

NUMERIČKI MODEL VIŠESLOJNE GREDE S POPUSTLJIVOM VEZOM MEĐU SLOJEVIMA

Leo Škec (*leo.skec@uniri.hr*)

Sveučilište u Rijeci; Građevinski Fakultet; Katedra za tehničku mehaniku

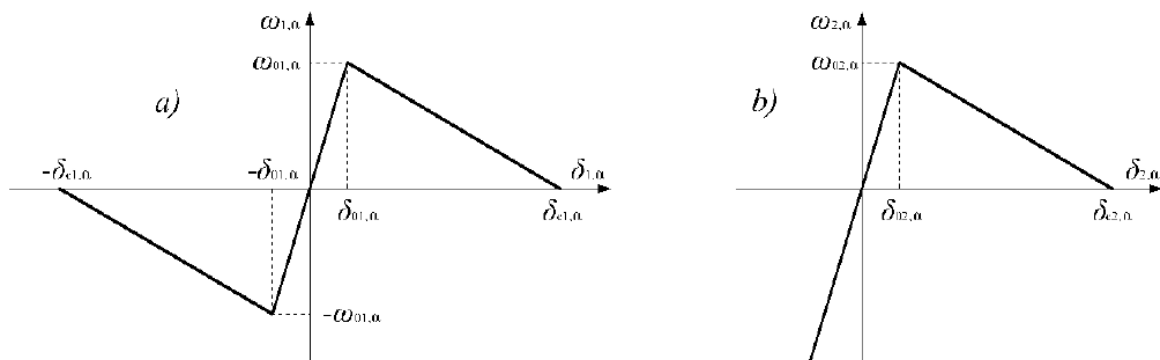
Pod modeliranje slojevitih nosača podrazumijeva se, osim modeliranja spregnutih nosača, i modeliranje homogenih nosača izrađenih od istog materijala koji su uslojeni u stvarnosti ili samo u modelu [1]. Gredni modeli za slojevite nosače u pravilu se razlikuju po broju slojeva (dva, tri ili više) te stupnju složenosti (točnosti) geometrijskih i materijalnih relacija. U ovom radu predstavljen je model za geometrijski linearne višeslojne grede s popustljivim kontaktom među slojevima. Za kontaktni sloj usvojen je model kojeg su predstavili Alfano i Crisfield [2] i koji omogućava modeliranje mješovitog raslojavanja (*Mixed mode delamination*) kombiniranjem oblika (moda) I (poprečno raslojavanje) i II (uzdužno raslojavanje).

U modelu je zadana ravna slojevita greda duljine L sastavljena od n slojeva, od kojih svaki sloj (i) može imati zasebne materijalne i geometrijske karakteristike. Greda je smještena u ravninu čije su prostorne osi definirane baznim vektorima e_1 i e_2 , a položaj grede u prostornom koordinatnom sustavu u nedeformiranom stanju definiran je baznim vektorima t_{01} i t_{02} . U deformiranom stanju položaj nekog sloja i slojevite grede definiran je baznim vektorima $t_{i,1}$ i $t_{i,2}$ koji ovise o kutu zaokreta poprečnog presjeka sloja $i - \theta_i$.

Kinematičke jednadžbe slojeva su linearizirane Reissnerove jednadžbe, koje se svode na Timoshenkovu grednu teoriju. Konstitutivni zakon slojeva je linearno-elastičan. Vezne jednadžbe povezuju susjedne slojeve preko relativnog pomaka kontaktnog sloja. Konstitutivni zakon kontaktnog sloja α definiran je za svaki oblik raslojavanja posebno prema Sl. 1. Za mjeru oštećenja kod mješovitog raslojavanja koristi se parametar koji kombinira oštećenja nastala od svakog oblika pojedinačno prema izrazu

$$\beta_\alpha(\tau') = \left[\left(\frac{|\delta_{1,\alpha}(\tau')|}{\delta_{01,\alpha}} \right)^\eta + \left(\frac{\langle \delta_{2,\alpha}(\tau') \rangle}{\delta_{02,\alpha}} \right)^\eta \right]^{\frac{1}{\eta}} - 1, \quad \eta = 2, \quad (1)$$

gdje je $\langle x \rangle$ McCauleyeva zagrada.



Slika 1. Konstitutivni zakon kontaktnog sloja za: a) oblik II (smjer 1) i b) oblik I (smjer 2)

Oštećenje je nepovratno, tako da u nekom trenutku τ pseudo-vremena $\bar{\beta}_\alpha(\tau)$ predstavlja najveće oštećenje od svih koja su se do tada dogodila. Kontaktna napreznja računaju se prema izrazu

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \omega_{\alpha,1} \\ \omega_{\alpha,2} \end{cases} = \begin{cases} S_\alpha \delta_\alpha & \text{ako je } \bar{\beta}_\alpha \leq 0 \\ [I - G_\alpha P_\alpha] S_\alpha \delta_\alpha & \text{ako je } \bar{\beta}_\alpha > 0 \end{cases}, \quad (2)$$

