transformacije je DWT matrica.

Ova hipoteza analizirana je nad signalom slike pri korištenju diskretne kosinusne i diskretne valične transformacije. Njena primjena kod KLT transformacijske matrice nema smisla budući da bi u tom slučaju mjerna i transformacijska matrica bile u potpunosti korelirane.

3.4.2.1 Diskretna kosinusna transformacija i KLT mjerna matrica

KLT mjerna matrica trebala bi se kreirati na temelju svakog pojedinog bloka slike, što ovo rješenje čini pomalo nezgrapnim i nepraktičnim. Zbog toga se KLT matrica bloka kreira na temelju srednje vrijednosti svih blokova u slici. Zbog toga nije potrebno spremati mnogo različitih mjernih matrica, već postoji samo jedna. Ovakvo rješenje pogodno je i kod korištenja za niz slika koje se razlikuju samo po položaju pojedinih elemenata u slici. Na takvu situaciju se nailazi vrlo često (primjerice, slijedne slike u filmovima). U tom slučaju KLT mjernu matricu ne bi bilo potrebno računati ponovno, već bi se mogla koristiti ista, prvotno izračunata matrica.

Analiza se radila nad istom slikom kao u prethodnim primjerima (slika 3.1) i to analizom blokova veličine 16 x 16 piksela. Mjerna i transformacijska matrica su pritom dimenzija 256 x 256 piksela. Svaki blok se pri uzimanju uzoraka i rekonstrukciji tretira kao jednodimenzionalni signal zbog načina rada algoritma za rekonstrukciju. Rijetki prikaz početne slike prikazan je slikom 3.32.

Mjerna KLT matrica dobiva se na slijedeći način:

1. Računanje srednje vrijednosti pojedinog elementa bloka aritmetičkom sredinom svih blokova
2. Računanje kovarijance i svojstvenih vrijednosti te svojstvenih vektora bloka
3. Sortiranje dobivenih svojstvenih vrijednosti
4. Odabir M svojstvenih vektora koji odgovaraju indeksima M najvećih svojstvenih vrijednosti

K/N = 0.351563



Slika 3.32 Rijetki prikaz za $K/N = 0.375$

Na ovaj način slučajna matrica je prilagođena signalu koji transformira. Ona zadovoljava RIP kriterij budući da KLT transformacija ne mijenja Euklidsku udaljenost između točaka u prostoru, već samo položaj osi koordinatnog sustava. Koeficijent korelacije između mjerne i transformacijske matrice mora biti što bliži nuli, a njegova vrijednost će biti analizirana u nastavku.

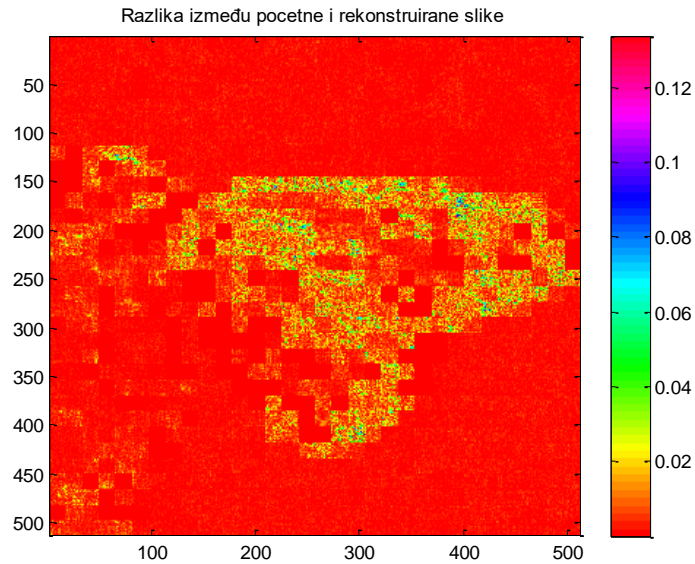
Za 62.11% uzetih uzoraka, što je vrijednost kakva se uzimala i u 3.1, dobiva se slika 3.33. Greške na ovoj slici pojavljuju se u područjima s oštrim rubovima. Ona je, međutim, vrlo mala i vizualno teško primjetna.

M/N = 0.621094



Slika 3.33 Rekonstruirana slika za 62.5% uzetih uzoraka

Razlika između početne i rekonstruirane slike prikazana je slici 3.34. Pojava relativno velikih grešaka na rubovima odlično se vidi na tom prikazu. Te greške su ipak vizualno teško primjetne.



Slika 3.34 Razlika između početne i rekonstruirane slike

Korištenjem slučajne matrice ϕ s vrijednostima raspodijeljenim prema Gaussovoj razdiobi za sličan omjer K/N i sličan postotak uzetih uzoraka te istu veličinu bloka za analizu dobiva se slika 3.35. Iako je rekonstrukcija i u tom slučajno vrlo dobra, korištenjem KLT mjerne matrice dobiva se vizualno kvalitetnija rekonstrukcija slike.



Slika 3.35 Rekonstruirana slika kod korištenja slučajne matrice

3.4.2.2 Diskretna valićna transformacija i KLT mjerna matrica

U ovom poglavlju provest će se isti postupak nad slikom 3.1 kao i u prethodnom poglavlju, ali kao matrica transformacije koristit će se DWT matrica. Analiza će se provesti nad cijelom slikom i nad njenim blokovima.

3.4.2.2.1 Obrada slike po blokovima

U 3.2 se došlo do zaključka kako valićna transformacija daje bolje rezultate kod obrade cijele slike nego kod obrade njenih blokova. Slika 3.36 prikazuje rijetki prikaz početne slike pri čemu ona ima 45.10% uzoraka u valićnoj domeni većih od nule. Ukoliko se sačuva manji postotak uzoraka, vidljive su greške u slici koje su posljedica Haarovog valića koji se koristi pri obradi. Greške su još uvijek vidljive, ali ne u velikoj mjeri.

