



Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Dario Bojanjac

**RASPRŠENJE
ELEKTROMAGNETSKOGA VALA NA
ANIZOTROPNIM PLANARNIM I
CILINDRIČNIM STRUKTURAMA**

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2015.



Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Dario Bojanjac

**RASPRŠENJE
ELEKTROMAGNETSKOGA VALA NA
ANIZOTROPNIM PLANARNIM I
CILINDRIČNIM STRUKTURAMA**

DOKTORSKI RAD

Mentor: Prof. dr. sc. Zvonimir Šipuš

Zagreb, 2015.



University of Zagreb

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMPUTING

Dario Bojanjac

**ELECTROMAGNETIC WAVE
SCATTERING ON PLANAR AND
CYLINDRICAL ANISOTROPIC
STRUCTURES**

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Professor Zvonimir Šipuš, PhD

Zagreb, 2015

Doktorski rad izrađen je na Sveučilištu u Zagrebu Fakultetu elektrotehnike i računarstva,
na Zavodu za radiokomunikacije.

Mentor: prof. dr. sc. Zvonimir Šipuš

Doktorski rad ima: 100 stranica

Doktorski rad br.: _____

O mentoru

Zvonimir Šipuš je rođen 12. ožujka 1964. godine u Zagrebu. Diplomirao je i magistrirao na Elektrotehničkom fakultetu u Zagrebu 1988. godine, odnosno 1991. godine, a doktorirao je 1997. godine na Chalmers University of Technology, Göteborg, Švedska. Od prosinca 1988. godine do srpnja 1993. godine bio je zaposlen u Institutu Ruđer Bošković, Zagreb, u Laboratoriju za poluvodiče. Od kolovoza 1993. godine radi na Zavodu za radiokomunikacije, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, gdje je i danas u svojstvu redovitog profesora (od srpnja 2008.). Od rujna 1994. do listopada 1997. nalazio se na znanstvenom usavršavanju na Department of Microwave Technology, Chalmers University of Technology, Göteborg, Švedska, gdje je bio doktorski student. Na istom je sveučilištu u jesen 1999. izabran u zvanje gostujući istraživač (Adjunct Researcher) s obvezom da šest tjedana godišnje pomaže u istraživačkom radu i u poslijediplomskoj nastavi. Tu aktivnost je obavljao do 2005. godine. Od 2006. godine obavlja nastavu i u Europskoj doktorskoj školi iz antena (European School of Antennas). Prof. Šipuš je bio voditelj desetak međunarodnih i domaćih znanstvenih projekata. Autor je ili koautor više od 40 radova objavljenih u znanstvenim časopisima vezanih uz analizu mikrovalnih antena i antenskih nizova, uz numeričke metode u elektromagnetizmu te uz projektiranje i analizu optičkih komponenata i sustava. Dobitnik je državne godišnje nagrade za znanost za 2006. godinu.

About the Supervisor

Zvonimir Šipuš was born in Zagreb, Croatia, in 1964. He received the B.Sc. and M.Sc. degrees in electrical engineering from the University of Zagreb, Croatia, in 1988 and 1991, respectively, and the Ph.D. degree in electrical engineering from Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, in 1997. From 1988 to 1994, he worked at Rudjer Boskovic Institute, Zagreb, Croatia, as Research Assistant, involved in the development of detectors for explosive gases. In 1994, he joined the Antenna Group at Chalmers University of Technology, where he was involved in research projects concerning conformal antennas and soft and hard surfaces. In 1997, he joined the Faculty of Electrical Engineering and Computing, University of Zagreb, where he is now a Professor. From 2008 to 2012 he was the Head of the Department of Wireless Communications. From 1999 to 2005, he was also an Adjunct Researcher at the Department of Electromagnetics, Chalmers University of Technology. Since 2006 he was engaged in teaching in the European Doctoral School of antennas (ESoA). Prof. Šipuš was a principal investigator in more than 10 international and domestic projects. He is the author or co-authored more than 40 papers published in scientific journals. His main research interests include numerical electromagnetics with application to antennas, microwaves, and optical communications. He received the annual national science award in 2006.

Zahvala

Zahvaljujem se trojici mušketira koji su me pratili na putu do doktorata. Prvi mušketir je prof. Juraj Bartolić koji me u jednom periodu svog života, u napadu neke velike slabosti, odlučio zaposliti kao znanstvenog novaka na svom projektu. Drugi mušketir je prof. Robert Nađ s kojim sam dvije godine surađivao na problematici vezanoj uz modeliranje komunikacijskog kanala. Od njega sam naučio puno o različitim životnim i znanstvenim temama te o radu na fakultetu. Treći mušketir je prof. Zvonimir Šipuš, moj mentor s kojim surađujem zadnje tri i pol godine. Kroz razgovor s njim došao sam do problematike koja me zanima i kojom sam se bavio u okviru doktorata. Hvala mu što mi je pokazao put kojim trebam ići i što je imao razumijevanja za moje ideje i probleme. Uz tri mušketira uvijek je u blizini i d'Artagnan. Moj d'Artagnan je prof. Sonja Grgić koja me pratila za vrijeme diplomskog rada, preporučila prof. Bartoliću kao kandidata za posao i cijelo vrijeme mog doktorata bila u blizini. S profesoricom sam uvijek mogao razgovarati o svemu i ona mi je jako puno pomogla u adaptaciji na rad na fakultetu.

Jedan pametan čovjek rekao je da je od konkretnog znanja i projekata koji te okružuju važnija znanstvena okolina u kojoj se nalaziš. Imao sam sreću da sam proteklih 6 godina sjedio u sobi s daleko najkvalitetnijim asistentima na zavodu. U prvo vrijeme za cimere sam imao tri veličine od kojih sam mogao puno naučiti. Od Tomislava sam pokušao pokupiti inženjersku preciznost, radnu etiku i volju za radom. Tomislav je bio najčvršća karika naše sobe baš zato što je uvijek znao što treba napraviti, koji je plan rada i kojim putem ići. Pokušao sam ga slijediti u tome da budem jednako precizan i efikasan, ali ne vjerujem da sam uspio uhvatiti više od 10 % njegovih mogućnosti. Od Marka sam pokušao naučiti predanost poslu, smirenost i jako puno životnih stvari. Marko je osoba s jako puno znanja i interesa i provoditi vrijeme s njim je nevjerojatno ugodno i zabavno. Nakon što su svi koji su mogli otišli Marko je ostao jedini kamen temeljac naše sobe. Treća osoba je Siniša. Kao student ga nisam previše volio jer Siniša jednostavno zna proizvesti najljepše osjećaju u svima, a pogotovo studentima. Kasnije sam shvatio koliko sam ga krivo procijenio. Siniša je čovjek od kojeg sam u svom životu daleko najviše naučio. Riječ je o osobi s milijun interesa, milijardu ideja i trilijun jedinica volje i energije. Siniša može danas proizvesti avion, a sutra se baciti na put na Mjesec. On može danas biti u Firenzi, a sutra se autom zaputiti za London. Da nije bilo Siniše pitanje je što bi bilo od mene danas. Kada god je trebalo poslušati moje gluposti on je bio tu, kada god mi je trebalo lupiti šamar on je bio tu, kada je trebalo nešto naučiti Siniša je znao gdje to piše, kada je trebalo shvatiti što se događa Siniša je to znao objasniti, kada god je trebalo napraviti bilo što Siniša je to znao napraviti. Tim više mi je njegov odlazak teško pao i zapravo nakog njegovog odlaska ništa više nije bilo isto. Izgubio sam duhovnog oca i uzora na poslu, ali se naš odnos još i više produbio njegovim prelaskom na drugo radno mjesto. Vjerujem da ćemo u budućnosti na neki

način znanstveno surađivati. Negdje u isto vrijeme otišao je i Tomislav, riječ razuma i smirenja i tako se u kratkom razdoblju raspala naša soba. Dečki, hvala vam što ste bili najbolji cimeri koje netko može imati. U vama sam imao svu podršku, beskonačne izvore znanja i pomoći. Bili ste razlog za dolazak na posao, davali ste podršku u mojim nastojanjima da vodim paralelni život i bili ste pravi prijatelji u svakom trenutku. Hvala i Tinu koji je došao na Tomislavovo mjesto, ali ne na dovoljno dugo. Tin je osoba koja zaslužuje moje beskonačno divljenje jer je uspio u roku dvije, tri godine uskočiti u novo područje i u njemu puno napraviti. Od njega sam jako puno naučio, ponajprije o načinu gledanja na problem, o tome što je bitno, a što nebitno i o tome što je to zapravo znanost. Hvala i Mladenu što uvijek ima prave riječi u pravom trenutku i što ima jako puno zaraznog entuzijazma koji je onda prelazio i na mene.

Hvala Dubravku Babiću što mi je proširio vidike u primjenama matematike na elektrotehničke i ostale probleme. Kod Dubravka mi se sviđa što postavlja ozbiljna i teška pitanja iz kojih je moguće naučiti nove stvari i krenuti u nekom novom smjeru. Hvala mu i na puno znanstvenih savjeta koje sam iskoristio na više mjesta i koji su mi pomogli da se izvučem iz problema u koje sam upao. Hvala Damiru Muhi, znanstveno najjačem asistentu na Zavodu. Muha je čovjek s nevjerojatno velikim znanjem o elektronici i s hrpom ostalih praktičnih znanja. Razgovori s njim su uvijek korisni jer je moguće saznati jako puno praktičnog i ostalog znanja u vrlo kratkom vremenu. Hvala Davoru koji je bio jako ugodan i zabavan cimer za vrijeme boravka u Ann Arboru. Skratio je duge zimske dane, praznike i ostalo. Radili smo najbolji burek, kuhali fiš, igrali šah, pekli meso i uživali. Ne vjerujem da će se tako nešto više ikada ponoviti.

Sve što sam naučio u životu naučio sam iz dobrih knjiga i od odličnih profesora. Najviše sam zahvalan prof. Mariju Pavčeviću s kojim sam uvijek mogao raspravljati o znanstvenim i svim ostalim temama. Naučio me što je to zapravo rad na fakultetu, kako sagledati znanstvene probleme, kako analitički pristupiti problemu i kako se nositi s radom na fakultetu. Hvala profesorima s PMF-a koji su mi pomogli adaptirati se na matematiku i od kojih sam jako puno naučio. Od prof. Luke Grubišića naučio sam kako primijeniti matematiku na inženjerske probleme, naučio sam jako puno o numeričkoj matematici i metodama rješavanja problema, a od prof. Nenada Antonića naučio sam jako puno o parcijalnim diferencijalnim jednačbama i svime što je s njima povezano. Na njegovim kolegijima naučio sam daleko najviše na fakultetu. To je bio prijelomni trenutak u kojem sam shvatio da želim naučiti više matematike i da je želim što više koristiti u svom znanstvenom radu.

Very special thanks to prof. John Schotland who introduced me to applied functional analysis and theoretical scattering theory. I learned a lot from him about electromagnetic scattering which has helped me in my recent work.

Hvala mojoj srednjoškolskoj razrednici, prof. Tatjani Gušić koja je nakon mjesec dana prvog razreda došla do mene i rekla, ti mali možeš biti barem magistar, ali se previše zaje.... Evo, razrednice, nadam se da sam se sada iskupio. Puno sam naučio i od prof. Darka Štimca,

razrednika u osnovnoj školi, a kasnije i ravnatelja u školi u kojoj sam radio. On me naučio kako se postaviti u poslovnom svijetu, na što treba posebno paziti i kako imati čvrst stav o većini stvari bez da se poklekne pred sitnim izazovima. Zahvalio bih se i Zlatku Močilaru, dugogodišnjem nogometnom treneru koji me o životu naučio najviše od svih ljudi koje sam upoznao. Svako njegovo psovanje učinilo je od mene boljeg čovjeka. Pripremio me za sva sranja koja su me kasnije u životu dočekala.

Hvala mojim prijateljima Alenu, Branislavu, Marwanu, Mariju i Ivanu što su uvijek imali razumijevanja za moje probleme i što su tolerirali moja česta izbivanja, izbjegavanje druženja i obaveza i što su mi pomogli da kroz sve prođem jednostavnije i ljepše. Najviše hvala Marwanu što je na svako moje zanemarivanje odgovorio s više angažmana i truda.

Hvala mojim roditeljima što su me trpjeli 29 godina. Uvijek sam imao puno pitanja, ideja i kojekakvih mušica koje je trebalo istrpjeti. Oni su to nekako uspjeli, a još smo si ostali i u dobrim odnosima. Hvala sestri što me se svako toliko sjeti s molbom ej buraz daj mi uplati 100 kn na račun. Hvala joj što je otišla u Ameriku i što joj više ne moram držati instrukcije. To je jako pozitivno djelovalo na moje zdravlje. Dok je u Americi često joj poželim održati instrukcije, ali onda malo razmislim i prođe me. Hvala joj što je donijela odbojku u našu kuću i što smo zbog nje krenuli u projekt OK Fortis.

Hvala mojoj Herminici što je izdržala sve gluposti koje sam joj priredio i što je imala razumijevanja za sve moje migrene, sva moja depresivna ponašanja i sve moje sumnje u vezi uspješnog dovršetka doktorata, uspješnog nastavka života (što ako me zgazi auto) i svega ostalog. Hvala joj što mi je zadnjih nekoliko mjeseci jako puno pomogla oko završetka doktorata i što je imala razumijevanja za to da imam puno posla kojeg moram završiti. Jako puno mi je pomoglo njeno razumijevanje, njena podrška i njena ljubav. Bez toga teško da bih doktorat uspješno priveo kraju. Hvala joj i što mi je olakšala paralelno studiranje matematike i doktorat na FER-u i što je sve te teške trenutke činila veselijima i lakšima.

Posvećujem doktorat mojim djedovima Nikoli i Milanu zato što su me naučili u kojim situacijama treba koristiti pilu za željezo, a u kojima pilu za drvo. Hvala im na prekrasnom djetinjstvu u kojem smo se penjali na bandere, vozili autobus, uvlačili struju u fušu, farbali, krećili, pravili vino, kupili šljive, brali jabuke i radili sve one stvari koje gradskom djetetu nisu tako bliske. Doktorat posvećujem i mojim bakama Mariji i Alojziji zato što su me naučile mijesiti tijesto, praviti kruh, razvlačiti štrudlu i kuhati. Od njih sam naučio 99 % praktičnih znanja koja sam u životu naučio.

Sažetak

U radu se analizira raspršenje elektromagnetskih valova na tankim zakrivljenim dielektričnim objektima te planarnim i cilindričnim anizotropnim strukturama. Kod tankih zakrivljenih dielektričnih objekata provedena je analiza koja omogućuje redukciju modela raspršenja skalar-nog vala s trodimenzionalnog objekta na aproksimativni dvodimenzionalni objekt. Skalarni valovi javljaju se kod problema raspršenja na trodimenzionalnim objektima i kod problema raspršenja transversalno električnih (TE) i transversalno magnetskih (TM) valova u dvodimenzi-onalnim elektromagnetskim problemima. Primjenom izvedenog reduciranog modela smanjeni su zahtjevi na numeričko rješavanje problema jer se za jednu dimenziju smanjuje objekt pro-matranja što rezultira smanjenjem dimenzije elemenata u diskretizaciji objekta pa time i njihov broj te zahtjevi na memoriju i snagu računala. U slučaju jednoosnog anizotropnog homogenog prostora s planarnom i cilindričnom simetrijom izvedena je Greenova funkcija koja omogućuje unaprjeđenje G1DMULT s izotropne homogene višeslojne strukture na višeslojnu strukturu s jednoosno anizotropnim slojevima. G1DMULT algoritam uspješno se primjenjuje dugi niz go-dina na probleme analize konformnih mikrotrakastih antena te analizu svjetlovoda i leća antena. Unaprijeđeni algoritam primijenjen je na računanje efektivnih parametara metamaterijalnih jed-noslojnih i višeslojnih struktura. Izveden je algoritam koji omogućuje rješavanje problema ras-pršenja elektromagnetskih valova uslijed kosog upada na cilindar načinjen od savršenog metala koji se nalazi unutar višeslojnog anizotropnog plašta. Problemi koji se javljaju kod analize opisanog problema leže u činjenici da je model problema opisan sustavom diferencijalnih jed-nadžbi, a ne jednom jednadžbom kao što je slučaj kod okomitog upada elektromagnetskog vala na spomenutu strukturu. Numeričko rješenje za potpuni problem nije moguće dobiti na efika-san način zato što je problem raspršenja problem u slobodnom prostoru što predstavlja veliki zahtjev na korištenu numeričku metodu. U radu je iskorišteno poznavanje rješenja izvan proma-tranog objekta na način da je rješenje izvan objekta rastavljeno u sumu planarnih valova koja je na vanjskom rubu anizotropnog plašta spojena s numeričkim rješenjem unutar strukture. Na taj način je reducirana domena na kojoj je potrebno numerički rješavati problem. Izvedena metoda je primijenjena na analizu raspršenja elektromagnetskih valova na Schurigovom i Caijevom pla-štu nevidljivosti uslijed kosog upada. Pokazano je da izvedeni plaštevci nevidljivosti rade dobro samo za okomiti upad elektromagnetskog vala dok za relativno male pomake od normale na ci-lindrar raspršenje od takvog objekta postaje veće od raspršenja na čistom cilindru načinjenom od savršenog metala, tj. predloženi plaštevci nevidljivosti ne rade za kosi upad elektromagnetskog vala.

Ključne riječi: raspršenje elektromagnetskih valova, jednoosno anizotropan materijal, pot-puno anizotropan materijal, cilindrični objekt, redukcija dimenzije, Greenova funkcija

Abstract

Electromagnetic wave scattering on planar and cylindrical anisotropic structures

In the thesis emphasis is on electromagnetic scattering on anisotropic structures and on electromagnetic scattering on curved homogeneous structures. Electromagnetic wave scattering on anisotropic structures has become a very interesting topic in the last couple of years. The main application is connected to metamaterials, metasurfaces and other anisotropic media. Metamaterials and metasurfaces are artificial electromagnetic structures made from small scatterers on a distance smaller than wavelength. Because the distance is small between the elements it is possible to use homogenization techniques in order to analyze and produce objects made from metamaterials. The result of homogenization procedure are usually anisotropic parameters and in order to further analyze considered object it is necessary to be able to accurately describe scattering from anisotropic structures.

In the second chapter an approximate method for solving the scattering problem on a curved thin dielectric object is proposed. It is assumed that the permittivity of an object in asymptotic regime is scaled with thickness since otherwise at certain moment the object will become invisible for an incoming wave because it will be too thin and with too small permittivity to be noticeable. The starting point of the method is the Helmholtz partial differential equation which is transformed to the Lippmann-Schwinger integral equation using convolution with the Greens function. Lippmann-Schwinger integral equation is a Fredholm second type integral equation for which there is a lot of developed theory which is usefull in the process of asymptotic analysis. In order to utilize the information about the small thickness of the structure, asymptotic analysis in terms of small parameter is applied. Solution to a full three dimensional problem is then described as an asymptotic series in terms of thickness. Using this procedure, the starting integral equation on three dimensional structure is reduced to an integral equation on two dimensional structure. Transition from Helmholtz partial differential equation to Lippmann-Schwinger integral equation reduces computational time, however in order to solve the problem it is still necessary to numerically solve it on a three dimensional object. After the asymptotic analysis and by obtaining first order asymptotic solution it will be enough to solve the problem only on a two dimensional domain. Error estimate and convergence for described approximation will be presented and it will be verified on an electromagnetic scattering problem.

In the third chapter Greens functions for uniaxially anisotropic multilayer planar and cylindrical structures are derived. Those functions are used for upgrading G1DMULT algorithm previously developed by prof. Zvonimir Sipus and prof. Per-Simon Kildal. Using G1DMULT algorithm it is possible to calculate radiation from homogeneous isotropic multilayer structu-

res, and with the upgrade involving the developed Greens functions it is possible to analyze uniaxially anisotropic structures. This algorithm was previously used for analysis of conformal microstrip antennas, optical fibers and lenses. One of the biggest applications is analysis of microstrip antennas on spherical structures on which scientists from Department for Wireless Communications worked for several years. The need for upgrading G1DMULT algorithm came from the idea of analyzing metamaterial structures. In this chapter it is shown that this upgrade allows analysis of uniaxially anisotropic structures because in that case it is possible to decompose scattered electromagnetic field on transversel electric and transversel magnetic modes. In uniaxially anisotropic structures there is no coupling between those two modes. If the structure is such that the modes are coupled then it is necessary to analyze it using the procedure proposed in the following chapter. Upgraded G1DMULT algorithm is used for the analysis of scattering from periodic strips and from artificial anisotropic dielectrics.

In the fourth chapter analysis of electromagnetic scattering from biaxially anisotropic structures is given. The considered problem is a circular cylindrical metallic rod inside a multilayer biaxially anisotropic dielectric object. In the case of oblique incidence of electromagnetic waves it is not possible to decouple transversel electric and transversel magnetic modes because both modes are needed in order to satisfy boundary conditions. For that reason the mathematical model of the described situation is given with system of partial differential equations and not with only one equation, and consequently the analysis from the third chapter cannot be applied. Method developed in this chapter is based on Fourier series and finite differences. Using Fourier series it is possible to switch from solving system of partial differential equations to solving a system of ordinary differential equation for every mode. Because of small dimensions of structures there are only few modes for which it is needed to solve the system. Outside the structure it is possible to solve the scattered field as a summation of outgoing plane waves. It is possible to analytically describe wave outside the object because mathematical model is given with only one equation of Bessel type. That solution is given in terms of plane wave expansion. Inside the structure finite difference method is used for solving the field. On the boundary of cylindrical object the outside and the inside problems are matched through boundary conditions. Matching these two solutions gives final boundary condition for numerical solution of the problem. Using this method oblique incidence from metamaterial cloaks is analyzed. Circular cylindrical cloaks were usually analyzed only for normal incidence because in that case it is possible to use simpler algorithms such as the algorithm described in previous chapter. Since the normal incidence case can be solved using the G1DMULT algorithm it is used as a reference for algorithm developed in this chapter. Results for oblique incidence are compared for oblique incidence solution for a metallic circular cylinder inside one layer of dielectric material. Using the developed algorithm it is shown that cloaks known from the literature work only for normal incidence. In the case of oblique incidence there is a great deterioration of radar cross section

for increased angle of incidence. When angle of incidence is shifted for 20° or more relative to the normal incidence, radar cross section for cloaked metal cylinder is larger than the radar cross section of bare metal. This means that cloaks from the literature work only for normal incidence of electromagnetic wave or for very small displacement from the normal incidence.

Keywords: electromagnetic wave scattering, uniaxially anisotropic materials, biaxially anisotropic materials, oblique incidence, reduction of dimension, Greens function

Sadržaj

1. Uvod	1
1.1. Pregled istraživanja	1
1.2. Matematički model klasičnog elektromagnetizma	4
1.2.1. Raspršenje elektromagnetskih valova	5
1.3. Objašnjenje oznaka i osnovne definicije	6
1.3.1. Operacije s tenzorima	7
2. Raspršenje elektromagnetskih valova na zakrivljenim tankim strukturama	10
2.1. Izvod modela raspršenja elektromagnetskih valova na dielektričnom zakrivljenom električki tankom objektu	11
2.2. Izvod modela raspršenja skalarnih valova na dielektričnom zakrivljenom tankom objektu	13
2.2.1. Izvod asimptotskog modela preko teorije perturbacija	15
2.2.2. Opravdanje postupka redukcije integralne jednadžbe s trodimenzionalnog objekta na dvodimenzionalni aproksimativni objekt u slučaju raspršenja skalarnih valova na tankom zakrivljenom objektu	20
2.3. Primjena prethodno izvedene aproksimacije na raspršenje elektromagnetskih valova TM_z polarizacije na dvodimenzionalnom dielektričnom objektu	26
3. Greenova funkcija za jednoosni anizotropni slučaj u kojem se mogu raspregnuti jednadžbe za E i H polje	31
3.1. Oblici anizotropije	32
3.2. Opis G1DMULT algoritma	33
3.3. Strujni izvor nalazi se u ravnini	34
3.3.1. Strujni izvor nalazi se u ravnini okomitoj na os anizotropije	35
3.3.2. Strujni izvor ima komponente u smjeru anizotropije i u smjeru okomitom na smjer anizotropije	40
3.4. Strujni izvor nalazi se na cilindru polumjera a	41

3.4.1.	Strujni izvor nalazi se na cilindru polumjera a s komponentom struje u smjeru osi anizotropije	42
3.4.2.	Strujni izvor nalazi se na cilindru polumjera a s komponentom struje u ϕ smjeru	47
3.5.	Primjene prethodno izvedenih metoda	49
3.5.1.	Karakterizacija planarnog metamaterijalnog sloja	49
4.	Kosi upad elektromagnetskog vala na metalni cilindar unutar anizotropnog višeslojnog plašta	55
4.1.	Izvod modela kosog upada elektromagnetskog vala na kružni cilindar načinjen od savršenog metala koji se nalazi unutar višeslojnog anizotropnog plašta . . .	56
4.1.1.	Zašto se u razmatranom modelu javlja sustav jednažbi?	62
4.2.	Modeliranje pobude kod kosog upada elektromagnetskog vala na kružni cilindar	65
4.2.1.	Pobudni TM_z elektromagnetski val	65
4.2.2.	Pobudni TE_z elektromagnetski val	66
4.3.	Numerička metoda za problem kosog upada elektromagnetskog vala na metalni cilindar unutar anizotropnog višeslojnog plašta	67
4.3.1.	Rubni uvjeti na vanjskom sloju anizotropnog plašta za pobudu elektromagnetskim valom TM_z polarizacije	71
4.3.2.	Rubni uvjeti na vanjskom sloju anizotropnog plašta za pobudu elektromagnetskim valom TE_z polarizacije	72
4.4.	Primjena izvedene numeričke metode na kosi upad elektromagnetskog vala na metalni cilindar unutar anizotropnog višeslojnog plašta	73
4.4.1.	Provjera prethodno izvedene numeričke metode na testnim primjerima	73
4.4.2.	Primjena prethodno izvedene numeričke metode na kosi upad elektromagnetskog vala na plašt nevidljivosti	77
5.	Zaključak	89
	Literatura	91
	Životopis	99
	Biography	101

Poglavlje 1

Uvod

U uvodnom poglavlju dan je pregled istraživanja, opis pojedinih poglavlja te popis osnovnih oznaka i naziva koje će se koristiti u ostalim poglavljima. Predložene oznake i nazivi nastoje se držati standardnih oznaka i naziva u modernoj teoriji raspršenja valova i numeričkim metodama za probleme raspršenja [1, 2, 3].

1.1 Pregled istraživanja

Tema doktorske disertacije pripada području modeliranja i analize raspršenja elektromagnetskih valova. Raspršenje elektromagnetskih valova je široko znanstveno područje unutar kojeg se može istraživati u nekoliko različitih smjerova, od analize i modeliranja problema raspršenja u primjenama kao što su radari do inverznih problema raspršenja u tomografiji te numeričkih metoda s primjenama na probleme raspršenja valova na velikim objektima [4, 5, 6, 7]. U ovom radu naglasak je na analizi i modeliranju raspršenja elektromagnetskih i skalarnih valova na višeslojnim, anizotropnim strukturama te tankim zakrivljenim strukturama. Analizom raspršenja na anizotropnim strukturama pokriven je dobar dio primjena koje se u zadnjih nekoliko godina intenzivno proučavaju - analiza i dizajn novih elektromagnetskih struktura izrađenih od metamaterijala [8]. Metamaterijali su umjetne elektromagnetske strukture načinjene od mnoštva malih raspršivača složenih u periodičku strukturu na razmaku mnogo manjem od valne duljine [9]. Činjenica da su razmaci između pojedinih dijelova periodičke strukture mnogo manji od valne duljine omogućuje periodičku homogenizaciju metamaterijalnih struktura [10, 11, 12]. Periodička homogenizacija je proces u kojem se periodička struktura, načinjena od malih jediničnih ćelija, mijenja homogenim materijalom. Proces homogenizacije, ako ga je moguće provesti, rezultira najčešće anizotropnim homogenim parametrima [13, 14]. Iako su strukture periodičke, postoje situacije u kojima nije moguće primijeniti homogenizaciju i promatrati metamaterijal kao homogeni medij, posebice u blizini rezonantnih frekvencija dane strukture. Teorija homogenizacije, njena ograničenja i primjene prikazani su u preglednom članku [15]. Proces homo-

genizacije omogućuje dizajniranje složenih struktura jednostavnijim metodama analize jer je dovoljno promatrati homogeni anizotropni materijal, a ne periodičku strukturu s mnoštvom malih jediničnih ćelija. Upravo činjenica da je metamaterijal periodička struktura omogućuje postizanje električnih svojstava koje je nemoguće pronaći u prirodi, ali istovremeno često predstavlja i najveću manu metamaterijala jer rezultira malom širinom pojasa i rezonantnim načinom rada. Promatranje raspršenja elektromagnetskih valova na anizotropnim strukturama omogućuje nam dizajniranje elektromagnetskih struktura i optimizaciju homogenih parametara metamaterijalnih struktura u raznim primjenama, npr. kod dizajna plašta nevidljivosti [16, 17, 18].

U uvodnom poglavlju dan je kratak pregled sadržaja pojedinih poglavlja, motivacija za pojedina istraživanja, pregled korištenih oznaka i definicija te pregled literature.

U drugom poglavlju analizira se raspršenje elektromagnetskih valova na tankim, zakrivljenim, nehomogenim strukturama. Ravne metapovršine su primjer tankih nehomogenih struktura koje su načinjene kao dvodimenzionalne periodičke strukture [19]. Osim ravnih metapovršina, u zadnjih nekoliko godina razvijaju se i primjene zakrivljene strukture koje sadrže metapovršine. Drugi primjer od interesa je analiza plazmoničkih struktura [20]. U radu je izveden model koji se temelji na redukciji pripadne trodimenzionalne integralne jednadžbe na dvodimenzionalnu integralnu jednadžbu. Analiza zakrivljene strukture povezana je s analizom ravne strukture preko parametrizacije zakrivljene strukture ravnom strukturom. Pri procesu parametrizacije potrebno je skalirati koordinatne osi kako bi se iz granica integracije eliminirala informacija o debljini strukture i premjestila u podintegralnu funkciju. Na taj način definirana je klasa problema s rješenjem u_h koje ovisi o debljini objekta na kojem se promatra raspršenje elektromagnetskih valova. Nakon parametrizacije i premještanja informacije o debljini strukture dana je analiza limesa $h \rightarrow 0$ pripadne integralne jednadžbe, gdje h predstavlja debljinu strukture, uz uvjet da su parametri strukture skalirani faktorom $\frac{1}{h}$. Na taj način izbjegnut je problem prozirnosti strukture u slučaju kada njena debljina postane zanemariva. Na kraju analize dana je ocjena greške aproksimacije te je pokazano da apsolutna greška aproksimacije teži k nuli s prvom potencijom debljine strukture h . Rad se u ovom poglavlju temelji na asimptotskoj analizi raspršenja elektromagnetskih i skalarnih valova na tankim planarnim strukturama [21, 22]. Analiza utjecaja dijela integralne jednadžbe koji sadrži integral po rubu planarnog objekta na kojem se promatra raspršenje valova provedena je prije dvije godine u članku [23]. U njemu je predložena aproksimacija raspršenja elektromagnetskih valova na planarnim tankim strukturama koja daje točnije rješenje od Bornove aproksimacije [24]. Napomenimo da je analiza numeričkih metoda za raspršenje elektromagnetskih valova na dielektričnim cilindričnim strukturama predmet istraživanja zadnjih 50 godina [25] s primjenama u inverznom raspršenju [26], kompozitnim dielektričnim strukturama [27] i općenitoj teoriji raspršenja elektromagnetskih valova [28].

U trećem poglavlju dan je izvod Greenove funkcije za jednoosno anizotropne višeslojne

planarne ili cilindrične strukture. Prethodno su se znanstvenici bavili analizom Greenove funkcije u spektralnoj domeni za jednoosno i dvoosno anizotropne planarne strukture u člancima [29, 30]. Rad u ovom poglavlju je nadogradnja dosadašnjeg istraživanja unutar Elektromagnetske grupe na Zavodu za radiokomunikacije koje se ticalo razvoja algoritma za izračun Greenove funkcije unutar planarne, cilindrične i sferne višeslojne izotropne strukture kojeg su uveli prof. Per-Simon Kildal i prof. Zvonimir Šipuš u svom doktoratu u radu [31]. Prethodno razvijeni algoritam, poznat pod imenom G1DMULT, korišten je u širokoj lepezi primjena kao što su analiza planarnih i konformnih mikrotrakastih antena, analiza svjetlovoda i leća-antena. Veliku primjenu doživio je upravo u analizi konformnih mikrotrakastih antena kojima su se nekoliko godina aktivno bavili članovi Zavoda za radiokomunikacije [32, 33, 34, 35]. Potreba za nadogradnjom algoritma došla je zbog želje za analiziranjem anizotropnih metamaterijalnih struktura [36]. U radu je pokazano da je predloženim algoritmom moguće analizirati jedino jednoosno anizotropne strukture jer je kod njih moguće rastaviti raspršeno elektromagnetsko polje na transversalno električne (TE) i transversalno magnetske (TM) valove. Strukture kod kojih dolazi do sprege između TE i TM valova potrebno je analizirati na modificirani način predložen u četvrtom poglavlju [37, 38, 39]. Za strukture koje je moguće analizirati G1DMULT algoritmom, izvedeni su izrazi za Greenovu funkciju unutar homogenog anizotropnog prostora u spektralnoj domeni, što predstavlja osnovu G1DMULT algoritma. Unaprijeđenim G1DMULT algoritmom modelirane su periodičke strukture načinjene od paralelnih metalnih traka, odnosno od umjetnih anizotropnih dielektrika [36].

U četvrtom poglavlju dana je analiza raspršenja elektromagnetskih valova na anizotropnim cilindričnim strukturama kod kojih dolazi do sprege između električnog i magnetskog polja. Model koji opisuje raspršenje na takvim strukturama dan je sustavom diferencijalnih jednadžbi, a ne samo jednom Helmholtzovom jednadžbom, stoga na njega nije moguće primijeniti analizu iz trećeg poglavlja. Predložena metoda primjenjuje se na modeliranje raspršenja elektromagnetskih valova na kružnim cilindričnim višeslojnim strukturama [37, 38]. Razvijena metoda temelji se na razvoju rješenja unutar strukture u Fourierov red te numeričkoj metodi konačnih razlika. Razvoj rješenja u Fourierov red omogućuje nam da pripadni problem rješavamo samo za radialnu ovisnost elektromagnetskog polja. Izvan strukture problem je riješen razvojem raspršenog polja u sumu planarnih valova što nam omogućuje da izjednačavanjem rastava polja unutar i izvan strukture, na vanjskom rubu strukture, dobijemo ukupno polje u prostoru. Ideja o spajanju analitičkog i numeričkog rješenja na rubu strukture koristi se dugi niz godina kod analize raspršenja skalarnih valova [40]. Pripadnom metodom analiziran je kosi upad elektromagnetskog vala na plašteve nevidljivosti poznate u literaturi [41, 42]. Cilindrični plaštevci nevidljivosti tradicionalno se analiziraju i dizajniraju samo za okomiti upad elektromagnetskog vala jer je u tom slučaju moguće razdvojiti jednadžbe za električno i magnetsko polje i primijeniti neku od poznatih metoda [16, 17, 18]. Iz razloga što je problem opisan jednom jednadžbom, moguće

je na njega primijeniti i G1DMULT algoritam. Upravo je rješenje za okomiti upad elektromagnetskog vala dobiveno G1DMULT algoritmom iskorišteno kao referenca u odnosu na koju je ispitana pouzdanost izvedene metode. Korištenjem razvijene metode pokazano je da predloženi plaštevci nevidljivosti rade dobro samo za okomiti upad elektromagnetskog vala, a u slučaju kosog upada elektromagnetskog vala imamo veliko povećanje raspršenja upadnog vala već i za kuteve upada bliske okomitom upadu [37, 39]. Pokazano je da predloženi plaštevci nevidljivosti jače raspršuju upadni val od čistog metalnog cilindra već za kuteve upada veće od 20° u odnosu na normalu na os cilindra.

1.2 Matematički model klasičnog elektromagnetizma

Elektromagnetska sila jedna je od četiri osnovne sile koje se javljaju u prirodi. Ostale tri su gravitacijska sila te slaba i jaka nuklearna sila. Djelovanje elektromagnetske sile osjeća se u prostoru u kojem postoji elektromagnetsko polje. Opis međudjelovanja polja u prisustvu naboja i struja dan je Maxwellovim jednačbama koje opisuju elektromagnetske pojave u okviru klasične fizike:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.1a)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}) = \rho, \quad (1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (1.1c)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0. \quad (1.1d)$$

Polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ zovemo električno i magnetsko polje, ρ i $\mathbf{J}$ su gustoće slobodnih naboja i struja. U materijalima odziv na pobudu električnim i magnetskim poljem opisan je poljima $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (1.2b)$$

koja se zovu električna indukcija i magnetizirajuće polje, a veličine $\mathbf{P}$ i $\mathbf{M}$ zovu se polarizacija i magnetizacija. Te dvije veličine definirane su na mikroskopskoj razini. Za potpun model potrebno je poznavati vezu između polarizacija i polja zato što jednačbe (1.1) i (1.2) sadrže više nepoznanica nego jednačbi. Opis ponašanja u materijalu nije jednostavan i najčešće vodi prema kompliciranim vezama oblika $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ i $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ koje mogu biti proizvoljne funkcije. Opisi tih veza polja moraju doći izvan elektromagnetske teorije. Najčešće dolaze iz eksperimentalnih opažanja ili iz nekih širih teorija koje povezuju i mikroskopska svojstva materijala.

U linearnim medijima veza polarizacije i magnetizacije s električnim i magnetizirajućim poljem dana je izrazima:

$$\mathbf{P} = \eta \mathbf{E}, \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}. \quad (1.3b)$$

Veličine koje opisuju odziv materijala na pobudu zovu se električna i magnetska susceptibilnost u oznakama η i χ . Uvrštavanjem jednačbi (1.3) u jednačbe (1.2) dobije se potpun opis polja:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.4b)$$

u kojem se veličine $\varepsilon = 1 + \eta$, $\mu = 1 + \chi$ zovu permitivnost i permeabilnost materijala.

Opisane veličine mogu biti linearni operatori (anizotropni materijali), funkcije frekvencije (disperzivni materijali) te funkcije položaja (nehomogeni materijali). Veze ne moraju biti linearne (materijali s histerezom). Nelinearnost u Maxwellovim jednačbama dolazi upravo iz jednačbi koje opisuju polarizaciju i magnetizaciju. Zato što je ta veza skrivena u općem obliku Maxwellovih jednačbi, općenito se Maxwellove jednačbe nazivaju linearnim jednačbama što nije ispravno. One su linearne u linearnim medijima, a nelinearne u nelinearnim medijima. Priroda općenito nije linearna te su i te linearne veze samo aproksimacije koje vrijede u određenim uvjetima. U sljedećim poglavljima naglasak će biti na linearnim anizotropnim medijima.

U Maxwellovima jednačbama skrivena je i jednačba kontinuiteta koja opisuje vezu između gustoća struja i naboja:

$$\operatorname{div}(\mathbf{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.5)$$

Uz Maxwellove jednačbe, koje opisuju polja, potrebno je navesti jednačbu koja opisuje silu na objekt koji može osjetiti elektromagnetsku silu. Taj je izraz dan Lorentzovom silom:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.6)$$

u kojoj $\mathbf{v}$ predstavlja brzinu naboja, a q naboj. S prethodnim jednačbama opisani su svi makroskopski elektromagnetski efekti.

1.2.1 Raspršenje elektromagnetskih valova

U ovom radu naglasak će biti na raspršenju elektromagnetskih valova na raznim objektima. Raspršenje elektromagnetskih valova zahtjevan je problem za modeliranje iz dva razloga. Prvi razlog je taj što se objekt nalazi u slobodnom prostoru što predstavlja velik problem za nume-

ričko rješavanje problema jer je slobodni prostor neograničen te ga nije moguće cijelog diskretizirati. Jedan od načina rješavanja tog problema je da se uvede imaginarni rub sa svojstvima savršenog apsorbirajućeg materijala [43]. Iako taj proces prevodi domen u unutar koje se stvar rješava s beskonačne na konačnu i dalje je potrebno diskretizirati relativno veliku domen. Drugi razlog je taj što su objekti od kojih se nešto raspršuje često elektromagnetski veliki što isto predstavlja problem kod diskretizacije. Gledajući sa strane modeliranja i numeričkih metoda raspršenje valova zanimljivo je i aktivno područje koje se posljednjih nekoliko godina ubrzano razvija. Matematička pozadina teorije raspršenja elektromagnetskih valova opisana je u knjigama [1, 44, 45]. Fizikalni modeli i primjene u nekim općenitim slučajevima mogu se pronaći u knjigama [4, 5]. Modeli i numeričke metode za inženjerske primjene mogu se pronaći u knjizi [46]. Osim direktnih problema, u teoriji raspršenja su posebno zanimljivi inverzni problemi koji se bave rekonstrukcijom objekta iz njihovog raspršenog polja. Najveće primjene teorija razvijenih za rješavanje inverznih problema u teoriji raspršenja su u tomografiji i radarima [47, 48, 49].

