

Modeliranje utjecaja veličine mikrostrukture na deformiranje konstrukcija primjenom mješovitih bezmrežnih kolokacijskih metoda

Jalušić, B.¹, Jarak, T.² i Sorić, J.³

Sažetak

U zadnje vrijeme, u svrhu što točnijeg modeliranja složenih fizikalnih pojava, kao što su lokalizacija naprezanja, popuštanje materijala i modeliranje utjecaja mikrostrukture materijala na deformiranje, primjenjuju se teorije kontinuuma višeg reda. Za modeliranje spomenutih pojava primjenom numeričkih metoda, u pravilu je potreban visok stupanj kontinuiteta funkcija oblika. To stvara probleme u primjeni metode konačnih elemenata (MKE) jer rješavanje problema deformiranja kontinuuma višeg reda u pravilu iziskuje primjenu elemenata s vrlo složenim funkcijama oblika, velikih brojem čvornih stupnjeva slobode ili primjenu složenih mješovitih konačnih elemenata. Kao alternativa MKE, u ovom radu predložene su kolokacijske bezmrežne metode, u kojima se diferencijalna jednačba četvrtog reda, kojom je opisan problem gradijentne elastičnosti s jednim mikrostrukturnim parametrom, rješava na stupnjevani način razdvajanjem u dva sastavna problema opisana diferencijalnim jednačbama drugog reda. Sastavni problemi se rješavaju jedan za drugim, gdje se rješenje prvog problema koristi i uvrštava pri rješavanju drugog problema. Razmatraju se dva različita načina razdvajanja jednačbe četvrtog reda, prvi je temeljen na pomaku, a drugi na deformaciji kao nepoznatom polju. Za diskretizaciju i rješavanje sastavnih problema, koriste se u oba slučaja razdvajanja mješovite kolokacijske metode. Numerički rezultati utjecaja mikrostrukture na deformiranje prikazani su na reprezentativnom primjeru debele konzolne grede. Pritom su rezultati prikazani i analizirani za oba korištena pristupa razdvajanja jednačbe četvrtog reda.

Ključne riječi: kolokacijska metoda, mješoviti pristup, gradijentna elastičnost

¹ **Dr.sc. Boris Jalušić**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: boris.jalusic@fsb.hr

² **Izv. prof. dr. sc. Tomislav Jarak**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: tomislav.jarak@fsb.hr

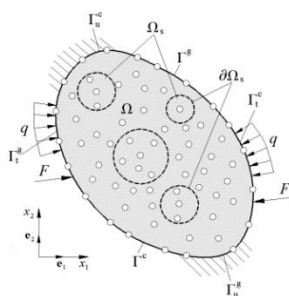
³ **Prof. dr. sc. Jurica Sorić**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: jurica.soric@fsb.hr

1 Uvod

Mješovita bezmrežna lokalna Petrov-Galerkinova metoda [1] koristi se za modeliranje utjecaja veličine mikrostrukture na deformiranje konstrukcija primjenom gradijentne elastične teorije [2]. Unutar gradijentne teorije korišten je samo jedan mikrostrukturni parametar [3]. Opisivanje deformiranja materijala primjenom gradijentne teorije [3] matematički je opisano diferencijalnom jednačbom četvrtog reda. Pritom je potrebno je izračunavati derivacije visokog reda kao i zadovoljiti složene rubne uvjete na vanjskim granicama [4]. Načelno, u bezmrežnim metodama funkcije oblika proizvoljnog stupnja kontinuiteta izvode se relativno jednostavno i to uz korištenje malog broja čvornih nepoznanica na globalnom nivou. Međutim, pogreške u aproksimaciji derivacija pomoću bezmrežnih aproksimacija mogu značajno narušiti učinkovitost ovakvih pristupa, te je stoga poželjno u bezmrežnim metodama smanjiti najviši red derivacija koji se pojavljuju u modelima. U svrhu izbjegavanja izračuna derivacija visokog reda u ovom radu je originalni problem, koji je opisan diferencijalnom jednačbom četvrtog reda, razdvojen u dva sastavna problema: klasični (lokalni) i gradijentni (ne-lokalni). Oba sastavna problema su pritom opisana diferencijalnim jednačbama drugog reda [4]. Osnovni rubni uvjeti zadovoljeni su izravno s obzirom da je primijenjena aproksimacija čije funkcije oblika posjeduju interpolacijska svojstva [5]. S obzirom na primjenu mješovitih bezmrežnih metoda, u sastavnim problemima sustavi jednačbi su zatvoreni postavljanjem kinematičkih jednačbi koje povezuju aproksimirane veličine polja. Primijenjene bezmrežne mješovite formulacije detaljno su prikazane u [1]. U drugom poglavlju prikazana su dva korištena načina razdvajanja diferencijalne jednačbe četvrtog reda. Nadalje, objašnjene su dobivene diferencijalne jednačbe drugog reda zajedno s pripadnim rubnim uvjetima. Razmatrana su dva pristupa razdvajanja, prvi temeljen na pomaku kao nepoznatom polju (DB) i drugi temeljen na deformaciji kao polju koje se izračunava (SB). U 3. poglavlju prikazani su dobiveni rezultati utjecaja mikrostrukture na modeliranje deformiranja debele grede te je analiziran odziv konstrukcije. U zadnjem poglavlju dani su zaključci i ideje za primjenu razmatranih metoda za rješavanje složenijih fizikalnih problema.