Sparse slika, K/N = 0.451015

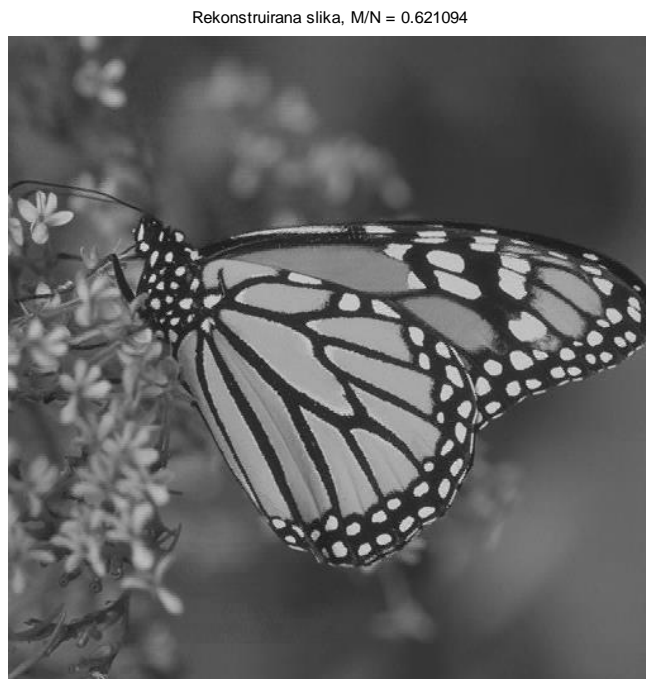


Slika 3.36 Rijetki prikaz početne slike za 45.10% nenul uzoraka

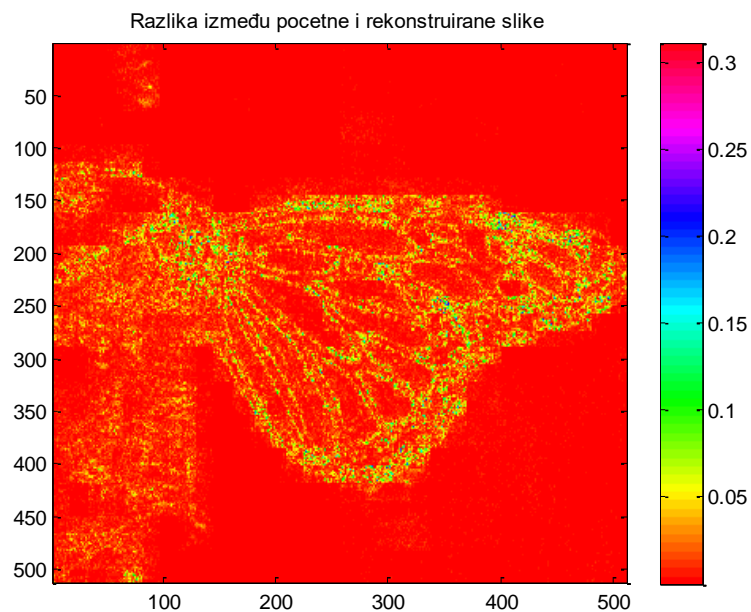
Ukoliko se ta slika provede kroz postupak sažimajućeg očitavanja pri čemu je mjerna matrica dobivena KLT matrica dobivena na temelju srednje vrijednosti uzoraka u blokovima, dobiva se slika 3.37.

Rekonstrukcija je rađena na temelju istog postotka uzetih uzoraka kao kod analize rekonstrukcije ostalih transformacija. Iako je u ovom slučaju postotak sačuvanih uzoraka znatno viši pa je omjer uzetih uzoraka i sačuvanih nenul koeficijenata veći nego kod ostalih

transformacija, rekonstruirana slika je vrlo dobre kvalitete. Pogreška u rekonstrukciji je velika u blokovima koji sadrže oštre rubove (slika 3.38).



Slika 3.37 Rekonstrukcija početne slike za slučaj korištenja KLT matrice kao mjerne matrice



Slika 3.38 Pogreška pri rekonstrukciji

Greška u ovom slučaju je manja nego u 3.2.1 (slika 3.15). Dakle, KLT mjerna matrica i kod DWT po blokovima daje bolje rezultate nego slučajna matrica. Koliko je to poboljšanje veliko analizirano je u poglavlju 3.4.3.

3.4.2.2 Obrada slike kao cjeline

U ovom slučaju mogu se očekivati bolji rezultati pri rekonstrukciji nego u prethodnom poglavlju prema zaključcima donesenim u 3.2. Obrada će se raditi nad istom slikom, ali nad njom kao cjelinom. KLT mjerna matrica će se odrediti na temelju cijele slike prema postupku opisanom u 3.4.2.1. Za obradu se koristio valić $db4^{18}$. On daje bolje rezultate nego haarov valić, ali se ne može koristiti nad blokovima slike zbog njihovih malih dimenzija.

Rijetki prikaz slike, K/N = 0.354221



Slika 3.39 Rijetki prikaz slike za 35.42% nenul uzoraka

Slika 3.39 predstavlja rijetki prikaz slike za 35.42% uzoraka većih od nule. Kvaliteta slike ostala je očuvana i ne vide se greške kao na slici 3.36 kod koje je ostao sačuvan približno jednaki broj uzoraka.

Slika 3.40 prikazuje rekonstrukciju nakon sažimajućeg očitavanja. Dobivena je slika vrlo visoke kvalitete u usporedbi s rezultatima dobivenim drugim transformacijama za isti broj sačuvanih i uzetih uzoraka.

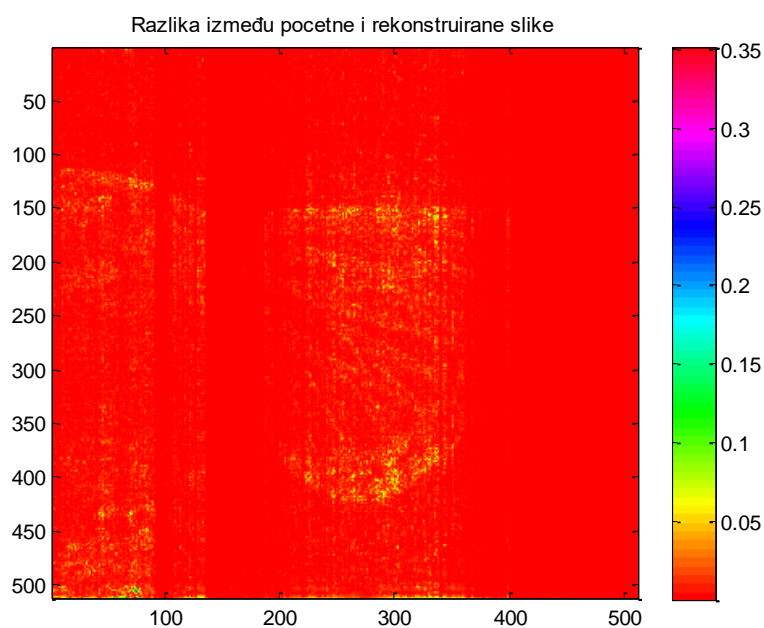
¹⁸ Detaljnije o valiću na: <http://wavelets.pybytes.com/wavelet/db4/>

Rekonstruirana slika, M/N = 0.621094



Slika 3.40 Rekonstruirana slika kod obrade cijele slike i pri korištenju KLT mjerne matrice

Kvaliteta rekonstrukcije ove slike je mnogo veća nego što je to slučaj kod slike 3.17 pri jednakom broju uzetih uzoraka. To je posebno vidljivo na slici 3.41. Ukoliko se ona uspoređi sa slikom 3.18, jasno je vidljivo poboljšanje u točnosti rekonstrukcije. Može se zaključiti kako je ovakva mjerna matrica vrlo pogodna za primjenu kod sažimajućeg očitavanja pri korištenju valične transformacije.



Slika 3.41 Pogreška rekonstrukcije kod 62.11% uzetih uzoraka

3.4.3 Usporedba performansi pri korištenju različitih mjernih matrica

Kako se točnost transformacije ne bi temeljila samo na vizualnim procjenama, u nastavku će se napraviti usporedba srednje apsolutne pogreške, vremena izvođenja algoritma, PSNR vrijednosti i vrijednosti GMSD parametra za bliske vrijednosti nenul uzoraka u transformaciji rijetkog prikaza slike te za bliske vrijednosti uzetih uzoraka M .

Tablica 3.1 Usporedba obilježja i performansi pojedinih transformacija i korištenih mjernih matrica

Transformacija	Diskretna kosinusna transformacija nad blokovima		Diskretna valična transformacija nad blokovima		Diskretna valična transformacija nad cijelom slikom	
	Slučajna	KLT	Slučajna	KLT	Slučajna	KLT
K/N	0.3516	0.3516	0.4510	0.4510	0.3546	0.3542
M/N	0.6211	0.6211	0.6211	0.6211	0.6211	0.6211
MAE ¹⁹	0.0132	0.0077	0.0168	0.0115	0.0144	0.0061
Vrijeme izvođenja ²⁰ (s)	161.38	173.32	163.10	157.82	229.61	266.93
GMSD ²¹ ($\cdot 10^{-6}$)	4.1042	0.3800	7.5998	0.7087	3.5396	0.8291
PSNR ²² (dB)	33.8918	36.9501	30.3053	33.8342	33.3854	40.6495

¹⁹ engl. *Mean Absolute Error*, srednja kvadratna pogreška, računata između početne (*non-sparse*) i rekonstruirane slike

²⁰ u vrijeme izvođenja ulaze vrijeme uzimanja uzoraka i vrijeme rekonstrukcije

²¹ engl. *Gradient Magnitude Similarity Deviation*, mjera za perceptivnu kvalitetu slike, kod za izračun javno dostupan na: <http://www4.comp.polyu.edu.hk/~cslzhang/IQA/GMSD/GMSD.htm>

²² engl. *Peak Signal-to-Noise Ratio*, detaljnije na: <http://www.ni.com/white-paper/13306/en/>

Diskretna valićna transformacija nad blokovima zahtijeva nešto veći postotak sačuvanih uzoraka u transformacijskoj domeni kako bi kvaliteta slike s rijetkim svojstvima bila usporediva s kvalitetom rijetke reprezentacije slike kod drugih transformacija.