1.3 Objašnjenje oznaka i osnovne definicije

U ovom poglavlju prikazat ćemo najosnovnije teoreme, definicije i oznake koje će se koristiti u ostatku rada.

Definicija 1.1. *Neka je $u \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$ te $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Fourierovom transformacijom funkcije u i inverznom transformacijom funkcije $\hat{u}$ zovemo funkcije definirane kao:*

$$\hat{u}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.7a)$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{u}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (1.7b)$$

Osim Fourierove transformacije po svim varijablama koristit će se i transformacija po samo dvije od tri varijable, x_1 i x_2 , a i neke posebne transformacije. Osim Fourierove transformacije u slučaju neograničene domene, koristit će se i rastav periodične funkcije u Fourierov red.

Definicija 1.2. *Neka je funkcija u definirana kao $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Rastavom funkcije u u Fourierov red zovemo rastav definiran kao:*

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{inx}, \quad (1.8)$$

gdje su koeficijenti u_n dani formulom:

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-inx} dx. \quad (1.9)$$

Točke u prostoru označavat ću malim slovima $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$, a komponente točaka imat će indeks dolje, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ za $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Komponente vektora imat će indekse gore $\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3)$ u slučaju rada u kartezijevom koordinatnom sustavu. U slučaju prelaska iz kartezijevog koordinatnog sustava u neki drugi koordinatni sustav posebno ću naglasiti što su komponente iako će to biti jasno iz konteksta. Prednost pisanja indeksa gore koristi ću zajedno s korištenjem prednosti tenzorskog zapisa u kartezijevom koordinatnom sustavu. U ostalim koordinatnim sustavima ta se prednost gubi pa je onda neću forsirati. Jedinične vektore neću posebno naznačavati nego ću na početku poglavlja definirati jedinične vektore koje koristim u tom poglavlju. U cijelom radu jedinični vektori u smjeru koordinatnih osi x_i su vektori $\mathbf{e}_i$, a $\mathbf{v}$ predstavlja jediničnu normalu.

1.3.1 Operacije s tenzorima

U trećem i četvrtom poglavlju naglasak je na anizotropnim materijalima čiji se parametri opisuju tenzorskim veličinama. U svakom posebnom slučaju bit će definiran oblik tenzora ε i μ . Najjednostavnije ih je zadati preko standardne baze $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ za $i, j = 1, 2, 3$ što je moguće u elektromagnetskim primjenama jer su svi parametri zapravo dijadski tenzori koje je moguće zapisati preko standardne dijadske baze. Općenito ta baza broji 9 elemenata za tenzore nad trodimenzionalnim vektorskim prostorom, ali će u navedenim primjerima biti prisutna neka simetrija te će se parametri moći opisati samo sa 3 elementa [50]. Tenzorski račun koristit će se na svim onim mjestima na kojima bi raspisivanje po komponentama dovelo do nepreglednog niza elemenata u jednadžbama. Pri rješavanju svake pojedine jednadžbe prelazit će se na zapis po komponentama jer je do tada stvar već sređena i spremna za računanje. Prilikom računanja s tenzorima koristit će se i konvenciju o sumaciji, tj. neće se posebno pisati suma nego će se podrazumijevati sumacija po indeksu koji se javlja paran broj puta u izrazu. Sumacija ide po dimenziji prostora u kojem se nalazimo [51].

Parcijalna derivacija će se označavati standardnom oznakom:

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (1.10)$$

U slučaju derivacija višeg reda u doljnji indeks doći će poredani redni brojevi varijabli po kojima se derivira. Brojevi će biti poredani bez zareza jer funkcije u ovom radu imaju najviše 4 varijable pa je nemoguće zamijeniti dvostruku derivaciju po prvoj varijabli ∂_{11}^2 s prvom derivacijom po jedanaestoj varijabli ∂_{11} . Kao dodatnu zaštitu imamo eksponent oznake ∂ koji nam dodatno govori o kojem redu derivacije je riječ.

Definicija 1.3. *Elementi dijadske baze djeluju na vektor po pravilu:*

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{u} = \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{u}), \quad (1.11)$$

gdje $\cdot$ predstavlja standardni skalarni produkt u $\mathbb{C}^3$. Osim jednostruke postoji i dvostruka operacija (dvostruka kontrakcija) definirana kao:

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j : \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_n). \quad (1.12)$$

Osim standardnih algebarskih operacija potrebne su i definicije derivacija tenzorskih funkcija.

Definicija 1.4. Neka je T tenzor ranga n . Gradijent tenzorske funkcije T je tenzor ranga $n + 1$ u oznaci $\text{grad}T$ definiran kao

$$\text{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x_k} \otimes \mathbf{e}_k. \quad (1.13)$$

Posebno kod tenzora drugog ranga $T = T_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ vrijedi:

$$\text{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x_k} \otimes \mathbf{e}_k = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k. \quad (1.14)$$

Definiramo i divergenciju tenzorske funkcije u oznaci $\text{div}T$ koja će se često javljati zato što je jedna od Maxwellovih jednažbi jednaka $\text{div}(\epsilon \mathbf{E})$.

Definicija 1.5. Neka je T tenzor drugog ranga. Divergencija tenzorske funkcije T je tenzor prvog ranga u oznaci $\text{div}T$ definiran kao:

$$\text{div}T = \text{grad}T : I, \quad (1.15)$$

gdje je $I = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$ jedinični tenzor drugog ranga.

U slučaju rotacije vektorskog polja $\mathbf{A}$ u oznaci $\nabla \times \mathbf{A}$ koristit će se zapis preko tenzorskog računa jer on omogućuje jednostavnije manipuliranje formulama u kojima se javljaju tenzori ϵ i μ .

Definicija 1.6. Neka je $\mathbf{A}$ vektorsko polje. Rotacija vektorskog polja $\mathbf{A}$ je vektor $\nabla \times \mathbf{A}$ definiran kao

$$\nabla \times \mathbf{A} = \epsilon_{ijk} \partial_j A^k \mathbf{e}_i, \quad (1.16)$$

gdje je ϵ_{ijk} Levi Civitin simbol definiran kao:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i, j, k) = (1, 2, 3) = (2, 3, 1) = (3, 1, 2) \\ -1, & (i, j, k) = (3, 2, 1) = (2, 1, 3) = (1, 3, 2) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (1.17)$$

Standardno se u literaturi koristi oznaka ϵ i za permitivnost i za Levi Civitin tenzor [51]. Smatram da ne može doći do zabune jer će se Levi Civitin tenzor uvijek javljati s 3 doljnja in-

deksa dok će komponente permitivnosti imati dva indeks jer se dijadaska baza za tenzore drugog ranga sastoji od dva para indeksa (9 komponenti).

Ne postoji veliki konsenzus oko korištenja oznake i ili j za imaginarnu jedinicu. U zadnjih petnaestak godina mogu se naći inženjerske knjige koje koriste i jednu [52, 53] i drugu oznaku [54, 55]. Također, u člancima se mogu pronaći obje oznake. U ovom radu koristit ću oznaku i zato što koristim oznaku i kod pisanja rukom po papiru. U tom slučaju jednostavnije je pisati i , a ne j , a to djeluje i tipografski puno ljepše. Od tuda i navika za pisanjem i kao imaginarne jedinice. Vremenska ovisnost u svim poglavljima je $e^{i\omega t}$. Definicije i operatori te korištenje istih preuzeti su iz predavanja [50, 56].

Poglavlje 2

Raspršenje elektromagnetskih valova na zakrivljenim tankim strukturama

U ovom poglavlju dan je model i analiza raspršenja elektromagnetskih valova na tankim, zakrivljenim nehomogenim strukturama. Počet ćemo s problemom raspršenja elektromagnetskog vala i izvesti integralnu jednadžbu koja opisuje model. Unutar izvedene integralne jednadžbe analizirat ćemo skalarni dio koji modelira raspršenje TM i TE polarizacije u cilindričnom slučaju (dvodimenzionalni problem) te raspršenje skalarnih valova na dielektričnim zakrivljenim strukturama (trodimenzionalni problem). Cilj poglavlja je analizirati izvedenu integralnu jednadžbu te iskoristiti informaciju o tome da je objekt na kojem modeliramo raspršenje elektromagnetskih valova tanak. Činjenica da je objekt tanak omogućuje redukciju izvedene integralne jednadžbe s početnog trodimenzionalnog objekta na dvodimenzionalni objekt, a time i uštedu na vremenu prilikom numeričkog rješavanja opisanog problema. Na kraju poglavlja dan je primjer raspršenja elektromagnetskog vala na dvodimenzionalnom cilindričnom objektu. Pomoću provedene analize integralna jednadžba koja opisuje problem reducirana je na jednu dimenziju što je omogućilo za red veličine brže numeričko rješavanje. Izvedeni reducirani model omogućit će efikasnije modeliranje tankih, zakrivljenih nehomogenih dielektričnih struktura.

Strukture na kojima ćemo gledati raspršenje mogu biti zakrivljene, ali na način da ih je moguće pokriti kartama [57]. Ograničit ćemo se na pokrivanje jednom kartom. Pokrivanje s više karata donosi samo dodatnu kompleksnost u račun zato što je potrebno koristiti različite funkcije na različitim dijelovima strukture, particiju jedinice i ostale tehničke ideje iz teorije ploha, ali su sve ideje i zaključci isti [58]. Ograničit ćemo se na strukture konačnih dimenzija. Unutar strukture moguće je imati periodičku razdiobu parametara strukture. U slučaju ravnih struktura moguće je iskoristiti standardnu periodičku homogenizaciju koja će nas dovesti do općenito anizotropnih parametara [10]. Rad u ovom poglavlju poopćenje je modela iz članka [21] te priprema za rad na raspršenju elektromagnetskih valova na općenitim zakrivljenim strukturama. Analiza u navedenom članku provedena je za raspršenje skalarnih valova na

ravnim strukturama, ali ju je moguće poopćiti uz određene pretpostavke i na zakrivljene strukture. Najveći problem u navedenom članku proizvele su mjerne jedinice koje nakon asimptotske analize više ne odgovaraju fizikalnim jedinicama. Poseban naglasak u ovom poglavlju stavljen je upravo na usklađivanje mjernih jedinica što je jako bitno za inženjerske primjene. Isto tako, pokazani primjer u tom članku ne odgovara fizikalnoj slici raspršenja vala na prepreci što je također ispravljeno u ovom poglavlju. Raspršenje elektromagnetskih valova na tankim, ravnim strukturama modelirano je asimptotskim metodama u člancima [22, 23]. Primjena integralnih jednadžbi na teoriju raspršenja elektromagnetskih valova može se naći u knjigama [1, 2, 7, 59] u kojima je modelirano raspršenje elektromagnetskih valova na dielektričnim i metalnim strukturama. Raspršenje elektromagnetskih valova na tankim, ravnim frekvencijskim selektivnim površinama modelirano je u člancima [60, 61].

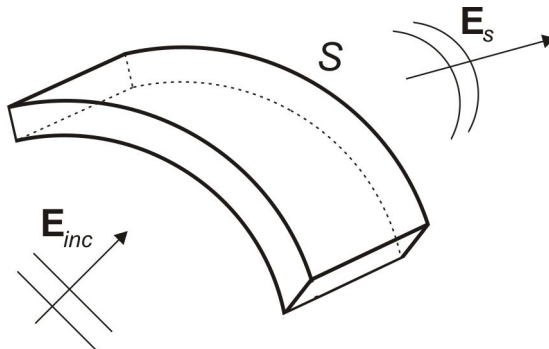
2.1 Izvod modela raspršenja elektromagnetskih valova na dielektričnom zakrivljenom električki tankom objektu

Raspršenje elektromagnetskih valova na dielektričnom objektu modelira se jednadžbom:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x})) - k_0^2 \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.1a)$$

$$\text{rubni uvjeti} \quad (2.1b)$$

u kojoj je $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ vektor električnog polja, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ je valni broj uz valnu duljinu λ , a permitivnost $\varepsilon : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ je funkcija koja opisuje dielektrični objekt S na kojem se raspršuje upadni val. U radu ćemo promatrati raspršenje planarnih valova [44]. Na slici 2.1 je prikazan opisan fizikalni problem. Početna jednadžba dobije se iz Maxwellovih jednadžbi uvrštavanjem jednadžbe (1.1c) u jednadžbu (1.1a) te pretpostavljanjem harmonijske pobude [44].



Slika 2.1: Raspršenje upadnog elektromagnetskog vala na zakrivljenom dielektričnom objektu S

Osim za kanonske probleme rubni problem (2.1) je nemoguće riješiti analitički nego se on najčešće rješava upotrebom neke od numeričkih metoda za elektromagnetske probleme [62].

To znači da je rubni problem (2.1) potrebno riješiti numerički u cijelom prostoru $\mathbb{R}^3$. To nije moguće jer je slobodni prostor neograničen pa ga je nemoguće diskretizirati. Moguće je u problem unijeti fiktivnu plohu sa savršenim apsorbirajućim svojstvima koja smanjuje neograničeni slobodni prostor na unutrašnjost nekog velikog tijela [40, 43]. Tada će trebati diskretizirati ograničeni dio prostora, ali je i taj prostor i dalje jako velik. Pojednostavljenje zahtjeva na numeričko računanje može se dobiti prelaskom na integralnu formulaciju rubnog problema (2.1). Ukupno električno polje može se rastaviti kao $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_s$ gdje je $\mathbf{E}_{inc}$ upadno električno polje, a $\mathbf{E}_s$ raspršeno električno polje. U problemima raspršenja upadno električno polje predstavlja pobudu, a raspršeno električno polje je odziv. Upadno električno polje zadovoljava homogenu jednadžbu:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{x})) - k_0^2 \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.2)$$

Pomoću prethodnog rastava i male manipulacije jednadžbom (2.1a) dobije se jednadžba koja opisuje raspršeno polje $\mathbf{E}_s$ preko ukupnog polja $\mathbf{E}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{x})) - k_0^2 \mathbf{E}_s(\mathbf{x}) = k_0^2 (\varepsilon(\mathbf{x}) - 1) \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

U jednadžbi (2.3) desna strana jednadžbe može se promatrati kao pobuda za raspršeno polje $\mathbf{E}_s$. Ukupno rješenje jednadžbe (2.3) jednako je konvoluciji desne strane i fundamentalnog rješenja homogenog dijela jednadžbe (2.3). Fundamentalno rješenje ili Greenova funkcija jednadžbe (2.3) dana je s:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) I + \frac{1}{k_0^2} \nabla_{\mathbf{y}}^2 \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2.4)$$

gdje ϕ označava fundamentalno rješenje ili Greenovu funkciju Helmholtzove diferencijalne jednadžbe:

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{-ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad (2.5)$$

a I jediničnu matricu. Konvolucija Greenove funkcije (2.4) i desne strane jednadžbe (2.3) daje integralnu jednadžbu čije je rješenje raspršeno polje $\mathbf{E}_s$ na dielektričnom objektu S :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{x}) = k_0^2 \int_S \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\varepsilon(\mathbf{y}) - 1) \mathbf{E}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_S \nabla_{\mathbf{y}}^2 \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\varepsilon(\mathbf{y}) - 1) \mathbf{E}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.6)$$

Dodavanjem $\mathbf{E}_{inc}$ sa svake strane jednadžbe (2.6) dobije se jednadžba koja modelira raspršenje elektromagnetskih valova na dielektričnom objektu S :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{x}) + k_0^2 \int_S \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\varepsilon(\mathbf{y}) - 1) \mathbf{E}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_S \nabla_{\mathbf{y}}^2 \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\varepsilon(\mathbf{y}) - 1) \mathbf{E}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.7)$$

Jednadžba (2.7) zove se Lippmann-Schwingerova jednadžba i javlja se pri modeliranju ras-

pršenja u kvantnoj mehanici [63, 64] te analizi inverznih problema [65]. U određenim uvjetima ona je Fredholmova integralna jednačba druge vrste [66]. Drugi integral s desne strane jednačbe (2.7) je jako singularan integral i on se ne može jednostavno analizirati. Primjenom parcijalne integracije taj integral prelazi u integrabilan integral po volumenu te integral po plohi. Takav integral je tek nedavno analiziran za slučaj planarnog tankog objekta [23]. Prvi integral s desne strane jednačbe (2.7) je zapravo skalarni jednostruki potencijal. Identičan integral javlja se kao opće rješenje problema raspršenja akustičkih valova koji je modeliran Helmholtzovom jednačbom [1]. Dvodimenzionalne elektromagnetske probleme također modelira skalarna Helmholtzova jednačba [67]. Uvrštavanjem pretpostavke o obliku polja $\mathbf{E} = (0, 0, E^z)^T$ u jednačbu (2.1a) dobije se:

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}))]_3 = -\frac{\partial^2 E^3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 E^3}{\partial x_2^2}, \quad (2.8)$$

što u kombinaciji $\mathbf{E} = (0, 0, E^z)^T$ daje skalarnu Helmholtzovu jednačbu za E^3 komponentu električnog polja:

$$\frac{\partial^2 E^3}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 E^3}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) + k_0^2 \varepsilon(\mathbf{x}) E^3(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.9)$$

gdje je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)^T$.

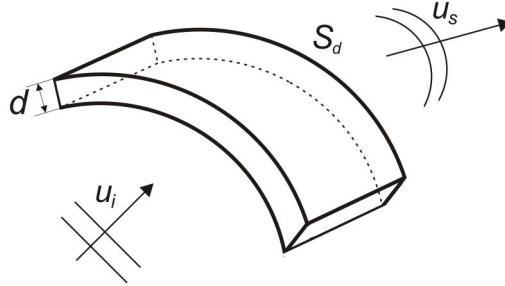
Jednostruki potencijal u jednačbi (2.7) je isto što i jednostruki potencijal u skalarnom slučaju samo što u vektorskom slučaju imamo takav potencijal po sve 3 komponente električnog polja E [44]. U nastavku poglavlja dana je analiza skalarnog raspršenja na tankim, dielektričnim, zakrivljenim trodimenzionalnim strukturama. Ta analiza istovremeno daje odgovor i na pitanje raspršenja elektromagnetskih valova u dvodimenzionalnim problemima (npr. okomiti upad na cilindrični objekt) kao što je prikazano jednačbom (2.9). Oba problema opisana su samo prvim integralom s desne strane jednačbe (2.7). Drugi integral u jednačbi (2.7) nije moguće analizirati na isti način jer je njegova podintegralna funkcija teško singularna zato što se u njoj javlja druga derivacija Greenove funkcije. Rješavanju tog problema posvetit ću se u svom budućem znanstvenom radu.

2.2 Izvod modela raspršenja skalarnih valova na dielektričnom zakrivljenom tankom objektu

Raspršenje skalarnih valova na dielektričnom tankom zakrivljenom objektu S_h opisano je Helmholtzovom jednačbom:

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k_0^2 \varepsilon(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.10)$$

u kojoj je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ točka u prostoru, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ je valni broj uz valnu duljinu λ , a permitivnost $\varepsilon : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ je funkcija koja opisuje dielektrični tanki objekt S_h na kojem se raspršuje upadni val. Rješenje problema raspršenja je polje $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $u = u_{inc} + u_s$, gdje u_{inc} predstavlja upadno, a u_s raspršeno polje. Upadno polje u_{inc} predstavlja pobudni planarni val.



Slika 2.2: Raspršenje upadnog vala na zakrivljenoj tankoj dielektričnoj strukturi

Raspršeno polje je polje koje nastaje raspršenjem upadnog vala na objekt S_h . Ono zadovoljava Sommerfeldov uvjet radijacije:

$$\frac{\partial u_s}{\partial \mathbf{r}} + ik_0 u_s = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (2.11)$$

gdje je $\mathbf{r}$ radij vektor točke [44].

Tanki objekt S_h ima debljinu d . U nastavku rada označavat ćemo debljinu objekta kao $\tilde{h} = hd$ gdje je $h \leq 1$ bezdimenzionalni parametar. Na taj način dobit ćemo parametarski skup rješenja po bezdimenzionalnom parametru h koji omogućuje promatranje rješenja u slučaju $h \rightarrow 0$. Unutar objekta parametar ε dan je s:

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0(\mathbf{x})}{h}, & \text{za } \mathbf{x} \in S_h \\ 1, & \text{za } \mathbf{x} \notin S_h. \end{cases} \quad (2.12)$$

Pretpostavit ćemo da je $\varepsilon_0 \in L^\infty(S_h)$, po dijelovima neprekidna funkcija. U jednadžbi (2.10) ukupno polje u jednako je sumi upadnog i raspršenog polja. Kao i kod jednadžbe (2.1a) moguće je prebaciti ε zajedno s ukupnim poljem u na desnu stranu jednadžbe, dok će s lijeve strane jednadžbe ostati samo raspršeno polje u_s :

$$\Delta u_s(\mathbf{x}) + k_0^2 u_s(\mathbf{x}) = k_0^2 (1 - \varepsilon(\mathbf{x})) u(\mathbf{x}). \quad (2.13)$$

Desnu stranu jednadžbe (2.13) interpretiramo kao pobudu za raspršeno polje u_s . Pomoću konvolucije s Greenovom funkcijom jednadžba (2.13) prelazi u integralnu jednadžbu:

$$u_s(\mathbf{x}) = k_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} (1 - \varepsilon(\mathbf{y})) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.14)$$

Pretpostavit ćemo da je objekt S_h uložen u slobodni prostor $\mathbb{R}^3$, tj. da izvan objekta S_h vrijedi da je $\varepsilon = 1$. Tada integralna jednadžba (2.14) prelazi u integralnu jednadžbu na objektu S_h :

$$u_s(\mathbf{x}) = k_0^2 \int_{S_h} (1 - \varepsilon(\mathbf{y})) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.15)$$

Dodavanjem pobudnog polja u_{inc} s obje strane jednadžbe, prethodna integralna jednadžba postaje integralna jednadžba za ukupno polje u :

$$u(\mathbf{x}) = u_{inc}(\mathbf{x}) + k_0^2 \int_{S_h} (1 - \varepsilon(\mathbf{y})) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.16)$$

Prethodne jednadžba je implicitna jednadžba za ukupno polje u . U zapisu jednadžbe (2.16) vidi se Huygensov princip koji kaže da svaka točka unutar objekta S_h predstavlja sekundarni izvor polja [68]. Jednadžba (2.16) nam govori da je dovoljno poznavati rješenje u unutar objekta S_h . Tada se preko nje može izračunati ukupno polje u bilo kojoj točki prostora.

Integralni dio jednadžbe (2.16) može se tretirati kao integralni operator:

$$A = - \int_{S_h} (1 - \varepsilon(\mathbf{y})) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.17)$$

Upotrebom operatorskog zapisa jednadžbu (2.16) zapišemo u operatorskom obliku:

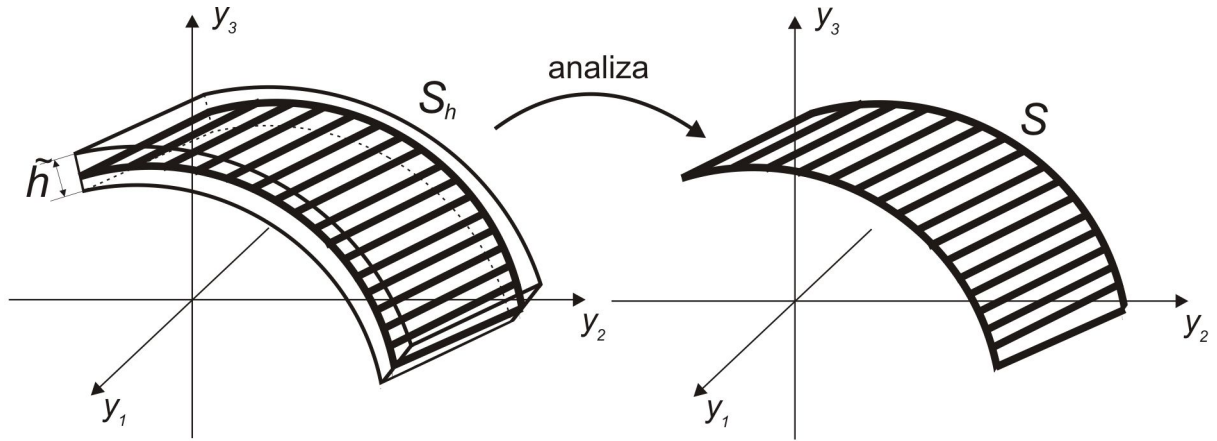
$$(I + k_0^2 A)u = u_{inc}. \quad (2.18)$$

U slučaju Lippmann-Schwingerove jednadžbe operatorska jednadžba (2.18) je Fredholmova integralna jednadžba druge vrste. Postoje uvjeti unutar kojih je moguće invertirati operator $I + k_0^2 A$ te dobiti rješenje jednadžbe preko pobudnog polja u_{inc} . Ideja je doći u situaciju u kojoj je operator A kompaktan operator [63]. Tada je dovoljno pokazati da je $I + k_0^2 A$ injekcija pa po Rieszovim teoremima imamo jedinstvenost i egzistenciju rješenja [66]. S obzirom da rješenje postoji i jedinstveno je, moguće ga je pronaći nekom od metoda za numeričko rješavanje integralnih jednadžbi [69, 70].

U nastavku ovog poglavlja iskoristit ćemo činjenicu da je objekt S_h tanak. To će nam omogućiti da integralnu jednadžbu (2.16) prebacimo s integracije po cijelom volumenu objekta S_h na integraciju po plohi S . Time smo uštedjeli jednu integraciju i automatski smanjili kompleksnost problema i zahtjeve na numeričko rješavanje.

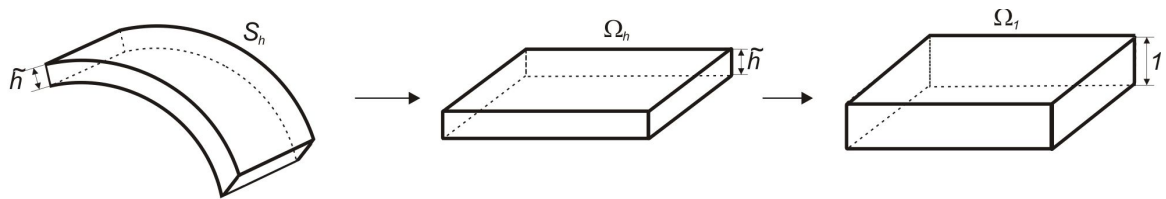
2.2.1 Izvod asimptotskog modela preko teorije perturbacija

Analiza integralne jednadžbe (2.16) i izvod asimptotskog modela za problem sa slike 2.2 temelji se na ideji prikazanoj na slici 2.4. Potrebno je izravnati tanki zakrivljeni objekt S_h , a zatim eliminirati parametar h iz granica integracije u integralu s desne strane jednadžbe (2.16). Tim



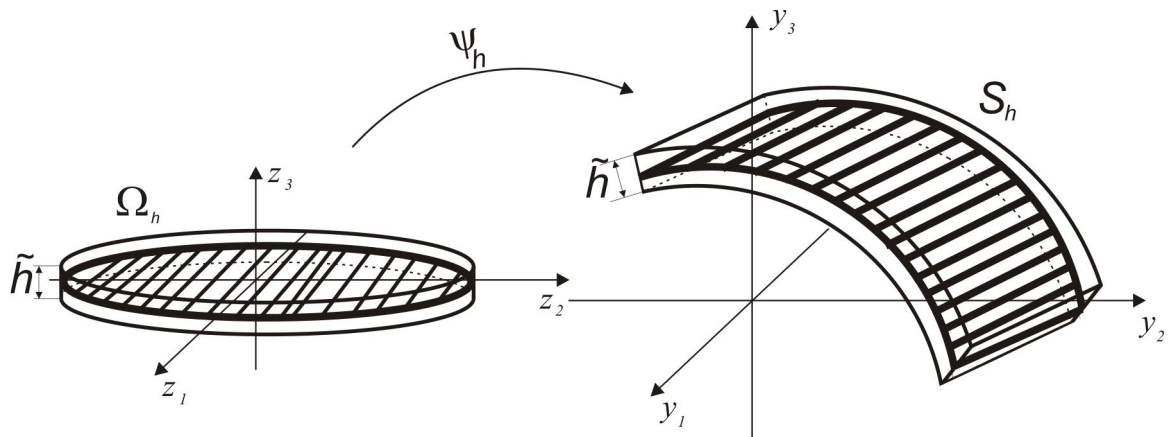
Slika 2.3: Prelazak s tankog zakrivljenog objekta S_h na zakrivljenu plohu S

postupkom parametar h će se premjestiti u podintegralnu funkciju.



Slika 2.4: Ideja na kojoj se temelji analiza i izvod asimptotskog modela

Parametrizacija nam omogućuje da sve točke na objektu S_h prikažemo pomoću točaka koje se nalaze unutar ravnog objekta Ω_h . Parametrizacija objekta S_h prikazana je na slici 2.5. Na slici je prikazan tanki objekt S_h te ploha S koja se nalazi unutar objekta S_h . Asimptotski model svest će problem s trodimenzionalnog objekta S_h na dvodimenzionalnu plohu S .



Slika 2.5: Parametrizacija objekta S_h preko skupa Ω_h

Objekt Ω_h orijentiran je na način da dio koji predstavlja debljinu $\tilde{h}$ gleda u smjeru koordinatne osi z_3 . Parametrizacija koja opisuje objekt S_h glasi:

$$\psi_h : \Omega_h \rightarrow S_h, \quad (2.19)$$

gdje je $\mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}) = (\psi^1(z_1, z_2, z_0 + z_3), \psi^2(z_1, z_2, z_3), \psi^3(z_1, z_2, z_3))$.

Pretpostavit ćemo da se objekt S_h može prekriti samo jednom kartom. Ta pretpostavka nije ispunjena već kod jednostavnih objekata kao što je dio sfere koji je veći od polusfere jer je za njeno pokrivanje potrebno koristiti više od jedne karte. Iako koristimo jaku pretpostavku ona ne utječe na argumente nego samo na tehnički dio izvoda asimptotskog modela. U slučaju objekta kojeg je moguće prekriti samo s više karata potrebno je koristiti particiju jedinice i pokrivanje po dijelovima [58]. Izvod modela postat će tehnički zahtjevniji, ali će svi argumenti i dalje vrijediti.

Nakon izravnavanja zakrivljene strukture potrebno je transformirati i integrale po skupu S_h na integrale po skupu Ω_h . U tu svrhu koristimo metrički tenzor:

$$g = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial z_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.20)$$

koji daje transformaciju mjere $d\mathbf{y} = \sqrt{|g(\mathbf{z})|} d\mathbf{z}$.

Pomoću prethodnih transformacija jednadžbu (2.16) možemo zapisati preko skupa Ω_h kao:

$$u(\mathbf{x}) = u_{inc}(\mathbf{x}) + k_0^2 \int_{\Omega_h} \left(1 - \frac{\varepsilon_0(\boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}'))}{h}\right) \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}')) u(\boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}')) \sqrt{|g(\mathbf{z}')|} d\mathbf{z}'. \quad (2.21)$$

Pri rješavanju opisanog problema varijabla x kreće se samo po objektu Ω_h . Zato ima smisla i varijablu x promatrati kao $x = \boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z})$. Tada jednadžba (2.21) izgleda:

$$u(\boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z})) = u_{inc}(\boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z})) + k_0^2 \int_{\Omega_h} \left(1 - \frac{\varepsilon_0(\boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}'))}{h}\right) \phi(\boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}), \boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}')) u(\boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}')) \sqrt{|g(\mathbf{z}')|} d\mathbf{z}'. \quad (2.22)$$

Kako bi skratili pisanje varijabli u jednadžbi (2.22) uvedemo pokrate:

$$\mathbf{x} := \boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}) \quad (2.23a)$$

$$\mathbf{x}_0 := \boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}_0) = \boldsymbol{\psi}_h(z_1, z_2, z_0) \quad (2.23b)$$

$$\mathbf{y} := \boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}') \quad (2.23c)$$

$$\mathbf{y}_0 := \boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}'_0) = \boldsymbol{\psi}_h(z'_1, z'_2, z'_0) \quad (2.23d)$$

$$\sqrt{|g|} := \sqrt{|g(\mathbf{z})|} \quad (2.23e)$$

$$\sqrt{|g_0|} := \sqrt{|g(\mathbf{z}'_0)|}, \quad (2.23f)$$

pomoću kojih jednadžba (2.22) postaje:

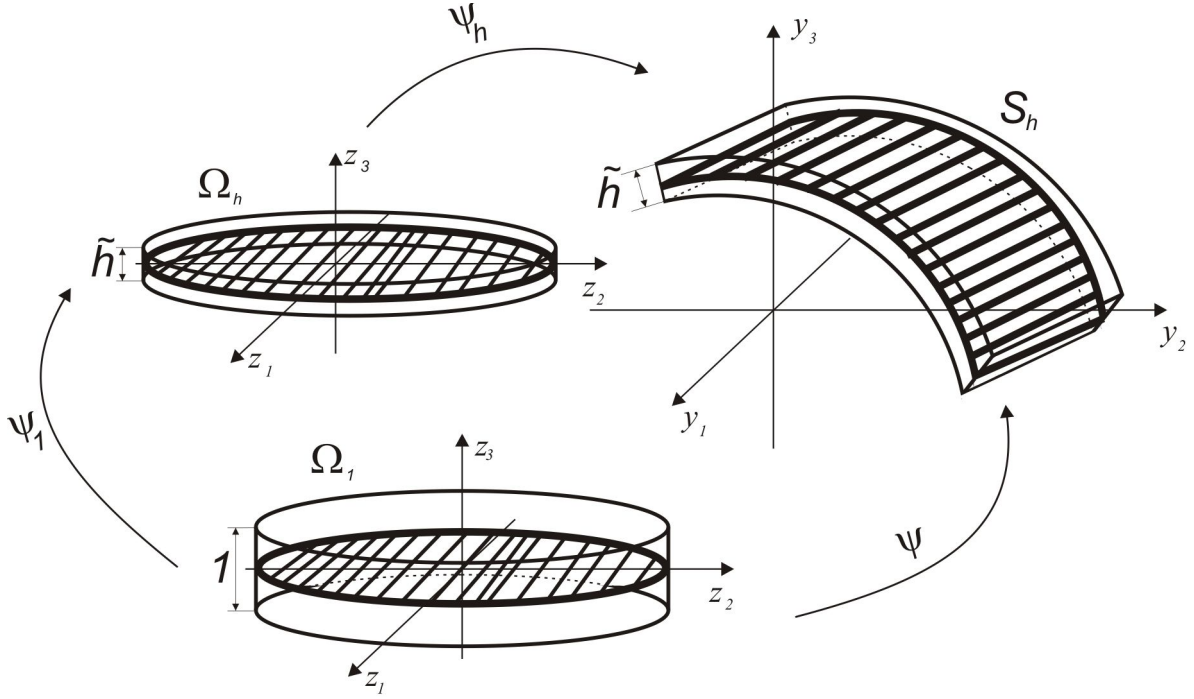
$$u(\mathbf{x}) = u_{inc}(\mathbf{x}) + k_0^2 \int_{\Omega_h} \left(1 - \frac{\varepsilon_0(\mathbf{y})}{h}\right) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \quad (2.24)$$

U granicama integracije javlja se debljina objekta. Za potrebe analize, zamijenom varijabli,

premjestimo parametar $\tilde{h}$ iz granica integracije u podintegralnu funkciju. Koristimo zamijenu varijabli:

$$z_3 = \tilde{h}z_3. \quad (2.25)$$

U nastavku rada koristit će se iste oznake za z_3 varijablu prije i poslije transformacije. Nakon transformacije (2.25) varijabla z_3 predstavljat će skaliranu varijablu. Definiramo skup $\Omega_1 = \Omega \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ koji predstavlja domenu parametrizacije.



Slika 2.6: Parametrizacija objekta S_h preko skupa Ω_1

Bezdimenzionalnost parametra h je jako bitna jer je jedino preko bezdimenzionalnog parametra moguće raditi asimptotsku analizu. U suprotnom, imat ćemo parametar koji ima dimenziju metra i koji će skalirati vrijednosti funkcija što nije poželjno jer se javlja problem s jedinicama. Transformacija (2.25) daje novi dio unutar metričkog tenzora koji iznosi $\tilde{h} = hd$. Prethodna transformacija daje integralnu jednadžbu pogodnu za asimptotsku analizu:

$$u(\mathbf{x}) = u_{inc}(\mathbf{x}) + dk_0^2 \int_{\Omega} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (h - \varepsilon_0(\mathbf{y})) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \quad (2.26)$$

Kao rješenje jednadžbe (2.26) pretpostavit ćemo perturbacijski red:

$$u(\mathbf{x}) \sim u_0(\mathbf{x}) + hu_1(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.27)$$

Pobuda u opisanom problemu je planarni val koji se može rastaviti u Taylorov red preko

točke na objektu S :

$$u_{inc}(\mathbf{x}) = u_{inc}(\mathbf{x}_0) + \nabla u_{inc}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.28)$$

Uvrštavanjem rastava (2.27) i (2.28) u jednadžbu (2.26) dobijemo jednadžbu:

$$u_0(\mathbf{x}) + hu_1(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(h^2) = u_{inc}(\mathbf{x}_0) + \nabla u_{inc}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathcal{O}(h^2) + dk_0^2 \int_{\Omega} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (h - \varepsilon_0(\mathbf{y})) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (u_0(\mathbf{y}) + hu_1(\mathbf{y}) + \dots) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \quad (2.29)$$

Promotrimo li detaljno jednadžbu (2.29) vidjet ćemo da se u njoj javljaju članovi uz različite potencije broja h . Grupiramo li sve članove reda $\mathcal{O}(1)$ dobijemo:

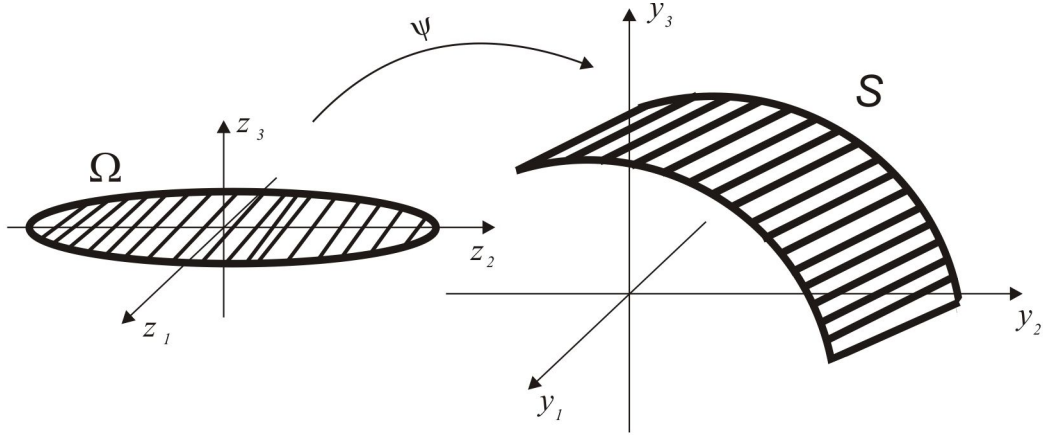
$$u_0(\mathbf{x}) = u_{inc}(\mathbf{x}_0) - dk_0^2 \int_{\Omega} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varepsilon_0(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_0(\mathbf{y}) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' \quad (2.30)$$

Jednadžba (2.30) opisuje ponašanje aproksimacije prvog reda u rastavu rješenja u u asimptotski red (2.27). Ta jednadžba je i dalje implicitna jednadžba po trodimenzionalnom objektu Ω_1 . Implicitnost jednadžbe nikako nećemo moći riješiti, ali ćemo pokušati reducirati dimenziju u smislu da integral po trodimenzionalnom objektu Ω_1 transformiramo u dvodimenzionalni integral po plohi Ω . Kako bi reducirali dimenziju problema potrebno je proučiti što se događa s jednadžbom u slučaju limesa $h \rightarrow 0$. Očekujemo da se jednadžba (2.30) pojednostavi u jednadžbu:

$$u_0(\mathbf{x}_0) = u_{inc}(\mathbf{x}_0) - dk_0^2 \int_{\Omega} \varepsilon_0(\mathbf{y}_0) \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) u_0(\mathbf{y}_0) \sqrt{|g_0|} d\Omega'. \quad (2.31)$$

Opravdamo li na neki način prelazak iz jednadžbe (2.30) u jednadžbu (2.31) imat ćemo asimptotski model za problem opisan jednadžbom (2.16). U tom slučaju reducirali smo trodimenzionalni problem na dvodimenzionalni problem te smo uštedjeli određenu količinu vremena i memorije kod numeričkog rješavanja problema (2.16).

Nakon što riješimo numerički integralnu jednadžbu (2.31) kako bi dobili vrijednosti funkcije u_0 na objektu S jednadžbu (2.16) koristit ćemo za računanje polja u bilo kojoj točki prostora uz pretpostavku da je dobiveno rješenje konstantno po varijabli z_3 .