2 Mješovite bezmrežne kolokacijske metode za gradijentu elastičnost

Na slici 1. prikazana je dvodimenzijaska konstrukcija definirana područjem Ω okružena vanjskom granicom Γ . Originalni problem gradijentne elastičnosti se razdvaja na dva sastavna problema, stoga vanjske granice poprimaju oznake Γ^c i Γ^g . Pritom se gornji indeksi odnose na klasični (lokalni) i gradijentni (ne-lokalni) sastavni problem rubnih vrijednosti.



Slika 1. Dvodimenzijaska konstrukcija s pripadnim granicama

2.1 Jednadžbe gradijentne elastičnosti

Za materijal definiran na slici 1., mogu se napisati jaki oblici 2D jednadžbi ravnoteže koji moraju biti zadovoljeni u svim čvorovima unutar područja omeđenog s Γ ,

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + b_i = 0, \quad \text{unutar } \Omega. \quad (1)$$

Prema teoriji gradijentne elastičnosti s jednim mikrostrukturnim parametrom [2], ukupno naprezanje $\tilde{\sigma}_{ij}$ može se prikazati kao zbroj Cauchyevog naprezanja σ_{ij} i naprezanja višeg reda μ_{ij} ,

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \mu_{ij}. \quad (2)$$

Pritom su spomenuti tenzori naprezanja definirani kao

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3)$$

$$\mu_{ij} = -\nabla^2 (\sigma_{kl}) = -C_{ijkl} l^2 \nabla^2 (\varepsilon_{kl}). \quad (4)$$

U gornjim relacijama, C_{ijkl} označava materijalni tenzor, ε_{kl} ukupni tenzor deformacije, dok je l mikrostrukturni parametar. U svrhu povezivanja polja deformacija i pomaka mogu se napisati kinematičke relacije

$$\varepsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k}) / 2. \quad (5)$$

Uvrštavanjem relacija (3) i (4) u jednadžbu (2) dobiva se

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - l^2 \varepsilon_{kl,mm}). \quad (6)$$

Sada, uvrštavanjem (6) u (1), uz upotrebu (5), dobiva se jednadžba četvrtog reda koja je problematična za numeričko rješavanje zbog potrebe za izračunavanjem visokog reda derivacija [4]. Stoga se originalni problem rastavlja na dva sastavna problema opisana diferencijalnim jednadžbama drugog reda. Ovdje je to napravljeno na sljedeća dva različita načina.