Usporedba se napravila za diskretnu kosinusnu i diskretnu valićnu transformaciju (tablica 3.1). Kod transformacija nad blokovima, veličina bloka je 16 x 16 piksela.

Na temelju dobivenih rezultata može se donijeti nekoliko zaključaka.

Transformacija nad cijelom slikom čini algoritam vremenski znatno zahtjevnijim, i to čak za preko 100 sekundi. Do toga dolazi zbog znatno većih dimenzija matrica koje se koriste pri sažimajućem očitavanju pa su i množenja koja se izvode zahtjevnija, kao i rekonstrukcija. Također se može uočiti da odabir mjerne matrice ne utječe značajno na vrijeme izvođenja. Ovaj parametar nije u potpunosti objektivna zbog ovisnosti o opterećenosti procesora, ali njegov red veličine je dovoljan za donošenje određenih zaključaka.

Za odabrane omjere nenul elemenata u rijetkom prikazu slike i broja uzetih uzoraka, srednja apsolutna pogreška je najveća kod diskretne valićne transformacije po blokovima. Kod korištenja slučajne matrice red srednje apsolutne pogreške je kod svih transformacija jednak. Također, pri korištenju KLT mjerne matrice dobiva se znatno smanjenje ovog parametra. Do istog zaključka dolazi se analizom PSNR-a. Najveće poboljšanje u kvaliteti koje donosi korištenje KLT mjerne matrice umjesto slučajne je kod DWT transformacije nad slikom.

Analiza slike valićnom transformacijom po blokovima zahtijeva nešto veći postotak sačuvanih uzoraka različitih od nule u transformacijskoj domeni slike. Budući da je omjer uzetih uzoraka i nenul uzoraka kod te transformacije manji nego kod ostalih, ne iznenađuju nešto lošiji rezultati. Ipak, gubitak kvalitete slike nije značajan.

GMSD parametar [12] opisuje perceptivnu kvalitetu slike. Njegova definicija i značajke su detaljnije opisani u 3.5. U nekim slučajevima MAE i PSNR vrijednosti nisu razmjerne kvaliteti rekonstruirane slike. Primjerice, iako DWT nad blokovima i uz korištenje KLT mjerne matrice daje sličnu MAE kao DCT uz korištenje slučajne matrice, prema RMSD parametru se može zaključiti da je perceptivno ipak bolja slika uz obradu DWT nad blokovima. To se može potvrditi i vizualnom analizom. Te dvije rekonstrukcije prikazane su usporedno na slici 3.42. Kod DCT transformacije vizualno se mogu uočiti blokovi s većom pogreškom rekonstrukcije. To su prije svega dijelovi slike s oštrim rubovima (krilo leptira) koji su kod DWT rekonstruirani mnogo točnije.



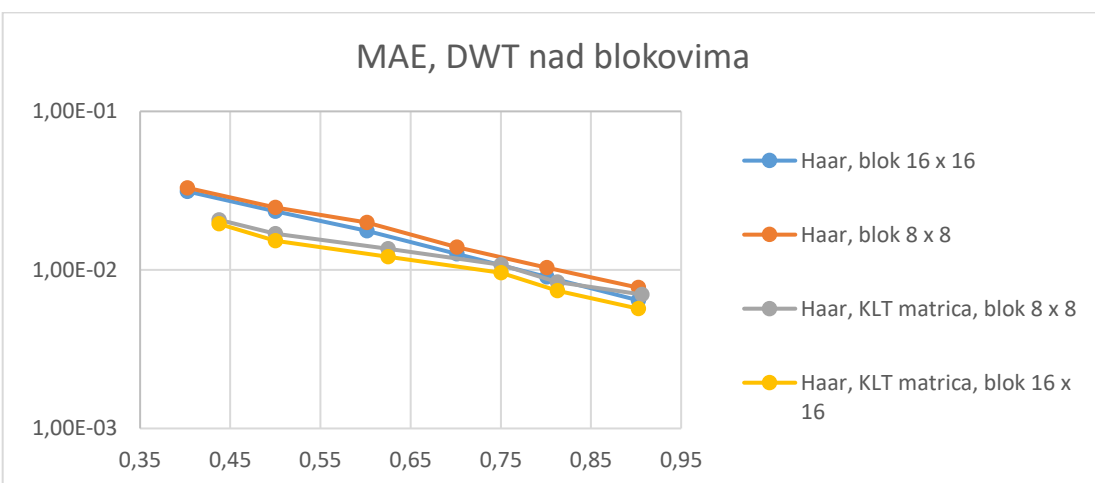
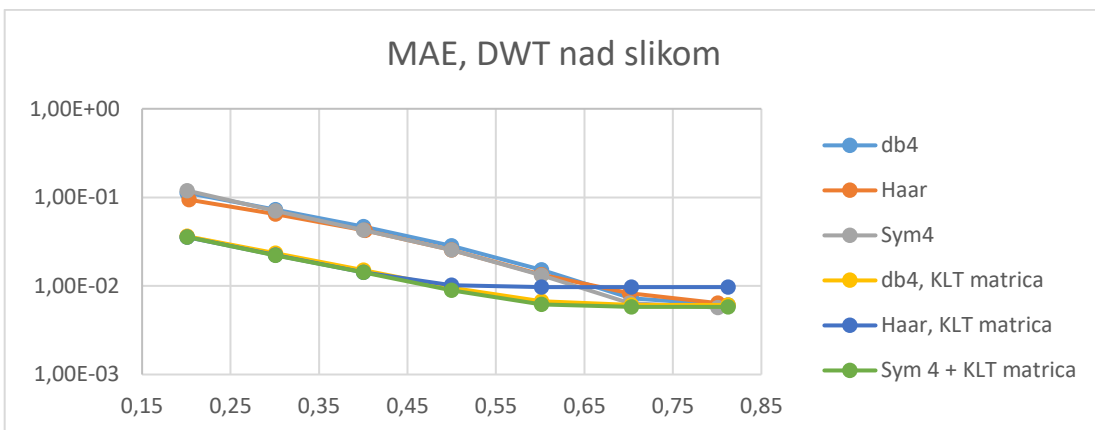
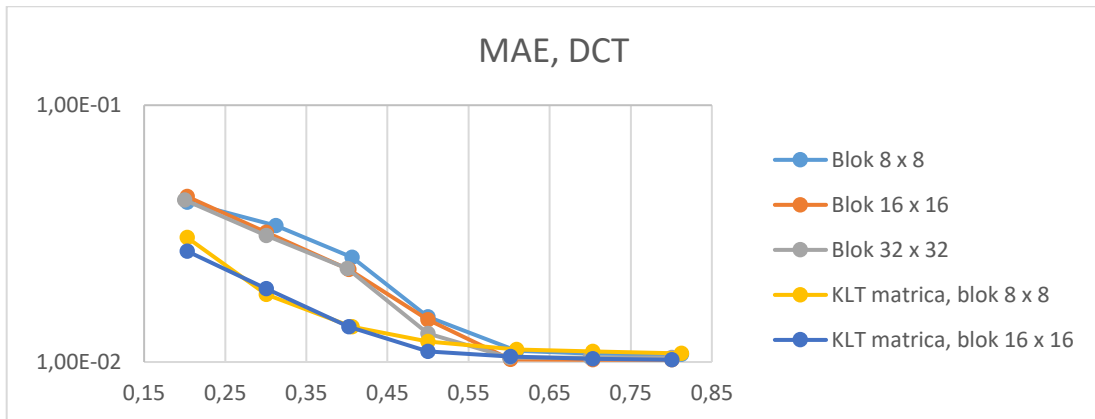
Slika 3.42 Rekonstrukcija kod **a)** DWT po blokovima uz KLT mjernu matricu, **b)** DCT uz slučajnu mjernu matricu

Daleko najbolji rezultat daje DWT s korištenjem KLT mjerne matrice, što potvrđuju svi parametri. Jedini nedostatak ove metode je izrazito dugačko vrijeme izračuna. Dodatna analiza performansi za različit postotak uzetih uzoraka analizirao se u 3.5.