Slika 2.7: Redukcija dimenzije modela S_h na model po objektu S odnosno Ω

2.2.2 Opravdanje postupka redukcije integralne jednadžbe s trodimenzionalnog objekta na dvodimenzionalni aproksimativni objekt u slučaju raspršenja skalarnih valova na tankom zakrivljenom objektu

Kako bi opravdali jednadžbu (2.31) potrebno je naći ocjenu razlike stvarnog i aproksimativnog rješenja te vidjeti konvergira li aproksimativno rješenje prema stvarnom rješenju, u kojem smislu te koliko brzo.

Definiramo stvarno rješenje v jednadžbe (2.26) kao:

$$v(\mathbf{x}) = u_{inc}(\mathbf{x}) + dk_0^2 \int_{\Omega} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (h - \varepsilon_0(\mathbf{y})) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}', \quad (2.32)$$

a aproksimativno rješenje jednadžbe kao:

$$u_0(\mathbf{x}_0) = u_{inc}(\mathbf{x}_0) - dk_0^2 \int_{\Omega} \varepsilon_0(\mathbf{y}_0) \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) u_0(\mathbf{y}_0) \sqrt{|g_0|} d\Omega' = \quad (2.33)$$

$$= u_{inc}(\mathbf{x}_0) - dk_0^2 \int_{\Omega} \varepsilon_0(\mathbf{y}_0) \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) u_0(\mathbf{y}_0) \sqrt{|g|} d\Omega'. \quad (2.34)$$

Rješenje integralne jednadžbe (2.32) je polje u definirano na objektu Ω_1 , dok je rješenje reducirane integralne jednadžbe (2.33) polje u_0 definirano na objektu Ω . Nakon što se izračuna ukupno rješenje v ili aproksimativno rješenje u_0 , ukupno polje u bilo kojoj točki prostora dobije se uvrštavanjem tih rješenja u početnu jednadžbu (2.16) te integriranjem po cijelom objektu. Kako bi usporedili potpuno i aproksimativno rješenje dovoljno je proširiti aproksimativno rješenje s objekta Ω na cijeli objekt Ω_1 te usporediti razliku ta dva rješenja na Ω_1 . Na objektu Ω_1 koji parametrizira plohu S_h debljine 1 želimo integrirati aproksimativno rješenje po poprečnoj dimenziji koja je debljine 1. To neće utjecati na ukupni rezultat jer je dobiveno aproksimativno

rješenje u_0 invarijantno po poprečnoj dimenziji. Dobije se:

$$u_0(\mathbf{x}_0) = u_{inc}(\mathbf{x}_0) - dk_0^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \epsilon_0(\mathbf{y}_0) \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) u_0(\mathbf{y}_0) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \quad (2.35)$$

Oduzimanjem jednačbi (2.32) i (2.35) dobijemo jednačbu:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x}_0) &= u_{inc}(\mathbf{x}) - u_{inc}(\mathbf{x}_0) + dhk_0^2 \int_{\Omega} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' + \\ &dk_0^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \epsilon_0(\mathbf{y}_0) (\phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) u(\mathbf{x}_0) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{x})) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Drugi integral u jednačbi (2.36) sadrži razliku $\phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) u(\mathbf{y}_0) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y})$. U slučajevima kao što je ovaj najjednostavnije je ubaciti jedan mješoviti član i rastaviti drugi integral na dva integrala, u ovom slučaju član $\phi(x_0, y_0) v(x)$. Nakon rastava drugog integrala na dva člana jednačba (2.36) prelazi se u jednačbu:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x}_0) &= u_{inc}(\mathbf{x}) - u_{inc}(\mathbf{x}_0) + dhk_0^2 \int_{\Omega} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' - \\ &dk_0^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \epsilon_0(\mathbf{y}_0) \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) (v(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x}_0)) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' + \\ &dk_0^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \epsilon_0(\mathbf{y}_0) v(\mathbf{y}) (\phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \end{aligned} \quad (2.37)$$

S desne strane jednačbe (2.37) postoje tri člana koje je posebno zasebno analizirati. Drugi integral s desne strane sadrži razliku $u(\mathbf{x}_0) - v(\mathbf{x})$ koja je jednaka lijevoj strani jednačbe. Definiranjem operatora koji je jednak drugom integralu moguće je prebaciti drugi integral s desne strane na lijevu stranu. To rezultira lijevom stranom jednačbe koja je jednaka obliku $I + k_0^2 A$ gdje je I jedinični, a A definirani operator. Iz definicije operatora A moguće je zaključiti da postoji šansa da taj operator bude kompaktan. Definiramo:

$$(Au)(\mathbf{x}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \epsilon_0(\mathbf{y}_0) \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) u(\mathbf{y}) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \quad (2.38)$$

Ako je ε_0 po dijelovima neprekidna funkcija, a Greenova funkcija slabo singularna onda je operator $A : L^2(S) \rightarrow L^2(S)$ kompaktan [1]. Preko definicije operatora A jednažba (2.37) prelazi u jednažbu:

$$(I + k_0^2 A)(v - u_0) = u_{inc}(\mathbf{x}) - u_{inc}(\mathbf{x}_0) + dhk_0^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' + dk_0^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \varepsilon_0(y_0) v(y) (\phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \quad (2.39)$$

U jednažbi (2.39) potrebno je dodatno analizirati i lijevu i desnu stranu. Na lijevoj strani jednažbe imamo operator oblika $I + k_0^2 A$ gdje je I jedinični operator. Ako bi A bio kompaktan operator onda bi po Rieszovim teoremima $I + A$ bio invertibilan operator s ograničenim inverzom [66]. Iz prethodne jednažbe dobije se da je razlika rješenja $v - u_0$ ograničena što s ograničenošću rješenja u_0 daje ograničenost rješenja v . S time je i prvi integral s desne strane ograničen što s h ispred integrala daje član reda $\mathcal{O}(h)$. Razlika $u_{inc}(\mathbf{x}) - u_{inc}(\mathbf{x}_0)$ je također reda $\mathcal{O}(h)$ jer je to razlika funkcije u_{inc} i njenog prvog člana u Taylorovom rastavu. Potrebno je još jedino pokazati što se događa s drugim integralom s desne strane jednažbe (2.39). U slučaju da je drugi integral s desne strane također reda $\mathcal{O}(h)$ imat ćemo konvergenciju aproksimativnog rješenja k stvarnom rješenju u nekoj normi brzinom $\mathcal{O}(h)$.

Lema 2.1. *Operator $I + k_0^2 A$ gdje je A definiran kao (2.38) je injektivan operator.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je jezgra operatora $I + k_0^2 A$ trivijalna, tj. da iz $(I + k_0^2 A)\varphi = 0$ slijedi da je $\varphi = 0$ [71].

Promatramo funkciju φ kao gustoću u definiciji rješenja problema raspršenja preko jednostrukog potencijala:

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \varepsilon_0(\mathbf{y}_0) \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \varphi(\mathbf{y}_0) \sqrt{|g_0|} dz'_1 dz'_2 = \int_S \varepsilon_0(\mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}. \quad (2.40)$$

Iz pretpostavke dolazi jednakost:

$$\varphi = -k_0^2 A \varphi \quad (2.41)$$

koja će trebati kasnije. Jednažba (2.40) rješenje je problema raspršenja na objektu S , tj. vrijedi:

$$\Delta w(\mathbf{x}) + k_0^2 w(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.42)$$

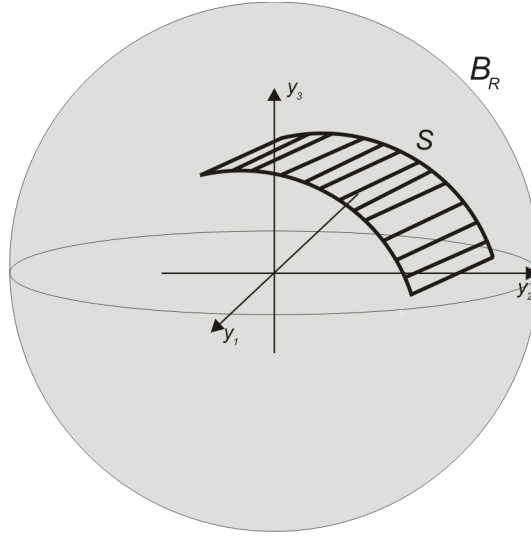
na $\mathbb{R}^3 \setminus S$. Iz svojstava jednostrukog potencijala proizlazi da on zadovoljava Sommerfeldov uvjet

zračenja te:

$$[w]_S = 0 \quad (2.43a)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial z_3} \right]_S = \varepsilon_0 \varphi, \quad (2.43b)$$

tj. da je rješenje preko jednostrukog potencijala neprekidno po cijelom prostoru te da ima skok u derivaciji koji odgovara podintegralnoj funkciji [66]. Uvedemo kuglu $B_R = B(0, R)$ radijusa R oko ishodišta dovoljno velikog radijusa R tako da cijeli objekt S stane u kuglu B_R .



Slika 2.8: Kugla oko ishodišta polumjera R

Primjenom Greenovog teorema unutar objekta $B_R \setminus S$ dobije se:

$$\int_{B_R \setminus S} \bar{w} \Delta w + |\nabla w|^2 = \int_{\partial B_R} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial r} + \int_S \bar{w} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}} = \int_{\partial B_R} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial r} + \int_S \bar{w} \left[\frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}} \right]_S. \quad (2.44)$$

Pomoću jednadžbe (2.42) u prvom integrandu dobijemo $|w|^2$. U zadnjem integralu iskoristimo definiciju skoka derivacije funkcije w danu formulom (2.43b) te definiciju funkcije w danu formulom (2.40). Iz formule (2.40) uz pomoć jednakosti (2.41) dobijemo:

$$w = A\varphi = -\frac{1}{k_0^2} \varphi. \quad (2.45)$$

Uvrštavanjem prethodne jednakosti u integral (2.44) dobijemo:

$$-k_0^2 \int_{B_R \setminus S} |w|^2 + \int_{B_R \setminus S} |\nabla w|^2 - \int_{\partial B_R} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{k_0^2} \int_S \varepsilon_0 |\varphi|^2 = 0. \quad (2.46)$$

Grupiranjem svih realnih dijelova u jednakosti (2.46) u jedan integral, a svih kompleksnih

dijelova u drugi dobije se:

$$\int_{B_R \setminus S} -k_0^2 |w|^2 + |\nabla w|^2 + \frac{1}{k_0^2} \int_S \epsilon_0 |\varphi|^2 - \int_{\partial B_R} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (2.47)$$

Iz prethodne jednakosti može se zaključiti da je $\text{Im} \left\{ \int_{\partial B_R} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial r} \right\} = 0$. Objekt S je tanka struktura pa je za ispravnu primjenu Greenovog teorema potrebno oko njega staviti otvoren skup U takav da vrijedi $S \subset U \subset B_R$ i to takav da je U po volji blizu objekta S . Sada možemo gledati ponašanje prethodnog integrala na $B_R \setminus U$. Na isti način dobijemo $\text{Im} \left\{ \int_{\partial B_R} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial r} \right\} = 0$. Po Rellichovom teoremu proizlazi da je $w = 0$ na $\mathbb{R}^3 \setminus U$ [1]. Kako je sa skupom U moguće doći po volji blizu objekta S slijedi da je $w = 0$ na $\mathbb{R}^3 \setminus S$. Iz definicije rješenja preko jednostrukog potencijala dobije se $w = 0$ na $\mathbb{R}^3$, te je s time i skok u derivaciji jednak 0. Iz definicije skoka (2.43b) slijedi $\varphi = 0$, tj. operator $I + k_0^2 A$ je injektivan. $\square$

Kao posljedicu prethodnog teorema dobijemo da postoji inverz operatora $I + k_0^2 A$, a iz svojstva takvog operatora znamo da mu je inverz ograničen [71]. Kako bi došli do konvergencije aproksimativnog rješenja k rješenju potpunog problema potrebno je pokazati ocjenu zadnjeg integrala s desne strane jednadžbe (2.39):

$$\left| \int_{\Omega_1} \epsilon_0(\mathbf{y}_0) v(\mathbf{y}) (\phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' \right| \leq \int_{\Omega_1} |\epsilon_0(\mathbf{y}_0) v(\mathbf{y}) (\phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))| \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \quad (2.48)$$

Iz svojstva jednadžbe proizlazi da je rješenje v ograničeno, a u uvjetima modela stoji da je ϵ_0 ograničena funkcija. Oba člana mogu se ocijeniti sup normom i izaći van iz integrala. Ostaje za ocijeniti dio:

$$\int_{\Omega_1} |\phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \quad (2.49)$$

Faktor $\frac{1}{4\pi}$ koji dolazi s Greenovom funkcijom ϕ bit će izostavljen u računu jer je to ionako konstanta koja će se pojaviti u ukupnoj konstanti kasnije. Uvrštavanjem Greenove funkcije (2.5) u jednadžbu (2.49) dobije se:

$$\int_{\Omega_1} \left| \frac{e^{-ik_0|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|}}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|} - \frac{e^{-ik_0|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right| \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \quad (2.50)$$

Nakon što se u prethodni integral ubaci međučlan $\frac{e^{-ik_0|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$ te iskoristiti nejednakost trokuta

dobije se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \left| \frac{e^{-ik_0|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|}}{|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|} - \frac{e^{-ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right| \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' \leq \\ & \int_{\Omega_1} \left| e^{-ik_0|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \right| \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' + \\ & \int_{\Omega_1} \left| \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \left(e^{-ik_0|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|} - e^{-ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \right| \sqrt{|g|} d\mathbf{z}'. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Prvi integral s desne strane nejednakosti (2.51) strane može se pojednostaviti na integral:

$$\int_{\Omega_1} \left| \frac{1}{|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right| \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' \quad (2.52)$$

kojeg je moguće ocijeniti primjenom Teorema o srednjoj vrijednosti diferencijalnog računa.

U ocjeni prethodnog integrala iskoristit ćemo Taylorov teorem za funkcije više varijabli:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.53)$$

Definiramo funkciju f takvu da vrijedi $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$. Tada vrijedi:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^3} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 - \mathbf{x} + \mathbf{x}_0). \quad (2.54)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (2.54) u jednadžbu (2.52) dobije se ocjena:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \left| \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^3} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \right| \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' + \int_{\Omega_1} \left| \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^3} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right| \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' \leq \\ & 2h \int_{\Omega_1} \left| \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^3} \right| \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' \leq 2h \int_{B_R} \frac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2} \sqrt{|g|} d\mathbf{z}' \leq Ch, \end{aligned} \quad (2.55)$$

zato što je podintegralna funkcija integrabilna, a vrijedi $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq h$ te $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| \leq h$. Prethodni integral je konačan iako je podintegralna funkcija singularna. U integralu se javlja dio $\sqrt{|g|}$ koji je u slučaju kugle B_R jednak $r^2 \sin(\theta)$ što zajedno sa singularitetom oblika $\frac{1}{r}$ daje integrabilnu podintegralnu funkciju na skupu B_R .

Za ocjenu drugog integrala nejednakosti (2.51) definiramo funkciju $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{-ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ za koju se dobije derivacija:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = e^{-ik_0|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|} \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|}. \quad (2.56)$$

Ocjena integrala ide po istom postupku kao i s prethodnim integralom. Uvrštavanjem obje

ocjene u nejednakost (2.51) dobije se ukupna ocjena:

$$\int_{S_1} |\phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| d\mathbf{y} \leq Ch, \quad (2.57)$$

za neku konstantu C neovisnu o h , ali ovisnu o k_0 i o fizičkoj debljini d . Uvrštavanjem ocjene (2.57) u jednadžbu (2.39), uzimanjem sup norme te primjenom nejednakosti trokuta dobije se ocjena:

$$\|(I + k_0^2 A)(v - u_0)\|_\infty \leq h + C_1 h \|v\|_\infty + C_2 \|v\|_\infty \leq h + C_3 h \|v\|_\infty. \quad (2.58)$$

Zato što je operator $(I + k_0^2 A)^{-1}$ ograničen dobijemo da vrijedi:

$$\|(v - u_0)\|_\infty \leq h + C_3 h \|v\|_\infty \leq h + C_3 h \|v - u_0\|_\infty + C_3 h \|u_0\|_\infty, \quad (2.59)$$

što sveukupno daje:

$$(1 - Ch)\|(v - u_0)\|_\infty \leq Ch. \quad (2.60)$$

Za mali h vrijedi ocjena:

$$\|(v - u_0)\|_\infty \leq Ch \quad (2.61)$$

koja govori da aproksimativno rješenje konvergira prema stvarnom rješenju kada $h \rightarrow 0$ i to brzinom $\mathcal{O}(h)$.

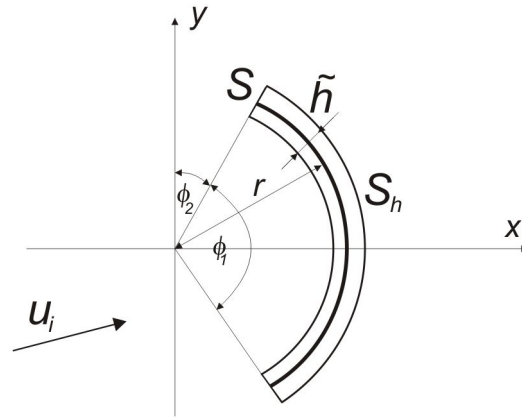
2.3 Primjena prethodno izvedene aproksimacije na raspršenje elektromagnetskih valova TM_z polarizacije na dvodimenzionalnom dielektričnom objektu

Primijenit ćemo prethodnu analizu na raspršenje elektromagnetskih valova TM_z polarizacije na dvodimenzionalnom dielektričnom objektu. Raspršenje elektromagnetskih valova u dvodimenzionalnom slučaju opisano je Helmholtzovom parcijalnom diferencijalnom jednadžbom (2.9) koja korištenjem konvolucije desne strane sjednadžbe s Greenovom funkcijom prelazi u integralnu jednadžbu (2.16). Razlika između trodimenzionalnog i dvodimenzionalnog slučaja je u Greenovoj funkciji koja u dvodimenzionalnom slučaju glasi:

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k_0 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (2.62)$$

U slučaju dvodimenzionalnog problema sve ocjene su iste jedino što imamo drugačiju Greenovu funkciju.

Objekt S_h je homogen objekt s parametrima $\varepsilon_0 = 10$ i $h = 10^{-3}$ m. Ostali parametri su $\phi_1 = 180^\circ$, $\phi_1 = 0^\circ$, $r = 0.03$ m. Uspoređivat ćemo vrijednosti ukupnog polja u na liniji s koor-

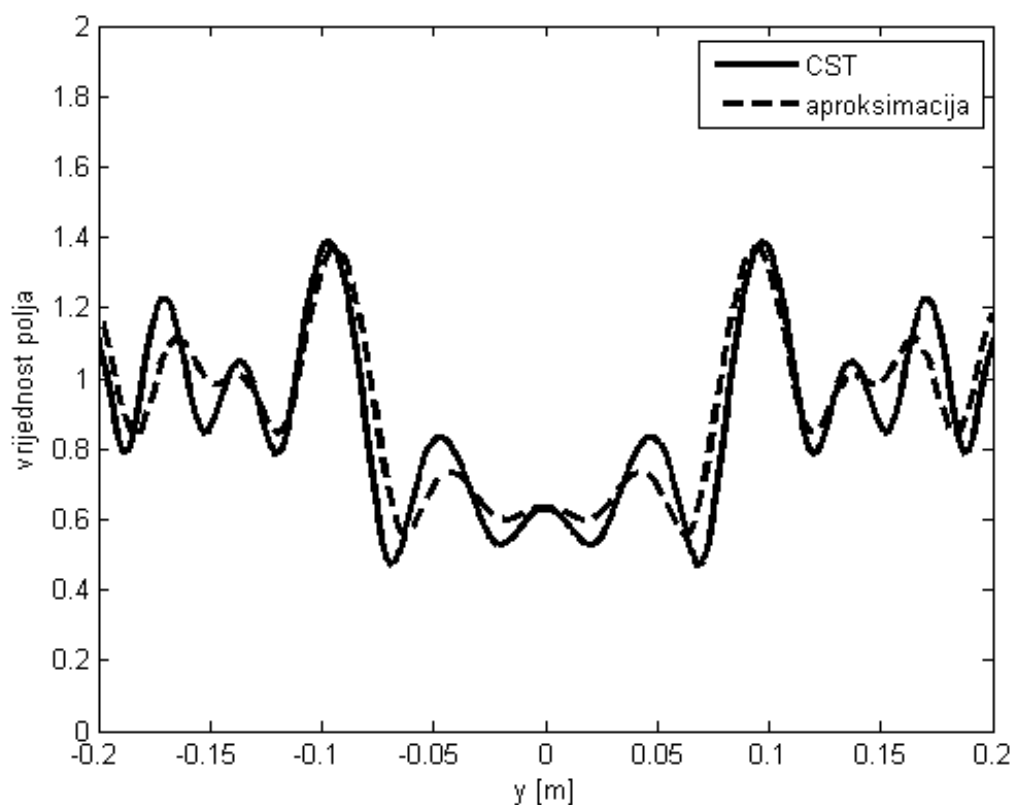


Slika 2.9: Objekt na kojem ćemo promatrati raspršenje skalarnog vala

dinamama $x = 0.15$ m te koordinatom y koja se mijenja u intervalu $[-0.2 \text{ m}, 0.2 \text{ m}]$. Upadni val bit će planarni val frekvencije $f = 10 \text{ GHz}$ s koeficijentom smjera $\mathbf{k} = (1, 0)^T$. Osim usporedbi ukupnog polja, tražit ćemo i vrijednost $\|v - u_0\|_\infty$. Opisani problem nije moguće riješiti analitičkim metodama nego je potrebno koristiti neku od numeričkih metoda za rješavanje integralnih jednadžbi [62, 70]. Korištena je metoda momenta s konstantnim baznim i testnim funkcijama. One će nam dati dovoljnu točnost da pokažemo konvergenciju aproksimativnog modela i ocjenu greške. U korištenju numeričke metode za integralnu jednadžbu javlja se problem integriranja Greenove funkcije na diskretiziranoj domeni. U slučaju kada varijabla $\mathbf{x}$ nije unutar elementa čiji utjecaj gledamo nema nikakvih problema jer je $\mathbf{x}$ izvan domene integracije pa Greenova funkcija nije singularna. U slučaju kada $\mathbf{x}$ jest u domeni integracije javlja se singularna funkcija pod integralom. Taj integral je moguće riješiti analitički aproksimacijom Greenove funkcije za male argumente ili numerički nekom od metoda za numeričko rješavanje singularnih integrala [62]. U našem slučaju korištene su rutine za numeričku integraciju singularnih integrala implementirane u Matlabu.

Na Slici 2.10 prikazano je rješenje opisanog problema dobiveno pomoću specijaliziranog programa za računanje elektromagnetskih pojava (CST Microwave Studio) te rješenje dobiveno opisanom aproksimativnom metodom. U CST Microwave Studio programu nije moguće riješiti dvodimenzionalan problem pa je modeliran trodimenzionalan cilindričan problem, tj. objektu sa slike 2.9 dodana je treća dimenzija. U tom slučaju rješava se raspršenje planarnog vala na trodimenzionalnom cilindričnom objektu. Zato što cilindrična struktura modelirana u CST Microwave Studiu ima konačnu duljinu dolazi do male razlike između izračunatog polja u opisanim slučajevima.

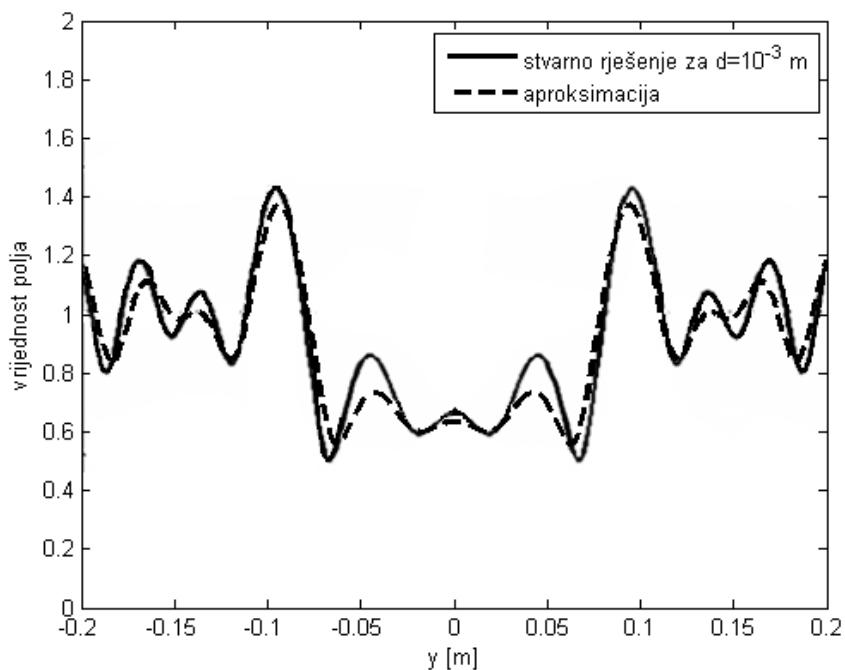
Na slici 2.11 prikazana je usporedba ukupnog polja izračunatog aproksimativnim modelom te potpunim modelom za problem opisan jednadžbom (2.16). Na grafu se može vidjeti da je rješenje aproksimativnog modela blizu rješenja potpunog dvodimenzionalnog modela za $h = 10^{-3} \text{ m}$. Na slici 2.12 prikazano je aproksimativno rješenje i rješenje potpunog dvodimenzi-



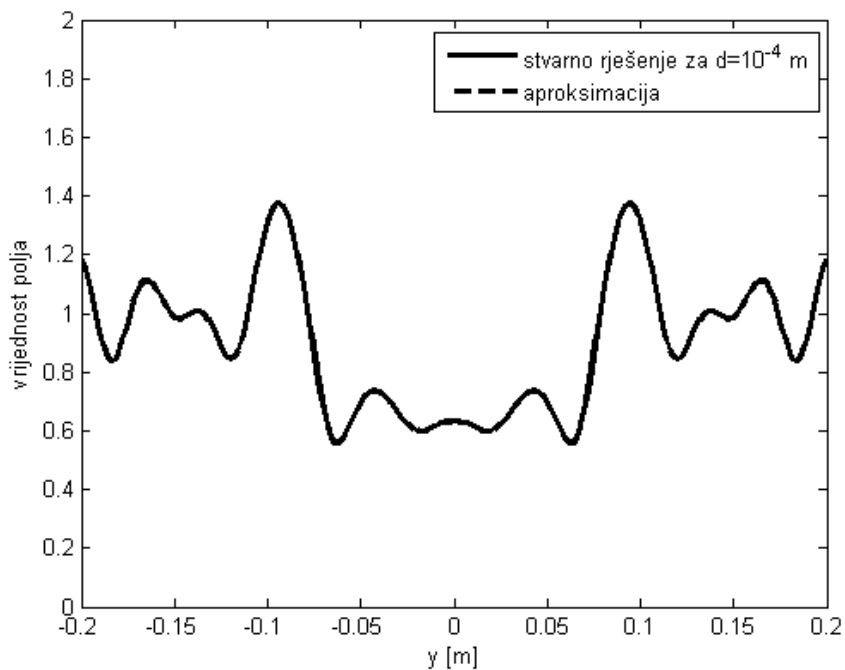
Slika 2.10: Rješenje problema raspršenja na opisanom dvodimenzionalnom objektu

onalnog modela za $h = 10^{-4}$ m. Možemo vidjeti da se te dvije krivulje ne razlikuju. Izračunato aproksimativno rješenje dobro aproksimira rješenje potpunog modela, a dobili smo značajnu uštedu na vremenu i memoriji. Na slici 2.13 prikazana je razlika između aproksimativnog i potpunog rješenja u $\|\cdot\|_\infty$ normi te teorijske pretpostavke o brzini konvergencije. Konstanta C u teorijskoj pogrešci izračunata je iz točke u kojoj je pogreška između dva rješenja najmanja. Tada je iskorištena pretpostavka o linearnoj brzini konvergencije. Iz te dvije krivulje možemo vidjeti da se izračunata pogreška pada linearno, kao što je i predviđeno ocjenom pogreške (2.61).

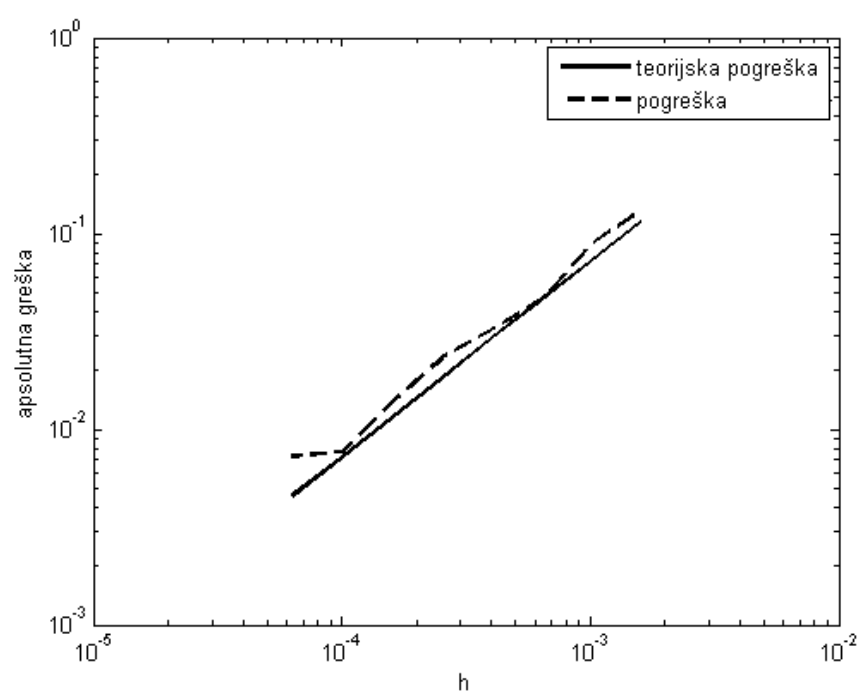
Prednost predložene aproksimacije je u smanjenju zahtjeva na numerički izračun. Rješavanjem aproksimativnog i potpunog modela moguće je izmjeriti vrijeme potrebno za numeričko računanje jednog i numeričko računanje drugog problema. Uspoređeno je vrijeme potrebno za rješavanje aproksimativnog modela i potpunog modela za $h = 10^{-4}$ m. Objekt je diskretiziran velikim brojem elemenata kako bi se smanjila numerička pogreška. U diskretizaciji je 200 elemenata u smjeru ϕ te 10 elemenata u smjeru r . Apsolutna pogreška iznosi $\|v - u_0\|_\infty = 0.0075$. Vrijeme izvođenja programa za potpuni 2D model je 5.812 s, a za aproksimativni 1D model iznosi 0.108 s, tj. više od reda veličine brže uz zadovoljavajuću točnost. Redukcijom dimenzije problema uštedjeli smo i na veličini matrice diskretizacije. Smanjenje veličine matrice ide s brojem elemenata diskretizacije u smjeru r . U opisanom primjeru matrica sustava za aproksimativni model je 10 puta manja od matrice sustava za potpuni model.



Slika 2.11: Usporedba ukupnog polja između rješenja 3D modela za $h = 10^{-3}$ m te aproksimativnog rješenja pri upadu vala s valnim vektorom $\mathbf{k} = (1, 0)^T$



Slika 2.12: Usporedba ukupnog polja između rješenja 3D modela za $h = 10^{-4}$ m te aproksimativnog rješenja pri upadu vala s valnim vektorom $\mathbf{k} = (1, 0)^T$



Slika 2.13: Ponašanje pogreške između rješenja aproksimativnog i potpunog 3D modela pri upadu vala s valnim vektorom $\mathbf{k} = (1, 0)^T$

Poglavlje 3

Greenova funkcija za jednoosni anizotropni slučaj u kojem se mogu raspregnuti jednadžbe za $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ polje

U ovom poglavlju dan je izvod Greenove funkcije unutar jednoosno anizotropnog planarnog ili cilindričnog homogenog prostora. Promatrat će se slučajevi u kojima struja teče po ravnini okomitoj na os anizotropije, na pravcu u smjeru osi anizotropije te po cilindru poravnatom s anizotropnom osi. U nabrojanim slučajevima moguće je raspregnuti sustav jednadžbi koji opisuje model na jednu jednadžbu koja opisuje određenu komponentu električnog polja $\mathbf{E}$ i jednu jednadžbu koja opisuje određenu komponentu magnetizirajućeg polja $\mathbf{H}$. Riječ je o komponentama koje gledaju u smjeru anizotropije. Dobivene jednadžbe nisu međusobno povezane kao što će biti povezane jednadžbe za $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ polje u sljedećem poglavlju. U tom slučaju morat ćemo rješavati sustav jednadžbi, a ne jednu jednadžbu kao što je ovdje slučaj [37]. Preko komponenti polja koje gledaju u smjeru anizotropije te pomoću Maxwellovih jednadžbi moguće je doći do izraza za sve ostale komponente električnog i magnetizirajućeg polja [72]. Potreba za računanjem polja unutar anizotropnog materijala je velika zato što su primjene takvih materijala u zadnjih nekoliko godina sve veće [8]. Izvod modela radit će se u spektralnoj domeni tj. nakon primjene Fourierove transformacije na početne Maxwellove jednadžbe u anizotropnom mediju. Greenove funkcije u spektralnoj domeni predmet su intenzivnog istraživanja zadnjih 30 godina, posebice vezano uz strukture načinjene od metamaterijala [53, 73].

Izvedena metoda omogućuje unaprijeđenje G1DMULT algoritma s homogenih izotropnih struktura na jednoosno anizotropne strukture. G1DMULT algoritam je algoritam za izračun Greenove funkcije unutar izotropne višeslojne planarne, cilindrične ili sferne strukture [31]. Navedeni algoritam našao je široku primjenu u analizi planarnih i konformnih mikrotrakastih antena [32, 33].

3.1 Oblici anizotropije

Parametre anizotropnog materijala opisujemo tenzorskom veličinom koja se u odabranom koordinatnom sustavu može reprezentirati matricom. Općenito je to puna matrica oblika:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

U materijalu s parametrima oblika (3.1) potrebno je za potpuni opis polja raditi sa svih 6 komponenti električnog i magnetskog polja. Ako su elementi na mjestima xz , yz , zx i zy jednaki nuli onda se parametri mogu zapisati kao:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

te se polja E i H mogu rastaviti na transversalne i longitudinalne komponente, gdje su transversalne komponente one komponente koje se nalaze u xy ravnini, a longitudinalna komponenta je komponenta koja gleda u smjeru osi z [74]. U slučaju kružno cilindrične strukture, transformacijom koordinata, moguće je prethodnu anizotropiju strukture svesti na problem koji se može opisati dijagonalnom matricom:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} . \quad (3.3)$$

s općenito različitim vrijednostima na sva tri dijagonalna mjesta. Takav materijal zove se dvoosno anizotropni materijal. U svim prethodnim slučajevima nije moguće raspregnuti E i H komponente polja nego su nam potrebne obje komponente za cjelokupni opis polja. Metoda rješavanja problema kod cilindričnih struktura kod kojih se ne mogu raspregnuti jednadžbe za E i H polja opisana je u Poglavlju 4. U ovom poglavlju bavit ćemo se jednoosno anizotropnim

materijalom. To je materijal čiji se parametri mogu reprezentirati matricama:

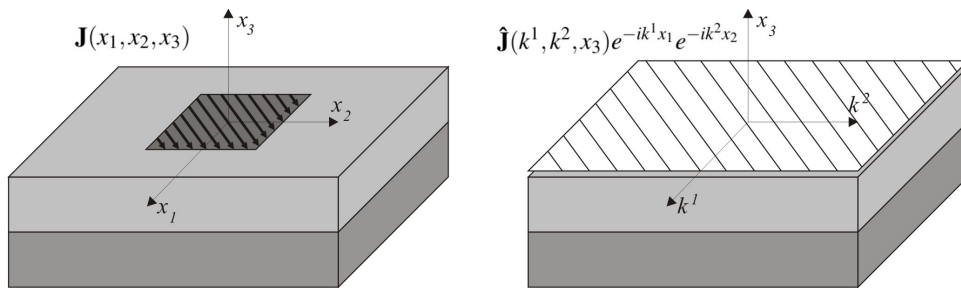
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\rho\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\rho\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} . \quad (3.4)$$

u cilindričnom slučaju te matricama:

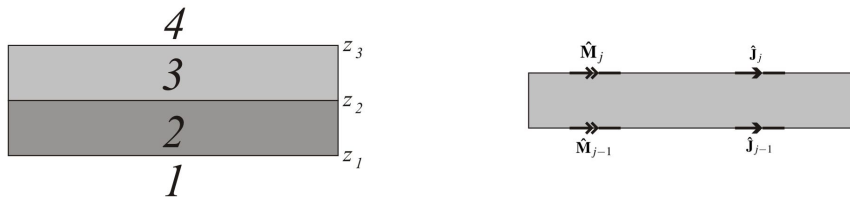
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} . \quad (3.5)$$

u planarnom slučaju. Kod planarnog jednoosno anizotropnog materijala nije bitno koja os je os anizotropije jer se jednostavnim rotacijama koordinatnog sustava osi mogu mijenjati. Ključno je da u dvije osi imamo isti parametar. U slučaju jednoosno anizotropnih problema moguće je koristiti G1DMULT algoritam.

3.2 Opis G1DMULT algoritma

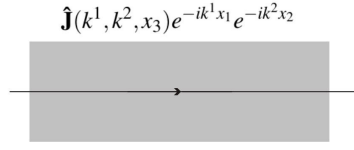


Slika 3.1: Prelazak u spektralnu domenu



Slika 3.2: Rastav višeslojne strukture

G1DMULT algoritam je algoritam za računanje Greenove funkcije planarne, cilindrične i sferne višeslojne strukture u spektralnoj domeni za strukture kod kojih je moguće raspregnuti



Slika 3.3: Zračenje u anizotropnom homogenom prostoru zbog prisustva strujnog izvora $\hat{\mathbf{J}}$

polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$. To su strukture kod kojih su slojevi ili homogeni ili jednoosno anizotropni. Algoritam se temelji na zamjeni stvarnog problema s ekvivalentnim problemima, po jednim za svaki sloj, kod kojih su nepoznanice ekvivalentne električne i magnetske struje. Te struje se zatim transformiraju pomoću Fourierove transformacije u spektralnu domenu. U slučaju planarne strukture kod koje struje leže u xy ravnini koristi se Fourierova transformacija po varijablama x_1 i x_2 :

$$\hat{u}(k^1, k^2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, x_3) e^{ik^1 x_1} e^{ik^2 x_2} dx_1 dx_2. \quad (3.6)$$

Pomoću te Fourierove transformacije trodimenzionalni izvor je transformiran u cijelu ravninu po kojoj teče struja. Ako je izvor infinitezimalno tanak u smjeru x_3 dobit ćemo po jednu diskretnu ravninu po kojoj teče struja za svaki izvor kojeg smo zamijenili. U suprotnom imamo kontinuirani izvor struje u smjeru x_3 . Svaka ravnina po kojoj teče struja zrači dva planarna vala u dva poluprostora, jedan ispod, a drugi iznad ravnine po kojoj teče struja. Zbog prisutnosti višeslojne strukture imat ćemo reflektirane valove i valove koji su došli iz susjednih struktura koji u smjeru x_1 i x_2 imaju $e^{ik^1 x_1}$, odnosno $e^{ik^2 x_2}$ ovisnost. U svim slojevima valovi će imati iste ovisnosti u smjeru x_1 i x_2 . Zato je nepoznata samo promjena vala u smjeru okomitom na granicu između dva sloja što nam daje jednodimenzionalan problem. Algoritam se bazira na podjeli problema na ekvivalentan problem po svakom sloju unutar kojeg se polje opisuje kao polje nastalo zračenjem ekvivalentnog izvora na granici između dva sloja. Više o G1DMULT algoritmu možete pronaći u članku [31] i doktorskom radu [75]. Shematski prikaz G1DMULT algoritma prikazan je na slikama 3.1, 3.2 i 3.3. G1DMULT algoritam mogao bi se koristiti i kod dvoosno anizotropnih planarnih materijala, ali bi se tada polja koja zrače slojevi struje trebala predstaviti s dva planarna vala u svakoj poluravnini što bi značajno kompliciralo algoritam. Izvod polja kod dvoosnih planarnih materijala prikazan je u članku [29].