2.2 Pristup temeljen na pomaku (DB)

Diferencijalna jednadžba četvrtog reda kojom je opisano gradijentno elastično ponašanje materijala dobiva se uvrštavanjem jednadžbi (2) - (6) u (1),

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} \left[(u_k - l^2 \nabla^2 u_k)_{,jl} + (u_l - l^2 \nabla^2 u_l)_{,jk} \right] + b_i = 0, \quad \text{unutar } \Omega. \quad (7)$$

Diferencijalna jednadžba (7) zapisana preko polja pomaka sada se preoblikuje na način da se izrazi u okruglim zgradama definiraju kao novo klasično (lokalno) polje pomaka u_k^c ,

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,jl}^c + u_{i,jk}^c) + b_i = 0, \quad \text{unutar } \Omega. \quad (8)$$

Gornja jednadžba sada predstavlja „klasičnu“ jednadžbu ravnoteže linearno elastičnog homogenog materijala. Druga sastavna jednadžba problema slijedi iz definicije novog polja pomaka u_k^c i glasi

$$u_i^g - l^2 u_{i,mm}^g = u_i^c, \quad \text{unutar } \Omega. \quad (9)$$

Jednadžbe (8) i (9) rješavaju se sada stupnjevanom strategijom, gdje se rješenje prvog problema koristi kao ulazni parametar za rješavanje druge diferencijalne jednadžbe. Nadalje, relacije (8) i

(9) moraju zadovoljavati rubne uvjete propisane na vanjskoj granici $\partial\Omega$ prikazanoj na slici 1., odnosno

$$u_i^c = \bar{u}_i^c, \quad \text{na } \Gamma_u^c, \quad t_i^c = \sigma_{ij}^c n_j^c = \bar{t}_i^c, \quad \text{na } \Gamma_t^c, \quad (10)$$

$$u_i^g = \bar{u}_i^g, \quad \text{na } \Gamma_u^g, \quad R_i^g = \frac{\partial^2 u_i^g}{\partial n^{g2}} = \bar{R}_i^g, \quad \text{na } \Gamma_t^g. \quad (11)$$

2.3 Pristup temeljen na deformaciji (SB)

Ubacivanjem relacije (6) u jednadžbe ravnoteže (1) slijedi diferencijalna jednadžba trećeg reda po polju deformacija kojom se također može opisati gradijentno ponašanje materijala

$$C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - l^2 \varepsilon_{kl,mm} \right)_{,j} + b_i = 0, \quad \text{unutar } \Omega. \quad (12)$$

U gornjoj jednadžbi izraz u zagradi sada se zamijeni s klasičnim (lokalnim) poljem deformacije te se dobiva prva sastavna jednadžba ovog pristupa

$$C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j} + b_i = 0, \quad \text{unutar } \Omega. \quad (13)$$

Druga sastavna jednadžba dobivena iz same zamjene jednaka je

$$\varepsilon_{ij}^g - l^2 \varepsilon_{ij,mm}^g = \varepsilon_{ij}^c, \quad \text{unutar } \Omega. \quad (14)$$

Relacija (13) jednaka je jednadžbi (8) ukoliko se u nju uvrste kinematičke relacije definirane prema (5). Stoga, može se pokazati da se klasično (lokalno) rješenje problema za oba pristupa izračunava na isti način. Rubni uvjeti klasičnog problema ostaju jednaki kao i u pristupu temeljenom na pomaku, odnosno definirani su prema (10). Kao posljedica drugačije supstitucije, mijenjaju se rubni uvjeti ne-lokalnog problema te su prema [4] jednaki

$$\varepsilon_{ij}^g = \bar{\varepsilon}_{ij}^g, \quad \text{na } \Gamma_u^g, \quad R_{ij}^g = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^g}{\partial n^g} = \bar{R}_{ij}^g, \quad \text{na } \Gamma_t^g. \quad (15)$$