3.5 Usporedba učinkovitosti rekonstrukcije transformacija

Nakon ilustracije utjecaja algoritma sažimajućeg očitavanja kod primjene različitih transformacija, one će se usporediti te će se analizirati učinkovitost pojedine transformacije.

Grafikon 3.1 Usporedba MAE kod a) DCT, b) DWT nad slikom. c) DWT nad blokovima



Prvi parametar koji će se promatrati je srednja apsolutna pogreška. Srednja apsolutna pogreška se računala relativno na početnu sliku (slika 3.1). Zbog toga ona kod DCT i DWT nad slikom teži prema vrijednosti MAE rijetkog prikaza slike u odnosu na početnu sliku. Os ordinata na grafikonima je u logaritamskom mjerilu.

Pojedine transformacije su zahtijevale različit broj uzoraka u transformacijskoj domeni različit od nule kako bi se dobila zadovoljavajuća kvaliteta slike. Kod DCT, 20% uzoraka u transformacijskoj domeni je različito od nule, kod DWT nad slikom 27%, a kod DWT nad blokovima 45%. Zbog visokog postotka sačuvanih uzoraka u transformacijskoj domeni kod DWT nad blokovima, minimalni omjer M/N je nešto viši nego kod ostalih transformacija i iznosi 0.4.

Kod svih transformacija se može uočiti kako je srednja apsolutna pogreška pri korištenju KLT mjerne matrice manja za svaki M do točke konvergencije kad se grafovi spajaju. Također, kod transformacija po blokovima se može uočiti kako blok dimenzija 16×16 daje manju srednju apsolutnu pogrešku nego blok 8×8 . Kod DCT nad blokom dimenzija 32×32 srednja apsolutna pogreška još manja nego kod bloka 16×16 . Dakle, što je blok veći, srednja apsolutna pogreška je manja.

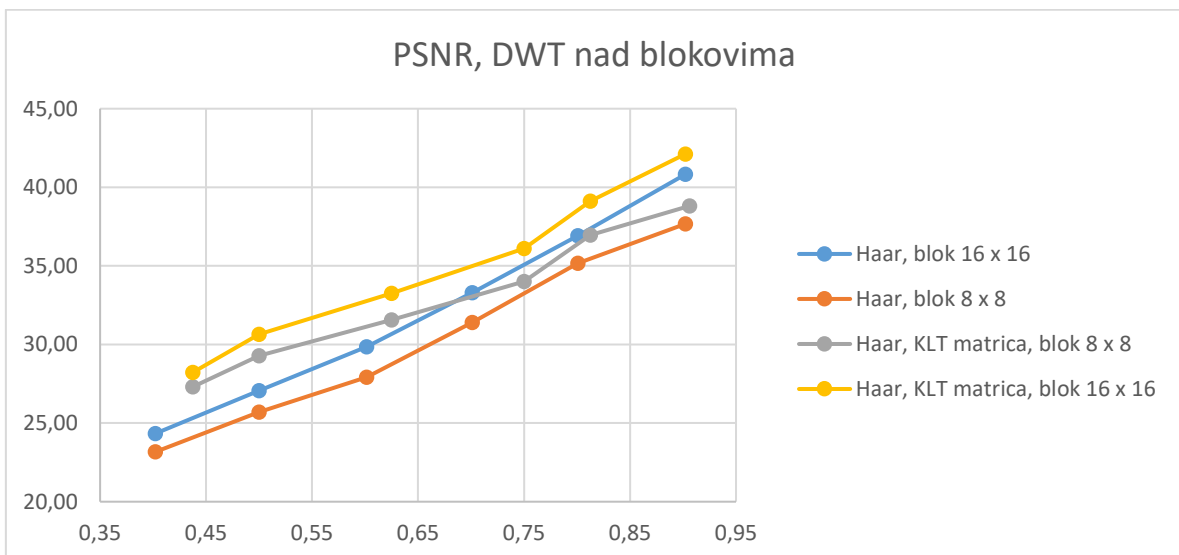
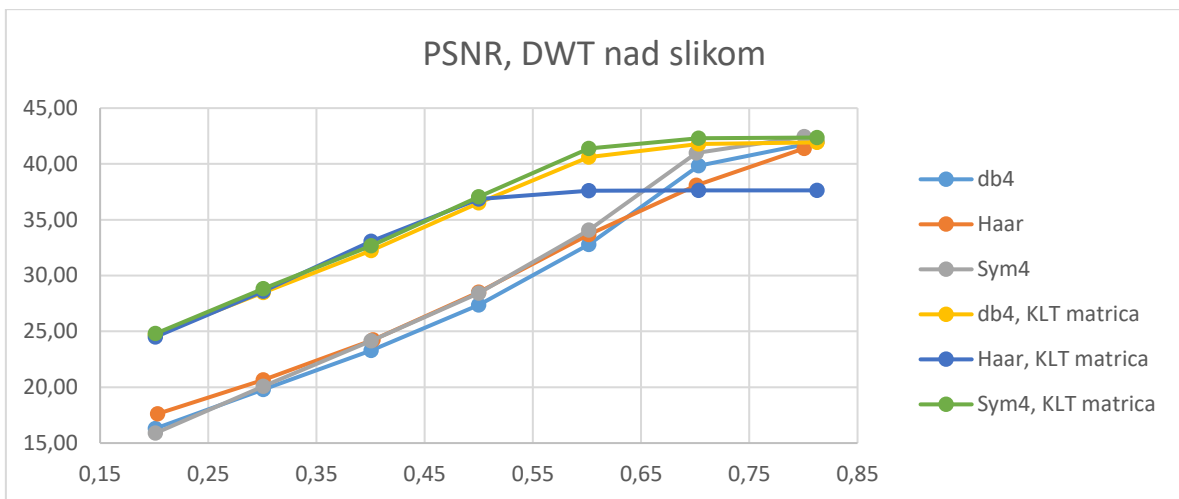
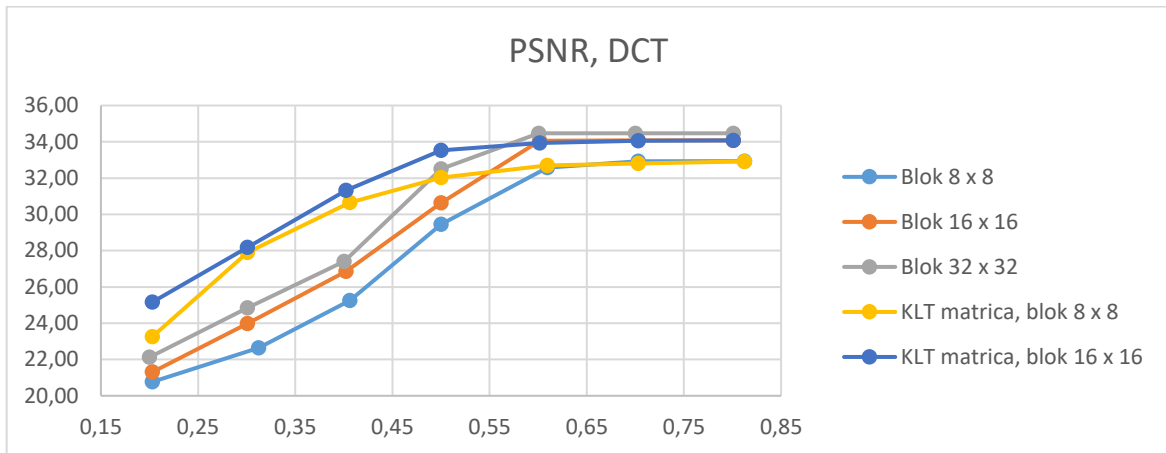
Što se tiče različitih valića kod DWT, Haarov valić se nije pokazao pogodnim za ovu svrhu i s njime se ostvaruje znatno veća greška nego s ostalim valićima. Kod DWT nad blokovima bilo je moguće koristiti samo Haarov valić jer se funkcija skale i valićna funkcija višeg reda ne mogu koristiti na tako malim dimenzijama signala slike.