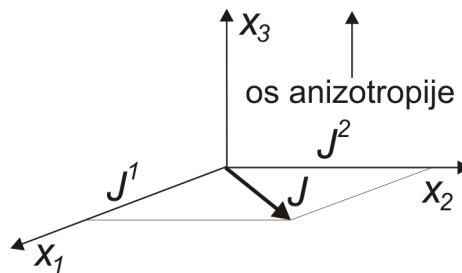
3.3 Strujni izvor nalazi se u ravnini

Neka su $\mathbf{E}, \mathbf{H}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ električno i magnetizirajuće polje. Parametri ϵ i μ bit će reprezentirani dijagonalnim matricama. Prostor u kojem se nalazimo je jednoosno anizotropan prostor što znači da matrice parametara imaju dva ista koeficijenta na dijagonali i trećeg koji je različit. Jednoosna anizotropija omogućuje razdvajanje jednadžbi za polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ što rezultira time da je za cjelokupni opis problema dovoljno odvojeno rješavati dobivene jednadžbe i to samo za

jednu komponentu polja. Sve ostale komponente moguće je izraziti pomoću već izračunatih komponenti. U planarnom slučaju razlikuju se dvije situacije. U prvoj struja teče u ravnini okomitoj na os anizotropije, a u drugoj struja teče u ravnini koja sadrži os anizotropije.

3.3.1 Strujni izvor nalazi se u ravnini okomitoj na os anizotropije

Promatramo slučaj u kojem je smjer struje ortogonalan na os anizotropije. Postavit ćemo koordinatni sustav tako da je os x_3 os anizotropije. U tom slučaju tenzori relativne permitivnosti i relativne permeabilnosti reprezentirani su dijagonalnim matricama tj. imaju elemente različite od nule samo uz dijadske elemente $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$.



Slika 3.4: Struja teče u ravnini okomitoj na os anizotropije

U našem su slučaju koeficijenti uz bazne elemente $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ jednaki, a koeficijent uz element $\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ je različit od prva dva koeficijenta:

$$\varepsilon = \varepsilon_{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \varepsilon_{11}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \varepsilon_{33}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (3.7)$$

$$\mu = \mu_{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mu_{11}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mu_{33}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (3.8)$$

Budući da je os anizotropije u smjeru osi x_3 sve ostale komponente polja mogu se dobiti preko x_3 komponente električnog polja. U ovom slučaju ideja je pronaći diferencijalnu jednađbu koja opisuje x_3 komponentu električnog polja. Kombiniranjem rotorskih Maxwellovih jednađbi te uz Gaussov zakon za električno polje i prethodno opisane rubne uvjete dobijemo sustav koji opisuje električno polje opisanog problema:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (3.9a)$$

$$\text{div}(\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}) = 0 \quad (3.9b)$$

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = \mathbf{J}_s \quad (3.9c)$$

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0. \quad (3.9d)$$

Pomoću Definicije 1.6 iz sustava jednađbi (3.9) dobije se jednađba za komponentu polja u smjeru anizotropne osi. U problemu sa slike 3.4 to je moguće napraviti preko komponente u

smjeru vektora $\mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \epsilon \mathbf{E} &= \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_{ij}} e_i \otimes e_j \epsilon_{mnp} \partial_n E^p e_m \right) - k_0^2 \epsilon \mathbf{E} = \\ \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_{ij}} \epsilon_{jnp} \partial_n E^p e_i \right) - k_0^2 \epsilon \mathbf{E} &= \epsilon_{rst} \partial_s \frac{1}{\mu_{tj}} \epsilon_{jnp} \partial_n E^p e_r - k_0^2 \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_{rst} \epsilon_{jnp} \frac{1}{\mu_{tj}} \partial_{ns}^2 E^p e_r - k_0^2 \epsilon \mathbf{E}. \end{aligned}$$

U problemu sa slike 3.4 dovoljna je samo jednadžba za x_3 komponentu električnog polja. Treba pogledati prethodnu jednadžbu za indeks $r = 3$. Tada će ostati samo dvije mogućnosti za indekse s i t :

$$\epsilon_{3st} \epsilon_{jnp} \frac{1}{\mu_{tj}} \partial_{ns}^2 E^p - k_0^2 \epsilon_{33} E^3 = \epsilon_{321} \epsilon_{jnp} \frac{1}{\mu_{1j}} \partial_{n2}^2 E^p + \epsilon_{312} \epsilon_{jnp} \frac{1}{\mu_{2j}} \partial_{n1}^2 E^p - k_0^2 \epsilon_{33} E^3. \quad (3.10)$$

Zato što je tenzor permeabilnosti dijagonalan u obzir dolaze samo elementi kod kojih je $j = 1$ i $j = 2$. To ostavlja samo dvije mogućnosti za indekse n i s . Uvrštavanjem tih kombinacija i uz činjenicu da je $\mu_{11} = \mu_{22}$ iz gornje jednadžbe dobijemo jednadžbu za x_3 komponentu polja:

$$\partial_{31}^2 E^1 - \partial_{11}^2 E^3 - \partial_{22}^2 E^3 + \partial_{32}^2 E^2 - k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{33} E^3 = 0. \quad (3.11)$$

Gaussovog zakona za električno polje daje nam jednadžbu koja povezuje sve tri komponente električnog polja $\mathbf{E}$. Permitivnost slobodnog prostora je konstantna pa ona može izaći izvan divergencije. Korištenjem Definicije 1.5 uz činjenicu da je relativna permeabilnost također konstantna po komponentama dobije se jednadžba koja povezuje derivacije sve tri komponente polja $\mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} \nabla (\epsilon \mathbf{E}) : I &= \partial_k (\epsilon E) \otimes e_k : I = \partial_k (\epsilon_{ij} e_i \otimes e_j E^m e_m) \otimes e_k : I = \partial_k (\epsilon_{ij} E^j e_i) \otimes e_k : I \\ &= \epsilon_{ij} \partial_k E^j (e_i \otimes e_k) : (e_l \otimes e_l) = \epsilon_{lj} \partial_l E^j = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

U navedenoj geometriji vrijedi $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$ i izvandijagonalni elementi su jednaki 0 što daje jednostavnu vezu derivacija sve tri komponente električnog polja:

$$\epsilon_{lj} \partial_l E^j = \epsilon_{11} \partial_1 E^1 + \epsilon_{11} \partial_2 E^2 + \epsilon_{33} \partial_3 E^3 = 0. \quad (3.13)$$

Zato što je jednaka permitivnost u osima x_1 i x_2 , te zato što struja teče u smjeru anizotropne osi može se dobiti veza između sve tri komponente električnog polja. Pomoću te veze moguće je izraziti derivacije prve dvije komponente polja preko derivacije komponente u smjeru anizotropne osi. Ta veza omogućuje svođenje jednadžbe (3.11) na jednadžbu u kojoj se javlja samo komponenta električnog polja E^3 . Uvrštavanjem jednadžbe:

$$\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 = -\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} \partial_3 E^3. \quad (3.14)$$

u jednadžbu (3.11) dobije se jednadžba koja opisuje komponentu električnog polja E^3 :

$$\partial_{11}^2 E^3 + \partial_{22}^2 E^3 + \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} \partial_{33}^2 E^3 + k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{33} E^3 = 0. \quad (3.15)$$

Jednadžbu za komponentu polja H^3 nije potrebno posebno izvoditi nego ju je moguće dobiti primjenom dualnosti:

$$\partial_{11}^2 H^3 + \partial_{22}^2 H^3 + \frac{\mu_{33}}{\mu_{11}} \partial_{33}^2 H^3 + k_0^2 \mu_{33} \epsilon_{11} H^3 = 0. \quad (3.16)$$

Dobivena jednadžba za komponentu električnog polja E^3 nije standardna Helmholtzova parcijalna diferencijalna jednadžba jer sadrži različite konstante uz različite druge derivacije komponente polja E^3 . Primjenom Fourierove transformacije po varijablama x_1 i x_2 parcijalna diferencijalna jednadžba (3.15) prelazi u običnu diferencijalnu jednadžbu po varijabli x_3 uz transformirane rubne uvjete:

$$-(k^1)^2 \hat{E}^3 - (k^2)^2 \hat{E}^3 + \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} \partial_{33}^2 \hat{E}^3 + k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{33} \hat{E}^3 = 0 \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{v} \times (\hat{\mathbf{H}}_+ - \hat{\mathbf{H}}_-) = \hat{\mathbf{J}}_s \quad (3.17b)$$

$$\mathbf{v} \times (\hat{\mathbf{E}}_+ - \hat{\mathbf{E}}_-) = 0. \quad (3.17c)$$

Ova jednadžba jednaka je Helmholtzovoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi za komponentu polja $\hat{E}^3$ uz novi koeficijent k_E . Korištenjem dualnosti moguće je dobiti i odgovarajuću jednadžbu za komponentu magnetizirajućeg polja $\hat{H}^3$. Te dvije jednadžbe opisuju cijeli problem sa slike 3.4 zato što je moguće rastaviti problem posebno na problem za polje $\hat{\mathbf{E}}$ i posebno na problem za polje $\hat{\mathbf{H}}$. U sljedećem poglavlju upravo će to biti najveći problem jer kod općenite anizotropne strukture to nije moguće i potrebno je rješavati sustav diferencijalnih jednadžbi koji povezuje komponente polja $\hat{E}^3$ i $\hat{H}^3$. Nakon uvođenja novih konstanti sustav za komponentu polja $\hat{E}^3$ postane:

$$\partial_{33}^2 \hat{E}^3 + k_E^2 \hat{E}^3 = 0 \quad (3.18a)$$

$$k_E^2 = k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{33} - \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}} \beta^2, \quad (3.18b)$$

a sustav za komponentu polja $\hat{H}^3$ transformira se u :

$$\partial_{33}^2 \hat{H}^3 + k_H^2 \hat{H}^3 = 0 \quad (3.19a)$$

$$k_H^2 = k_0^2 \mu_{33} \epsilon_{11} - \frac{\mu_{11}}{\mu_{33}} \beta^2 \quad (3.19b)$$

uz supstituciju $\beta^2 = (k^1)^2 + (k^2)^2$.

Fizikalno smisljena rješenja Helmholtzove obične diferencijalne jednadžbe u poluprostoru mogu se dobiti kao kombinacija kompleksnih eksponencijala uz Sommerfeldov uvjet zračenja [76]:

$$\hat{E}_3(k^1, k^2, x_3) = \begin{cases} Ae^{-ik_E x_3}, & x_3 > 0 \\ Be^{ik_E x_3}, & x_3 < 0 \end{cases} \quad (3.20a)$$

$$\hat{H}_3(k^1, k^2, x_3) = \begin{cases} Ce^{-ik_H x_3}, & x_3 > 0 \\ De^{ik_H x_3}, & x_3 < 0. \end{cases} \quad (3.20b)$$

Ostale komponente električnog polja $\hat{\mathbf{E}}$ i magnetizirajućeg polja $\hat{\mathbf{H}}$ moguće je izraziti preko komponenti polja $\hat{E}^3$ i $\hat{H}^3$. Primjenom Fourierove transformacije na Faradayev zakona dobije se sustav:

$$ik^2 \hat{E}^3 - \partial_3 \hat{E}^2 = -i\omega\mu_0\mu_{11} \hat{H}^1 \quad (3.21a)$$

$$\partial_3 \hat{E}^1 - ik^1 \hat{E}^3 = -i\omega\mu_0\mu_{11} \hat{H}^2 \quad (3.21b)$$

$$ik^1 \hat{E}^2 - ik^2 \hat{E}^1 = -i\omega\mu_0\mu_{33} \hat{H}^3 \quad (3.21c)$$

iz kojeg je moguće izraziti komponente $\hat{H}^1$ i $\hat{H}^2$ polja $\hat{\mathbf{H}}$ preko komponenti polja $\hat{\mathbf{E}}$:

$$\hat{H}^1 = -\frac{k^2}{\omega\mu_0\mu_{11}} \hat{E}^3 - \frac{i}{\omega\mu_0\mu_{11}} \partial_3 \hat{E}^2 \quad (3.22a)$$

$$\hat{H}^2 = \frac{i}{\omega\mu_0\mu_{11}} \partial_3 \hat{E}^1 + \frac{k^1}{\omega\mu_0\mu_{11}} \hat{E}^3. \quad (3.22b)$$

Na isti način, pomoću Ampereovog zakona, moguće je izraziti komponente polja $\hat{E}^1$ i $\hat{E}^2$ preko komponenti polja $\hat{\mathbf{H}}$:

$$\hat{E}^1 = \frac{k^2}{\omega\epsilon_0\epsilon_{11}} \hat{H}^3 + \frac{i}{\omega\epsilon_0\epsilon_{11}} \partial_3 \hat{H}^2 \quad (3.23a)$$

$$\hat{E}^2 = -\frac{i}{\omega\epsilon_0\epsilon_{11}} \partial_3 \hat{H}^1 - \frac{k^1}{\omega\epsilon_0\epsilon_{11}} \hat{H}^3. \quad (3.23b)$$

U prethodnim jednadžbama možemo uočiti da komponenta $\hat{E}^1$ ovisi o komponentama $\hat{H}^3$ i $\partial_3 \hat{H}^2$ dok komponenta $\hat{H}^2$ ovisi o komponentama $\partial_3 \hat{E}^1$ i $\hat{E}^3$. Uvrštavanjem izraza za komponentu $\hat{H}^2$ u izraz za komponentu $\hat{E}^1$ dobijemo Helmholtzovu običnu diferencijalnu jednadžbu za komponentu $\hat{E}^1$ kojoj su na desnoj strani samo komponente $\hat{E}^3$ i $\hat{H}^3$ ili njihove derivacije.

Na sličan način moguće je dobiti jednadžbe i za sve ostale komponente polja:

$$\partial_{33}^2 \hat{E}^1 + k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{11} \hat{E}^1 = \omega \mu_0 \mu_{11} k^2 \hat{H}^3 + ik^1 \partial_3 \hat{E}^3 \quad (3.24a)$$

$$\partial_{33}^2 \hat{E}^2 + k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{11} \hat{E}^2 = -\omega \mu_0 \mu_{11} k^1 \hat{H}^3 + ik^2 \partial_3 \hat{E}^3 \quad (3.24b)$$

$$\partial_{33}^2 \hat{H}^1 + k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{11} \hat{H}^1 = ik^1 \partial_3 \hat{H}^3 - \omega \epsilon_0 \epsilon_{11} k^2 \hat{E}^3 \quad (3.24c)$$

$$\partial_{33}^2 \hat{H}^2 + k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{11} \hat{H}^2 = ik^2 \partial_3 \hat{H}^3 + \omega \epsilon_0 \epsilon_{11} k^1 \hat{E}^3. \quad (3.24d)$$

Teorem 3.1. *Neka su jednadžbe koje opisuju $\hat{E}^1$, $\hat{E}^2$, $\hat{H}^1$ i $\hat{H}^2$ komponente polja preko $\hat{E}^3$ i $\hat{H}^3$ komponenti dane sustavom (3.24). Tada su opća rješenja sustava preko $\hat{E}^3$ i $\hat{H}^3$ komponenti polja dana formulama:*

$$\hat{E}^1 = \frac{\omega \mu_0 \mu_{33} k^2}{\beta^2} \hat{H}^3 + \frac{ik^1 \epsilon_{33}}{\epsilon_{11} \beta^2} \partial_3 \hat{E}^3 \quad (3.25a)$$

$$\hat{E}^2 = -\frac{\omega \mu_0 \mu_{33} k^1}{\beta^2} \hat{H}^3 + \frac{ik^2 \epsilon_{33}}{\epsilon_{11} \beta^2} \partial_3 \hat{E}^3 \quad (3.25b)$$

$$\hat{H}^1 = \frac{ik^1 \mu_{33}}{\mu_{11} \beta^2} \partial_3 \hat{H}^3 - \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_{33} k^2}{\beta^2} \hat{E}^3 \quad (3.25c)$$

$$\hat{H}^2 = \frac{ik^2 \mu_{33}}{\mu_{11} \beta^2} \partial_3 \hat{H}^3 + \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_{33} k^1}{\beta^2} \hat{E}^3. \quad (3.25d)$$

Dokaz. U slučaju kada imamo predložena rješenja trivijalno je pokazati da su to rješenja sustava. Dovoljno je uvrstiti opća rješenja za $\hat{E}^3$ i $\hat{H}^3$ komponente polja dana izrazima (3.20) u sustav jednadžbi (3.24). Jednostavnim računom vidi se da predložena rješenja zadovoljavaju sustav jednadžbi. $\square$

Rješenje (3.25) dano je do na konstante unutar rješenja (3.20). Navedene konstante moguće je izvesti iz rubnih uvjeta (3.17b) i (3.17c). Veza između komponenti dana je Teoremom 3.1. U opisanoj geometriji rubni uvjeti su:

$$\hat{H}_+^1 - \hat{H}_-^1 = \hat{J}^2 \quad (3.26a)$$

$$\hat{H}_+^2 - \hat{H}_-^2 = -\hat{J}^1 \quad (3.26b)$$

$$\hat{E}_+^1 - \hat{E}_-^1 = 0 \quad (3.26c)$$

$$\hat{E}_+^2 - \hat{E}_-^2 = 0. \quad (3.26d)$$

Pomoću rubnih uvjeta (3.26), rješenja za z komponente polja (3.20) i veze između kompo-

enti (3.25) dolazimo do sustava jednadžbi za konstante A , B , C i D u rješenju (3.20):

$$\hat{H}_+^1 - \hat{H}_-^1 = \frac{ik^1\mu_{33}}{\mu_{11}\beta^2}(-ik_H C) - \frac{\omega\epsilon_0\epsilon_{33}k^2}{\beta^2}A - \frac{ik^1\mu_{33}}{\mu_{11}\beta^2}(ik_H D) + \frac{\omega\epsilon_0\epsilon_{33}k^2}{\beta^2}B = \hat{f}^2 \quad (3.27a)$$

$$\hat{H}_+^2 - \hat{H}_-^2 = \frac{ik^2\mu_{33}}{\mu_{11}\beta^2}(-ik_H C) + \frac{\omega\epsilon_0\epsilon_{33}k^1}{\beta^2}A - \frac{ik^2\mu_{33}}{\mu_{11}\beta^2}(ik_H D) - \frac{\omega\epsilon_0\epsilon_{33}k^1}{\beta^2}B = -\hat{f}^1 \quad (3.27b)$$

$$\hat{E}_+^1 - \hat{E}_-^1 = \frac{\omega\mu_0\mu_{33}k^2}{\beta^2}C + \frac{ik^1\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}\beta^2}(-ik_E A) - \frac{\omega\mu_0\mu_{33}k^2}{\beta^2}D - \frac{ik^1\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}\beta^2}(-ik_E B) = 0 \quad (3.27c)$$

$$\hat{E}_+^2 - \hat{E}_-^2 = -\frac{\omega\mu_0\mu_{33}k^1}{\beta^2}C + \frac{ik^2\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}\beta^2}(-ik_E A) + \frac{\omega\mu_0\mu_{33}k^1}{\beta^2}D - \frac{ik^2\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}\beta^2}(-ik_E B) = 0. \quad (3.27d)$$

Iz prethodnog sustava dobiju se izrazi za koeficijente A , B , C i D u rješenju (3.20):

$$A = -B = \frac{k^2\hat{f}^2 + k^1\hat{f}^1}{2\omega\epsilon_0\epsilon_{33}} \quad (3.28a)$$

$$C = D = \frac{\mu_{11}}{2k_H\mu_{33}}(k^1\hat{f}^2 - k^2\hat{f}^1). \quad (3.28b)$$

Uvrštavanjem koeficijenata u izraze za rješenje (3.20) dobije se ukupno rješenje:

$$\hat{E}_3(k^1, k^2, x_3) = \frac{k^2\hat{f}^2 + k^1\hat{f}^1}{2\omega\epsilon_0\epsilon_{33}} \begin{cases} e^{-ik_E x_3}, & x_3 > 0 \\ -e^{ik_E x_3}, & x_3 < 0 \end{cases} \quad (3.29a)$$

$$\hat{H}_3(k^1, k^2, x_3) = \frac{\mu_{11}}{2k_H\mu_{33}}(k^1\hat{f}^2 - k^2\hat{f}^1) \begin{cases} e^{-ik_H x_3}, & x_3 > 0 \\ e^{ik_H x_3}, & x_3 < 0. \end{cases} \quad (3.29b)$$

Funkcije (3.35) daju ukupno rješenje problema sa slike 3.4 za z_3 komponente $\hat{E}$ i $\hat{H}$ polja. Sve ostale komponente moguće je dobiti preko veza između komponenti danima Teoremom 3.1.

3.3.2 Strujni izvor ima komponente u smjeru anizotropije i u smjeru okomitom na smjer anizotropije

Matrice permitivnosti i permeabilnosti definirane su kao i u prethodnom potpoglavlju, a struja ima komponente u x_1 i x_2 smjeru. U tom slučaju moguće je izraziti jednadžbu za komponentu polja E^2 preko svih ostalih komponenti:

$$\partial_{23}^2 E^3 - \partial_{21}^2 E^1 - \partial_{11}^2 E^2 - \partial_{33}^2 E^2 - k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{22} E^2 = 0. \quad (3.30)$$

U ovom poglavlju koristit ćemo Fourierovu transformaciju preko varijabli x^1 i x^2 što daje malo drugačije rješenje u odnosu na prethodno poglavlje u kojem je korištena Fourierova transformacija preko varijabli x^1 i x^3 .

Pomoću Gaussovog zakona za električno polje dobijemo vezu između komponenti koja daje jednadžbu:

$$\partial_{33}^2 \hat{E}^2 + k_E^2 \hat{E}^2 = 0; \quad (3.31)$$

uz pokratu $k_E^2 = k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{22} - (k^1)^2 - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} (k^2)^2$. Upotrebom dualnosti dobijemo jednadžbu za komponentu polja H^2 :

$$\partial_{33}^2 \hat{H}^2 + k_H^2 \hat{H}^2 = 0; \quad (3.32)$$

uz pokratu $k_H^2 = k_0^2 \mu_{22} \epsilon_{11} - (k^1)^2 - \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}} (k^2)^2$.

Pretpostavimo rješenja oblika:

$$\hat{E}_2(k^1, x_2, k^3) = \begin{cases} A e^{-ik_E x_2}, & x_2 > 0 \\ B e^{ik_E x_2}, & x_2 < 0 \end{cases} \quad (3.33a)$$

$$\hat{H}_3(k^1, x_2, k^3) = \begin{cases} C e^{-ik_H x_2}, & x_2 > 0 \\ D e^{ik_H x_2}, & x_2 < 0. \end{cases} \quad (3.33b)$$

Sve ostale komponente polja moguće je dobiti preko veze:

$$\hat{E}^1 = -\frac{k^1 k^2}{k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{11} - (k^2)^2} \hat{E}^2 + \frac{i\omega \mu_0 \mu_{11}}{k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{11} - (k^2)^2} \frac{\partial H^2}{\partial z} \quad (3.34a)$$

$$\hat{H}^1 = -\frac{k^1 k^2}{k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{11} - (k^2)^2} \hat{H}^2 + \frac{i\omega \epsilon_0 \epsilon_{11}}{k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{11} - (k^2)^2} \frac{\partial E^2}{\partial z} \quad (3.34b)$$

Pomoću rubnih uvjeta dobijemo koeficijente A, B, C i D te ukupno rješenje:

$$\hat{E}_3(k^1, k^2, x_3) = \left(\frac{k^1 k^2 \hat{f}^1}{2\omega \epsilon_0 \epsilon_{11} k_E} - \frac{(k_0^2 \mu_{11} \epsilon_{11} - (k^2)^2) \hat{f}^2}{2\omega \epsilon_0 \epsilon_{11} k_E} \right) \begin{cases} e^{-ik_E x_2}, & x_2 > 0 \\ e^{ik_E x_2}, & x_2 < 0 \end{cases} \quad (3.35a)$$

$$\hat{H}_3(k^1, k^2, x_3) = \left(-\frac{\hat{f}^1}{2} \right) \begin{cases} e^{-ik_H x_2}, & x_2 > 0 \\ -e^{ik_H x_2}, & x_2 < 0. \end{cases} \quad (3.35b)$$

3.4 Strujni izvor nalazi se na cilindru polumjera a

U ovom poglavlju izvest ćemo Greenovu funkciju unutar jednoosnog anizotropnog homogenog prostora u cilindričnom koordinatnom sustavu. Parametri materijala dani su izrazima:

$$\epsilon = \epsilon_{\rho\rho} \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho + \epsilon_{\phi\phi} \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi + \epsilon_{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (3.36a)$$

$$\mu = \mu_{\rho\rho} \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho + \mu_{\phi\phi} \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi + \mu_{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad (3.36b)$$

U jednoosnom anizotropnom homogenom sredstvu vrijedi $\epsilon_{\rho\rho} = \epsilon_{\phi\phi}$ te $\mu_{\rho\rho} = \mu_{\phi\phi}$. Pro-

Greenova funkcija za jednoosni anizotropni slučaj u kojem se mogu raspregnuti jednadžbe za $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ polje

blem se modelira standardnom rotorskom jednadžbom za električno polje u kombinaciji s Gaussovim zakonom za električno polje te rubnim uvjetima:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \epsilon \mathbf{E} = 0 \quad (3.37a)$$

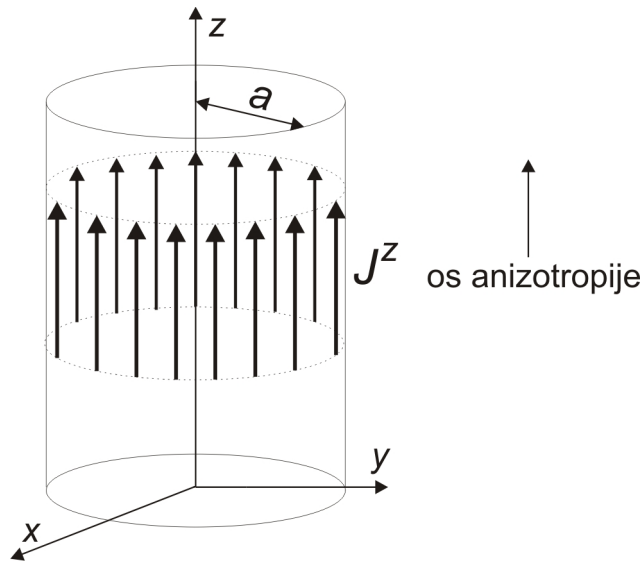
$$\text{div}(\epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}) = 0. \quad (3.37b)$$

Problem u kojem struja teče po cilindru može se rastaviti na dva zanimljiva slučaja. U oba slučaja komponente struje su tangencijalne na cilindar, tj. struja ima komponentu u smjeru osi z ili komponentu u smjeru osi ϕ , tj. u smjeru okomitom na smjer osi anizotropije.

3.4.1 Strujni izvor nalazi se na cilindru polumjera a s komponentom struje u smjeru osi anizotropije

Pomoću definicije operatora u cilindričnom koordinatnom sustavu jednadžbu (3.37a) moguće je zapisati preko varijabli ρ , ϕ i z [53]. Dovoljno je promatrati treću jednadžbu u sustavu:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{\mu_{\rho\rho}} \left(\frac{\partial E^\rho}{\partial z} - \frac{\partial E^z}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\mu_{\rho\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E^z}{\partial \phi} - \frac{\partial E^\phi}{\partial z} \right) \right) - k_0^2 \epsilon_{zz} E^z = 0. \quad (3.38)$$



Slika 3.5: Struja teče u z smjeru

Grupiranjem elemenata dobije se jednadžba:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E^\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E^\phi}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E^z}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E^z}{\partial \rho^2} - k_0^2 \mu_{\rho\rho} \epsilon_{zz} E^z = 0. \quad (3.39)$$

Gaussov zakon u cilindričnom koordinatnom sustavu glasi:

$$\epsilon_{\rho\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho E^\rho}{\partial \rho} + \epsilon_{\rho\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E^\phi}{\partial \phi} + \epsilon_{zz} \frac{\partial E^z}{\partial z} = 0. \quad (3.40)$$

Uvrštavanjem Gaussovog zakona (3.40) u jednadžbu (3.39) dobije se jednadžba za z komponentu električnog polja:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E^\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E^\phi}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E^z}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E^z}{\partial \rho^2} - k_0^2 \mu_{\rho\rho} \epsilon_{zz} E^z = 0, \quad (3.41)$$

koju se može kompaktnije zapisati kao:

$$-\Delta_{\rho\phi} E^z + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{\rho\rho}} \frac{\partial E^z}{\partial z} \right) - k_0^2 \mu_{\rho\rho} \epsilon_{zz} E^z = 0, \quad (3.42)$$

uz definiciju operatora:

$$\Delta_{\rho\phi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{1}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.43)$$

Korištenjem dualnosti dobije se jednadžba za H^z komponentu polja:

$$-\Delta_{\rho\phi} H^z + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_{zz}}{\mu_{\rho\rho}} \frac{\partial H^z}{\partial z} \right) - k_0^2 \mu_{zz} \epsilon_{\rho\rho} H^z = 0. \quad (3.44)$$

Jednadžbu (3.42) najjednostavnije je riješiti primjenom Fourierove transformacije. U problemu sa slike 3.5, nakon primjene odgovarajućih Fourierovih transformacija, struja će teći po cilindru polumjera d orijentiranom u smjeru osi z s centrom u ishodištu koordinatnog sustava. Na cilindru rješenje zadovoljava periodične rubne uvjete po varijabli ϕ te uvjete konačnosti po varijabli ρ . Opisana struktura je invarijantna po varijabli z pa je najjednostavnije primijeniti Fourierovu transformaciju po istoj varijabli. Nakon primjene Fourierove transformacije po varijabli z ostaje parcijalna diferencijalna jednadžba po varijablama ϕ i ρ . Zbog 2π periodičnosti strukture sa slike 3.5 moguće je rastaviti rješenje u Fourierov red. Jednadžba koju rješavamo diktira oblik Fourierove transformacije [77] pa za operator $-\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ transformacijski par glasi:

$$\hat{u}(k_z) = \int_{\mathbb{R}} u(z) e^{-ik_z z} dz \quad (3.45a)$$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(k_z) e^{ik_z z} dk_z, \quad (3.45b)$$

a za operator $-\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ uz periodičke rubne uvjete transformacijski par je:

$$u(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \frac{e^{in\phi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.46a)$$

$$u_n = \int_0^{2\pi} u(\phi) \frac{e^{-in\phi}}{\sqrt{2\pi}} d\phi. \quad (3.46b)$$

Primjenom Fourierove transformacije po varijabli z jednadžba (3.42) prelazi u jednadžbu:

$$-\Delta_{\rho\phi} \hat{E}^z + \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{\rho\rho}} (k^z)^2 \hat{E}^z - k_0^2 \mu_{\rho\rho} \epsilon_{zz} E^z = 0. \quad (3.47)$$

Rastavom funkcije $\hat{E}^z$ u Fourierov red i primjenom ortogonalnosti baznih funkcija dobije se jednadžba za svaki pojedini koeficijent $\hat{E}_n^z$ u rastavu funkcije $\hat{E}^z$ u Fourierov red:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \hat{E}_n^z}{\partial \rho} \right) + \frac{n^2}{\rho^2} \hat{E}_n^z + \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{\rho\rho}} (k^z)^2 \hat{E}_n^z - k_0^2 \mu_{\rho\rho} \epsilon_{zz} \hat{E}_n^z = 0. \quad (3.48)$$

Uvođenjem supstitucije $\lambda_E^2 = k_0^2 \mu_{\rho\rho} \epsilon_{zz} - \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{\rho\rho}} (k^z)^2$ dobije se rubni problem za koeficijente $\hat{E}_n^z$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \hat{E}_n^z}{\partial \rho} \right) + \left(\lambda_E^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \hat{E}_n^z = 0 \quad (3.49a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \hat{E}_n^z < \infty \quad (3.49b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \hat{E}_n^z = 0. \quad (3.49c)$$

Primjenom dualnosti moguće je jednadžbu (3.49a) prevesti u jednadžbu za koeficijente $\hat{H}_n^z$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \hat{H}_n^z}{\partial \rho} \right) + \left(\lambda_E^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \hat{H}_n^z = 0 \quad (3.50a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \hat{H}_n^z < \infty \quad (3.50b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \hat{H}_n^z = 0 \quad (3.50c)$$

uz supstituciju $\lambda_H^2 = k_0^2 \mu_{zz} \epsilon_{\rho\rho} - \frac{\mu_{zz}}{\mu_{\rho\rho}} (k^z)^2$.

Prethodni rubni problem je zapravo rubni problem za Besselovu običnu diferencijalnu jednadžbu čija su rješenja za $\hat{E}_n^z$ oblika:

$$\hat{E}_n^z(\rho, k^z) = \begin{cases} A_n J_n(\lambda_E \rho), & \rho < d \\ B_n H_n^{(2)}(\lambda_E \rho), & \rho > d \end{cases} \quad (3.51)$$

a za $\hat{H}_n^z$ oblika:

$$\hat{H}_n^z(\rho, k^z) = \begin{cases} C_n J_n(\lambda_E \rho), & \rho < d \\ D_n H_n^{(2)}(\lambda_E \rho), & \rho > d. \end{cases} \quad (3.52)$$

Sve ostale komponente polja mogu se izraziti preko z komponenata:

$$\hat{E}_n^\rho = \frac{n}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}} \frac{1}{\rho} \hat{H}_n^z - \frac{k^z}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}} \hat{H}_n^\phi \quad (3.53a)$$

$$\hat{E}_n^\phi = \frac{k^z}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}} \hat{H}_n^\rho + \frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}} \frac{\partial \hat{H}_n^z}{\partial \rho} \quad (3.53b)$$

$$\hat{H}_n^\rho = -\frac{n}{\omega \mu_0 \mu_{\rho\rho}} \frac{1}{\rho} \hat{E}_n^z + \frac{k^z}{\omega \mu_0 \mu_{\rho\rho}} \hat{E}_n^\phi \quad (3.53c)$$

$$\hat{H}_n^\phi = -\frac{k^z}{\omega \mu_0 \mu_{\rho\rho}} \hat{E}_n^\rho - \frac{i}{\omega \mu_0 \mu_{\rho\rho}} \frac{\partial \hat{E}_n^z}{\partial \rho}. \quad (3.53d)$$

Osim z komponente polja zanimljiva je i ϕ komponenta. Provodeći isti postupak kao i u planarnom slučaju te uvođenjem supstitucije $\Omega = k_0^2 \mu_{\rho\rho} \epsilon_{\rho\rho} - (k^z)^2$ dobiju se jednadžbe koje povezuju ϕ i z komponente polja:

$$\hat{E}_n^\phi = -\frac{nk^z}{\Omega} \frac{1}{\rho} \hat{E}_n^z + \frac{i\omega \mu_0 \mu_{\rho\rho}}{\Omega} \frac{\partial \hat{H}_n^z}{\partial \rho} \quad (3.54a)$$

$$\hat{H}_n^\phi = -\frac{nk^z}{\Omega} \frac{1}{\rho} \hat{H}_n^z - \frac{i\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}}{\Omega} \frac{\partial \hat{E}_n^z}{\partial \rho}. \quad (3.54b)$$

U slučaju sa slike 3.5 struja je oblika $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{z}} J_z$, tj. teče u smjeru osi z pa je z komponenta magnetizirajućeg polja jednaka 0. Zato je z komponenta električnog polja dovoljna za cjeloviti opis problema:

$$\hat{E}_n^\phi = -\frac{nk^z}{\Omega} \frac{1}{\rho} \hat{E}_n^z \quad (3.55a)$$

$$\hat{H}_n^\phi = -\frac{i\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}}{\Omega} \frac{\partial \hat{E}_n^z}{\partial \rho}. \quad (3.55b)$$

U slučaju struje koja teče u z smjeru rubni uvjeti glase:

$$\hat{H}^\phi|_+ - \hat{H}^\phi|_- = \hat{J}^z \quad (3.56a)$$

$$\hat{E}^z|_+ = \hat{E}^z|_-. \quad (3.56b)$$

Rubni uvjeti (3.56) su rubni uvjeti za cjelokupno polje, a jednadžbe (3.50) i (3.49a) su jednadžbe za koeficijente rastava rješenja u Fourierov red. Zbog ortogonalnosti baznih funkcija

moguće je rubne uvjete (3.56) prevesti u rubne uvjete za koeficijente:

$$\hat{H}_n^\phi|_+ - \hat{H}_n^\phi|_- = \hat{J}_n^z \quad (3.57a)$$

$$\hat{E}_n^z|_+ = -\hat{E}_n^z|_-. \quad (3.57b)$$

Iz rubnog uvjeta za koeficijente u rastavu $\hat{E}^z$ polja dobije se prvi uvjet na koeficijente A_n i B_n :

$$A_n J_n(\lambda_E a) = B_n H_n^{(2)}(\lambda_E a). \quad (3.58)$$

U slučaju kada $\lambda_E d$ nije jednako nultočki Besselove funkcije moguće je izraziti koeficijent A_n preko koeficijenta B_n :

$$A_n = \frac{H_n^{(2)}(\lambda_E a)}{J_n(\lambda_E a)} B_n. \quad (3.59)$$

Rubni uvjet na komponentu polja H_n^ϕ daje drugu jednadžbu za koeficijente A_n i B_n :

$$-\frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}}{\Omega} \lambda_E B_n H_n^{(2)}(\lambda_E a)' + \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}}{\Omega} \lambda_E A_n J_n(\lambda_E a)' = \hat{J}_n^z. \quad (3.60)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (3.59) u jednadžbu (3.60) te množenjem s $J_n(\lambda_E a)$ dobije se izraz za koeficijent B_n :

$$-B_n H_n^{(2)}(\lambda_E a)' J_n(\lambda_E a) + B_n H_n^{(2)}(\lambda_E a) J_n(\lambda_E a)' = \hat{J}_n^z \frac{\Omega}{i\lambda_E \omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}}. \quad (3.61)$$

Lijevu stranu izraza (3.61) moguće je pojednostavniti upotrebom adicijskog teorema za Besselove funkcije [76]:

$$B_n = -\frac{\pi a \Omega}{2\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}} J_n(\lambda_E a) \hat{J}_n^z. \quad (3.62)$$

Uvrštavanjem prethodnog izraza u jednadžbu (3.59) dobije se jednadžba za koeficijente A_n :

$$A_n = -\frac{\pi a \Omega}{2\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}} H_n^{(2)}(\lambda_E a) \hat{J}_n^z. \quad (3.63)$$

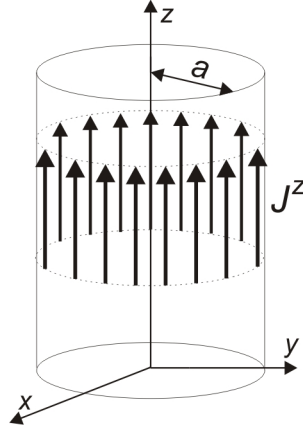
Pomoću koeficijenata A_n i B_n moguće je izraziti ukupno rješenje jednadžbe (3.49a):

$$\hat{E}_n^z(\rho, k^z) = -\frac{\pi a \Omega}{2\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}} \hat{J}_n^z \begin{cases} J_n(\lambda_E \rho) H_n^{(2)}(\lambda_E a), & \rho < a \\ J_n(\lambda_E a) H_n^{(2)}(\lambda_E \rho), & \rho > a, \end{cases} \quad (3.64)$$

iz kojeg je primjenom veza (3.54) moguće izračunati sve ostale komponente polja.

3.4.2 Strujni izvor nalazi se na cilindru polumjera a s komponentom struje u ϕ smjeru

U slučaju kada struja teče u ϕ postoji komponenta polja $\mathbf{H}$ u z smjeru pa su za cjelokupan opis modela potrebne komponente E_n^z i H_n^z te dva dodatna rubna uvjeta. Pomoću njih je moguće izračunati sva četiri koeficijenta u jednačbama (3.51) i (3.52).