3 Numerički primjer

3.1 Debeli konzolna greda

Debeli konzolna greda jedinične debljine, duljine $L=3$, visine $H=1$ opterećena je na desnom kraju na savijanje jednolikim površinskim opterećenjem q u smjeru osi y , prema slici 2. Korišteni klasični i gradijentni rubni uvjeti prikazani su također na slikama 2. i 3. Kod oba pristupa korišteni su isti klasični rubni uvjeti. Međutim, pri rješavanju drugih sastavnih jednadžbi problema gradijentni rubni uvjeti nisu jednaki, nego se moraju definirati u skladu s izrazima (11), odnosno (15). Materijalna svojstva grede definirana su Youngovim modulom $E=1000$ i Poissonovim faktorom $\nu=0,3$. Za diskretizaciju grede korištena je mreža koja je sastoji od 341 jednoliko razmaknuta čvora. U numeričkim analizama korištene su različite vrijednosti mikrostrukturnog parametra l te je razmatrana mogućnost mješovitih bezmrežnih pristupa da opišu utjecaj veličine mikrostrukture na deformiranje debele grede. Za bolje razumijevanje i prikaz rezultata, koristit će se pomoćna veličina ε_R , definirana izrazom (16), koja predstavlja omjer „klasične“ i „gradijentne“ ekvivalentne deformacije izračunate prema (17)-(18). Omjer deformacija razmatran je u točki A ($x=0, y=0,5$), a izračunat je prema

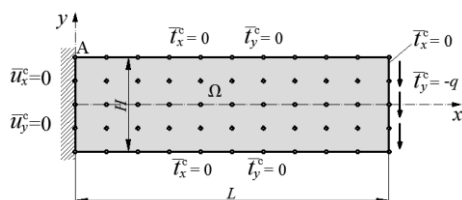
$$\varepsilon_R = \frac{\left(\varepsilon_{eq}^c \right)_A}{\left(\varepsilon_{eq}^g \right)_A}. \quad (16)$$

Ekvivalentne klasične i gradijentne deformacije prema von Misesu pritom su jednake

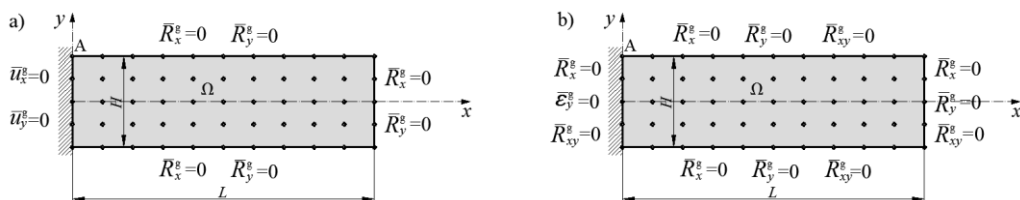
$$\varepsilon_{eq} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2)}{2} + \frac{3(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}{4}}, \quad (17)$$

gdje su

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{2}{3}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3}\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3}\varepsilon_{zz}, & e_{yy} &= -\frac{1}{3}\varepsilon_{xx} + \frac{2}{3}\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3}\varepsilon_{zz}, \\ e_{zz} &= -\frac{1}{3}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3}\varepsilon_{yy} + \frac{2}{3}\varepsilon_{zz}, & \gamma_{ij} &= 2\varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (18)$$

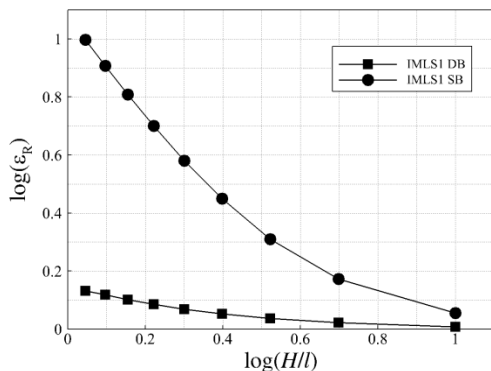


Slika 2. Debela greda s prikazanim klasičnim rubnim uvjetima

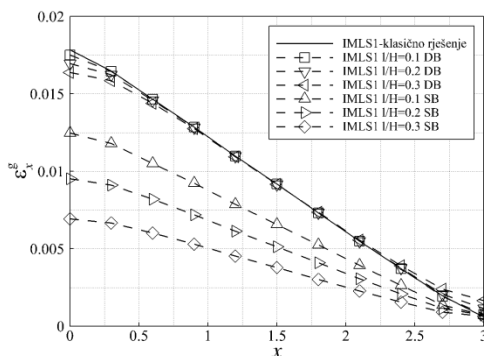


Slika 3. Debela greda s prikazanim gradijentnim rubnim uvjetima: a) DB pristup, b) SB pristup

Proračuni su provedeni korištenjem aproksimacijskih funkcija prvog stupnja (IMLS1). Za sve izračune korištena je veličina aproksimacijske domene $r_s/h_s = 1,5$. Pritom se h_s odnosi na međusobnu udaljenost između čvorova. Utjecaj veličine mikrostrukture na iznos omjera deformacija ε_R u točki A prikazan je na slici 4. u logaritamskom mjerilu.