Slijedeći parametar koji će se razmotriti je PSNR. On je također računat u odnosu na početnu sliku, kao i MAE. U prikazu na grafikonu 3.2 obje osi su u linearnom mjerilu.

Ponovno se može uočiti kako je u slučaju korištenja KLT mjerne matrice PSNR viši za svaki M do točke konvergencije. U ovom slučaju je također uočljivo da je kod analize većeg bloka slike PSNR viši. Haarov valić kod DWT nad slikom se i u ovom slučaju ističe kao najgori izbor u odnosu na ostale valiće. Kod korištenja slučajne matrice, ipak, ne daje tako loši rezultat, ali je rezultat perceptivno loš.

Pojedine transformacije konvergiraju ka različitim vrijednostima zbog različitog broja zadržanih uzoraka različitih od nule u transformacijskoj domeni.

Grafikon 3.2 Usporedba PSNR kod a) DCT, b) DWT nad slikom. c) DWT nad blokovima



Slijedeći parametar koji će se analizirati je GMSD²³. Radi se o parametru koji iskazuje perceptivnu kvalitetu slike. U nekim slučajevima MAE i PSNR daju dobre vrijednosti u usporedbi s ostalim transformacijama, ali je slika perceptivno vrlo loše kvalitete (primjer dan u 3.4.3). Zbog toga je razvijen veći broj parametara koji brojčano iskazuju perceptivnu kvalitetu slike kako bi se izbjegla potreba za time da se traže ispitanici koji će raditi taj posao. Ovaj parametar se računa na temelju gradijenta slike koji je osjetljiv na distorzije u slici [12]. Kod za izračun ovog parametra je javno dostupan²⁴.

Za dvije iste slike GMSD ima vrijednost 0, dok je njegova najveća vrijednost 1. Budući da su slike koje se uspoređuju vrlo slične i razlikuju se samo zbog pogreške u rekonstrukciji, GMSD u ovom razmatranju ima vrlo malu vrijednost koja konvergira vrijednosti tog parametra kod usporedbe početne slike i njene rijetke reprezentacije kod pojedine transformacije.

Rezultati dobiveni analizom iznosa GMSD parametra potvrđuju zaključke donesene kod analize srednje apsolutne pogreške i PSNR. KLT mjerna matrica za svaki omjer M/N daje bolje rezultate u odnosu na slučajnu matricu. Kod DWT nad slikom može se uočiti kako Haarov valić daje najgore rezultate kod korištenja obje mjerne matrice. Empirijski je ustanovljeno da je perceptivna kvaliteta slike zadovoljavajuća kad vrijednost GMSD parametra dosegne vrijednost blisku $1 \cdot 10^{-6}$. Os ordinata kod ovih grafova je prikazana u logaritamskom mjerilu.

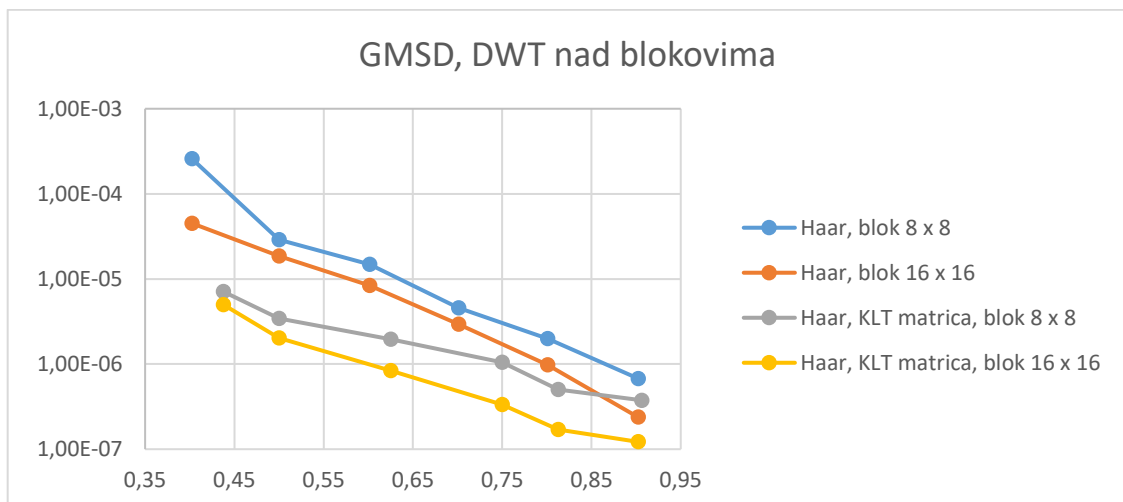
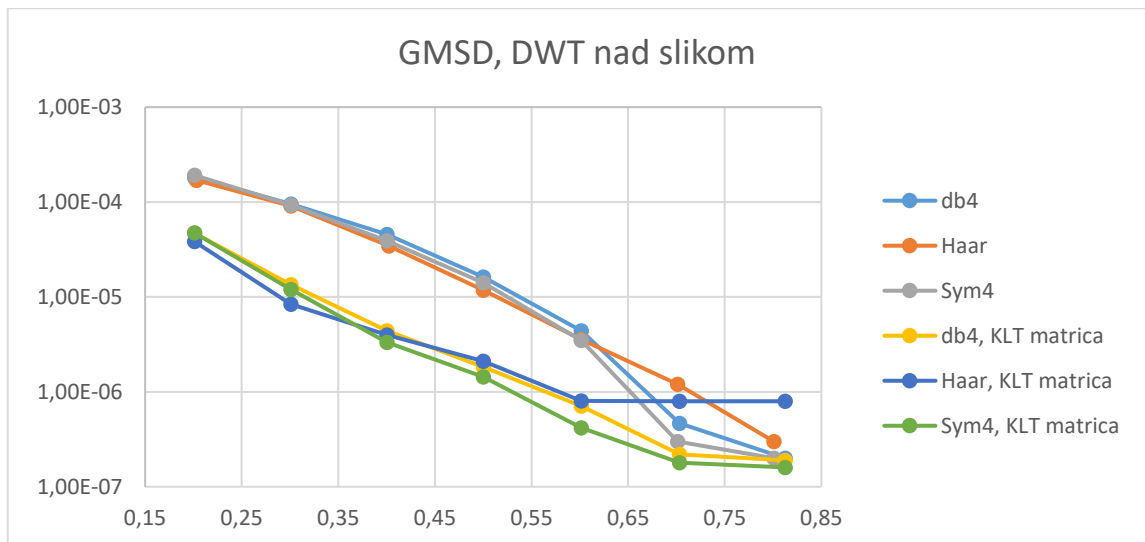
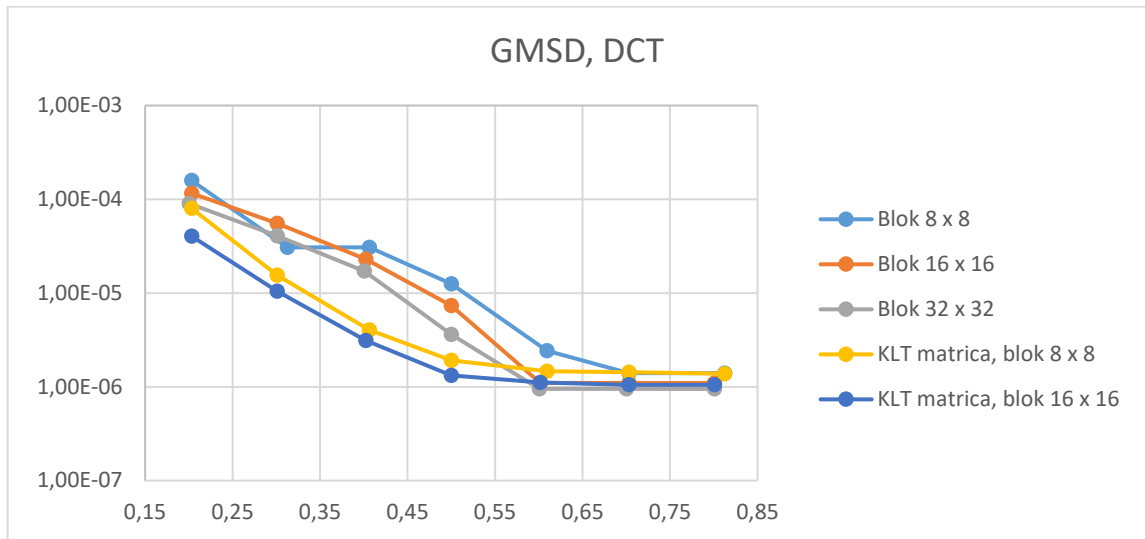
I kod analize ovog parametra može se uočiti da algoritam kod obrade većih blokova daje bolje rezultate. To je posebno uočljivo kod DWT nad blokovima.