Slika 3.6: Struja teče u ϕ smjeru

Ukupni rubni uvjeti su:

$$\hat{H}_n^z|_+ - \hat{H}_n^z|_- = -\hat{J}_n^\phi \quad (3.65a)$$

$$\hat{H}_n^\phi|_+ = \hat{H}_n^\phi|_- \quad (3.65b)$$

$$\hat{E}_n^z|_+ = -\hat{E}_n^z|_- \quad (3.65c)$$

$$\hat{E}_n^\phi|_+ = -\hat{E}_n^\phi|_- \quad (3.65d)$$

Uvrštavanjem općeg rješenja (3.51) i (3.52) u rubni uvjet (3.65c) dobije se veza između koeficijenata A_n i B_n :

$$A_n = \frac{H_n^{(2)}(\lambda_E a)}{J_n(\lambda_E a)} B_n, \quad (3.66)$$

a iz rubnoga uvjeta (3.65d) dobijemo vezu između koeficijenata C_n i D_n :

$$C_n = \frac{H_n^{(2)}(\lambda_H a)'}{J_n(\lambda_H a)'} D_n. \quad (3.67)$$

Uvrštavanjem izraza za koeficijente C_n i D_n u rubni uvjet (3.65a) dobije se izraz za koeficijent D_n :

$$D_n \left(H_n^{(2)}(\lambda_H a) J_n(\lambda_H a)' - H_n^{(2)}(\lambda_H a)' J_n(\lambda_H a) \right) = -J_n(\lambda_H a)' \hat{J}_n^\phi. \quad (3.68)$$

Pomoću adicijske formule za Besselove funkcije [76] moguće je pojednostavniti izraz ko-

eficijent D_n , a time i izraz za koeficijent C_n :

$$C_n = \frac{i\pi\lambda_{Ha}}{2} \hat{f}_n^\phi H_n^{(2)}(\lambda_{Ha})' \quad (3.69a)$$

$$D_n = \frac{i\pi\lambda_{Ha}}{2} \hat{f}_n^\phi J_n(\lambda_{Ha})'. \quad (3.69b)$$

Uvrštavanjem izraza za konstante C_n i D_n u rješenje (3.52) dobije se rješenje za komponentu polja $\hat{H}_n^z$:

$$\hat{H}_n^z(\rho, k^z) = \frac{i\pi\lambda_{Hd}}{2} \hat{f}_n^{\phi hi} \begin{cases} H_n^{(2)}(\lambda_{Ea})' J_n(\lambda_{E\rho}), & \rho < a \\ H_n^{(2)}(\lambda_{E\rho}) J_n(\lambda_{Ea})', & \rho > a. \end{cases} \quad (3.70)$$

Druga dva koeficijenta moguće je izvesti iz rubnog uvjeta (3.65b). Uvrštavanjem rješenja (3.51) u rubni uvjet (3.65b) daje jednadžbu koja povezuje koeficijente A_n i B_n :

$$-\frac{nk^z}{\Omega a} D_n H_n^{(2)}(\lambda_{Ha}) - \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}}{\Omega} \lambda_E B_n H_n^{(2)}(\lambda_{Ea})' + \frac{nk^z}{\Omega a} C_n J_n(\lambda_{Ha}) + \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}}{\Omega} \lambda_E A_n J_n(\lambda_{Ea})' = 0. \quad (3.71)$$

Elemente u jednadžbi (3.71) moguće je grupirati na sljedeći način:

$$\frac{nk^z}{\Omega a} (C_n J_n(\lambda_{Ha}) - D_n H_n^{(2)}(\lambda_{Ha})) + \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}}{\Omega} (A_n J_n(\lambda_{Ea})' - B_n H_n^{(2)}(\lambda_{Ea})') = 0. \quad (3.72)$$

Uvrštavanjem izraza za koeficijente C_n i D_n (3.69) u prethodnu jednadžbu dobije se druga veza između koeficijenata A_n i B_n :

$$A_n J_n(\lambda_{Ea})' - B_n H_n^{(2)}(\lambda_{Ea})' = \frac{ink^z}{\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}\lambda_{Ea}} \hat{f}_n^\phi, \quad (3.73)$$

koja zajedno s jednadžbom (3.66) daje izraz za koeficijent B_n :

$$B_n (J_n(\lambda_{Ea})' H_n^{(2)}(\lambda_{Ea}) - H_n^{(2)}(\lambda_{Ea})' J_n(\lambda_{Ea})) = \frac{ink^z}{\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}\lambda_{Ea}} J_n(\lambda_{Ea}) \hat{f}_n^\phi. \quad (3.74)$$

Pomoću adicijskog teorema za Besselove funkcije moguće je pojednostavniti koeficijente A_n i B_n :

$$B_n = \frac{\pi nk^z}{2\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}} J_n(\lambda_{Ea}) \hat{f}_n^\phi \quad (3.75a)$$

$$A_n = \frac{\pi nk^z}{2\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}} H_n^{(2)}(\lambda_{Ea})' \hat{f}_n^\phi. \quad (3.75b)$$

Uvrštavanjem koeficijenata (3.75) u rješenje (3.51) dobije se potpuni izraz za električno

polje:

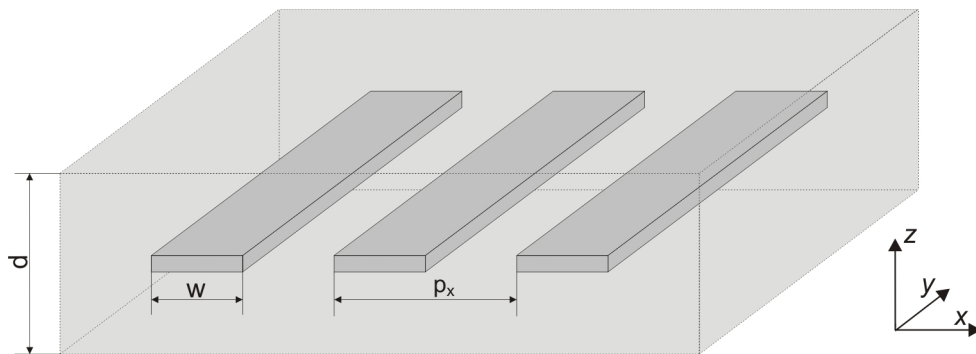
$$\hat{E}_n^z(\rho, k^z) = \frac{\pi n k^z}{2\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}} \hat{f}_n^\phi \begin{cases} J_n(\lambda_E \rho) H_n^{(2)}(\lambda_E a), & \rho < a \\ J_n(\lambda_E a) H_n^{(2)}(\lambda_E \rho), & \rho > a. \end{cases} \quad (3.76)$$

Rješenja (3.76) i (3.70) zajedno s vezom između polja (3.54) omogućuju nam izračunavanje svih potrebnih komponenti polja u problemu sa slike 3.6.

3.5 Primjene prethodno izvedenih metoda

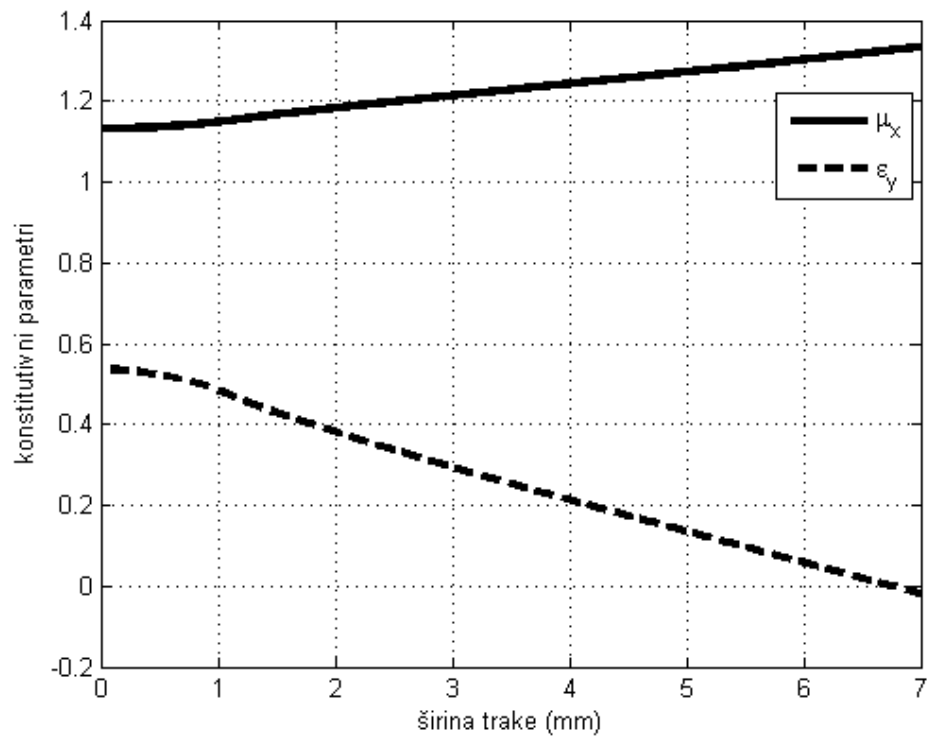
3.5.1 Karakterizacija planarnog metamaterijalnog sloja

Prethodno izvedeni modeli primijenit će se na karakterizaciju metamaterijalnog sloja načinjenog od periodično složenih traka širine w unutar periodične strukture s periodom p_x . Opisanu strukturu možemo vidjeti na slici 3.7. Ovakve strukture najčešće se koriste za izradu umjetnih anizotropnih materijala s permitivnošću manjom od 1. Opisane strukture karakterizirat ćemo preko raspršenja elektromagnetskog vala. Podrobniji opis korištenih tehnika nalazi se u izvještaju [36]. U primjeru sa slike 3.7 debljina umjetnog anizotropnog sloja iznosi $d = 2$ cm, permeabilnost je jednaka 1, permitivnost iznosi $\epsilon_x = \epsilon_z = 1$ i $\epsilon_y = 0.5$. Radna frekvencija sustava iznosi 4 GHz. Struktura sa željenom permitivnošću može se izvesti pomoću metalnih traka s periodom $p_x = 3$ cm. Iz koeficijenta refleksije i transmisije za okomiti upad moguće je izračunati konstitutivne parametre. Na slici 3.8 možemo vidjeti parametre μ_x i ϵ_y opisane strukture. Kako bi dobili $\epsilon_y = 0.5$ moramo uzeti širinu trake $w = 0.9$ mm. Treba uočiti da struktura mijenja permeabilnost u x smjeru pa dobijemo $\mu_x = 1.145$ za $w = 0.9$ mm. Na slici 3.10 prikazana je usporedba amplitude i faze koeficijenta refleksije za anizotropni sloj s parametrima $\epsilon_x = \epsilon_z = 1.0$, $\epsilon_y = 0.5$ i $\mu_x = 1.0$ te fazu koeficijenta refleksije za strukturu sa slike 3.7.

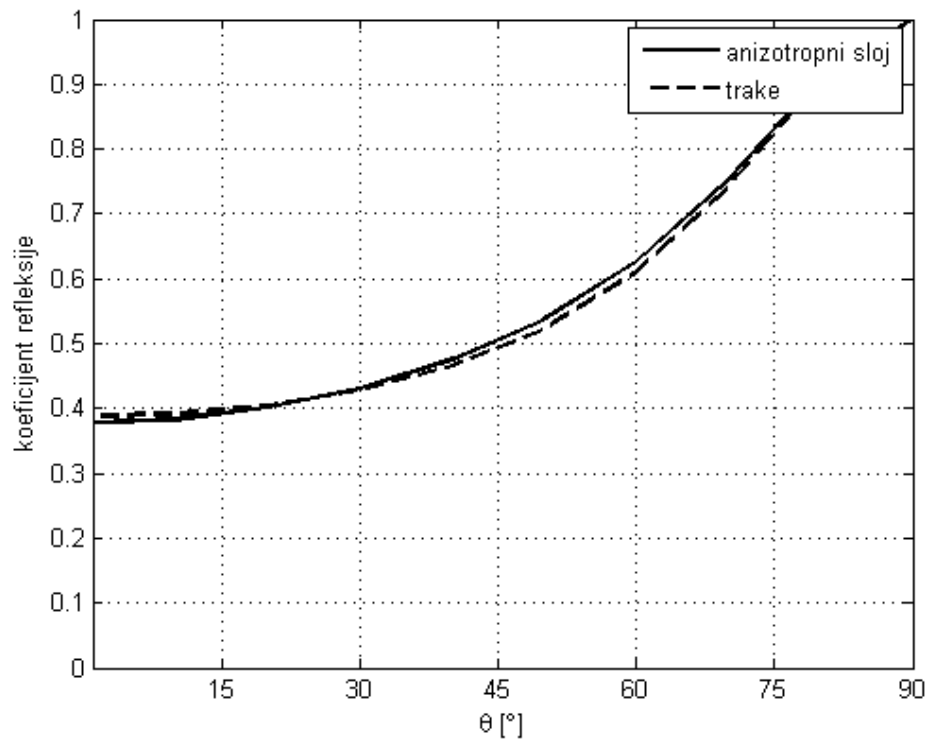


Slika 3.7: Periodična struktura koja se sastoji od traka načinjenih od savršenog metala položenih unutar dielektričnog medija

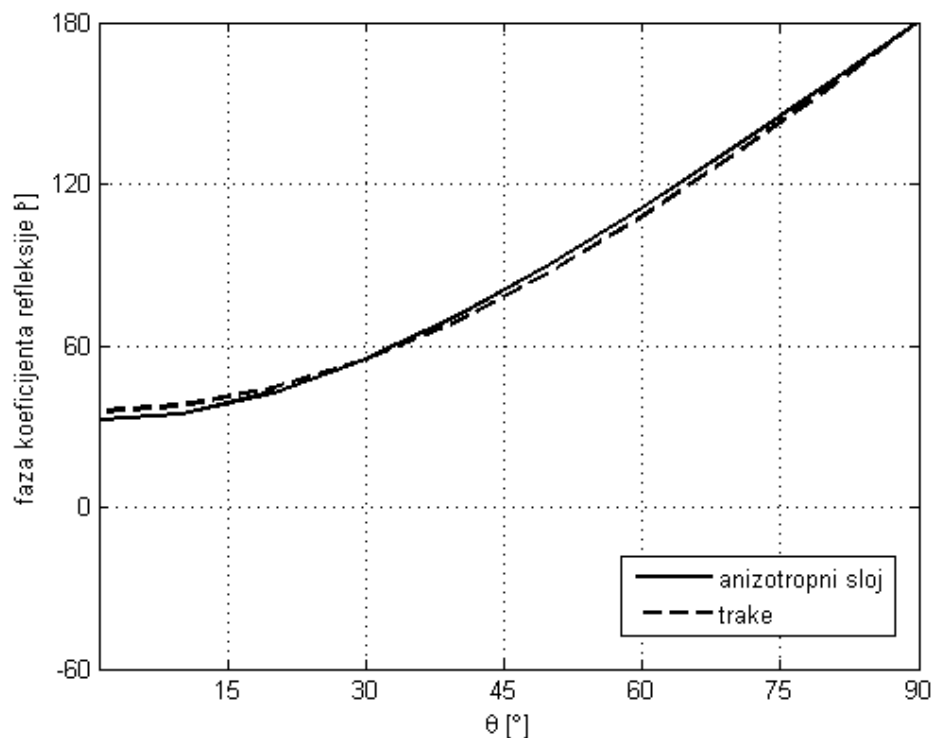
Slična analiza primjenjena je i na višeslojnu strukturu u kojoj se dimenzije traka mijenjaju po slojevima strukture. Opisana struktura može se vidjeti na slici 3.11. Na slici 3.12 dan je koeficijent refleksije na danoj strukturi, a na slici 3.13 dana je usporedba faze.



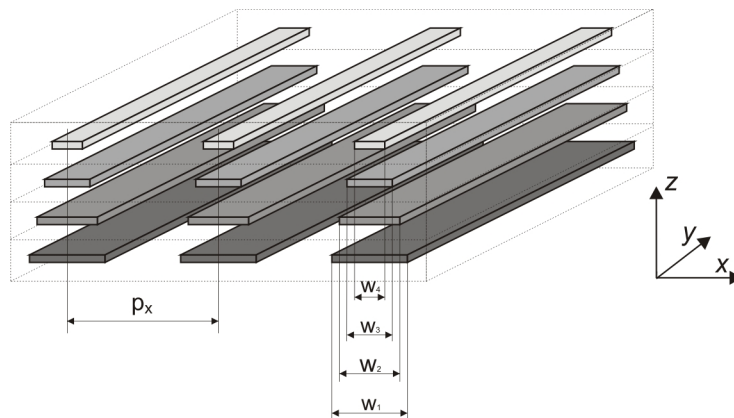
Slika 3.8: Konstitutivni parametri strukture sa slike 3.7



Slika 3.9: Usporedba koeficijenta refleksije za strukture sa slike 3.7 te za anizotropni sloj s parametrima $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 1.0$, $\varepsilon_y = 0.5$ i $\mu_x = 1.0$

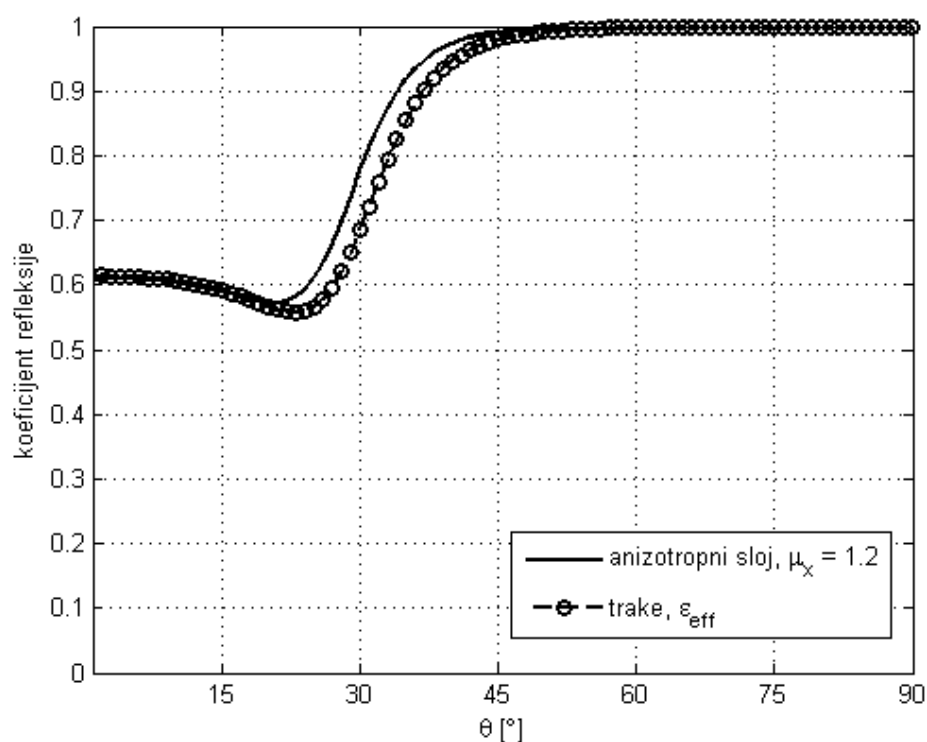


Slika 3.10: Usporedba faze koeficijenta refleksije za strukture sa slike 3.7 te za anizotropni sloj s parametrima $\epsilon_x = \epsilon_z = 1.0$, $\epsilon_y = 0.5$ i $\mu_x = 1.0$

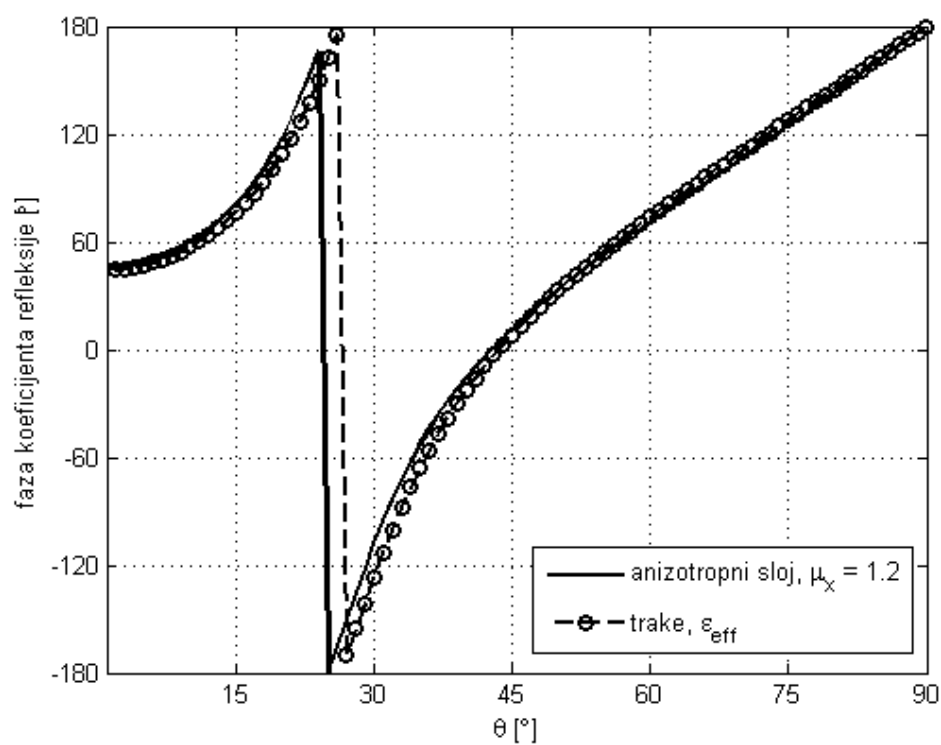


Slika 3.11: Periodična struktura koja se sastoji od traka načinjenih od savršenog metala položenih unutar višeslojnog dielektričnog medija

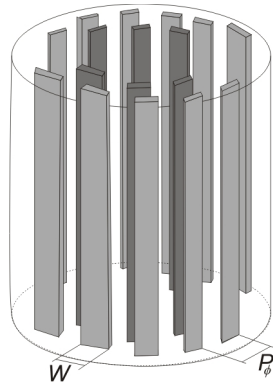
Na slici 3.14 prikazana je geometrija dvoslojne cilindrične strukture. Za prikazanu cilindričnu strukturu određeni su efektivni parametri te je uspoređeno raspršeno polje od prikazane strukture s raspršenim poljem od anizotropnog homogenog materijala. Parametri planarne strukture su $P_x = 3$ mm, $W = 0.9$ mm, $d = 2$ cm, a radna frekvencija je $f = 4$ GHz. Parametri cilindrične strukture su $P_{\phi,1} = 25$ mm, $P_{\phi,2} = 30$ mm, $W = 1.15$ mm, a radna frekvencija iznosi $f = 4$ GHz. Vanjski radijus strukture iznosi 114.5 mm, unutarnji radijus iznosi 95.5 mm, a svaki sloj sadrži po 24 trake. Raspršenje na cilindričnoj anizotropnoj strukturi izračunato je po-



Slika 3.12: Usporedba koeficijenta refleksije

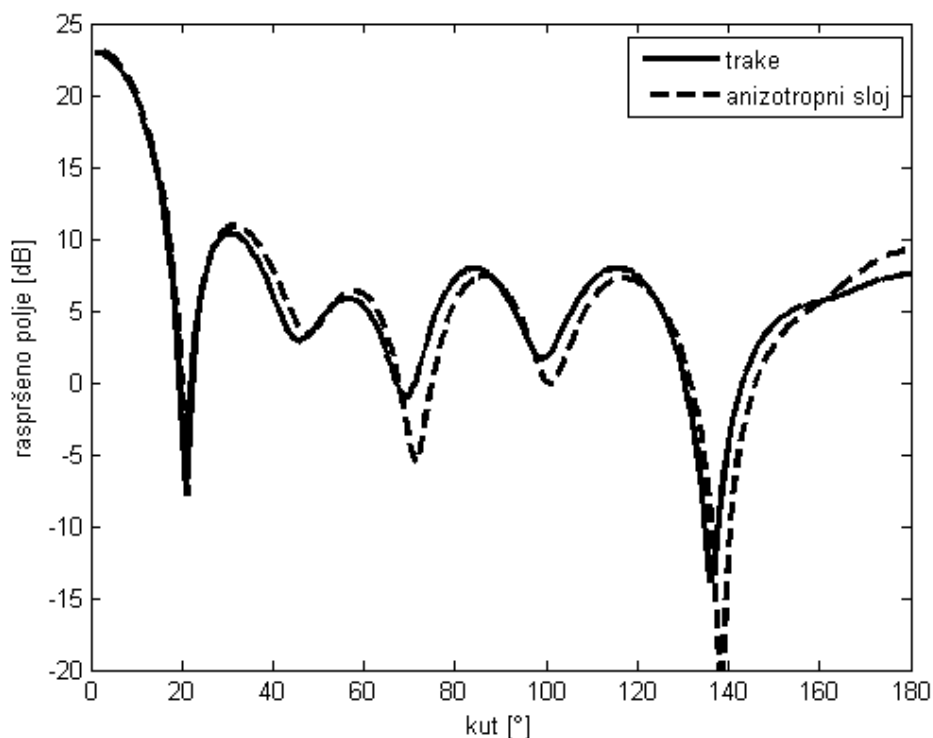


Slika 3.13: Usporedba faze koeficijenta refleksije



Slika 3.14: Cilindrična metamaterijalna struktura

moću izvedenog algoritma. Pomoću homogenizacije metapovršina je predstavljena dvoslojnom anizotropnom cilindričnom strukturom s parametrima $\epsilon_\rho = \epsilon_\phi = 1$, $\epsilon_{z;1} = 0.33$, $\epsilon_{z;2} = 0.45$, a $\mu_\rho = \mu_z = 1$, $\mu_{\phi;1} = 1.158$. Debljina svakog pojedinog sloja iznosi 19 mm. Više o spomenutoj strukturi može se naći u članku [78]. Ekstrakcija parametara temeljena na prethodnim metodama opisana je u izvještaju [36].



Slika 3.15: Usporedba raspršenog polja od periodičke strukture načinjene od metalnih traka i homogenog anizotropnog sloja

Na slici 3.15 prikazana je usporedba raspršenog polja od homogene anizotropne strukture i od cilindrične metamaterijalne strukture načinjene od dva sloja metamaterijala. Dobiveno je vrlo dobro poklapanje raspršenog polja od homogenog anizotropnog sloja te višeslojne strukture

Greenova funkcija za jednoosni anizotropni slučaj u kojem se mogu raspregnuti jednadžbe za E i H polje

načinjene od metalnih traka.

Poglavlje 4

Kosi upad elektromagnetskog vala na metalni cilindar unutar anizotropnog višeslojnog plašta

Raspršenje elektromagnetskog vala na metalnom cilindru unutar anizotropne višeslojne strukture je predmet znanstvenog istraživanja zadnjih dvadesetak godina [79], [80], [81]. Potreba za analizom takvih struktura porasla je pojavom metamaterijala i plašteva nevidljivosti načinjenih od metamaterijalnih struktura [41], [82], [42]. Metamaterijalni plaštevi nevidljivosti dizajniraju se po uzoru na gravitacijske probleme. Glavna ideja u pozadini plašteva nevidljivosti je imitiranje gravitacijskih fenomena korištenjem metamaterijala. Na taj način moguće je imitirati svojstva mase i gravitacijskog polja te dobiti efekte savijanja vala po uzoru na savijanje zraka svjetlosti pored velikih masa [41], [83], [84], [85], [86] i svi veliki efekti teorije gravitacije mogu se dobiti pomoću strukture načinjene od metamaterijala [87], [88], [89]. Paralelno s razvojem metamaterijalnih struktura razvilo se i područje zvano transformacijska optika koje nam omogućuje da raznim transformacijama dođemo do parametara koje analizirana struktura treba imati kako bi elektromagnetski val kroz nju putovao u željenom smjeru [90]. S druge strane, zanima nas kakva trebaju biti svojstva materijala (ϵ i μ) koja će omogućiti neke od prethodnih efekata. Korištenjem transformacijske optike moguće je rigorozno analizirati problem i zaključiti kakav je materijal potreban [91], [92]. Teže pitanje, a ujedno i predmet velikog istraživanja zadnjih godina, je kako načiniti materijal s traženim parametrima [36], [13], [93] i [12]. To je veliko otvoreno pitanje i do sada nije ponuđen kvalitetan odgovor nego se dizajnu svake pojedine strukture pristupa po principu pokušaja i pogrešaka. Teorija u pozadini je dovoljno složena da do sada nije u potpunosti analizirana nego se strukture dizajniraju optimizacijom.

Praktična realizacija nekih plašteva nevidljivosti sastoji se od više slojeva metamaterijalnih struktura. Plašt nevidljivosti na mikrovalnim frekvencijama demonstrirao je Schurig u članku [82]. Taj plašt nevidljivosti radi samo za TM_z polarizaciju pobudnog vala. Plašt nevidljivosti

za TE_z polarizaciju demonstriran je u članku [42]. Oba plašta nevidljivosti dizajnirana su za okomiti upad elektromagnetskog vala, a slučaj kosog upada nije komentiran. Problem kod kosog upada elektromagnetskog vala na takve strukture je u tome što je za rješavanje kosog upada potrebno rješavati sustav diferencijalnih jednačbi, a ne jednu jednačbu, što otežava proces rješavanja problema. Činjenica da moramo rješavati sustav jednačbi povezana je s time da se kod takvih objekata javlja efekt depolarizacije, tj. u slučaju kada na objekt upada val jedne polarizacije, javi se i njegova križna polarizacija. Važnost križne polarizacije kod analize plašteva nevidljivosti analizirana je u članku [94]. U većini praktičnih slučajeva parametri strukture reprezentirani su dijagonalnim matricama što uvelike olakšava analizu. Palanarne strukture dobro su opisane u nekoliko članaka [29] i [95] dok se analiza cilindričnih struktura orijentirala ponajviše na okomiti upad [95]. Potreba za rješavanjem kosog upada na anizotropne cilindrične strukture javlja se u raznim primjenama [96], [97], [16] i [98].

Kosi upad na cilindrične anizotropne strukture razmatran je u nekim slučajevima, ali su ti slučajevi padali na testu izračuna jer su uvijek zavisili od generiranja specijalnih funkcija ili drugih posebnih procedura koje su bile slabo opisane u člancima [99].

U ovom poglavlju izvest ćemo metodu izračuna raspršenja elektromagnetskog vala na metalni cilindar unutar anizotropne, višeslojne strukture te je primijeniti na modeliranje raspršenja uslijed kosog upada elektromagnetskog vala na Schurigov i Caijev plašt nevidljivosti [82], [42]. Egzistencija i jedinstvenost rješenja za kosi upad elektromagnetskog vala na metalni cilindar unutar anizotropnog i chiral medija razmatrana je u člancima [100] i [101], a numeričke metode za okomiti upad elektromagnetskog vala na općenite anizotropne strukture opisane su u knjizi [67]. Primjena izvedene metode na plašteve nevidljivosti uz optimizaciju plašteva za određene upadne kuteve može se pročitati u izvještaju [39] te člancima [37] i [38]. Model i numerička metoda za kosi upad elektromagnetskog vala na anizotropne strukture omogućit će efikasnije dizajniranje i optimizaciju plašteva nevidljivosti koja je do sada rađena samo za okomiti upad elektromagnetskog vala [17] i [18].

4.1 Izvod modela kosog upada elektromagnetskog vala na kružni cilindar načinjen od savršenog metala koji se nalazi unutar višeslojnog anizotropnog plašta

U ovom poglavlju razmatra se kosi upad elektromagnetskog vala na kružni cilindar načinjen od savršenog metala koji se nalazi unutar anizotropnog višeslojnog plašta. Zbog cilindrične simetrije problema koristit ćemo cilindrični koordinatni sustav orijentiran na način da je z koordinata koordinantog sustava poravnata s osi promatranog cilindra. Promatrat ćemo anizotropni plašt čiji se parametri ϵ i μ mogu prikazati dijagonalnim matricama u cilindričnoj koordinant-

noj bazi. Koordinanti parametri tenzora ε i μ su općenito funkcije od udaljenosti od ishodišta ρ i kuta u odnosu na os x , ϕ , ali su invarijantne u odnosu na varijablu z . U slučaju koji modeliramo zanimat će nas parametri koji su funkcije samo udaljenosti od ishodišta ρ . Kako je riječ o plaštu kojeg se stavlja oko kružnog cilindra, ima smisla promatrati parametre koji su invarijantni po varijabli ϕ , tj. plašt koji ne ovisi o smjeru dolaska vala. U primjenama plašteva nevidljivosti ne znamo smjer dolaska vala, a kako želimo da se anizotropni plašt ponaša jednako za sve smjere dolaska smisleno je promatrati parametre koji su neovisni o smjeru dolaska vala. Elementi matrica koje reprezentiraju tenzore ε i μ će biti funkcije samo varijable ρ . Opisani objekti nas zanimaju isključivo zato što su svi prethodno spomenuti plaševi nevidljivosti izvedeni kao dvodimenzionalni objekti. Tenzori ε i μ bit će označeni kao:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

u kojima indeksi govore koji dijagonalni element parametar opisuje. Primjenom različitih transformacija u nastavku ovog poglavlja, problem kosog upada elektromagnetskog vala svest ćemo na jednodimenzionalan problem. Zbog simetrije objekta po varijabli z moguće je pretpostaviti da će rješenje na različitim visinama biti samo fazno pomaknuto. Pomoću te simetrije moguće je pretpostavljenim oblikom rješenja nakon jedne transformacije svesti početni trodimenzionalni problem na dvodimenzionalan. Izvan ograničene domene $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$, koja je u slučaju višeslojnog plašta jednaka zadnjem sloju dielektrika, nalazi se homogen izotropan medij bez gubitaka kojemu su ε i μ konstantni. Najčešće je to zrak, ali može biti i medij s $\varepsilon \neq 1$. Pobuda je planarni elektromagnetski val frekvencije ω :

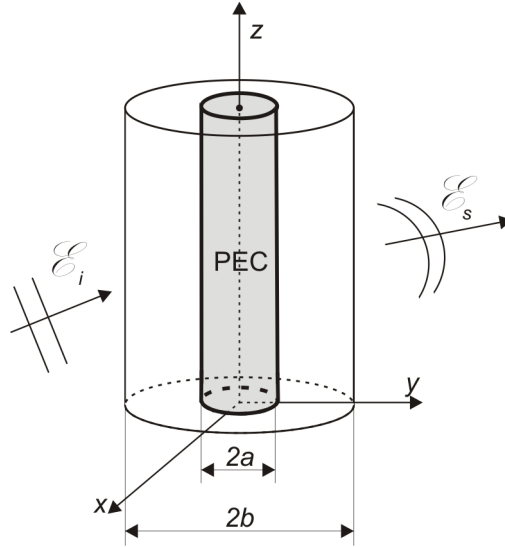
$$(\mathcal{E}_{inc}(x, y, z), \mathcal{H}_{inc}(x, y, z)) = (\mathbf{E}_{inc}(x, y), \mathbf{H}_{inc}(x, y)) e^{i\omega t - ik^z z}. \quad (4.2)$$

Upadno polje definirano je u cijelom prostoru $\mathbb{R}^3$. Nakon što val uđe u prostor kojeg čini plašt dolazi do metalnog cilindra te se nakon interakcije sa savršenim metalom stvara raspršeno polje $(\mathcal{E}_s, \mathcal{H}_s)$ koje ima istu prostornu varijaciju u smjeru osi z kao i upadni val $(\mathcal{E}_{inc}, \mathcal{H}_{inc})$ te je iste frekvencije ω . Ukupno polje izvan cilindra jednako je zbroju upadnog i raspršenog polja:

$$(\mathcal{E}(x, y, z), \mathcal{H}(x, y, z)) = (\mathbf{E}(x, y), \mathbf{H}(x, y)) e^{i\omega t - ik^z z} \quad (4.3)$$

$$= (\mathbf{E}_{inc}(x, y) + \mathbf{E}_s(x, y), \mathbf{H}_{inc}(x, y) + \mathbf{H}_s(x, y)) e^{i\omega t - ik^z z}. \quad (4.4)$$

Zbog cilindrične simetrije strukture koristit ćemo zapis vektora u bazi cilindričnog koordinatnog sustava $\mathbf{E} = (E^\rho, E^\phi, E^z)$ i $\mathbf{H} = (H^\rho, H^\phi, H^z)$. Ukupno polje (4.3) zadovoljava Maxwell-



Slika 4.1: Kosi upad elektromagnetskog vala na metalni cilindar unutar anizotropnog plašta

love jednadžbe uz rubne uvjete na granici medija i rubni uvjet na savršenom metalu. Kako bi pronašli diferencijalne jednadžbe za polja $\mathcal{E}$ i $\mathcal{H}$ u opisanoj strukturi, potrebno je krenuti od Maxwellovih jednadžbi te korištenjem simetrija problema i raznim transformacijama doći do sustava jednadžbi koji opisuje problem. Rotorske Maxwellove jednadžbe u cilindričnom koordinatnom sustavu za električno polje $\mathcal{E}$ glase:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{E}^z}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{E}^\phi}{\partial z} = -i\omega\mu_0\mu_{\rho\rho}\mathcal{H}^\rho \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}^\rho}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}^z}{\partial \rho} = -i\omega\mu_0\mu_{\phi\phi}\mathcal{H}^\phi \quad (4.5b)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho \mathcal{E}^\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{E}^\rho}{\partial \phi} = -i\omega\mu_0\mu_{zz}\mathcal{H}^z, \quad (4.5c)$$

a za magnetizirajuće polje $\mathcal{H}$ glase:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}^z}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{H}^\phi}{\partial z} = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}\mathcal{E}^\rho \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^\rho}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}^z}{\partial \rho} = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{\phi\phi}\mathcal{E}^\phi \quad (4.6b)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho \mathcal{H}^\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}^\rho}{\partial \phi} = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{zz}\mathcal{E}^z. \quad (4.6c)$$

Uvrstimo li pretpostavljeni oblik varijacije polja u z varijabli dobit ćemo jednostavniji sustav

parcijalnih diferencijalnih jednačbi koji glasi:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E^z}{\partial \phi} + ik^z E^\phi = -i\omega\mu_0\mu_{\rho\rho}H^\rho \quad (4.7a)$$

$$-ik^z E^\rho - \frac{\partial E^z}{\partial \rho} = -i\omega\mu_0\mu_{\phi\phi}H^\phi \quad (4.7b)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E^\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E^\rho}{\partial \phi} = -i\omega\mu_0\mu_{zz}H^z \quad (4.7c)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H^z}{\partial \phi} + ik^z H^\phi = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}E^\rho \quad (4.7d)$$

$$-ik^z H^\rho - \frac{\partial H^z}{\partial \rho} = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{\phi\phi}E^\phi \quad (4.7e)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H^\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H^\rho}{\partial \phi} = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{zz}E^z. \quad (4.7f)$$

Dobiveni sustav parcijalnih diferencijalnih jednačbi (4.7) moguće je još pojednostavniti. Objekt unutar kojeg promatramo polje je kružnog oblika pa je smisleno rastaviti rješenje u Fourierov red iz Definicije 1.2. Rastavom rješenja u Fourierov red sveli smo problem na koeficijente kao funkcije samo jedne varijable, a time i sustav parcijalnih diferencijalnih jednačbi (4.7) na sustav običnih diferencijalnih jednačbi. U tom procesu ključna je stvar to što su elementi Fourierove baze međusobno ortogonalni [102]. To nam omogućuje da dobijemo odvojeni sustav običnih diferencijalnih jednačbi za svaki pojedini koeficijent u rastavu rješenja u Fourierov red:

$$\frac{in}{\rho} E_n^z + ik^z E_n^\phi = -i\omega\mu_0\mu_{\rho\rho}H_n^\rho \quad (4.8a)$$

$$-ik^z E_n^\rho - \frac{\partial E_n^z}{\partial \rho} = -i\omega\mu_0\mu_{\phi\phi}H_n^\phi \quad (4.8b)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_n^\phi)}{\partial \rho} - \frac{in}{\rho} E_n^\rho = -i\omega\mu_0\mu_{zz}H_n^z \quad (4.8c)$$

$$\frac{in}{\rho} H_n^z + ik^z H_n^\phi = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}E_n^\rho \quad (4.8d)$$

$$-ik^z H_n^\rho - \frac{\partial H_n^z}{\partial \rho} = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{\phi\phi}E_n^\phi \quad (4.8e)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_n^\phi)}{\partial \rho} - \frac{in}{\rho} H_n^\rho = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{zz}E_n^z. \quad (4.8f)$$

Komponente polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ međusobno su ovisne, a zbog cilindrične simetrije moguće je ρ i ϕ komponentne polja izraziti pomoću z komponenti. U prvom koraku iz jednačbi (4.8a), (4.8b),

(4.8d) i (4.8e) dobijemo jednadžbe za ρ i ϕ komponente polja:

$$E_n^\rho = \frac{n}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}} \frac{1}{\rho} H_n^z + \frac{k^z}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho}} H_n^\phi \quad (4.9a)$$

$$E_n^\phi = \frac{-k^z}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\phi\phi}} H_n^\rho + \frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\phi\phi}} \frac{\partial H_n^z}{\partial \rho} \quad (4.9b)$$

$$H_n^\rho = \frac{-n}{\omega \mu_0 \mu_{\rho\rho}} \frac{1}{\rho} E_n^z - \frac{k^z}{\omega \mu_0 \mu_{\rho\rho}} E_n^\phi \quad (4.9c)$$

$$H_n^\phi = \frac{k^z}{\omega \mu_0 \mu_{\phi\phi}} E_n^\rho - \frac{i}{\omega \mu_0 \mu_{\phi\phi}} \frac{\partial E_n^z}{\partial \rho}. \quad (4.9d)$$