Slika 4. Dijagram utjecaja veličine mikrostrukture na omjer deformacija u točki A



Slika 5. Dijagram raspodjele ε_x^g za $y = 0,5$

Analizom numeričkih rezultata može se zaključiti da korištenje različitih rubnih uvjeta, ovisno o pristupu, pri rješavanju gradijentne jednadžbe utječe na odziv i deformiranje konstrukcije. Kod oba pristupa povećanjem veličine mikrostrukture materijala vrijednost omjera deformacija ε_R raste. Vidljivo je stoga da članovi višeg reda u konstitutivnoj jednadžbi gradijente elastičnosti omogućuju smanjenje maksimalne vrijednosti deformacija, a sukladno tome i napreznja, odnosno da se povećanjem vrijednosti mikrostrukturnog parametra smanjuje koncentracija napreznja u odnosu na klasične kontinuumске modele. Također, analizom raspodjele deformacija duž grede, prikazane na slici 5., može se vidjeti da je pristup temeljen na pomaku mnogo manje osjetljiv na promjenu mikrostrukturnog parametra u usporedbi s pristupom temeljenim na nepoznatom polju deformacija.

4 Zaključak

Primjenom stupnjevanih postupaka za rješavanje problema gradijentne elastičnosti bezmrežnim metodama, postiže se smanjenje potrebnog reda derivacija u modelima, što doprinosi numeričkoj učinkovitosti algoritama. Primjenom mješovitih bezmrežnih kolokacijskih formulacija za rješavanje spomenutih postupaka, aproksimacijske funkcije moraju posjedovati samo kontinuitet prvih derivacija, čime se smanjuju računalni troškovi u usporedbi s klasičnim bezmrežnim metodama. Kod oba korištena pristupa, za sklapanje čvornih matrica krutosti u oba sastavna problema potrebno je izračunavati samo prve derivacije funkcija oblika. Analizom numeričkih rezultata na primjeru debele grede, vidljivo je da se primjenom oba pristupa može opisati utjecaj veličine mikrostrukture na deformiranje cjelokupne konstrukcije, odnosno da je moguće opisati utjecaj veličine (engl. *size effect*) na odziv konstrukcije. Dobiveni rezultati kvantitativno ovise o korištenom pristupu, što između ostalog implicira da je veličina mikrostrukturnog parametra u prikazanim pristupima različita za zadani problem. Dobiveni rezultati su kvalitativno usporedivi s onima dostupnima u literaturi. Stoga se može zaključiti da se primjenom mješovitih kolokacijskih metoda može dobiti kvalitativno točan odziv konstrukcije. U budućim radovima, metode će biti primijenjene za modeliranje deformiranja složenijih heterogenih konstrukcija.

Literatura

- [1] Jalušić B. Meshless Numerical Method for Modeling of Heterogeneous Materials. Doctoral Thesis. Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, Zagreb, 2016.
- [2] Askes H, Aifantis EC. Gradient Elasticity in Statics and Dynamics: An Overview of Formulations, Length Scale Identification Procedures, Finite Element Implementations and New results. *International Journal of Solids and Structures*. 2011,48:1962-1990.
- [3] Tenek LT, Aifantis EC. A Two-dimensional Finite Element Implementation of a Special Form of Gradient Elasticity. *Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES)*. 2002, 3(6):731-741.
- [4] Askes H, Morata I, Aifantis EC. Finite Element Analysis With Staggered Gradient Elasticity. *Computers & Structures*. 2008,86:1266-1279.
- [5] Most T, Bucher C. New Concepts for Moving Least Squares: An Interpolating Non-singular Weighting Function and Weighted Nodal Least Squares. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2008,32(6):461-470.