Konačno, analiziralo se vrijeme izvođenja algoritma kod pojedine transformacije. U vrijeme izvođenja je uračunato vrijeme uzimanja uzoraka i vrijeme rekonstrukcije. Za pojedine transformacije se usporedba može napraviti pomoću grafikona 3.4.

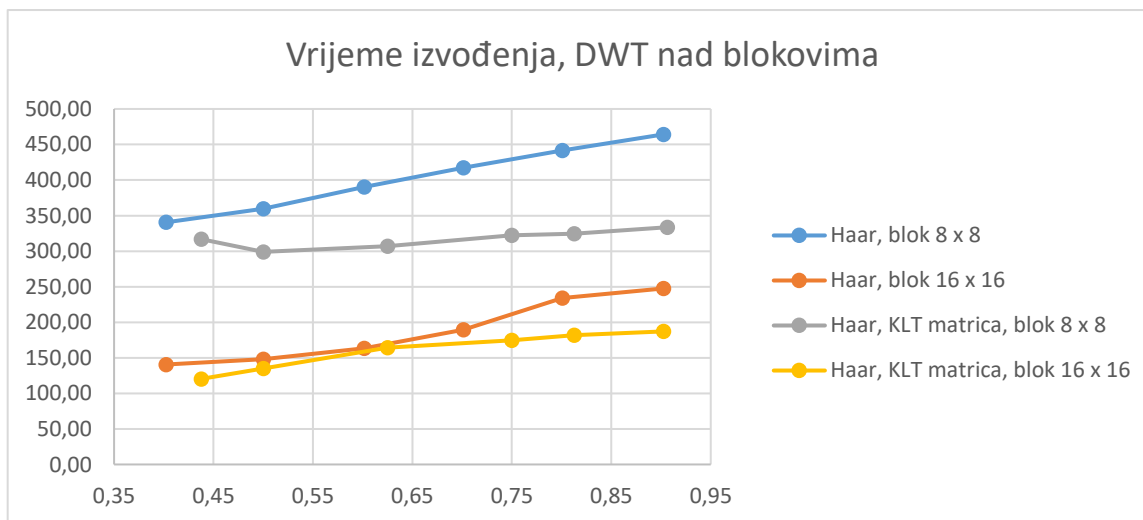
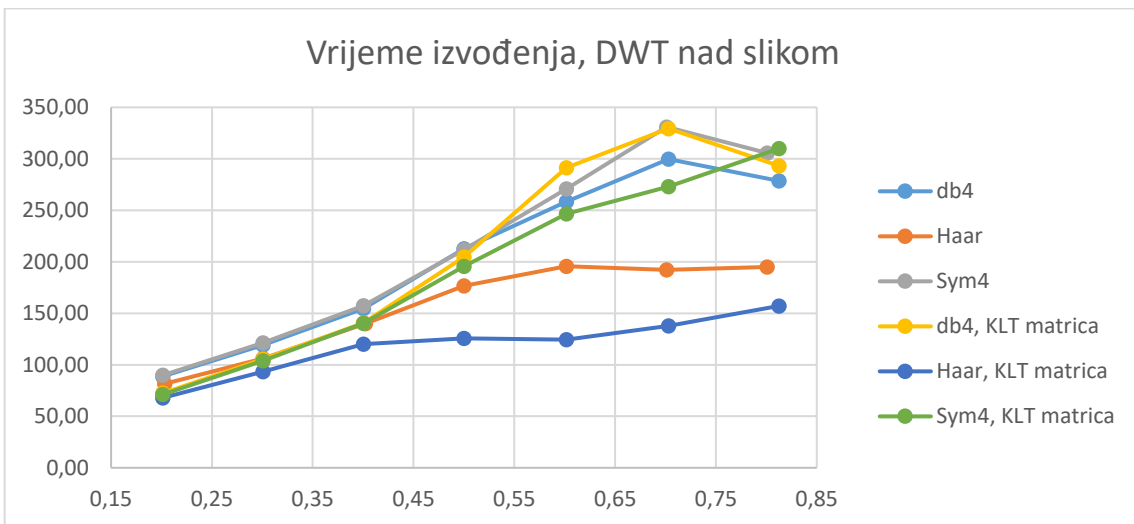
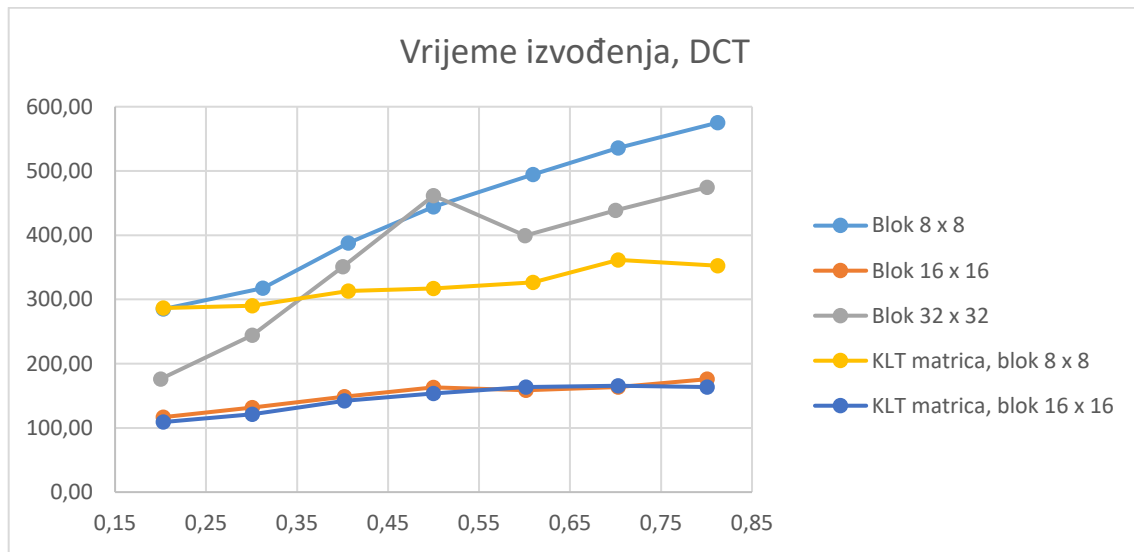
²³ engl. Gradient Magnitude Similarity Deviation