U prethodnom sustavu jednadžbi možemo primijetiti nekoliko zanimljivih stvari. Promotrimo li jednadžbu za E_n^ρ komponentu polja vidimo da se s njene desne pojavljuju samo z i ϕ komponente polja H . U jednadžbi za H^ϕ (4.9d) javljaju se ρ i z komponente polja E . Uvrštavanjem jednadžbe (4.9d) u jednadžbu (4.9a) u jednadžbi (4.9a) ostat će samo z komponente polja E i H te ρ komponenta polja E . U tom slučaju moguće je izraziti komponentu polja E^ρ preko komponenti E^z i H^z . Sličnim postupkom u jednadžbama (4.9b), (4.9c) te (4.9d) dolazi se do sustava jednadžbi u kojemu su ρ i ϕ komponente polja E i H izražene preko komponenti E^z i H^z :

$$E_n^\rho = \frac{n\omega\mu_0\mu_{\phi\phi}}{q_{\phi\rho}^2 - (k^z)^2} \frac{1}{\rho} H_n^z - \frac{ik^z}{q_{\phi\rho}^2 - (k^z)^2} \frac{\partial E_n^z}{\partial \rho} \quad (4.10a)$$

$$E_n^\phi = \frac{nk^z}{q_{\rho\phi}^2 - (k^z)^2} H_n^z + \frac{i\omega\mu_0\mu_{\rho\rho}}{q_{\rho\phi}^2 - (k^z)^2} \frac{\partial H_n^z}{\partial \rho} \quad (4.10b)$$

$$H_n^\rho = -\frac{n\omega\epsilon_0\epsilon_{\phi\phi}}{q_{\rho\phi}^2 - (k^z)^2} \frac{1}{\rho} E_n^z - \frac{ik^z}{q_{\rho\phi}^2 - (k^z)^2} \frac{\partial H_n^z}{\partial \rho} \quad (4.10c)$$

$$H_n^\phi = \frac{nk^z}{q_{\phi\rho}^2 - (k^z)^2} \frac{1}{\rho} E_n^z - \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}}{q_{\phi\rho}^2 - (k^z)^2} \frac{\partial E_n^z}{\partial \rho}. \quad (4.10d)$$

Radi jednostavnijeg zapisa uvodimo pokrate za koeficijente:

$$q_{\rho\phi}^2 = q_{\phi\rho}^2(\rho) = \omega^2 \mu_0 \mu_{\rho\rho} \epsilon_0 \epsilon_{\phi\phi} \quad (4.11a)$$

$$q_{\phi\rho}^2 = q_{\rho\phi}^2(\rho) = \omega^2 \mu_0 \mu_{\phi\phi} \epsilon_0 \epsilon_{\rho\rho} \quad (4.11b)$$

te standardnu pokratu za derivaciju:

$$(E_n^z)' = \frac{dE_n^z}{d\rho}(\rho). \quad (4.12)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (4.9) u jednadžbu (4.8f) i jednadžbu (4.8c) dobije se sustav običnih diferencijalnih jednadžbi koji opisuje ponašanje električnog i magnetizirajućeg polja unutar

opisane strukture:

$$\begin{aligned} \rho^2 (E_n^z)'' + \rho (E_n^z)' + \left(\rho^2 (q_{\phi\rho}^2 - (k^z)^2) \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{\rho\rho}} - n^2 \frac{q_{\phi\rho}^2 - (k^z)^2}{q_{\rho\phi}^2 - (k^z)^2} \frac{\epsilon_{\phi\phi}}{\epsilon_{\rho\rho}} \right) E_n^z + \\ \rho \frac{ink^z}{\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}} \left(1 - \frac{q_{\phi\rho}^2 - (k^z)^2}{q_{\rho\phi}^2 - (k^z)^2} \right) (H_n^z)' = 0 \end{aligned} \quad (4.13a)$$

$$\begin{aligned} \rho^2 (H_n^z)'' + \rho (H_n^z)' + \left(\rho^2 (q_{\rho\phi}^2 - (k^z)^2) \frac{\mu_{zz}}{\mu_{\rho\rho}} - n^2 \frac{q_{\rho\phi}^2 - (k^z)^2}{q_{\phi\rho}^2 - (k^z)^2} \frac{\mu_{\phi\phi}}{\mu_{\rho\rho}} \right) H_n^z + \\ \rho \frac{ink^z}{\omega\mu_0\mu_{\rho\rho}} \left(\frac{q_{\phi\rho}^2 - (k^z)^2}{q_{\rho\phi}^2 - (k^z)^2} - 1 \right) (E_n^z)' = 0. \end{aligned} \quad (4.13b)$$

Kako bi pojednostavnili zapis jednadžbi unutar sustava (4.13) uvodimo pokrate za koeficijente:

$$A(\rho) = \rho^2 (q_{\phi\rho}^2 - k^z) \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{\rho\rho}} - n^2 \frac{q_{\phi\rho}^2 - k^z}{q_{\rho\phi}^2 - k^z} \frac{\epsilon_{\phi\phi}}{\epsilon_{\rho\rho}} \quad (4.14a)$$

$$B(\rho) = \rho \frac{ink^z}{\omega\epsilon_0\epsilon_{\rho\rho}} \left(1 - \frac{q_{\phi\rho}^2 - k^z}{q_{\rho\phi}^2 - k^z} \right) \quad (4.14b)$$

$$C(\rho) = \rho^2 (q_{\rho\phi}^2 - k^z) \frac{\mu_{zz}}{\mu_{\rho\rho}} - n^2 \frac{q_{\rho\phi}^2 - k^z}{q_{\phi\rho}^2 - k^z} \frac{\mu_{\phi\phi}}{\mu_{\rho\rho}} \quad (4.14c)$$

$$D(\rho) = \rho \frac{ink^z}{\omega\mu_0\mu_{\rho\rho}} \left(\frac{q_{\phi\rho}^2 - k^z}{q_{\rho\phi}^2 - k^z} - 1 \right). \quad (4.14d)$$

Uz uvedene pokrate (4.14) sustav običnih diferencijalnih jednadžbi (4.13) jednostavnije zapisujemo kao:

$$\rho^2 (E_n^z)'' + \rho (E_n^z)' + A E_n^z + B (H_n^z)' = 0 \quad (4.15a)$$

$$\rho^2 (H_n^z)'' + \rho (H_n^z)' + C H_n^z + D (E_n^z)' = 0. \quad (4.15b)$$

Uz sustav jednadžbi (4.15) potrebni su i rubni uvjeti kako bi mogli riješiti rubni problem sa slike 4.1. Unutar anizotropnog plašta nalazi se metalni cilindar kojeg označimo oznakom Ω_c . Objekt koji sadrži cilindar te j slojeva označavat ćemo s Ω_j , a cijeli objekt (cilindar sa svim slojevima plašta) označit ćemo s Ω_p . U opisanoj geometriji ϕ i z komponente polja predstavljaju tangencijalne komponente polja na granici između metalnog cilindra i anizotropnog plašta te na granici između dva susjedna sloja anizotropnog plašta. Iz rubnog uvjeta za električno polje na

metalnoj površini dobiju se dvije jednadžbe za tangencijalne komponente polja:

$$E_n^\phi(\Omega^+) = 0 \quad (4.16a)$$

$$E_n^z(\Omega^+) = 0 \quad (4.16b)$$

Na vanjskom rubu cilindra, kao i rubovima svih unutrašnjih slojeva tangencijalne komponente električnog i magnetizirajućeg polja su neprekidne:

$$E_n^\phi(\Omega_j^+) = E_n^\phi(\Omega_j^-) \quad (4.17a)$$

$$E_n^z(\Omega_j^+) = E_n^z(\Omega_j^-) \quad (4.17b)$$

$$E_n^\phi(\Omega_p^+) = E_n^\phi(\Omega_p^-) \quad (4.17c)$$

$$E_n^z(\Omega_p^+) = E_n^z(\Omega_p^-) \quad (4.17d)$$

isto kao i tangencijalne komponente magnetizirajućeg polja $\mathbf{H}$:

$$H_n^\phi(\Omega_j^+) = H_n^\phi(\Omega_j^-) \quad (4.18a)$$

$$H_n^z(\Omega_j^+) = H_n^z(\Omega_j^-) \quad (4.18b)$$

$$H_n^\phi(\Omega_p^+) = H_n^\phi(\Omega_p^-) \quad (4.18c)$$

$$H_n^z(\Omega_p^+) = H_n^z(\Omega_p^-). \quad (4.18d)$$

Sustav običnih diferencijalnih jednadžbi (4.15) zajedno s rubnim uvjetima (4.16), (4.17) i (4.18) daje potpuni opis raspršenja elektromagnetskog vala na kružnom cilindru načinjenom od savršenog metala koji se nalazi unutar anizotropne višeslojne strukture.

4.1.1 Zašto se u razmatranom modelu javlja sustav jednadžbi?

U modelu problema sa slike 4.1 opisanom sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi (4.15) zajedno s rubnim uvjetima (4.16), (4.17) i (4.18) te koeficijentima materijala (4.1) javlja se potreba za rješavanjem sustava jednadžbi koje opisuju E^z i H^z komponente polja. Iz izvoda modela vidljivo je da nije moguće opisati ponašanje na strukturi samo preko $\mathbf{E}$ ili samo preko $\mathbf{H}$ komponenti polja nego su za cjelokupni opis problema potrebna oba polja i svi rubni uvjeti. Ovakvo ponašanje javlja se zbog dvoosne anizotropije strukture, tj. zato što su parametri ϵ i μ reprezentirani dijagonalnim matricama (4.1) čiji su svi koeficijenti međusobno različiti. Pogledom na sustav jednadžbi koji opisuje ponašanje sa slike 4.1 možemo se pitati kada će se raspregnuti polja, tj. kada neće biti potrebno rješavati sustav jednadžbi (4.15). Fizikalno, taj slučaj odgovara situaciji u kojoj ne dolazi do depolarizacije upadnog elektromagnetskog vala.

Promatranjem jednadžbi možemo zaključiti dvije stvari. Prva se odnosi na kut upada elektromagnetskog vala. U slučaju okomitog upada elektromagnetskog vala na cilindar sa slike 4.1,

valni vektor upadnog vala ima oblik $k = (k^1, k^2, 0)$, tj. k^3 komponenta koja je usljed transformacije koordinata u cilindrični koordinati sustav jednaka komponenti k^z jednaka je 0. U tom slučaju koeficijenti B i C jednaki su 0 te se sustav običnih diferencijalnih jednačbi razdvoji na dvije odvojene obične diferencijalne jednačbe koje opisuju $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ polje. Dobijemo sustav:

$$\rho^2 (E_n^z)'' + \rho (E_n^z)' + \left(\rho^2 (q_{\phi\rho}^2) \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{\rho\rho}} - n^2 \frac{q_{\phi\rho}^2}{q_{\rho\phi}^2} \frac{\varepsilon_{\phi\phi}}{\varepsilon_{\rho\rho}} \right) E_n^z = 0 \quad (4.19a)$$

$$\rho^2 (H_n^z)'' + \rho (H_n^z)' + \left(\rho^2 (q_{\rho\phi}^2) \frac{\mu_{zz}}{\mu_{\rho\rho}} - n^2 \frac{q_{\rho\phi}^2}{q_{\phi\rho}^2} \frac{\mu_{\phi\phi}}{\mu_{\rho\rho}} \right) H_n^z = 0. \quad (4.19b)$$

Ove jednačbe su obične diferencijalne jednačbe Besselovog tipa koje imaju analitička rješenja [103]. Kako bi u potpunosti riješili problem potrebni su nam i rubni uvjeti. U opisanom slučaju dolazi i do rastavljanja rubnih uvjeta na dva polja. Iz jednačbi za ϕ komponente polja dobijemo:

$$E_n^\phi = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\phi\phi}} \frac{\partial H_n^z}{\partial \rho} \quad (4.20a)$$

$$H_n^\phi = \frac{-i}{\omega \mu_0 \mu_{\phi\phi}} \frac{\partial E_n^z}{\partial \rho} \quad (4.20b)$$

tj. rubni uvjet za E^ϕ komponentu polja koristit ćemo u jednačbi za H^z komponentu polja i obrnuto. Rubni uvjeti su se isto razdvojili na dvije odvojene klase rubnih uvjeta. Osim njih, možemo koristiti i rubne uvjete za z komponente polja koje u sebi nemaju suprotno polje. U slučaju okomitog upada elektromagnetskog vala na strukturu sa slike 4.1 problem se razdvojio na odvojene probleme za E^z i H^z komponente polja te se problem sveo na rješavanje jedne obične diferencijalne jednačbe, a ne sustava jednačbi.

Druga ključna stvar je dvoosna anizotropija strukture, tj. činjenica da su svi dijagonalni koeficijenti u matricama kojima su reprezentirani ε i μ međusobno različiti. U slučaju anizotropne strukture kod koje nisu svi koeficijenti međusobno različiti možemo dobiti drugačije ponašanje. Ako uzmemo jednoosno anizotropnu strukturu oblika:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\rho\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\rho\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

dobit ćemo jednostavnije koeficijente B i C čak i u slučaju kosog upada elektromagnetskog vala. Kao i kod okomitog upada ispast će da su koeficijenti B i C jednaki 0 što rezultira time da se sustav običnih diferencijalnih jednačbi (4.15) opet razdvojio na dvije odvojene obične diferen-

cijalne jednadžbe. Također, preostala dva koeficijenta su pojednostavljena pa nove jednadžbe glase:

$$\rho^2 (E_n^z)'' + \rho (E_n^z)' + (\rho^2 k_0^2 \mu_{\rho\rho} \epsilon_{zz} - n^2) E_n^z = 0 \quad (4.22a)$$

$$\rho^2 (H_n^z)'' + \rho (H_n^z)' + (\rho^2 k_0^2 \epsilon_{\rho\rho} \epsilon_{zz} - n^2) H_n^z = 0. \quad (4.22b)$$

Jednadžbe za E^z i H^z polja su obične diferencijalne jednadžbe Besselovog tipa. Na isti način kao i u prethodnom slučaju, može se doći do rubnih uvjeta i riješiti problem. Problem jednoosne anizotropne planarne ili cilindrične strukture opisan je u Poglavlju 3.

Ako se umjesto jednoosne anizotropne strukture pretpostavi plašt od homogenog materijala s parametrima μ_r i ϵ_r , onda se jednadžbe (4.22) neće previše promijeniti:

$$\rho^2 (E_n^z)'' + \rho (E_n^z)' + (\rho^2 k_0^2 \mu_r \epsilon_r - n^2) E_n^z = 0 \quad (4.23a)$$

$$\rho^2 (H_n^z)'' + \rho (H_n^z)' + (\rho^2 k_0^2 \epsilon_r \mu_r - n^2) H_n^z = 0. \quad (4.23b)$$

U zraku se problem još malo pojednostavljuje. Zrak je izotropan, homogen medij s jediničnom relativnom permitivnošću i permeabilnošću. U tom slučaju također dobijemo Besselove diferencijalne jednadžbe:

$$\rho^2 (E_n^z)'' + \rho (E_n^z)' + \rho^2 \left(k_0^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) E_n^z = 0 \quad (4.24a)$$

$$\rho^2 (H_n^z)'' + \rho (H_n^z)' + \rho^2 \left(k_0^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) H_n^z = 0 \quad (4.24b)$$

s istim rubnim uvjetima kao i u prethodnim slučajevima. Besselova obična diferencijalna jednadžba ima rješenja različitog oblika. U ovisnosti o fizikalnoj pozadini problema treba odabrati pravo rješenje. Ne mogu sva moguća matematička rješenja zadovoljiti rubne uvjete problema sa slike 4.1. Osim rubnog uvjeta na cilindru i međuslojevima, jako je bitan i Sommerfeldov uvjet zračenja koji predstavlja "rubni uvjet u beskonačnosti". On nam omogućuje da od nekoliko mogućih rješenja jednadžbi u zraku odaberemo ona rješenja koja će predstavljati val koji se raspršuje od strukture i odlazi u slobodni prostor. U slučaju vremenske ovisnosti $e^{i\omega t}$ rješenje koje zadovoljava Sommerfeldov rubni uvjet je rješenje oblika H_n^2 , tj. Hankelova funkcija druge vrste [77].

4.2 Modeliranje pobude kod kosog upada elektromagnetskog vala na kružni cilindar

Postavit ćemo koordinatni sustav na način predstavljen na slici 4.1. Upadni elektromagnetski val promatrat ćemo u dvije odvojene polarizacije. Jedna polarizacija bit će TM_z , a druga TE_z [104]. Iz sustava jednačbi koji opisuje elektromagnetsko polje u problemu sa slike 4.1 vidimo da se kod upadnog elektromagnetskog vala s električnim poljem u smjeru osi z javlja i depolarizacija, tj. nakon refleksije upadnog vala od strukture javlja se i magnetizirajuće polje u smjeru osi z . Zato moramo opisati obje polarizacije jer kod obje pobudne polarizacije dobijemo oba polja u z smjeru nakon refleksije. Zato što rješavamo problem s kružnom simetrijom koristit ćemo rastav planarnog vala na Besselove funkcije:

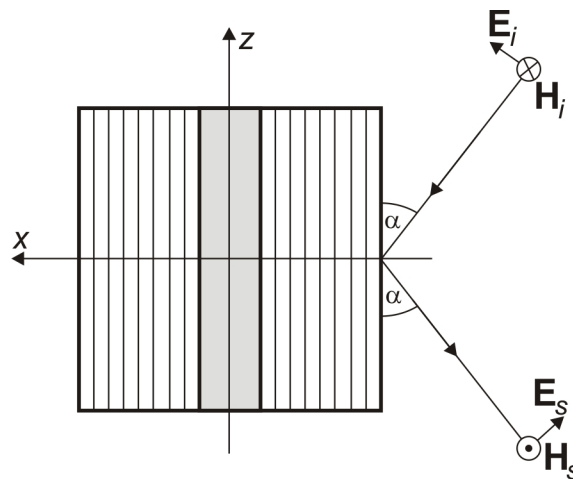
$$e^{-ikx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k\rho) e^{in\phi} \quad (4.25)$$

4.2.1 Pobudni TM_z elektromagnetski val

Upadni TM_z elektromagnetski val prikazan je na slici 4.2. Iz pobudnog elektromagnetskog vala možemo izdvojiti valni vektor $\mathbf{k}$ te vektor električnog polja $\mathbf{E}$. Zapisom svih komponenti dobijemo:

$$\mathbf{k}_{inc} = k_0 (\sin(\alpha), 0, -\cos(\alpha)) \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{E}_{inc} = E_0 (\cos(\alpha), 0, \sin(\alpha)). \quad (4.26b)$$



Slika 4.2: Kosi upad elektromagnetskog vala u TM_z modu na metalni cilindar unutar anizotropnog plašta

Uz valni vektor $\mathbf{k}$ te vektor električnog polja $\mathbf{E}$ dan s (4.26) dobijemo zapis električnog polja

upadnog elektromagnetskog vala:

$$\mathbf{E}_{inc} = E_0 (\cos(\alpha), 0, \sin(\alpha)) e^{-ik_0(\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)z)} \quad (4.27)$$

te zapis električnog polja raspršenog elektromagnetskog vala:

$$\mathbf{E}_s = E_0 (-\cos(\alpha), 0, \sin(\alpha)) e^{ik_0(\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)z)}. \quad (4.28)$$

U našem modelu bitne su z komponente polja:

$$E_{inc}^z = E_0 \sin(\alpha) e^{-ik_0(\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)z)} \quad (4.29a)$$

$$E_s^z = E_0 \sin(\alpha) e^{ik_0(\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)z)} \quad (4.29b)$$

Zbog invarijantnosti strukture u smjeru osi z moguće razmatrati elektromagnetski problem samo u jednoj xy ravnini. Bez smanjenja općenitosti možemo izabrati ravninu $z = 0$. Na taj način pojednostaviti ćemo zapis z komponenti polja (4.29), a i cjelokupni račun. Dobijemo:

$$E_{inc}^z = E_0 \sin(\alpha) e^{-ik_0 \sin(\alpha)x} \quad (4.30a)$$

$$E_s^z = E_0 \sin(\alpha) e^{ik_0 \sin(\alpha)x}. \quad (4.30b)$$

Fizikalno smisleno rješenje za raspršeni elektromagnetski val izvan strukture dano je Hankelovom funkcijom druge vrste $H_n^{(2)}$. Pomoću reprezentacije eksponencijalne funkcije preko Besselovih funkcija dobijemo izraze za polje izvan Ω_p [105]:

$$E_n^z = E_0 \sin(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} \left(J_n(k^z \rho) + R_n H_n^{(2)}(k^z \rho) \right) e^{in\phi} \quad (4.31a)$$

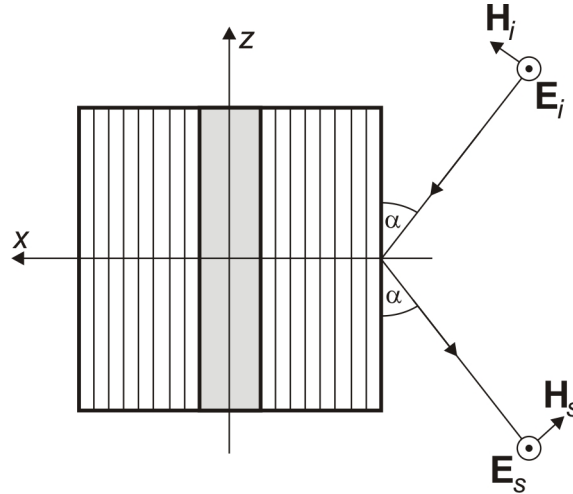
$$H_n^z = E_0 \sin(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} C_n H_n^{(2)}(k^z \rho) e^{in\phi} \quad (4.31b)$$

gdje R_n i C_n predstavljaju koeficijente refleksije po svakom modu. U slučaju TM_z upadnog vala ne postoji H^z komponenta polja unutar upadnog elektromagnetskog vala, ali se ona javlja nakon raspršenja elektromagnetskog vala od strukture na slici 4.1 zbog depolarizacije.

4.2.2 Pobudni TE_z elektromagnetski val

Upadni TE_z elektromagnetski val prikazan je na slici 4.3. Iz upadnog elektromagnetskog vala možemo izdvojiti vaćni vektor $\mathbf{k}$ te vektor magnetizirajućeg polja $\mathbf{H}$.

Koristeći istu tehniku kao i kod upadnog vala u TM_z modu dobijemo zapis polja i u slučaju



Slika 4.3: Kosi upad elektromagnetskog vala u TE_z modu na metalni cilindar unutar anizotropnog plašta

druge polarizacije:

$$H_n^z = E_0 \sin(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} \left(J_n(k_z \rho) + C_n H_n^{(2)}(k_z \rho) \right) e^{in\phi} \quad (4.32a)$$

$$E_n^z = E_0 \sin(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} R_n H_n^{(2)}(k_z \rho) e^{in\phi} \quad (4.32b)$$

Pomoću zapisa pobudnog i raspršenog vala izvan strukture za oba moda upadnog elektromagnetskog vala (4.31) i (4.32) popunjavamo i zadnji djelić slagalice. Korištenjem jednadžbi (4.31) i (4.32) unutar numeričke sheme koju ćemo razviti, dobit ćemo sve potrebne rubne uvjete za rješavanje problema sa slike 4.1. Rješenjem dobivenog sustava doći ćemo do koeficijenata R_n i C_n pomoću kojih možemo opisati ukupno polje u bilo kojoj točki prostora izvan promatrane strukture.

4.3 Numerička metoda za problem kosog upada elektromagnetskog vala na metalni cilindar unutar anizotropnog višeslojnog plašta

Sustav običnih diferencijalnih jednadžbi (4.15) zajedno s rubnim uvjetima (4.16), (4.17), (4.18) unutar strukture i opisom ponašanja raspršenog polja izvan strukture danim s (4.31) i (4.32) nije moguće analitički riješiti. Ideja koju ćemo primijeniti temelji se na postupku spajanja analitičkog rješenja koje je poznato izvan strukture i numeričkog rješenja koje je poznato unutar strukture na vanjskom rubu strukture. Slične metode mogu se pronaći u primjenama na akustičke probleme [40]. Zbog jednostavnosti i brzine implementacije koristit ćemo metodu konačnih razlika [106].

U slučaju koji promatramo relativna permeabilnost i permitivnost su po dijelovima neprekidne funkcije. Jedini fizikalno smisleni slučaj je slučaj u kojem plašt možemo podijeliti na slojeve materijala, tj. postoje točke $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_{M+1}$ kojima možemo podijeliti anizotropni plašt na M slojeva unutar kojih su parametri permitivnosti i permeabilnosti konstantni. Prekid unutar sloja upravo odgovara različitim slojevima pa će zato unutar pojedinog sloja materijal biti neprekidan. Potrebno je zasebno diskretizirati svaki sloj i na rubu pomoću rubnih uvjeta spojiti rješenje s rješenjem u susjednom sloju. Na taj način očuvat će se veća glatkoću rješenja što će rezultirati većom točnošću. U literaturi su predloženi i drugi pristupi unutar kojih se na prijelazu između slojeva stavlja točka u diskretizaciji te se uzima srednja vrijednost parametra s lijeve i desne strane ruba. Na taj način unesena je dodatna pogreška u sustav i rješenje više nema glatkoću koji bi imalo na način da se na svakom sloju rješava zasebno. Time je smanjena točnost metode [107].

Svaki sloj anizotropnog plašta potrebno je podijeliti uniformnom subdivizijom na N dijelova. Širina pojedinog intervala u subdiviziji jednaka je $h = \frac{b-a}{N}$, a čvorovi subdivizije nalaze se na mjestima $\rho_m = a + mh$, gdje je $m = 0, \dots, N$. Problem kojeg želimo riješiti svodi se na rješavanje rubnog problema za koeficijente E_n^z i H_n^z u Fourierovom rastavu polja E i H . Zbog jednostavnijeg zapisa uvodimo $E_{m;n} = E_n^z(\rho_m)$ i $H_{m;n} = H_n^z(\rho_m)$.

Koristit ćemo centralne razlike za aproksimaciju derivacija u sustavu [62]:

$$(E_n^z)'(\rho_m) = \frac{E_{m+1;n} - E_{m-1;n}}{2h} \quad (4.33a)$$

$$(E_n^z)''(\rho_m) = \frac{E_{m+1;n} - 2E_{m;n} + E_{m-1;n}}{h^2}. \quad (4.33b)$$

Osim diskretizacije nepoznanica E i H potrebno je diskretizirati i ostale funkcije u sustavu. Na taj način dobijemo diskretizirane koeficijente A, B, C i D :

$$A_m = (\rho_m)^2 \left(q_{m;\phi\rho}^2 - (k^z)^2 \right) \frac{\epsilon_{m;zz}}{\epsilon_{m;\rho\rho}^m} - n^2 \frac{q_{m;\phi\rho}^2 - (k^z)^2}{q_{m;\rho\phi}^2 - (k^z)^2} \frac{\epsilon_{m;\phi\phi}}{\epsilon_{m;\rho\rho}} \quad (4.34a)$$

$$B_m = \rho_m \frac{ink^z}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{m;\rho\rho}} \left(1 - \frac{q_{m;\phi\rho}^2 - (k^z)^2}{q_{m;\rho\phi}^2 - (k^z)^2} \right) \quad (4.34b)$$

$$C_m = \rho_m \frac{ink^z}{\omega \mu_0 \mu_{m;\rho\rho}} \left(\frac{q_{m;\phi\rho}^2 - (k^z)^2}{q_{m;\rho\phi}^2 - (k^z)^2} - 1 \right) \quad (4.34c)$$

$$D_m = \rho_m^2 \left(q_{m;\rho\phi}^2 - (k^z)^2 \right) \frac{\mu_{zz}}{\mu_{\rho\rho}} - n^2 \frac{q_{m;\rho\phi}^2 - (k^z)^2}{q_{m;\phi\rho}^2 - (k^z)^2} \frac{\mu_{m;\phi\phi}}{\mu_{m;\rho\rho}}, \quad (4.34d)$$

uz oznake:

$$q_{m;\rho\phi}^2 = \omega^2 \mu_0 \mu_{m;\rho\rho} \varepsilon_0 \varepsilon_{m;\phi\phi} \quad (4.35a)$$

$$q_{m;\phi\rho}^2 = \omega^2 \mu_0 \mu_{m;\phi\phi} \varepsilon_0 \varepsilon_{m;\rho\rho}. \quad (4.35b)$$

Aproksimiranjem derivacije konačnim razlikama i aproksimacijom funkcija u sustav običnih diferencijalnih jednadžbi (4.15) dobijemo sustav linearnih jednadžbi:

$$\rho_m^2 \frac{E_{m+1;n} - 2E_{m;n} + E_{m-1;n}}{h^2} + \rho_m \frac{E_{m+1;n} - E_{m-1;n}}{2h} + A_m E_{m;n} + B_m \frac{H_{m+1;n} - H_{m-1;n}}{2h} = 0 \quad (4.36a)$$

$$\rho_m^2 \frac{H_{m+1;n} - 2H_{m;n} + H_{m-1;n}}{h^2} + \rho_m \frac{H_{m+1;n} - H_{m-1;n}}{2h} + D_m H_{m;n} + C_m \frac{E_{m+1;n} - E_{m-1;n}}{2h} = 0. \quad (4.36b)$$

Dobivene jednadžbe grupiramo po vrijednostima polja E i H u pojedinim točkama diskretizacije:

$$\frac{\rho_m}{h} \left(\frac{\rho_m}{h} - \frac{1}{2} \right) E_{m-1;n} + \left(-2 \left(\frac{\rho_m}{h} \right)^2 + A_m \right) E_{m;n} + \frac{\rho_m}{h} \left(\frac{\rho_m}{h} + \frac{1}{2} \right) E_{m+1;n} - \quad (4.37a)$$

$$\left(\frac{B_m}{2h} \right) H_{m-1;n} + \left(\frac{B_m}{2h} \right) H_{m+1;n} = 0 \quad (4.37b)$$

$$\frac{\rho_m}{h} \left(\frac{\rho_m}{h} - \frac{1}{2} \right) H_{m-1;n} + \left(-2 \left(\frac{\rho_m}{h} \right)^2 + D_m \right) H_{m;n} + \frac{\rho_m}{h} \left(\frac{\rho_m}{h} + \frac{1}{2} \right) H_{m+1;n} - \quad (4.37c)$$

$$\left(\frac{C_m}{2h} \right) E_{m-1;n} + \left(\frac{C_m}{2h} \right) E_{m+1;n} = 0. \quad (4.37d)$$

Za potpuni opis problema potrebno je diskretizirati i rubne uvjete (4.16), (4.17) i (4.18). Unutar strukture, na granici slojeva, tangencijalne komponente polja su kontinuirane. Iz definicija polja izdvojimo definicije ϕ komponenti polja. Zbog kompaktnijeg pisanja uvedemo pokratu za koeficijente:

$$M_m = \frac{k^z n}{q_{m;\phi\rho}^2 - (k^z)^2} \frac{1}{\rho_m} \quad (4.38a)$$

$$N_m = -\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\rho\rho}}{q_{m;\phi\rho}^2 - (k^z)^2} \quad (4.38b)$$

$$U_m = \frac{k^z n}{q_{m;\rho\phi}^2 - (k^z)^2} \frac{1}{\rho_m} \quad (4.38c)$$

$$V_m = \frac{i\omega\mu_0\mu_{\rho\rho}}{q_{m;\rho\phi}^2 - (k^z)^2}, \quad (4.38d)$$

pomoću koje je moguće kompaktnije zapisati diskretizirane rubne uvjete. Pri zapisu diskretizi-

ranih rubnih uvjeta ispustit ćemo oznaku sloja u kojem se nalazimo jer promatramo svaki sloj lokalno. Izvest ćemo matricu sustava za svaki pojedini sloj domene i onda sve lokalne matrice sustava spojiti u globalnu matricu. U načinu zapisa koji koristimo zadnja točka u diskretizaciji sloja je točka označena s N . Točku označena s $N + l$ je l -ta točka u susjednom sloju domene. Korištenjem pokrata (4.38) dobijemo doskretizirane izraze za komponente polja pomoću kojih izvodimo rubne uvjete:

$$H_{m;n}^{\phi} = M_m H_{m;n} + N \frac{E_{m;n} - E_{m-1;n}}{h} \quad (4.39a)$$

$$E_{m;n}^{\phi} = U_m E_{m;n} + V \frac{H_{m;n} - H_{m-1;n}}{h}. \quad (4.39b)$$

Korištenjem rubnih uvjeta (4.17) i (4.18) te prethodne diskretizacije dolazimo do rubnih uvjeta za ϕ komponente polja. Uvrštavanjem zadnje točke u diskretizaciji pojedinog sloja ($m = N$) dobijemo:

$$M_N H_{N;n} + N_N \frac{E_{N;n} - E_{N-1;n}}{h} = M_{N+1} H_{N+1;n} + N_{N+1} \frac{E_{N+2;n} - E_{N+1;n}}{h} \quad (4.40a)$$

$$U_N E_{N;n} + V_N \frac{H_{N;n} - H_{N-1;n}}{h} = U_{N+1} E_{N+1;n} + V_{N+1} \frac{H_{N+2;n} - H_{N+1;n}}{h}. \quad (4.40b)$$

Grupiranjem prethodnog sustava jednadžbi po koeficijentima dobijemo:

$$-\frac{N_N}{h} E_{N-1;n} + \frac{N_N}{h} E_{N;n} + \frac{N_{N+1}}{h} E_{N+1;n} - \frac{N_{N+1}}{h} E_{N+2;n} + M_N H_{N;n} - M_{N+1} H_{N+1;n} = 0 \quad (4.41a)$$

$$-\frac{V_N}{h} H_{N-1;n} + \frac{V_N}{h} H_{N;n} + \frac{V_{N+1}}{h} H_{N+1;n} - \frac{V_{N+1}}{h} H_{N+2;n} + U_N E_{N;n} - U_{N+1} E_{N+1;n} = 0. \quad (4.41b)$$

Rubni uvjet (4.17b) i (4.18b) daju kontinuiranost z komponenti električnog i magnetizirajućeg polja preko granice dva sloja:

$$H_{N;n} = H_{N+1;n} \quad (4.42a)$$

$$E_{N;n} = E_{N+1;n}. \quad (4.42b)$$

Iz rubni uvjeta na savršenom metalu (4.16) dobijemo vrijednosti tangencijalnih komponenti polja u prvoj točki diskretizacije:

$$E_{1;n} = 0 \quad (4.43a)$$

$$E_{1;n}^{\phi} = 0. \quad (4.43b)$$

Pomoću definicije polja E_n^{ϕ} iz rubnog uvjeta (4.43b) dobije se veza između vrijednosti polja

H_n^z u prve dvije točke diskretizacije:

$$H_{1;n} = H_{2;n}. \quad (4.44)$$

S rubnim uvjetima (4.44), (4.43), (4.42) i (4.41) te sustavom linearnih jednadžbi (4.37) imamo sve potrebne informacije za rješavanje problema opisanog sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi (4.15) i pripadnim rubnim uvjetima. Potrebno je još pojednostaviti jednadžbe u rubnim točkama diskretizirane domene. Korištenjem rubnih uvjeta (4.43) i (4.44) u sustavu jednadžbi (4.37) dobijemo prve dvije jednadžbe u prvom sloju anizotropnog materijala:

$$\left(-2\left(\frac{\rho_2}{h}\right)^2 + A_2\right)E_{2;n} + \left(\left(\frac{\rho_2}{h}\right)^2 + \frac{\rho_2}{2h}\right)E_{3;n} - \frac{B_2}{2h}H_{2;n} + \frac{B_2}{2h}H_{3;n} = 0 \quad (4.45a)$$

$$\left(-2\left(\frac{\rho_2}{h}\right)^2 - \frac{\rho_2}{2h} + D_2\right)H_{2;n} + \left(\left(\frac{\rho_2}{h}\right)^2 + \frac{\rho_2}{2h}\right)H_{3;n} + \frac{C_2}{2h}E_{3;n} = 0. \quad (4.45b)$$

S prethodnim jednadžbama postavili smo sve rubne uvjete između slojeva i na metalnom cilindru. Za ukupno rješenje problema potrebno je modelirati rubni uvjet na vanjskom sloju anizotropnog plašta.

4.3.1 Rubni uvjeti na vanjskom sloju anizotropnog plašta za pobudu elektromagnetskim valom TM_z polarizacije

U slučaju pobude elektromagnetskim valom TM_z polarizacije potrebno je spojiti izraze za rješenje izvan anizotropnog plašta (4.31) s rubnim uvjetima na granici između zadnjeg sloja plašta i zraka (4.41) i (4.42). Spajanjem rubnog uvjeta (4.41) i pobude (4.31) dobiju se jednadžbe:

$$M_N H_{N;n} + N_N \frac{E_{N;n} - E_{N-1;n}}{h} = M_{N+1} \sin(\alpha) i^{-n} C_n H_n^{(2)}(k^z b) + N_{N+1} \sin(\alpha) i^{-n} \left(J_n(k^z b)' + R_n H_n^{(2)}(k^z b)' \right) \quad (4.46a)$$

$$U_N E_{N;n} + V_N \frac{H_{N;n} - H_{N-1;n}}{h} = U_{N+1} \sin(\alpha) i^{-n} \left(J_n(k^z b) + R_n H_n^{(2)}(k^z b) \right) + V_{N+1} \sin(\alpha) i^{-n} C_n H_n^{(2)}(k^z b)'. \quad (4.46b)$$

Grupiramo li elemente u jednadžbama (4.46) po koeficijentima dobijemo:

$$-\frac{N_N}{h} E_{N-1;n} + \frac{N_N}{h} E_{N;n} + M_N H_{N;n} - i^{-n} \sin(\alpha) N_{N+1} H_n^{(2)}(k^z b)' R_n - i^{-n} \sin(\alpha) M_{N+1} H_n^{(2)}(k^z b) C_n = i^{-n} \sin(\alpha) N_{N+1} J_n(k^z b)' \quad (4.47a)$$

$$-\frac{V_N}{h} H_{N-1;n} + \frac{V_N}{h} H_{N;n} + U_N E_{N;n} - i^{-n} \sin(\alpha) U_{N+1} H_n^{(2)}(k^z b) R_n - i^{-n} \sin(\alpha) V_{N+1} H_n^{(2)}(k^z b)' C_n = i^{-n} \sin(\alpha) U_{N+1} J_n(k^z b). \quad (4.47b)$$

Iz rubnog uvjeta za z komponente polja dobijemo zadnje dvije jednačbe. Spajanjem rubnog uvjeta (4.42) i pobude (4.31) dobijemo:

$$E_{N;n} = i^{-n} \sin(\alpha) \left(J_n(k^z b) + R_n H_n^{(2)}(k^z b) \right) \quad (4.48a)$$

$$H_{N;n} = i^{-n} \sin(\alpha) C_n H_n^{(2)}(k^z b). \quad (4.48b)$$

Jednačbe (4.48) nakon grupiranja po koeficijentima glase:

$$E_{N;n} - i^{-n} \sin(\alpha) H_n^{(2)}(k^z b) R_n = i^{-n} \sin(\alpha) J_n(k^z b) \quad (4.49a)$$

$$H_{N;n} - i^{-n} \sin(\alpha) H_n^{(2)}(k^z b) C_n = 0. \quad (4.49b)$$

S jednačbama (4.47) i (4.49) upotpunjen je opis numieričke metode za problem sa slike 4.1 u slučaju pobude TM_z valom.

4.3.2 Rubni uvjeti na vanjskom sloju anizotropnog plašta za pobudu elektromagnetskim valom TE_z polarizacije

U slučaju pobude elektromagnetskim valom TE_z polarizacije spajanjem izraza za raspršeno polje izvan anizotropnog plašta (4.32) s rubnim uvjetima na granici između zadnjeg sloja plašta i zraka (4.41) i (4.42) dobit ćemo rubne uvjete na vanjskoj granici anizotropnog plašta. Spajanjem rubnog uvjeta (4.41) i pobude (4.32) dobijemo jednačbe:

$$M_N H_{N;n} + N_N \frac{E_{N;n} - E_{N-1;n}}{h} = M_{N+1} \sin(\alpha) i^{-n} \left(J_n(k^z b) + C_n H_n^{(2)}(k^z b) \right) + N_{N+1} \sin(\alpha) i^{-n} R_n H_n^{(2)}(k^z b)' \quad (4.50a)$$

$$U_N E_{N;n} + V_N \frac{H_{N;n} - H_{N-1;n}}{h} = U_{N+1} \sin(\alpha) i^{-n} R_n H_n^{(2)}(k^z b) + V_{N+1} \sin(\alpha) i^{-n} \left(J_n(k^z b)' + C_n H_n^{(2)}(k^z b)' \right). \quad (4.50b)$$

Grupiranjem elemenata u jednačbi (4.50) dobijemo jednačbe povezane s rubnim uvjetom (4.41):

$$-\frac{N_N}{h} E_{N-1;n} + \frac{N_N}{h} E_{N;n} + M_N H_{N;n} - i^{-n} \sin(\alpha) N_{N+1} H_n^{(2)}(k^z b)' R_n - i^{-n} \sin(\alpha) M_{N+1} H_n^{(2)}(k^z b) C_n = i^{-n} \sin(\alpha) M_{N+1} J_n(k^z b) \quad (4.51a)$$

$$-\frac{V_N}{h} H_{N-1;n} + \frac{V_N}{h} H_{N;n} + U_N E_{N;n} - i^{-n} \sin(\alpha) U_{N+1} H_n^{(2)}(k^z b) R_n - i^{-n} \sin(\alpha) V_{N+1} H_n^{(2)}(k^z b)' C_n = i^{-n} \sin(\alpha) V_{N+1} J_n(k^z b)'. \quad (4.51b)$$

Zadnje dvije jednačbe dobijemo iz rubnog uvjeta za z komponente polja. Spajanjem rub-

nog uvjeta (4.42) s pobudom (4.32) dobijemo:

$$E_{N;n} = i^{-n} \sin(\alpha) R_n H_n^{(2)}(k^z b) \quad (4.52a)$$

$$H_{N;n} = i^{-n} \sin(\alpha) \left(J_n(k^z b) + C_n H_n^{(2)}(k^z b) \right). \quad (4.52b)$$

Zadnje dvije jednadžbe u sustavu su:

$$E_{N;n} - i^{-n} \sin(\alpha) H_n^{(2)}(k^z b) R_n = 0 \quad (4.53a)$$

$$H_{N;n} - i^{-n} \sin(\alpha) H_n^{(2)}(k^z b) C_n = i^{-n} \sin(\alpha) J_n(k^z b) \quad (4.53b)$$

S jednadžbama (4.51) i (4.53) upotpunjen je opis numeričkog rješenja problema sa slike 4.1 u slučaju pobude TE_z valom.