²⁴ Kod dostupan na: <http://www4.comp.polyu.edu.hk/~cslzhang/IQA/GMSD/GMSD.htm>

Grafikon 3.3 Usporedba GMSD kod a) DCT, b) DWT nad slikom. c) DWT nad blokovima



Grafikon 3.4 Usporedba vremena izvođenja algoritma sažimajućeg očitavanja kod a) DCT, b) DWT nad slikom. c) DWT nad blokovima



Zaključci doneseni na temelju grafikona 3.1, 3.2 i 3.3 ukazuju na to da su rezultati rekonstrukcije to kvalitetniji što je veći blok koji se dovodi na ulaz kod sažimajućeg očitavanja, da KLT matrica kod svih transformacija kao mjerna matrica daje bolje rezultate te da je Haarov valić nepogodan za korištenje kod DWT nad cijelom slikom.

Vrijeme izvođenja je važan parametar za potencijalnu primjenu algoritma. Analizom dobivenih rezultata mogu se donijeti slijedeći zaključci: blok 16 x 16 daje najbolje rezultate što se tiče vremena izvođenja. Blok dimenzija 32 x 32 piksela produljuje vrijeme izvođenja algoritma zbog toga što je signal u tom slučaju već poprilično velikih dimenzija pa i rekonstrukcija traje dulje. Kod bloka dimenzija 8 x 8 piksela rekonstrukcija traje kratko, ali je broj blokova velik zbog čega je cjelokupno vrijeme rekonstrukcije dugačko.

Korištena mjerna matrica ne utječe znatno na vrijeme izvođenja algoritma kod DCT transformacije, dok kod DWT transformacije u većini slučajeva KLT mjerna matrica daje nešto bolje rezultate. Jedini slučaj kad to nije tako je kod korištenja db4 valića kod DWT nad cijelom slikom: u tom slučaju rekonstrukcija traje dulje kad se koristi KLT matrica.

Iako se haarov valić kod prethodnih analiza nije činio kao pogodan valić kod DWT nad cijelom slikom, kod analize vremena izvođenja on daje najbolje rezultate. Vrijeme izvođenja kod ostalih valića je, za visoke omjere M/N kod kojih je kvaliteta rekonstruirane slike dovoljno visoka, vrlo dugačko što ne pogoduje primjeni ove transformacije.

Najbolje rezultate u kontekstu potencijalne primjene daju DCT i DWT nad blokovima dimenzija 16 x 16 piksela uz korištenje KLT mjerne matrice.

Dobivene rezultate treba uzimati s rezervom budući da ovise o opterećenosti procesora, ali red veličine trajanja izvođenja algoritma kod pojedine transformacije se u svakom slučaju može uzeti u obzir pri odlučivanju o tome koja transformacija daje najbolje rezultate. Nadalje, potrebno je napomenuti kako su rezultati kod korištenja slučajne matrice dobiveni aritmetičkom sredinom tri mjerenja kako bi se umanjio utjecaj slučajnog procesa kojim ta matrica nastaje.

Zaključak

Nakon kratkog opisa načina rada algoritma sažimajućeg očitavanja na jednodimenzionalnim signalima, ukratko su opisane četiri transformacije slike: diskretna kosinusna transformacija, valićna transformacija, Huang – Hilbertova transformacija te Karhunen – Loève transformacija. Sve je to služilo kao uvod kako bi se uspješno izvelo sažimajuće očitavanje signala slike pri čemu se mijenjala matrica transformacije, ali i mjerna matrica kako bi se proučilo kako pojedina transformacija kod sažimajućeg očitavanja utječe na kvalitetu rekonstrukcije slike.

Ustanovljeno je kako Huang – Hilberova transformacija nije pogodna za korištenje na mjestu matrice transformacije, već bi puno bolje služila u predobradi slike za sažimajuće očitavanje. Također, Karhunen – Loève transformacija je kao rezultat dala vrlo lošu kvalitetu slike pa stoga nije bila analizirana u ulozi matrice transformacije.

S druge strane, DCT i DWT su se pokazale iznimno dobrima u ovoj ulozi. Razmatrana je DCT nad blokovima i DWT nad blokovima te cijelom slikom. Došlo se i do zaključka kako KLT daje vrlo dobre rezultate u ulozi mjerne matrice. Rezultati tih postupaka prikazani su vizualno i grafički.

Usporedbom ovih transformacija može se zaključiti kako transformacija nad blokovima ima veći potencijal za upotrebu od transformacije nad cijelom slikom budući da rekonstrukcija traje mnogo kraće, što je vrlo bitno. Blok dimenzija 16 x 16 piksela pokazao se optimalnim u smislu trajanja rekonstrukcije, ali i njene točnosti. Veći blokovi imaju vremenski zahtjevniju rekonstrukciju budući da se radi o signalima velike duljine, dok su manji blokovi, poput bloka dimenzija 8 x 8 piksela, nepogodni zbog njihove brojnosti, što znatno produljuje vrijeme rekonstrukcije. Odabir valića kod DWT također igra ulogu u vremenu rekonstrukcije signala: ukoliko se koristi Haarov valić, rekonstrukcija je najbrža.

Međutim, još je važnije razmotriti kvalitetu rekonstruirane slike. Slika gubi na kvaliteti već kod postupka kojim se ona prilagođava da bi zadovoljavala svojstvo rijetkosti. DCT i DWT nad slikom omogućuju da se slika prikaže u izrazito rijetkom obliku: dovoljno je zadržati samo 20% uzoraka u transformacijskoj domeni, a da slika značajno ne izgubi na kvaliteti. Kod DWT nad blokovima potrebno je zadržati nešto veći postotak uzoraka, njih oko 45%. Kvaliteta rekonstrukcije će težiti vrijednosti mjerenog parametra za koju se rijetki oblik slike razlikuje od početne slike.

Razmatranjem srednje apsolutne pogreške, PSNR-a i GMSD-a ustanovljeno je kako najbolje rezultate kod DCT daje blok što većih dimenzija, a KLT mjerna matrica za svaki postotak uzetih uzoraka daje bolju kvalitetu rekonstruirane slike. Kod DWT nad slikom, zaključeno je da Haarov valić daje sliku najmanje kvalitete i nije pogodan za tu svrhu, iako ima najkraće vrijeme rekonstrukcije. U smislu kvalitete puno su bolji odabir drugi valići, poput db4 i sym4. Pri razmatranju DWT nad blokovima također je zaključeno da veći blok daje bolje rezultate. U tom slučaju mogao se koristiti samo Haarov valić zbog činjenice da su njegova valićna funkcija i funkcija skale kratke pa se jedino one mogu koristiti nad tako kratkim signalima i rastaviti promatrani signal u željeni broj stupnjeva. I kod DWT, kod oba razmatrana slučaja, uočeno je da KLT mjerna matrica daje bolje rezultate od slučajne matrice.

Iako se KLT mjerna matrica na prvi pogled čini vrlo nespretnom za korištenje, kreiranjem KLT matrice na temelju srednje vrijednosti bloka slike dobiva se mjerna matrica koja se može koristiti nad svakim blokom slike, ali i nad slikama koje se od početne slike razlikuju samo po položaju nekih elemenata (primjerice, slijedne slike u filmu koje se razlikuju samo po pokretu nekih njihovih dijelova).