4.4 Primjena izvedene numeričke metode na kosi upad elektromagnetskog vala na metalni cilindar unutar anizotropnog višeslojnog plašta

Prethodno izvedeni model primijenit ćemo na analizu kosog upada elektromagnetskog vala na Schurigovom i Caijevom plaštu nevidljivosti [42, 82].

4.4.1 Provjera prethodno izvedene numeričke metode na testnim primjerima

Rezultate dobivene izvedenom metodom usporedit ćemo s rezultatima iz literature. Usporedit ćemo okomiti upad na cilindar od savršenog metala, kosi upad na cilindar od savršenog metala unutar jednog sloja dielektrika te okomiti upad na cilindar načinjem od savršenog metala unutar Schurigova plašta nevidljivosti načinjenog od 10 slojeva anizotropnog materijala. Uspoređivat ćemo radarski presjek [108] dobiven opisanom metodom i G1DMULT algoritmom [31]. U slučaju TM_z pobude radarski presjek definiramo kao:

$$\sigma_{2D} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \left| \frac{\mathbf{E}_s}{\mathbf{E}_{inc}} \right|^2, \quad (4.54)$$

a u slučaju TE_z pobude kao:

$$\sigma_{2D} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \left| \frac{\mathbf{H}_s}{\mathbf{H}_{inc}} \right|^2. \quad (4.55)$$

U izvodu izraza za radarski presjek koristit ćemo asimptotsku aproksimaciju Hankelove

funkcije za $\rho \rightarrow \infty$ [44]. U slučaju TM_z definicijski izraz radarskog presjeka prelazi u izraz:

$$\sigma_{2D} = \frac{4}{k_0 \sin(\alpha)} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{in\phi} \right|^2, \quad (4.56)$$

a u slučaju TE_z pobude u izraz:

$$\sigma_{2D} = \frac{4}{k_0 \sin(\alpha)} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\phi} \right|^2. \quad (4.57)$$

Usporedit ćemo i vrijednost ukupnog raspršenja definiranog kao:

$$\sigma_W = \frac{P_L}{|\mathbf{S}_{inc}|}, \quad (4.58)$$

gdje $\mathbf{S}_{inc}$ predstavlja Poyntingov vektor pobudnog vala, a $\mathbf{S}_s$ Poyntingov vektor raspršenog vala:

$$\mathbf{S}_{inc} = \frac{|\mathbf{E}_{inc}|^2}{2\eta} \mathbf{k}_{inc} \quad (4.59a)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{|\mathbf{E}_s|^2}{2\eta} \mathbf{k}_s. \quad (4.59b)$$

Koeficijent η predstavlja intrinzičnu impedanciju prostora u kojem se val giba, a k_{inc} i k_s su valni vektori vala koji se giba, odnosno koji se raspršuje [54]. Ukupna raspršena snaga definirana je kao:

$$P_L = \rho \int_0^{2\pi} \mathbf{S}_s \cdot \rho d\phi. \quad (4.60)$$

Uvrštavanjem podataka za raspršeni val u slučaju TM_z pobude dobijemo:

$$P_L = \rho \int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi k_0 \rho} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{in\phi} \right|^2 d\phi. \quad (4.61)$$

Pomoću ortogonalnosti Fourierove baze [71] prethodni izraz pojednostavni se u izraz:

$$\sigma_W^{TM_z} = \frac{4}{k_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_n|^2 \quad (4.62)$$

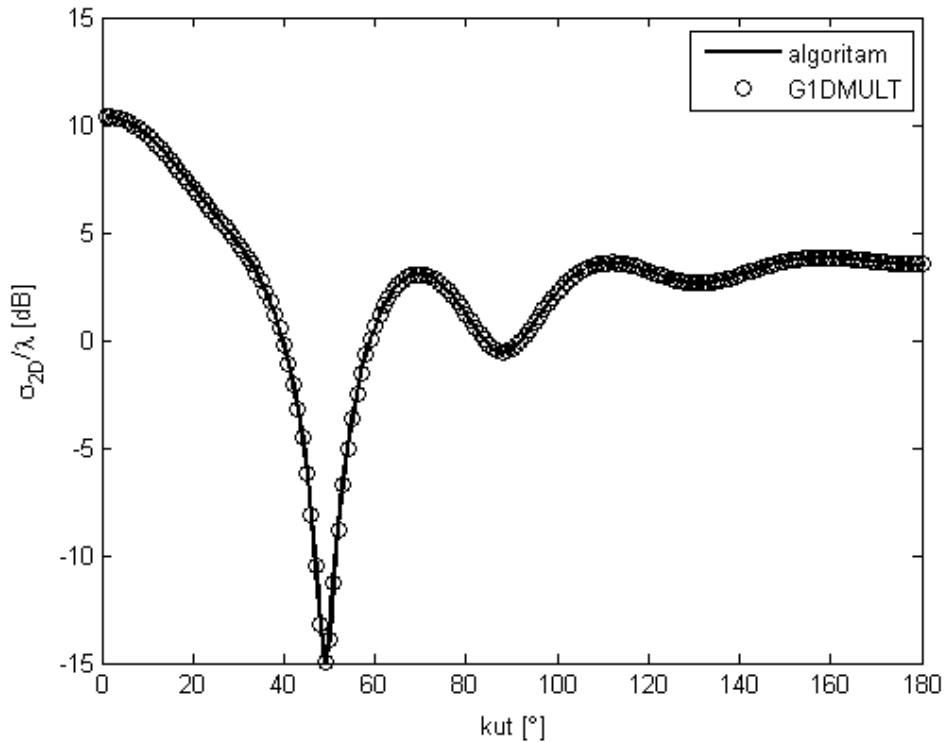
u slučaju TM_z pobudnog vala te u izraz:

$$\sigma_W^{TE_z} = \frac{4}{k_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad (4.63)$$

u slučaju TE_z pobudnog vala. Ako se u problemu javlja i depolarizacija vala onda vrijednost ukupnog raspršenja iznosi:

$$\sigma_W^{TM_z} = \frac{4}{k_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|R_n|^2 + |C_n|^2). \quad (4.64)$$

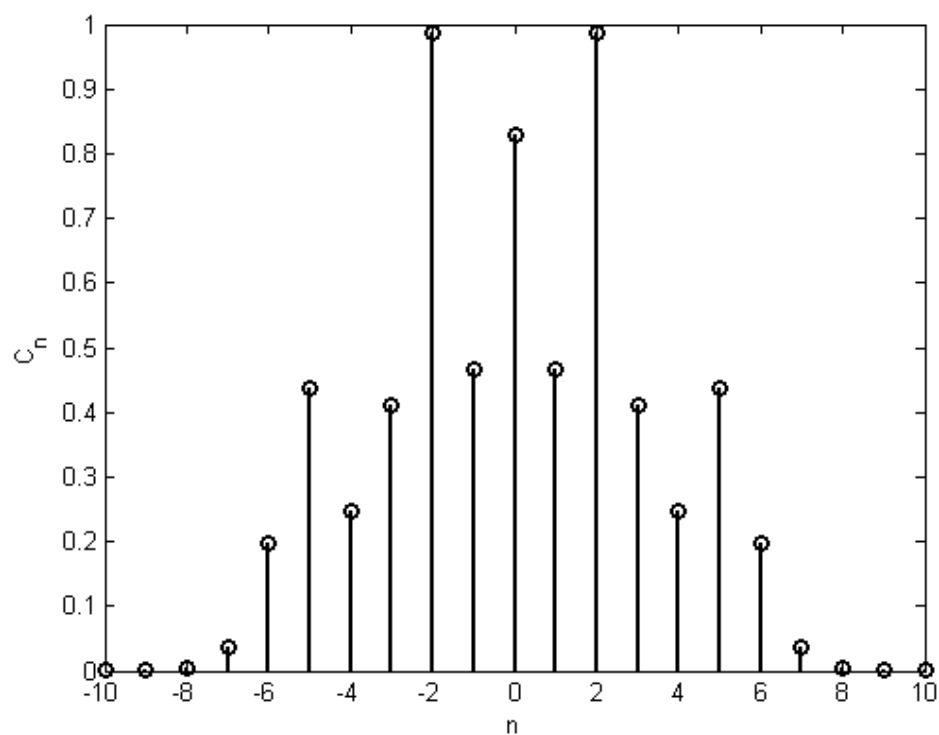
Na slici 4.4 prikazana je usporedba rješenja za okomiti upad elektromagnetskog vala TE_z polarizacije na cilindar načinjen od savršenog metala. Radna frekvencija je $f = 8.5$ GHz, a promjer metalnog cilindra iznosi $2a = 5.42$ cm. Dobili smo gotovo savršeno poklapanje rezultata dobivenih G1DMULT algoritmom i razvijenom metodom. Na slici 4.5 prikazani su koeficijenti C_n u rastavu raspršenog vala. Usporedimo li ocjenu o količini potrebnih modova iz knjige [40] koja iznosi $2k_0x$, gdje je x najveća dimenzija objekta, dobijemo odnos 17 za izračunati broj modova i 19 za broj modova po navedenoj ocjeni.



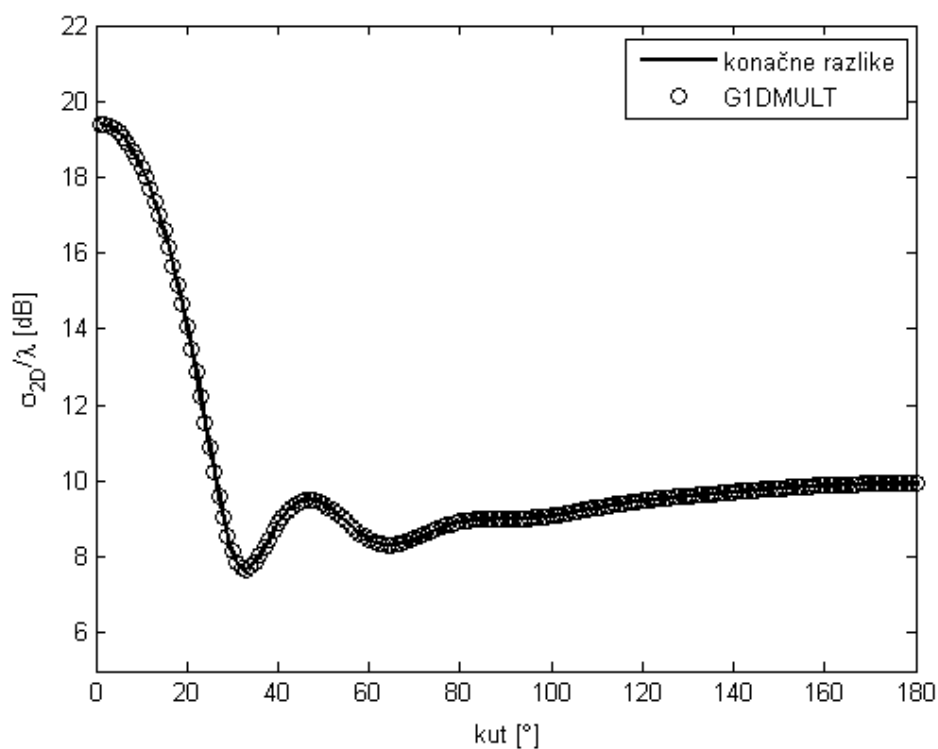
Slika 4.4: Radarski presjek cilindra načinjenog od savršenog metala za okomiti upad TE_z moda

Na slici 4.6 prikazana je usporedba rješenja za okomiti upad elektromagnetskog vala TE_z polarizacije na cilindar načinjen od savršenog metala dobivenih s dvije različite metode. Graf prikazan punom linijom dobiven je izvedenom metodom, a kružićima je prikazano rješenje dobiveno G1DMULT algoritmom. Na spomenutoj slici možemo vidjeti dobro poklapanje dva rješenja. Radna frekvencija i dimenzije sustava su iste kao i u prethodnom primjeru. Na slici 4.7 prikazani su koeficijenti R_n u rastavu raspršenog vala.

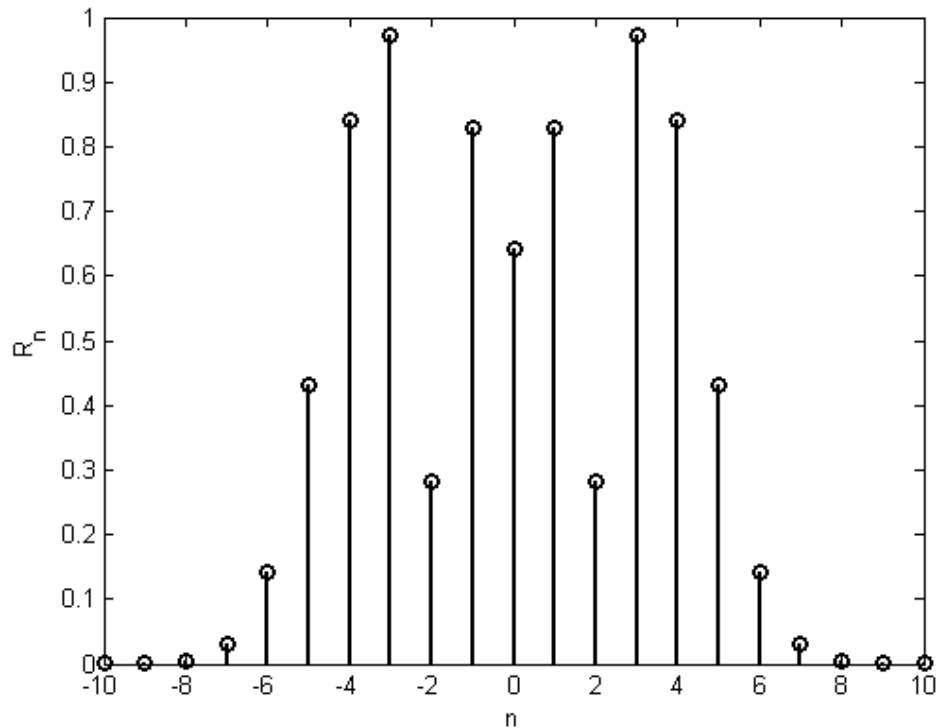
Na prethodnim slikama može se vidjeti točnost metode za okomiti upad elektromagnetskog



Slika 4.5: Koeficijenti u rastavu raspršenog elektromagnetskog vala za okomiti upad TE_z moda na savršeni metal



Slika 4.6: Radarski presjek cilindra načinjenog od savršenog metala za okomiti upad TM_z moda



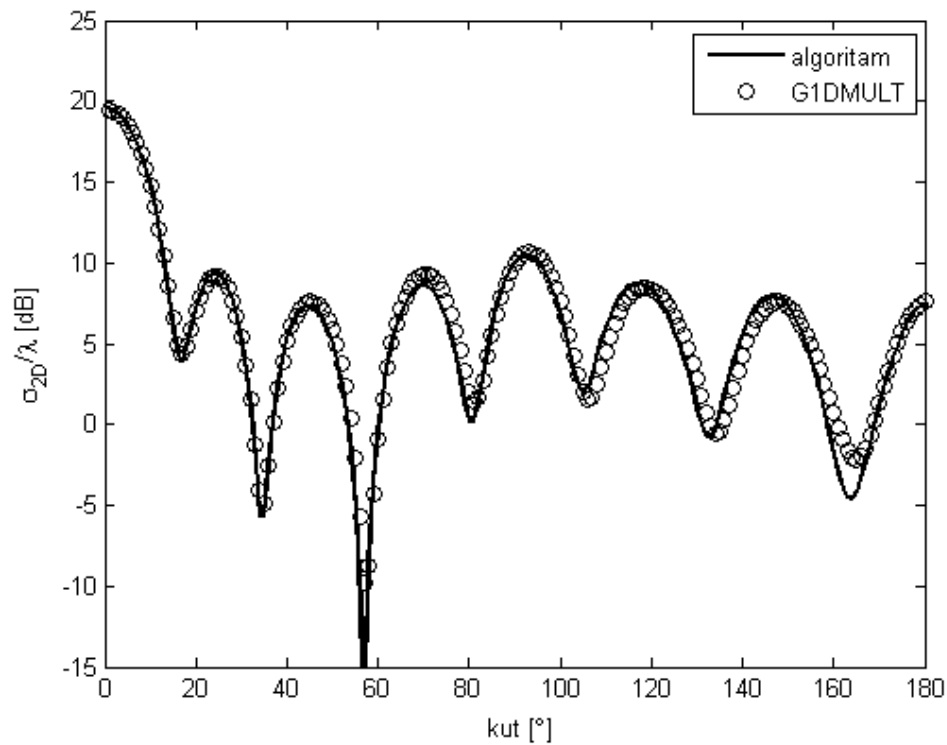
Slika 4.7: Koeficijenti u rastavu raspršenog elektromagnetskog vala za okomiti upad TM_z moda

vala na cilindar načinjen od savršenog metala. U sljedećim primjerima ispitat ćemo točnost metode za računanje kosog upada elektromagnetskog vala na cilindar načinjen od savršenog metala koji se nalazi unutar homogenog dielektrika s permitivnošću $\varepsilon = 4$. Radna frekvencija i dimenzija metalnog cilindra su iste kao i u prethodnom primjeru, promjer cijelog objekta, cilindra načinjenog od savršenog metala i dielektričnog plašta, iznosi $2b = 11.78$ cm. Pobudni planarni val upada na sustav pod kutem $\Theta_{inc} = 70^\circ$ u odnosu na os cilindra (os z). Na slici 4.8 prikazana je usporedba dobivenih rješenja, a na slici 4.9 su prikazani koeficijenti C_n u rastavu raspršenog vala.

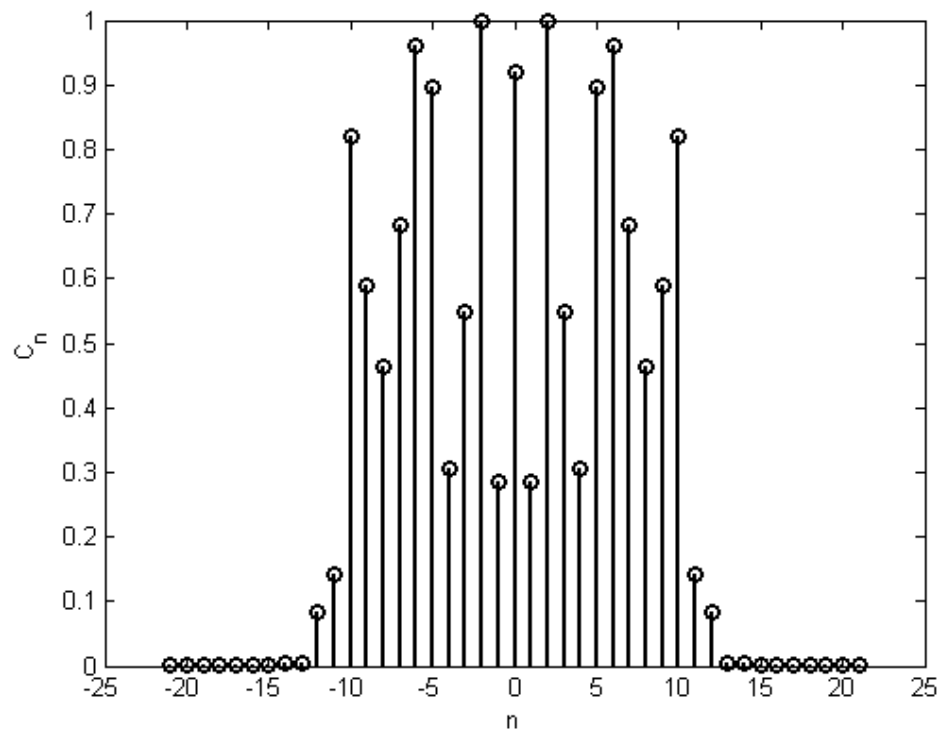
Na slici 4.10 možemo vidjeti usporedbu metoda za kosi upad elektromagnetskog vala TE_z polarizacije pod kutem od $\Theta_{inc} = 70^\circ$ u odnosu na os cilindra, na cilindar načinjen od savršenog metala unutar dielektrika s permitivnošću $\varepsilon = 4$. Na slici 4.11 prikazani su koeficijenti C_n u rastavu raspršenog vala.

4.4.2 Primjena prethodno izvedene numeričke metode na kosi upad elektromagnetskog vala na plašt nevidljivosti

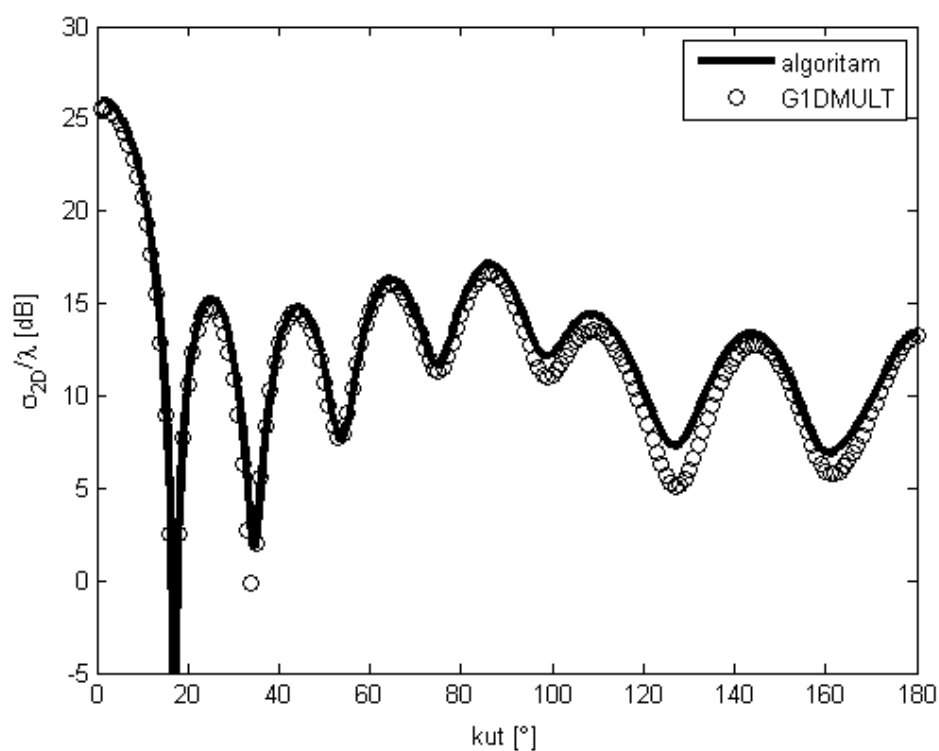
Prethodno izvedena metoda omogućuje nam modeliranje kosog upada elektromagnetskog vala na višeslojnu anizotropnu strukturu. Neke od takvih struktura su plaštevci nevidljivosti načinjeni od metamaterijalnih struktura. Takvi plaštevci nevidljivosti omogućuju smanjenje snage



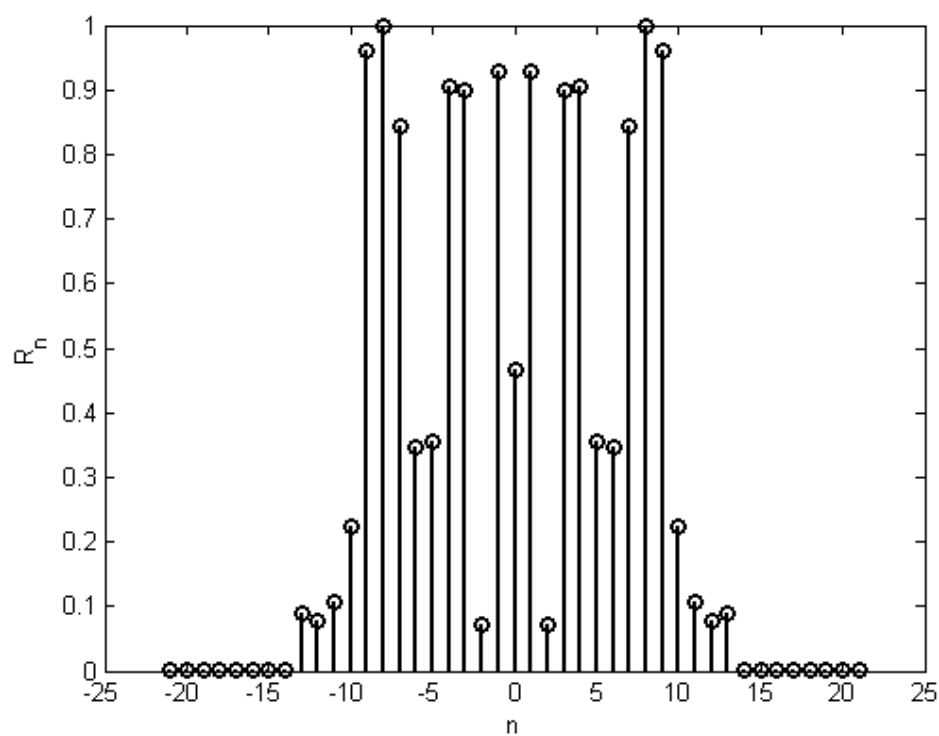
Slika 4.8: Radarski presjek cilindra načinjenog od savršenog metala unutar dielektrika s permitivnošću $\varepsilon = 4$ za upad TE_z moda pod kutem $\alpha = 70^\circ$



Slika 4.9: Koeficijenti u rastavu raspršenog elektromagnetskog vala za upad TE_z moda pod kutem $\alpha = 70^\circ$ na cilindar načinjen od savršenog metala unutar dielektrika s permitivnošću $\varepsilon = 4$



Slika 4.10: Radarski presjek cilindra načinjenog od savršenog metala unutar dielektrika s permitivnošću $\varepsilon = 4$ za upad TM_z moda pod kutem $\alpha = 70^\circ$

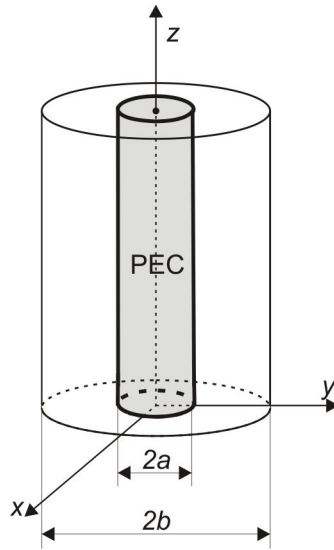


Slika 4.11: Koeficijenti u rastavu raspršenog elektromagnetskog vala za upad TM_z moda pod kutem $\alpha = 70^\circ$ na cilindar načinjen od savršenog metala unutar dielektrika s permitivnošću $\varepsilon = 4$

raspršenog vala, a time i radarski presjek strukture. Treba istaknuti da za neke slučajeve nisu potrebne metamaterijalne strukture. Moguće je dobiti isto ponašanje u manje kompliciranim i širokopojasnijim strukturama [109], [110] i [111].

Kako radi plašt nevidljivosti

Osnova rada plašteva nevidljivosti temelji se na transformacijskim metodama [92]. Glavna ideja je transformirati prostor $0 < \rho < b$ u koncentričnu cilindričnu ljusku $a < \rho' < b$ gdje su a i b dimenzije plašta prikazane na slici 4.12.



Slika 4.12: Metalni cilindar unutar anizotropnog plašta

Pretpostavimo ćemo da se u opisanom problemu parametri strukture mogu predstaviti kao:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Glavna pretpostavka je da su Maxwellove jednačbe invarijantne na transformaciju koordinata [91]. Nakon opisane transformacije dobijemo Maxwellove jednačbe za polja $\mathbf{E}'$ i $\mathbf{H}'$ te transformirane parametre ϵ' i μ' :

$$\epsilon' = \frac{\mathbf{J}\epsilon\mathbf{J}^T}{\det\mathbf{J}} \quad (4.66a)$$

$$\mu' = \frac{\mathbf{J}\mu\mathbf{J}^T}{\det\mathbf{J}}, \quad (4.66b)$$

gdje $\mathbf{J}$ predstavlja Jacobijevu matricu transformacije koordinata. U cilindričnom slučaju koris-

Idealni plašt nevidljivosti [41]	TM_z plašt [82]	TE_z plašt [42]
$\epsilon_{\rho\rho} = \mu_{\rho\rho} = \frac{\rho-a}{\rho}$	$\mu_{\rho\rho} = \left(\frac{\rho-a}{\rho}\right)^2$	$\epsilon_{\rho\rho} = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2 \left(\frac{\rho-a}{\rho}\right)^2$
$\epsilon_{\phi\phi} = \mu_{\phi\phi} = \frac{\rho}{\rho-a}$	$\mu_{\phi\phi} = 1$	$\epsilon_{\phi\phi} = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2$
$\epsilon_{zz} = \mu_{zz} = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2 \frac{\rho-a}{\rho}$	$\epsilon_{zz} = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2$	$\mu_{zz} = 1$

Tablica 4.1: Parametri ϵ i μ Schurigovog i Caijevog plašta nevidljivosti

timo transformaciju:

$$\rho' = a + \frac{b-a}{b}\rho \quad (4.67a)$$

$$\phi' = \phi \quad (4.67b)$$

$$z' = z \quad (4.67c)$$

koja daje parametre iz tablice 4.1. Primjenom opisane transformacije potpuni prostor iz kojeg je izvađena jedna točka transformiran je u prostor unutar kojeg nedostaje krug. Nakon transformacije prostora, putanje elektromagnetskog vala u prvom prostoru prelaze u putanje koje zaobilaze krug koji nedostaje. Na taj način dobili smo efekt obilaska vala oko cilindra kojeg stavimo unutar dijela prostora koji nedostaje. Kako bi to bilo moguće, potrebno je prilagoditi rubne uvjete na vanjskom rubu transformirane domene. Više o teoriji u pozadini plašta nevidljivosti može se pronaći u članku [92], a više o realizacijama plašteva nevidljivosti, transformacijskim metodama u elektromagnetizmu te dizajnu metamaterijala može se pronaći u knjizi [112].

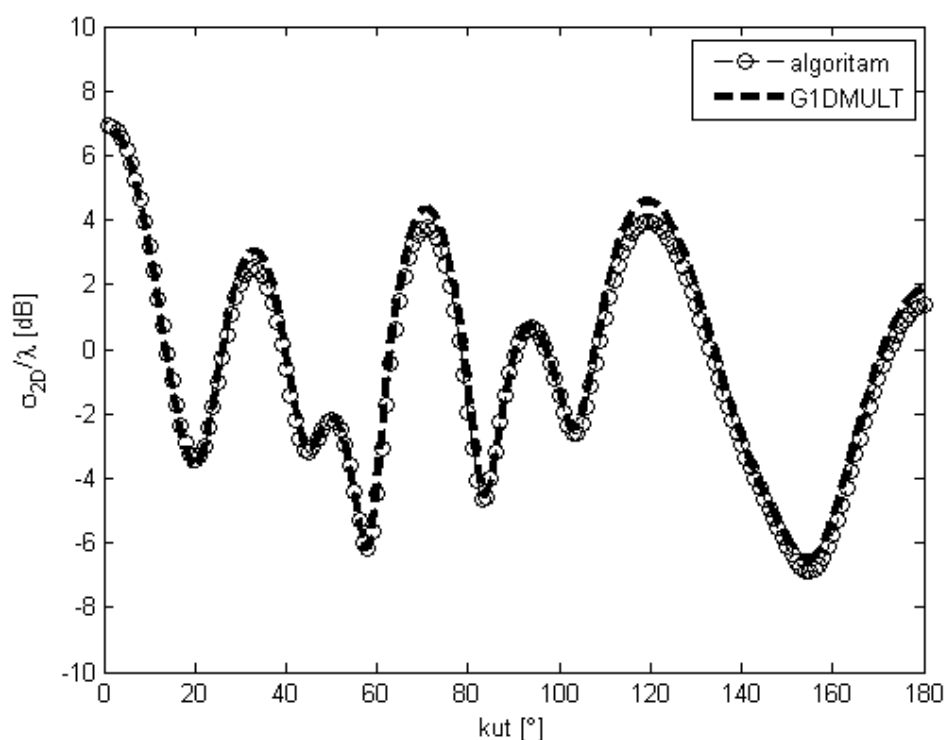
U tablici 4.1 prikazani su parametri ϵ i μ za plaštevne nevidljivosti analizirane u nastavku poglavlja. Idealni plašt nevidljivosti je plašt koji se dobije prethodno opisanim transformacijama. Problem kod idealnog plašta nevidljivosti je u tome što je teško (vjerojatno nemoguće) realizirati strukturu u kojoj će se svi paramteri permeabilnosti i permitivnosti mijenjati u ovisnosti o radialnoj udaljenosti. Kako se u izrazima uvijek javljaju produkti ili omjeri određenih komponenti permeabilnosti i permitivnosti moguće je dizajnirati jednostavniji plašt nevidljivosti kojeg je moguće realizirati. Na taj način su dobiveni parametri aproksimativnog plašta nevidljivosti [82].

U tablici 4.2 prikazane su fizičke dimenzije plašteva nevidljivosti. Oznake dimenzija mogu se vidjeti na slici 4.1.

Na slici 4.13 prikazana je usporedba radarskog presjeka za okomiti upad elektromagnetskog vala na cilindar načinjen od savršenog metala unutar Schurigovog plašta nevidljivosti s 10 slojeva izračunatog s dvije različite metode. Krivulja načinjena punom linijom izračunata je G1DMULT algoritmom, a krivulja načinjena kružićima je izračunata prethodno opisanim algoritmom.

	dimenzija (cm)	dimenzija (λ)
unutarnji promjer $2a$	5.42	1.44
vanjski promjer $2b$	11.78	3.34
debljina jednog sloja	0.318	0.09

Tablica 4.2: Fizičke dimenzije plašta nevidljivosti s 10 slojeva



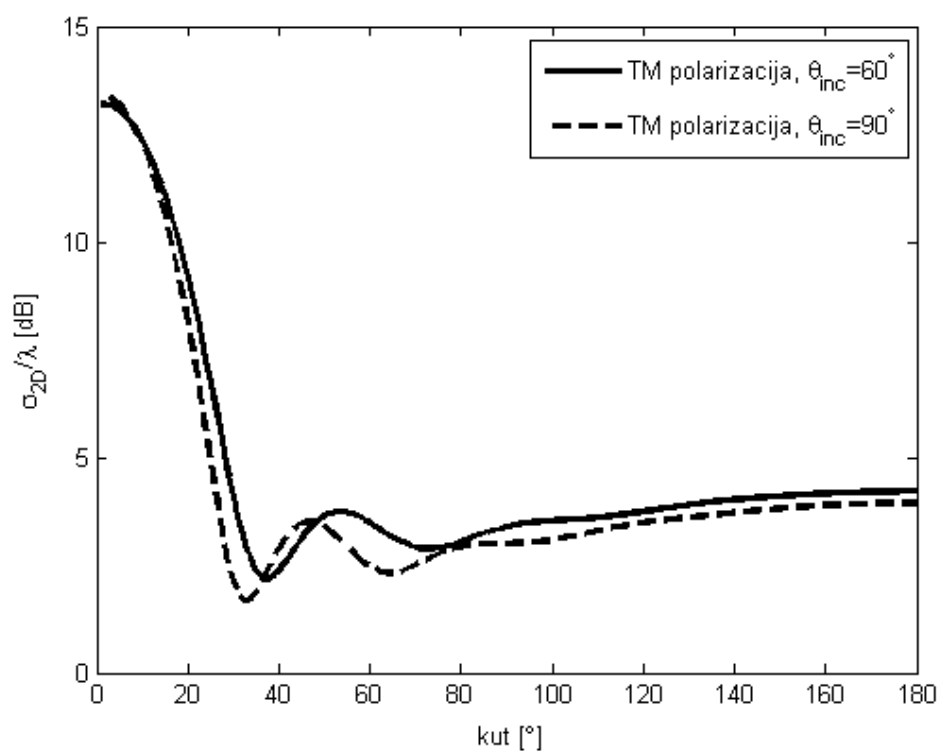
Slika 4.13: Usporedba radarskog presjeka okomitog upada elektromagnetskog vala TM_z polarizacije na cilindar načinjen od savršenog metala unutar Schurigovog plašta nevidljivosti s 10 slojeva

Na slikama 4.14 i 4.18 prikazan je radarski presjek kružnog cilindra načinjenog od savršenog metala za kosi upad elektromagnetskog vala. Možemo vidjeti kako se radarski presjek mijenja pri promjeni kuta upada elektromagnetskog vala.

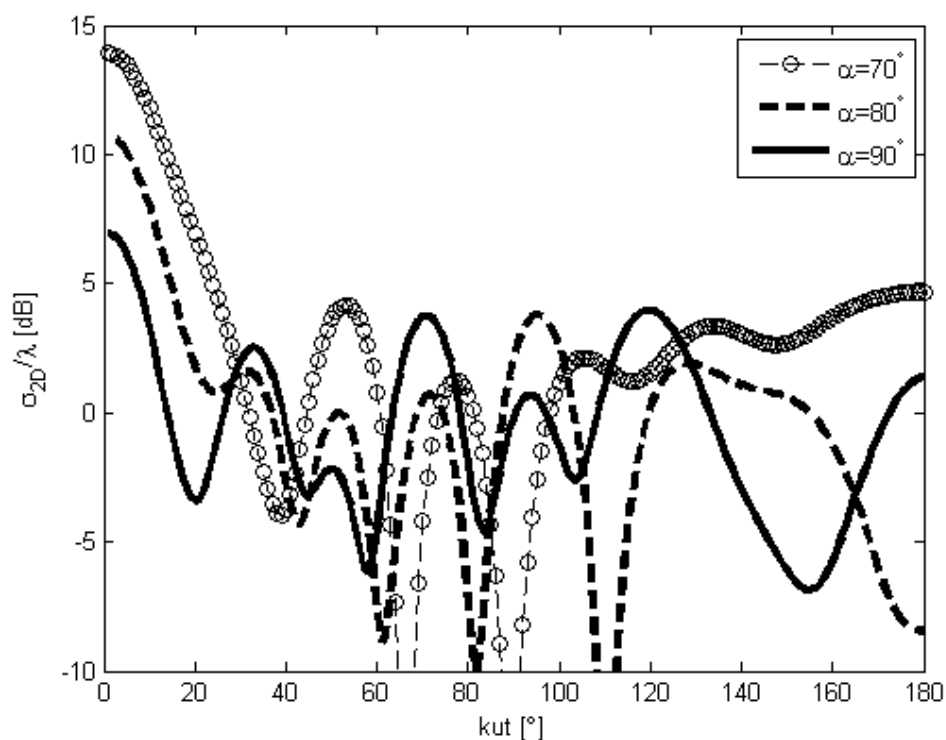
Kosi upad elektromagnetskog vala na Schurigov plašt nevidljivosti

Radarski presjek osnovne i križne polarizacije za kosi upad elektromagnetskog vala TM_z polarizacije na cilindar načinjen od savršenog metala unutar Schurigovog plašta nevidljivosti s 10 slojeva prikazan je na slikama 4.15 i 4.16.