Konačno, svaka od ovih transformacija ima zaseban utjecaj na signal slike kod sažimajućeg očitavanja. Iako DWT zahtijeva veći postotak sačuvanih elemenata početne slike, nije nužno uzimati mnogo veći broj uzoraka nego kod DCT. Dapače, za uzetih 60% uzoraka početnog signala vrijednosti parametra GMSD koji izražava perceptivnu kvalitetu rekonstruirane slike je bolja kod DWT nad blokovima nego kod DCT. To je otprilike postotak uzoraka kojim se dobiva zadovoljavajuća kvaliteta rekonstruirane slike. Iako kompresija nije jako velika, ušteda od 40% informacija u procesu otipkavanja u složenim sustavima koji primaju mnogo informacija je značajan rezultat.

Može se zaključiti da će, uz buduća istraživanja i optimiranje algoritma, sažimajuće očitavanje znatno doprinijeti načinu rada sustava za akviziciju slike. Razvojem senzora prilagođenih ovom algoritmu, a koji je već u tijeku, izmijenit će se način na koji promatramo fotografiranje i kvalitetu dobivene slike te koliki memorijski prostor će ona zauzimati.

Literatura

- [1] E. J. Candès i M. B. Wakin, »An Introduction to Compressive Sampling,« *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 21-30, ožujak 2008.
- [2] R. Baraniuk, »Compressive Sensing,« Srpanj 2007. Dostupno na: http://users.isr.ist.utl.pt/~aguiar/CS_notes.pdf. [Datum pristupa: 15. ožujka 2017.].
- [3] J. C. E. Romberg, »l1 MAGIC algoritam,« California Institute of Technology, 2005. Dostupno na: <http://statweb.stanford.edu/~candes/l1magic/>. [Datum pristupa: 23. ožujka 2017.].
- [4] N. N. T. i. R. K. R. Ahmed, »Discrete Cosine Transform,« *IEEE Transactions on Computers*, pp. 90-93, 1974.
- [5] M. p. m. p. G. S. Jančić, »Norme za kompresiju mjernih slika,« FER, 2002. Dostupno na: <http://www.vcl.fer.hr/dtv/jpeg/dct.htm>. [Datum pristupa: 1. travnja 2017.].
- [6] D. Seršić, *Valiči i filtarski slogovi*, Zagreb: Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, 2012.
- [7] L. Chun-Lin, »A Tutorial of the Wavelet Transform,« 23. Veljača 2010. Dostupno na: <http://disp.ee.ntu.edu.tw/tutorial/WaveletTutorial.pdf>. [Datum pristupa: 3. travnja 2017.].
- [8] N. E. Huang i Z. Wu, »A Review on Hilbert-Huang Transform: Method and Its Applications to Geophysical Studies,« American Geophysical Union, 2008.
- [9] R. D. Dony, »Karhunen - Loeve transform,« u *The Transform and Data Compression Handbook*, Boca Raton, CRC Press LLC, 2001, p. Chapter 1..
- [10] S. R. Long, »Applications of HHT in Image Analysis,« u *Hilbert - Huang Transform and Its Applications*, World Scientific, 2005, pp. 289 - 305.
- [11] A. Mishra, F. Thakkar, R. Kher i C. Modi, *ECG Signal Compression using Compressive Sensing and Wavelet Transform*, Foster City, CA, USA: OMICS Group, 2015.
- [12] W. Xue, L. Zhang, X. Mou i A. C. Bovik, »Gradient Magnitude Similarity Deviation: A Highly Efficient Perceptual Image Quality Index,« IEEE, 2014.

- [13] B. Bouchhima, R. Amara i M. T.-H. Alouane, »Design of Optimal Matrices for Compressive Sensing: Application to Environmental Sounds,« u *23rd European Signal Processing Conference* , 2015.
- [14] M. A. Davenport, M. F. Duarte, Y. C. Eldar i G. Kutyniok, »Introduction to Compressed Sensing,« u *Compressed Sensing: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2012, p. Chapter 1.
- [15] E. J. Candes, »Compressive Sampling,« u *International Congress of Mathematicians*, Madrid, Spain, 2006.
- [16] C. Guaragnella, F. Palumbo, T. Politi i A. Manni, »Bidimensional Empirical Mode Decomposition for Multiresolution Image Coding,« 2010.

Sažetak

Analiza učinkovitosti rekonstrukcije različitih transformacija kod sažimajućeg očitavanja u svrhu reprezentacije slike

U sklopu ovog diplomskog rada proučen je način rada sažimajućeg očitavanja te transformacije koje imaju potencijal korištenja u sklopu tog algoritma pri obradi slike. Proučen je utjecaj svake od transformacija na kvalitetu rekonstrukcije slike. Došlo se do zaključka da Huang – Hilbertova transformacija nije pogodna za upotrebu u sklopu ovog algoritma. Nadalje, KLT transformacija daje puno bolje rezultate kao mjerna matrica nego matrica transformacije. Konačno, DCT i DWT se koriste u ulozi matrice transformacije. Zaključeno je da je bolje raditi transformaciju nad blokovima slike nego nad cijelom slikom zbog skraćivanja izvođenja rekonstrukcije slike.

I DCT i DWT imaju svoje prednosti i mane. Kod DCT može se postići prikaz slike za mnogo manji postotak zadržanih uzoraka u njenom rijekom prikazu. S druge strane, kod rekonstrukcije slike DWT ipak daje nešto bolje rezultate. Obrada slike je, bez sumnje, područje u kojem sažimajuće očitavanje ima veliki potencijal poboljšanja trenutno korištenih sustava.

Ključne riječi: sažimajuće očitavanje, diskretna kosinusna transformacija, diskretna valićna transformacija, Karhunen – Loève transformacija, Huang – Hilbertova transformacija, kvaliteta rekonstruirane slike

Abstract

Analysis of Reconstruction Efficiency of Different Transforms for Image Representation Using Compressive Sensing

This thesis includes a study of compressive sensing and various image transforms which have a potential of being used in that algorithm in image processing. Each of four studied transforms has a unique effect on quality of reconstructed image.

A few conclusions were made. Huang - Hilbert transform cannot be used as a transformation matrix in compressive sensing. Furthermore, KLT is more suitable in the role of measurement matrix than transformation matrix. Finally, DCT and DWT are used as transformation matrices. It was also deduced that processing image blocks is more effective than processing image as a whole.

Both DCT and DWT have some good and bad properties. DCT enables higher image sparsity rate (it is sufficient to preserve 20% of coefficients) than DWT. On the other hand, DWT offers better perceptive quality of reconstructed image. Image processing is, without any doubt, area in which compressive sensing has a high potential of improving currently used systems.

Key words: compressive sensing, discrete cosine transform, discrete wavelet transform, Karhunen - Loève transform, Huang - Hilbert transform, quality of reconstructed image

Popis kratica

- BEMD** engl. *Bidimensional Empirical Mode Decomposition*, bidimenzionalna empirijska dekompozicija signala
- DCT** engl. *Discrete cosine transform*, diskretna kosinusna transformacija
- DWT** engl. *Discrete wavelet transform*, diskretna valićna transformacija
- EMD** engl. *Empirical Mode Decomposition*, empirijska dekompozicija signala
- GMSD** engl. *Gradient Magnitude Similarity Deviation*, parametar za usporedbu perceptivne kvalitete slike
- HHT** Huang – Hilbertova transformacija
- HSV** engl. *Hue-Saturation-Value color model*, model boja maksimalnoj zasićenja
- IMF** engl. *Intrinsic Mode Function*, jednostavna svojstvena funkcija
- KLT** Karhunen – Loève transformacija
- MAE** engl. *Mean Absolute Error*, srednja apsolutna pogreška
- PSNR** engl. *Peak Signal-to-Noise Ratio*, omjer vršne vrijednosti signala i efektivne vrijednosti šuma
- RIP** engl. *Restricted Isometry Property*, svojstvo matrice da pri množenju ne mijenja Euklidsku udaljenost između elemenata druge matrice
- SVD** engl. *Singular Value Decomposition*, singularno razlaganje matrice