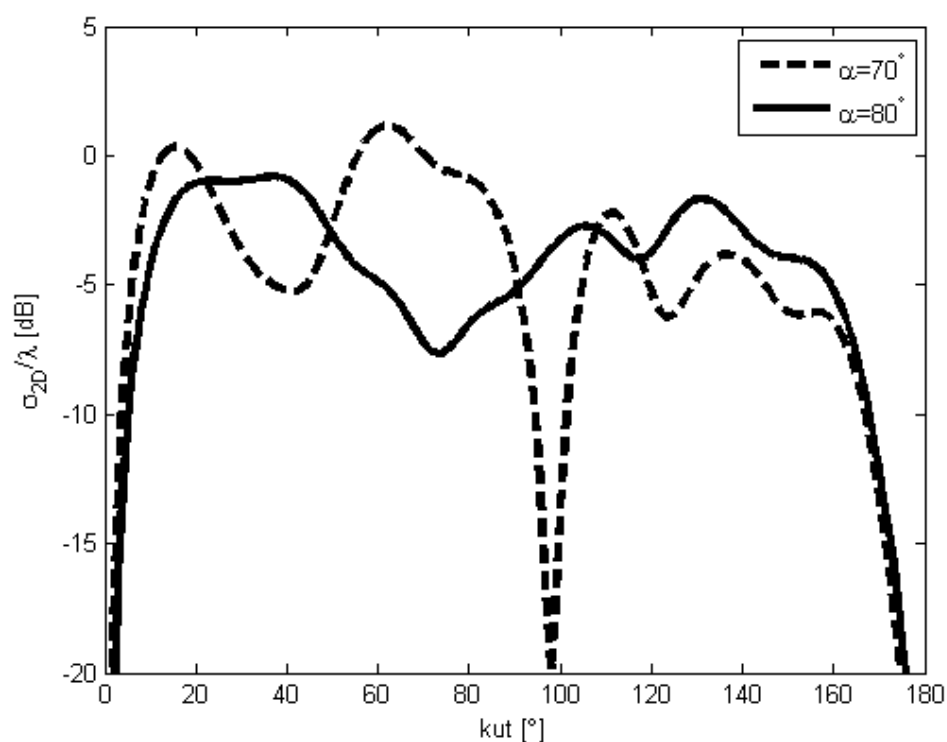
Na slici 4.17 prikazana je usporedba ukupnog radarskog presjeka za kosi upad elektromagnetskog vala TM_z polarizacije na cilindar načinjen od savršenog metala unutar Schurigovog plašta nevidljivosti s 10 slojeva, na cilindar načinjen od savršenog metala unutar idealnog plašta



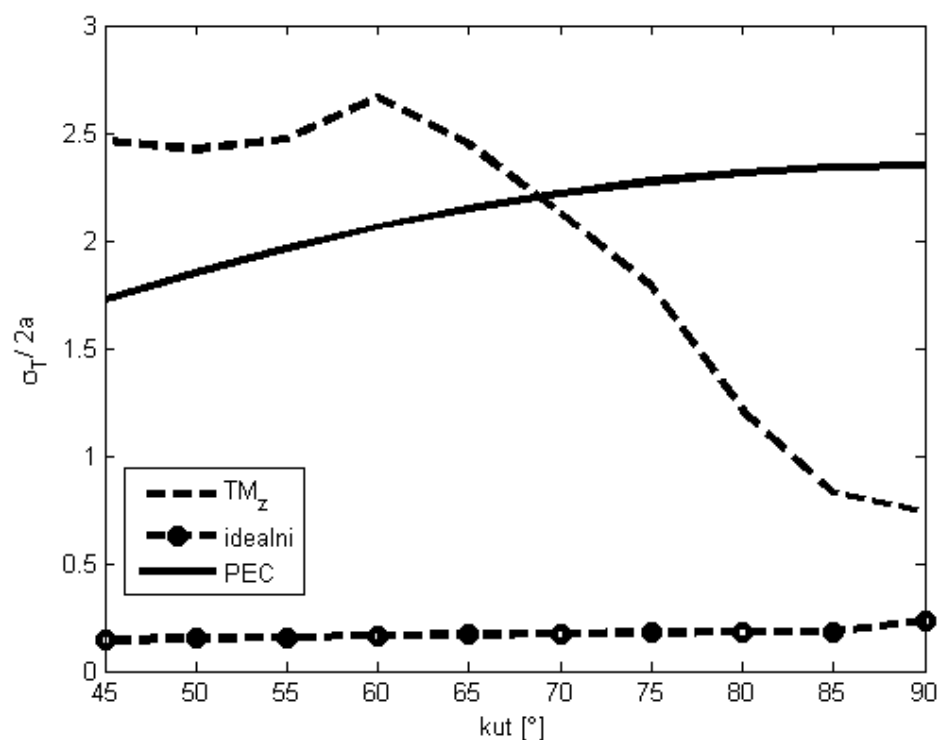
Slika 4.14: Radarski presjek cilindra načinjenog od savršenog metala za kosi upad elektromagnetskog vala TM polarizacije



Slika 4.15: Radarski presjek kopolarizacije za TM_z upadni val na cilindar unutar Schurigovog plašta nevidljivosti s 10 slojeva

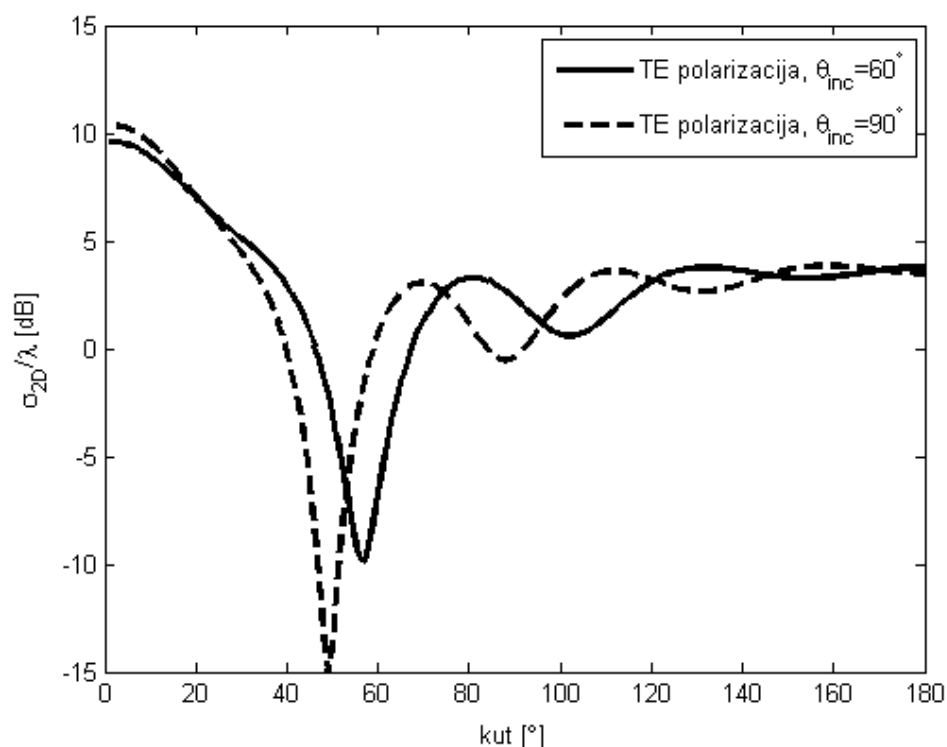


Slika 4.16: Radarski presjek kros polarizacije za TM_z upadni val na cilindar unutar Schurigovog plašta nevidljivosti s 10 slojeva



Slika 4.17: Usporedba ukupnog radarskog presjeka za idealni plašt nevidljivosti, Schurigov plašt nevidljivosti i metalni cilindar za upadni TM_z val pod različitim kutevima

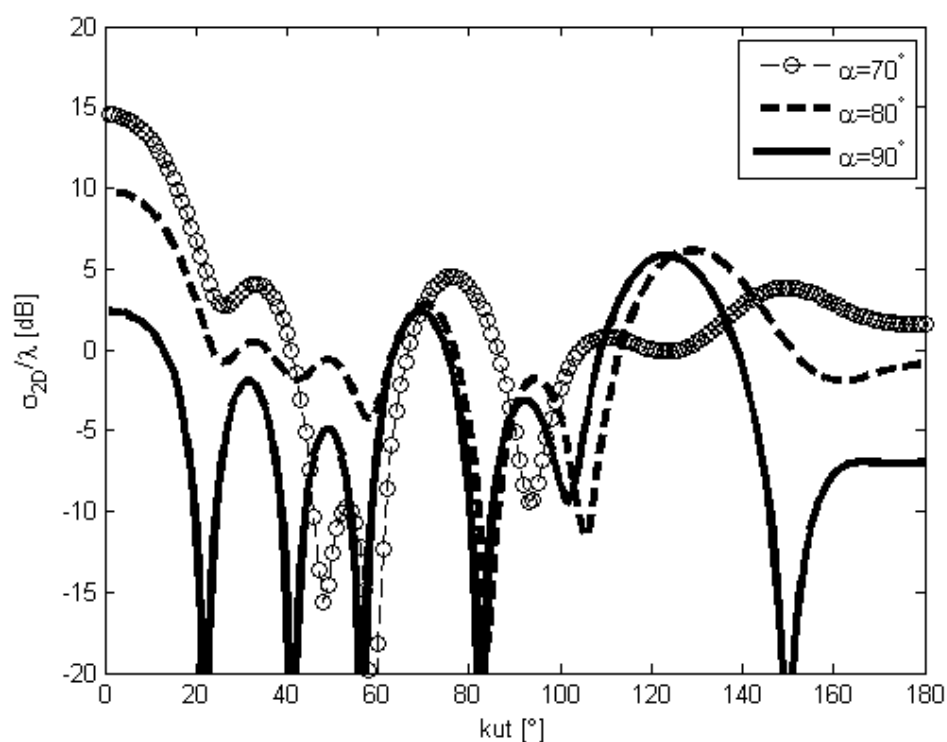
nevidljivosti i na čisti cilindar načinjen od savršenog metala. Usporedbom krivulja unutar Slike vidimo da Schurigov plašt nevidljivosti s 10 slojeva radi tek za kosi upad pod kutem većim od 70° u odnosu na os cilindra. Za manje kuteve upada elektromagnetskog vala ukupni radarski presjek cijelog sustava je veći od ukupnog radarskog presjeka samog cilindra načinjenog od savršenog metala. S druge strane idealni plašt nevidljivosti (kojeg nije moguće realizirati u potpunosti) daje mali ukupni radarski presjek za sve upadne kuteve.

Kosi upad elektromagnetskog vala na Caijev plašt nevidljivosti

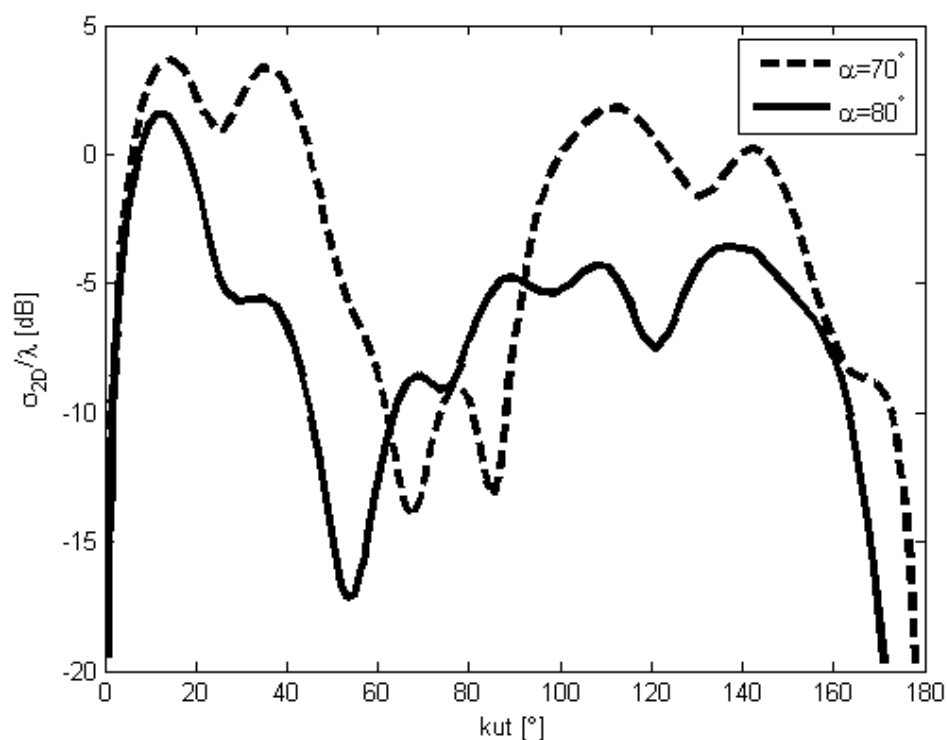
Slika 4.18: Radarski presjek cilindra načinjenog od savršenog metala za kosi upad elektromagnetskog vala TE polarizacije

Na slici 4.21 prikazana je usporedba ukupnog radarskog presjeka za kosi upad elektromagnetskog vala TE_z polarizacije na cilindar načinjen od savršenog metala unutar Caijevog plašta nevidljivosti s 10 slojeva, na cilindar načinjen od savršenog metala unutar idealnog plašta nevidljivosti i na čisti cilindar načinjen od savršenog metala. Usporedbom krivulja unutar Slike vidimo da Caijev plašt nevidljivosti s 10 slojeva radi tek za kosi upad pod kutem većim od 75° u odnosu na os cilindra. Za manje kuteve ukupni radarski presjek cijelog sustava lošiji je od ukupnog radarskog presjeka samog cilindra načinjenog od savršenog metala što znači da će naš skriveni cilindar raspršiti više polja nego što bi raspršio da nije skriven unutar plašta nevidljivosti. U oba slučaja idealni plašt nevidljivosti ima mali ukupni radarski presjek za sve kuteve upada.

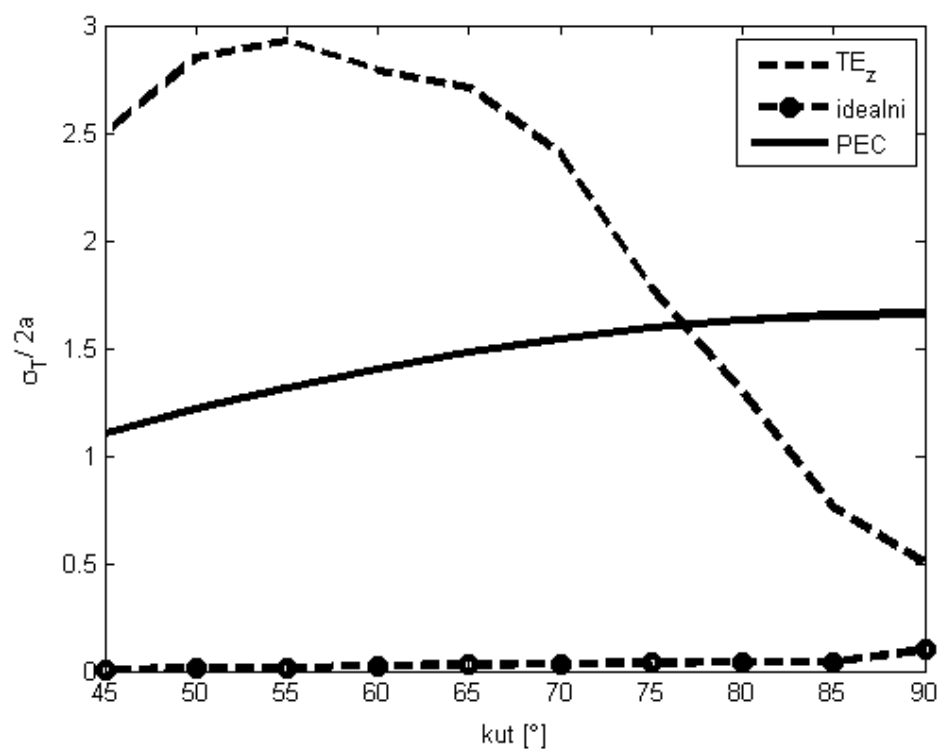
Usporedbom radarskih presjeka kružnog cilindra načinjenog od savršenog metala 4.14 i 4.18 te radarskog presjeka kružnog cilindra načinjenog od savršenog metala koji se nalazi unutar Schurigovog i Caijevog plašta nevidljivosti 4.15 i 4.19 vidimo da za kuteve upada veće od 15° u odnosu na os cilindra imamo slične vrijednosti radarskog presjeka što znači da predloženi plaštevi nevidljivosti ne rade za kuteve upada veće od 15° u odnosu na normalu na os cilindra.



Slika 4.19: Radarski presjek kopolarizacije za TE_z upadni val na cilindar unutar Caijevog plašta nevidljivosti s 10 slojeva



Slika 4.20: Radarski presjek kroskopolizacije za TE_z upadni val na cilindar unutar Caijevog plašta nevidljivosti s 10 slojeva



Slika 4.21: Usporedba ukupnog radarskog presjeka za idealni plašt nevidljivosti, Caijev plašt nevidljivosti i metalni cilindar za kosi upad elektromagnetskog vala s TE_z polarizacijom

Poglavlje 5

Zaključak

Modeliranje elektromagnetskih pojava i struktura je proces unutar kojeg se javlja mnoštvo problema. Najveći dio problema povezan je s numeričkim metodama koje se koriste pri rješavanju izvedenih modela. Tema ovog rada je raspršenje elektromagnetskih valova na planarnim i zakrivljenim strukturama. Numeričke metode koje se koriste pri rješavanju problema raspršenja uglavnom imaju problem s veličinom strukture na kojoj se upadni elektromagnetski valovi raspršuju. Raspršenje elektromagnetskih valova na najjednostavnijim strukturama kao što su kugla ili cilindar moguće je riješiti analitički, ali već čim se kanonske strukture stave unutar sloja dielektrika koji nema isti tip simetrije nemoguće je problem riješiti analitički već je potrebno koristiti neku numeričku metodu. Kako bi smanjili zahtjeve na snagu i memoriju računala potrebno je napraviti detaljnu analizu problema koji rješavamo te modelirati analitičko pojednostavljenje inače ćemo morati rješavati jako velike linearne sustave. Cilj ovog rada bio je smanjiti te zahtjeve u određenim slučajevima. U slučaju raspršenja elektromagnetskih valova na tankim zakrivljenim strukturama napravljena je asimptotska analiza koja omogućuje redukciju dimenzije modela koji opisuje problem. Informacija o debljini strukture iskorištena je na način kako bi se smanjila dimenzija problema za jednu dimenziju i time uštedjelo na vremenu rada računala i memoriji potrebnoj za numeričko rješavanje opisanog problema. Predloženom analizom došlo se do smanjena matrice sustava za faktor 10 što omogućuje numeričkoj metodi da za red veličine brže riješi opisani aproksimativni model. Predložena metoda omogućuje rješavanje problema raspršenja elektromagnetskih valova na tankim dvodimenzionalnim objektima te probleme raspršenja skalarnih valova na tankim trodimenzionalnim objektima.

U radu je izvedena Greenova funkcija unutar homogenog jednoosno anizotropnog planarnog i cilindričnog prostora. Ta Greenova funkcija omogućuje unaprijeđenje brzog i efikasnog G1DMULT algoritma s homogenih izotropnih problema na jednoosno anizotropne probleme. Unaprijeđeni algoritam primijenjen je na analizu efektivnih parametara periodičkih struktura načinjenih od metalnih traka.

Analiza problema raspršenja elektromagnetskih valova na kružnom cilindru načinjenom od

savršenog metala koji se nalazi unutar mnoštva anizotropnih homogenih slojeva rezultirala je algoritmom koji na efikasan način rješava opisani problem. Potreba za rješavanjem raspršenja elektromagnetskih valova na takvim strukturama proizlazi iz činjenice da su upravo plaševi nevidljivosti, koji su zadnjih godina postali populari u znanstvenoj literaturi, anizotropne strukture. Predloženi algoritam omogućuje rješavanje problema raspršenja elektromagnetskih valova na cilindričnim višeslojnim, anizotropnim strukturama. Izvedeni model koristi sve simetrije opisanog problema i bazira se na metodi spajanja analitičkog rješenja izvan višeslojnog anizotropnog cilindra s numeričkim rješenjem unutar cilindra. Rastavom raspršenog polja na modove te rastavom polja unutar cilindra na modove smanjena je dimenzija problema za dvije dimenzije što omogućuje diskretizaciju samo jednodimenzionalnog objekta. Izvedeni sustav jednažbi potrebno je riješiti za svaki mod, ali se u praksi pokazuje da tih modova nema previše. Primjenom opisane metode moguće je brzo doći do odgovora na pitanje kako izgleda raspršeno polje. Izvedena metoda primijenjena je na raspršenje kosog upada elektromagnetskog vala na Schurigov i Caijev plašt nevidljivosti. Metoda daje odgovor na pitanje koliko dobro rade plaševi nevidljivosti za kosi upad elektromagnetskog vala. Pokazano je da oni rade dobro samo za male kuteve upada elektromagnetskog vala u odnosu na normalu na os cilindra. Za kuteve upada veće od 20° u odnosu na okomicu dolazi do velike degradacije svojstava plašteva nevidljivosti.

Literatura

- [1] D. Colton, R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. SIAM, 2014.
- [2] J. C. Nedelec, *Acoustic and Electromagnetic Equations Integral Representations for Harmonic Problems*. Springer, 2001.
- [3] G. Bao, L. Cowsar, W. Masters, *Mathematical modeling in optical science*. SIAM, 2001.
- [4] S. S. Vinogradov, P. D. Smith, E. D. Vinogradova, *Canonical problems in scattering and potential theory 1*. Chapman and Hall, 2001.
- [5] *Canonical problems in scattering and potential theory 2*.
- [6] S. K. Cho, *Electromagnetic Scattering*. Springer, 2011.
- [7] P. L. Uslenghi, T. B. Senior, J. J. Bowman, *Electromagnetic And Acoustic Scattering by Simple Shapes*. CRC Press, 1988.
- [8] I. B. Vendik, O. G. Vendik, “Metamaterials and their application in microwaves: A review”, *Technical Physics*, Vol. 58, January 2013, str. 1-24.
- [9] N. Engheta, R. W. Ziolkowski, *Electromagnetic Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*. Wiley-IEEE Press, 2006.
- [10] M. H. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*. Springer, 2013.
- [11] A. Alu, “First-principles homogenization theory for periodic metamaterials”, *Physical review B*, Vol. 84, 2011.
- [12] D. R. Smith, J. B. Pendry, “Homogenization of metamaterials by field averaging”, *NJ. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 23, 2006, str. 391–403.
- [13] G. M. Sardi, “Homogenization techniques for metamaterials realized by multilayer planar periodic surfaces”, *Doktorski rad*, University of Siena, Cambridge, MA, SAD, 2012.

- [14] E. Martini, G. M. Sardi, S. Maci, “Homogenization processes and retrieval of equivalent constitutive parameters for multisurface-metamaterials”, *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, Vol. 62, 2014.
- [15] V. A. Markel, J. C. Schotland, “Homogenization of maxwell’s equations in periodic composites”, *Phys. Rev.*, Vol. 85, 2012.
- [16] B. Ivsic, Z. Sipus, S. Hrabar, “Analysis of uniaxial multilayer cylinders used for invisible cloak realization”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 57, May 2009, str. 1521-1527.
- [17] B. Ivsic, T. Komljenovic, Z. Sipus, “Optimization of uniaxial multilayer cylinders used for invisible cloak realization”, *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, Vol. 58, October 2010, str. 3397–3401.
- [18] Z. Sipus, B. Ivsic, T. Komljenovic, S. Hrabar, “Feasibility study of uniaxial structures used for invisible cloak design”, in *Proc. IEEE Int. Symp on Antennas and Propagation (APSURSI)*, Spokane, 2011, str. 2869–2871.
- [19] C.L. Holloway, E. F. Kuester, “An overview of the theory and applications of metasurfaces: The two-dimensional equivalents of metamaterials”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 54, 2012.
- [20] M. O. Sallam, G. A. E. Vandenbosch, G. Gielen, E. A. Soliman, “Plasmonic Transmission Lines Mode Solver based on the Method of Moments”, in *9th European Conference on Antennas and Propagation*, 2015.
- [21] S. Moskow, F. Santosa, J. Zhang, “An approximate method for scattering by thin structures”, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 66, 2005, str. 187–205.
- [22] H. Ammari, H. Kang, F. Santosa, “Scattering of electromagnetic waves by thin dielectric planar structures”, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 38, 2006, str. 1329-1342.
- [23] D. Ambrose, S. Moskow, “Scattering of electromagnetic waves by thin high contrast dielectrics”, *Communications in Mathematical Sciences*, Vol. 11, 2013, str. 293 – 314.
- [24] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, 1999.
- [25] J. Richmond, “Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape”, *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, Vol. 13, 1965, str. 334-341.
- [26] M. M. Ney, A. M. Smith, S.S. Stuchly, “A solution of electromagnetic imaging using pseudoinverse transformation”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 3, 1984.

- [27] B. C. Usner, K. Sertel, M. A. Carr, J. L. Volakis, "Generalized volume-surface integral equation for modeling inhomogeneities within high contrast composite structures", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 54, 2006, str. 68-75.
- [28] J. S. Izadian, L. Peters, J. H. Richmond, "Computation of scattering from penetrable cylinders with improved numerical efficiency", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 22, 1984.
- [29] C. M. Krowne, "Green's function in the spectral domain for biaxial and uniaxial anisotropic planar dielectric structures", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 32, December 1984, str. 1273–1281.
- [30] G. W. Hanson, "Dyadic green's function for a multilayered planar medium—a dyadic eigenfunction approach", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 52, 2004, str. 3350–3356.
- [31] Z. Sipus, P. S. Kildal, R. Leijon, M. Johansson, "An algorithm for calculating green's functions for planar, circular cylindrical and spherical multilayer substrates", *ACES Journal*, Vol. 13, November 1998, str. 243-254.
- [32] Z. Sipus, N. Burum, J. Bartolic, "Analysis of rectangular microstrip patch antennas on spherical structures", *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 36, 2003, str. 276-280.
- [33] Z. Sipus, N. Burum, J. Bartolic, "Mutual coupling between spherical-rectangular microstrip antennas", *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 40, 2004, str. 387-391.
- [34] Z. Sipus, S. Skokic, M. Bosiljevac, N. Burum, "Study of mutual coupling between circular stacked-patch antennas on a sphere", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 56, 2008, str. 1834-1844.
- [35] Z. Sipus, N. Burum, S. Skokic, P. S. Kildal, "Analysis of spherical arrays of microstrip antennas using moment method in spectral domain", *IEE Proceedings Microwaves, Antennas and Propagation*, Vol. 153, 2006, str. 533-543.
- [36] Z. Sipus, D. Bojanjac, M. Bosiljevac, *Constitutive Parameters of Metamaterial Structures Used for Invisible Cloak Realization*, European Office of Aerospace Research and Development, 2013.
- [37] D. Bojanjac, Z. Sipus, "Oblique incidence performance of anisotropic cylindrical structures used for invisibility cloak design", *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, Vol. 60, No. 10, October 2012, str. 4814–4821.

- [38] D. Bojanjac, B. Ivsic, T. Komljenovic, Z. Sipus, "Performance of Uniaxial Multilayer Cylinders Used for Invisible Cloak Realization", in 6th European Conference on Antennas and Propagation, 2012.
- [39] Z. Sipus, D. Bojanjac, B. Ivsic, T. Komljenovic, Metamaterial Based Cylinders Used for Invisible Cloak Realization, European Office of Aerospace Research and Development, 2012.
- [40] F. Ihlenburg, Finite Element Analysis of Acoustic Scattering. Springer, 1998.
- [41] J. B. Pendry, D. Schurig, D. R. Smith, "Controlling electromagnetic fields", Science, Vol. 312, June 2006, str. 1780-1782.
- [42] W. Cai, U. K. Chettiar, A. V. Kildishev, V. M. Shalaev, "Optical cloaking with non-magnetic metamaterials", Nature photonics, Vol. 1, April 2007, str. 224-227.
- [43] S. G. Johnson, "Notes on perfectly matched layers", arxiv, 2010.
- [44] A. Kirsch, The Mathematical Theory of Time-Harmonic Maxwell Equations. Springer, 2014.
- [45] D. Colton, R. Kress, Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Springer, 2013.
- [46] L. Tsang, J. A. Kong, K. H. Ding, Scattering of Electromagnetic Waves, Theories and Applications. Wiley, 2000.
- [47] H. Ammari, Mathematical modeling in biomedical imaging 1. Springer, 2009.
- [48] H. Ammari, Mathematical modeling in biomedical imaging 2. Springer, 2012.
- [49] M. Cheney, B. Borden, Fundamentals of Radar Imaging. SIAM, 2009.
- [50] P. Kelly, Solid Mechanics. Lecture Notes, 2013.
- [51] P. C. Matthews, Vector Calculus. Springer, 2000.
- [52] J. A. Kong, Electromagnetic Wave Theory. E M W Pub, 2000.
- [53] W. C. Chew, Waves and Fields in Inhomogenous Media. Wiley-IEEE Press, 1999.
- [54] N. Ida, Engineering Electromagnetics. Springer, 2014.
- [55] S. J. Orfanidis, Electromagnetic Waves and Antennas. Rutgers University, 2008.
- [56] I. Aganović, Uvod u rubne zadatke mehanike kontinuuma. Element, 2001.

- [57] A. N. Pressley, *Elementary Differential Geometry*. Springer, 2010.
- [58] A. McInerney, *First Steps in Differential Geometry, Riemannian, Contract, Symplectic*. Springer, 2013.
- [59] J. L. Volakis, K. Sertel, *Integral Equation Methods for Electromagnetics*. SciTech Publishing, 2012.
- [60] O. Forslund, A. Karlsson, S. Poulsen, “Scattering from dielectric frequency selective structures”, *Radio Science*, Vol. 38, 2003.
- [61] S. Zhaoa, N. Zhanga and J. Su, “Volume integral equation for analysis of three-dimensional scattering from dielectric frequency-selective structures”, *Waves in Random and Complex Media*, Vol. 23, 2013, str. 201-217.
- [62] A. Bondeson, T. Rylander, P. Ingelström, *Computational Electromagnetics*. Springer, 2005.
- [63] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis: Application to Mathematical Physics*. Springer, 1999.
- [64] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications*. Springer, 1999.
- [65] R. Carminati, J. Schotland, *Optics of Complex Media*. Cambridge University Press, 2016.
- [66] R. Kress, *Linear Integral Equations*. Springer, 2014.
- [67] F. Cakoni, D. Colton, *A Qualitative Approach to Inverse Scattering Theory*. Springer, 2014.
- [68] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [69] W. C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*. Chapman and Hall, 2008.
- [70] S. Rjasanow, O. Steinbach, *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. Springer, 2007.
- [71] P. D. Lax, *Functional Analysis*. Wiley-Interscience, 2002.
- [72] D. M. Pozar, “Radiation and scattering from a microstrip patch on a uniaxial substrate”, *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, Vol. 35, June 1987, str. 613 - 621.

- [73] J. R. Mosig, "Integral equation technique", in Numerical Techniques for microwave and millimeter wave passive structures, T. Itoh, (ur.). New York: Wiley, 1989, str. 133-213.
- [74] M. Havrilla, "A four-vector formalism for anisotropic media", EUCAP, Vol. 72, 2014.
- [75] Z. Sipus, "Analysis of Planar and Circular Cylindrical Multilayer Structures with Applications to Soft and Hard Surfaces", Doktorski rad, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 1997.
- [76] W. W. Bell, Special Functions for Scientist and Engineers. Dover Publications Inc., 2004.
- [77] D. G. Dudley, Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory. Wiley-IEEE Press, 1994.
- [78] M. Bosiljevac, D. Bojanjac, A. Grbic, Z. Sipus, "Analysis of Canonical Curved Metasurfaces", in 9th European Conference on Antennas and Propagation, 2015.
- [79] J. C. Monzon, "Three-dimensional scattering by an infinite homogeneous anisotropic circular cylinder: A spectral approach", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 35, No. 6, 1987, str. 670-682.
- [80] J. C. Monzon, "Two-dimensional greens functions for a rotationally invariant anisotropic medium", IEEE Trans. Antennas Propagat, Vol. 8, No. 5, May 1990.
- [81] J. C. Monzon and N. J. Damaskos, "Two dimensional scattering by a homogeneous anisotropic rod", IEEE Trans. Antennas Propagat, Vol. 34, No. 10, 1986, str. 1243 -1249.
- [82] D. Schurig et. al., "Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies", Science, Vol. 314, November 2006, str. 997-980.
- [83] U. Leonhardt, "Optical conformal mapping and dielectric invisibility devices", Science, Vol. 312, June 2006, str. 1777–1780.
- [84] D. Schurig, J. B. Pendry, D. R. Smith, "Calculation of material properties and ray tracing in transformation media", Phys. Rev. Lett., Vol. 14, October 2006, str. 9794–9804.
- [85] A. D. Yaghjian, S. Maci, "Alternative derivation of electromagnetic cloaks and concentrators", New J. Phys., Vol. 11, 2009.
- [86] A. Alu and N. Engheta, "Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings", Phys. Rev. E, Vol. 72, 2005.
- [87] I. I. Smolyaninov, "Metamaterial-based model of the alcubierre warp drive", Phys.Rev.B, Vol. 84, 2011.

- [88] I. I. Smolyaninov, “Metamaterial "multiverse"”, J.Optics, Vol. 13, 2011.
- [89] Q. Cheng, T. J. Cui, W. X. Jiang, B. G. Cai, “An electromagnetic black hole made of metamaterials”, arXiv, 2009.
- [90] G.W.Milton, N. A. Nicorovici, “On the cloaking effects associated with anomalous localized resonance”, Proc. R. Soc. Lond. A: Math. Phys. Sci., Vol. 462, 2006, str. 3027–3059.
- [91] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, U. Leonhardt, G. Uhlmann, “Cloaked electromagnetic, acoustic, and quantum amplifiers via transformation optics”, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 109, No. 26, 2012, str. 10 169-10 174.
- [92] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, G. Uhlmann, “Cloaking a sensor via transformation optics”, Physical Review E, Vol. 83, 2011.
- [93] C. R. Simovski, B. Sauviac, S. L. Prosvirnin, “Homogenization of an array of s-shaped particles located on a dielectric interface”, PIER, Vol. 39, 2003, str. 249–264.
- [94] A. Alù, D. Rainwater, A. Kerkhoff, “Plasmonic cloaking of cylinders: Finite length, oblique illumination and cross-polarization coupling”, New J. Phys., Vol. 12, 2010.
- [95] M. A.Morgan, D. L. Fisher, E. A. Milne, “Electromagnetic scattering by stratified inhomogeneous anisotropic media”, IEEE Trans. Antennas Propag., Vol. 35, February 1987, str. 191–197.
- [96] H. Chen, Z. Liang, P. Yao, X. Jiang, H. Ma, T. Chan, “Extending the bandwidth of electromagnetic cloaks”, Physical review B, Vol. 76, 2007.
- [97] Z. Liang, P. Yao, X. Sun, X. Jiang, “The physical picture and the essential elements of the dynamical process for dispersive cloak structures”, Applied Physics Letters, Vol. 92, January 2008.
- [98] B. Zhang, B. I. Wu, “Cylindrical cloaking at oblique incidence with optimized finite multilayer parameters”, Opt. Lett., Vol. 35, August 2010, str. 2681–2683.
- [99] J. C. Monzon, “Three-dimensional field representation in a ten-parameter cylindrically symmetric anisotropic material”, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. 38, April 1990, str. 551-555.
- [100] G. Nakamura, H. Wang, “The direct em scattering problem from an imperfectly conducting cylinder at oblique incidence”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 397, No. 1, January 2013, str. 142-155.

- [101] L. X. Feng, Y. Li, L. Zhang, “The scattering of emw at oblique incidence in a homogeneous chiral medium”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 417, No. 2, September 2014, str. 719-732.
- [102] G. W. Hanson, A. B. Yakovlev, *Operator Theory for Electromagnetics: An Introduction*. Springer, 2002.
- [103] A. C. King, J. Billingham, S. R. Otto, *Differential Equations: Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial*. Cambridge University Press, 2003.
- [104] J. R. Wait, *Electromagnetic radiation from cylindrical structures*. Peregrinus, 1988.
- [105] M. A. Al-Gwaiz, *Sturm-Liouville Theory and its Applications*. Springer, 2007.
- [106] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics with MATLAB*. CRC Press, 2009.
- [107] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, 1993.
- [108] E. F. Knott, J. F. Shaeffer, M. T. Tuley, *Radar Cross Section*. SciTech Publishing, 2004.
- [109] P. S. Kildal, A. A. Kishk, A. Tengs, “Reduction of forward scattering from cylindrical objects using hard surfaces”, *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, Vol. 44, November 1996, str. 1509–1520.
- [110] M. G. Silveirinha, A. Alu, N. Engheta, “Parallel-plate metamaterials for cloaking structures”, *Phys. Rev. E*, Vol. 75, 2007.
- [111] S. Tretyakov, P. Alitalo, O. Luukkonen, C. Simovski, “Broadband electromagnetic cloaking of long cylindrical objects”, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 103, 2009.
- [112] D. H. Werner, D. Kwon, *Transformation Electromagnetics and Metamaterials*. Springer, 2014.

Životopis

Dario Bojanjac rođen je 12. siječnja 1986. godine u Zagrebu. Po završetku srednje škole upisao je Fakultet elektrotehnike i računarstva na Sveučilištu u Zagrebu. Diplomirao je 18. svibnja 2009. godine na smjeru Radiokomunikacije i profesionalna elektronika pod mentorstvom profesorice Sonje Grgić s temom *Odabir parametara kompresije videosignala za televiziju visoke kvalitete*. Iste godine zaposlio se kao znanstveni novak na projektu *Višefunkcijske antene u komunikacijskim i radarskim sustavima* pod vodstvom profesora Juraja Bartolića u sklopu kojeg je upisao i postdiplomski studij elektrotehnike na Fakultetu elektrotehnike i računarstva. Krajem iste godine upisao je preddiplomski studij matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno Matematičkog fakulteta u Zagrebu. U početku svog znanstvenog rada bavio se modeliranjem propagacijskog kanala pod mentorstvom profesora Roberta Nađa. Nakon dvije godine rada na propagacijskoj tematici krenuo je raditi na problemima modeliranja i numerike u elektromagnetizmu. 2012. godine završio je preddiplomski studij matematike i upisao diplomski studij primijenjene matematike. U sklopu rada na doktoratu boravio je nekoliko puta na Sveučilištu u Sieni kod profesora Stefana Macija te na Sveučilištu u Michiganu kod profesora Anthonya Grbica. Zadnje dvije godine bavi se modeliranjem raspršenja elektromagnetskih valova.

Popis objavljenih djela

Rad u časopisu

1. Bojanjac, D., Nađ, R., Šišul, G., "Geometrical Description of Side Street Effects in a Ray Tracing Street Canyon Model", *Automatika*, Vol. 53, 2012, 88-94
2. Bojanjac, D., Šipuš, Z., "Oblique Incidence Performance of Anisotropic Cylindrical Structures Used for Invisibility Cloak Design", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 60, No. 10, 2012, 4814-4821
3. Šipuš, Z., Bojanjac, D., Komljenović, T., "Electromagnetic Modeling of Spherically Stratified Lenses Illuminated by Arbitrary Sources", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 63, No. 4, 2015, 1837-1843

Rad na konferenciji

1. Bojanjac, D., Nađ, R., Šišul, G., "Testing the approximation of normal distribution using the model with finite number waves", Proceedings of the 33rd International Convention - MIPRO 2010.
2. Bojanjac, D., Nađ, R., Šišul, G., "Ray Tracing Model of Pedestrian Urban Zone", Proceedings of the 52nd International Symposium ELMAR-2010
3. Bojanjac, D., Nađ, R., Šišul, G., Bartolić, J., "On Side Street Effects in a Ray Tracing Street Canyon model", Conference Proceedings ICECom2010 20th International Conference on Applied Electromagnetics and Communications 2010
4. Bojanjac, D., Ivisic, B., Komljenovic, T., Sipus, Z., "Performance of Uniaxial Multilayer Cylinders Used for Invisible Cloak Realization", 6th European Conference on Antennas and Propagation 2012.
5. Bojanjac, D., Sipus, Z., "Design of Spherical Lens Antennas Including Realistic Feed Model", 7th European Conference on Antennas and Propagation, 2013
6. Bojanjac, D., Sipus, Z., Komljenovic, T., "Algorithm for Spherical Coordinate System Transformation for Efficient Lens Antenna Analysis", ICECom2013 21st International Conference on Applied Electromagnetics and Communications 2013
7. Bojanjac, D., Nosich, A., Šipuš, Z., "Design of Spherical Lens Antennas Using Complex Huygens Element", Proceedings of the 8th European Conference on Antennas and Propagation, 2014.

Druge vrste radova

1. Modlic, B., Grgić, S., Kos, T., Šišul, G., Cvitković, M., Bojanjac, D., "Migracija prema digitalnom odašiljanju radija u zemaljskoj mreži", elaborat 2010.
2. Šipuš, Z., Bojanjac, D., Ivšić, B., Komljenović, T., "Metamaterial Based Cylinders Used for Invisible Cloak Realization", elaborat 2011.
3. Šipuš, Z., Bojanjac, D., Bosiljevac, M., "Constitutive Parameters of Metamaterial Structures Used for Invisible Cloak Realization", elaborat 2013.

Biography

Dario Bojanjac was born January 12, 1986 in Zagreb, Croatia. Upon finishing high school he started his university education at the University of Zagreb, Faculty of electrical engineering and computing. He graduated from Wireless communications and professional electronics May 18, 2009 under the supervision of professor Sonja Grgić. That same year, he started working as a junior researcher on the project *Multifunctional analysis in communication and radar systems* under the supervision of professor Juraj Bartolić and entered a PhD in electrical engineering at the Faculty of electrical engineering and computing. Later in the year, he entered the Undergraduate studies of Mathematics at the Faculty of science in Zagreb. At the beginning of his scientific work, he worked in the modelling of mobile propagation channel, under the supervision of professor Robert Nađ. Two years later, he started working on problems in numerics and modelling in electrical engineering. In 2012, he received his bachelors degree in Mathematics and started graduate studies in Applied Mathematics. In the last few years, he visited the University of Siena several times, where he worked with professor Stefano Maci, and the University of Michigan to work under the supervision of professor Anthony Grbic. Lately, he has been working on modelling of electromagnetic scattering problems.