gdje je

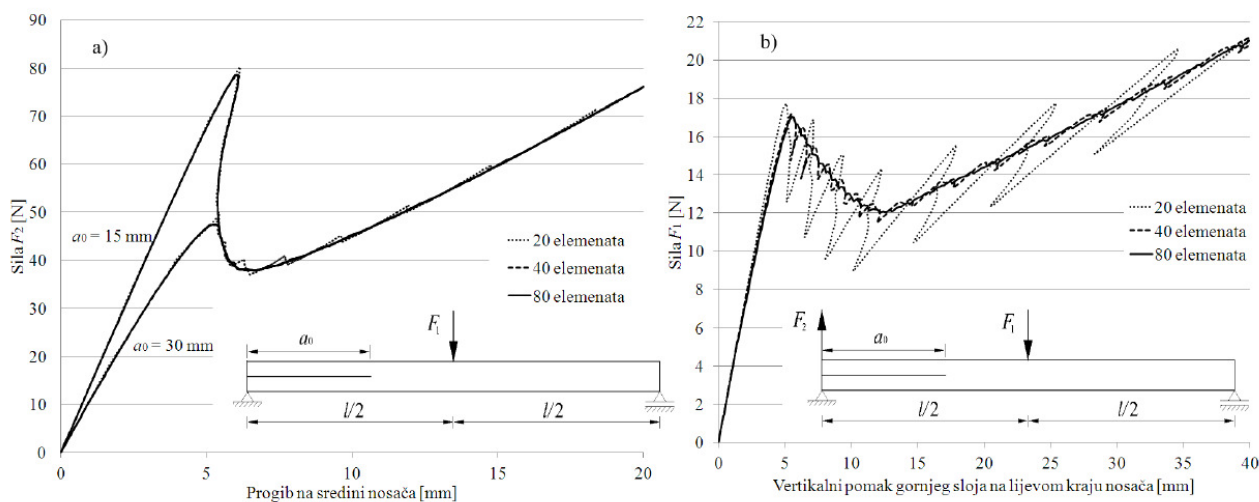
$$S_\alpha = \begin{bmatrix} S_{1,\alpha} & 0 \\ 0 & S_{2,\alpha} \end{bmatrix}, \quad S_{i,\alpha} = \frac{\omega_{0i,\alpha}}{\delta_{0i,\alpha}}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_\alpha = \begin{bmatrix} g_{1,\alpha} & 0 \\ 0 & g_{2,\alpha} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$g_{i,\alpha} = \min \left\{ 1, \frac{\delta_{ci,\alpha} - \bar{\beta}_\alpha}{\delta_{ci,\alpha} - \delta_{0i,\alpha}} \frac{\bar{\beta}_\alpha}{1 + \bar{\beta}_\alpha} \right\}, \quad P_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \langle \text{sgn}(\delta_{2,\alpha}) \rangle \end{bmatrix}, \quad i=1,2.$$

Slučaj $\bar{\beta}_\alpha \leq 0$ predstavlja linearno-elastično područje, dok za $\bar{\beta}_\alpha > 0$ dolazi do oštećenja kontaktnog sloja te, konačno, kada je $g_{i,\alpha} = 1$ do potpunog gubitka nosivosti kontaktnog sloja ($\omega_\alpha = 0$). Matrica P_α , ovisno o veličini parametra $S_{i,\alpha}$ ($i = 1, 2$), djelomično sprečava međusobno prodiranje susjednih slojeva u slučaju tlačnih kontaktnih naprezanja u smjeru 2 (Sl. 1.b)). Treba naglasiti da se u slučaju kada se jedan od dva oblika raslojavanja ne aktivira, konstitutivni zakon (2) reducira na Sl. 1.a) ili 1.b).

Za statički problem ukupni virtualni rad za čitavu višeslojnu gredu sa n slojeva i $n-1$ kontaktnih slojeva dobiva se kao zbroj virtualnih radova unutrašnjih sila po slojevima i kontaktnim slojevima od čega se oduzima virtualni rad vanjskih sila po slojevima. Domena je diskretizirana na N čvorova. Nakon što se izolira vektor čvornih virtualnih pomaka i rotacija za sve slojeve, moguće je definirati vektor neuravnoteženih sila, koji se sastoji od vektora unutrašnjih sila (dio od slojeva i dio od kontakta) i vektora vanjskih sila (raspodijeljeno opterećenje ili koncentrirane čvorne sile). Nakon linearizacije vektora neuravnoteženih sila dobiva se čvorna matrica krutosti za gredni višeslojni konačni element, te se rješenja sustava (čvorni pomaci i zaokreti svih slojeva) dobivaju iterativno koristeći Newton-Raphsonovu proceduru. Budući da kod sustava s raslojavanjem postoje vrlo oštri zaokreti u dijagramu sila-pomak (što će biti pokazano na primjerima) u proceduri za rješavanje koristi se i modificirana metoda lučne duljine (*Modified arc-length method*). Za integriranje kod grednih konačnih elemenata korištena je Gaussova integracija u $N-1$ točaka po elementu, a kod kontaktnih konačnih elemenata Simpsonova integracija u $N + 1$ točaka po elementu.

Predstavljeni model testiran je na primjeru sa Sl. 2, gdje se u slučaju kada djeluje samo sila F_1 događa samo raslojavanje oblika II (klizanje jednog sloja po drugome), a kada djeluju obje sile dolazi do mješovitog raslojavanja (poprečno odvajanje gornjeg sloja u odnosu na donji uz međusobno uzdužno klizanje) [3]. U oba slučaja povećanjem opterećenja dolazi do propagacije pukotine a_0 s lijeva na desno. Numerički parametri su $l = 100$ mm, $a_0 = 30$ mm, $h = 3$ mm, $b = 1$ mm, $E = 135000$ N/mm², $\nu = 0.25$, $\omega_{0i} = 57$ N/mm², $\delta_{0i} = 10^{-7}$ mm, $\delta_{ci} = 0.14$ mm, $S_i = 5.7 \cdot 10^8$ N/mm³, $i = 1, 2$, $F_2 = 0.4535 F_1$. Kod rijetkih mreža može se uočiti značajnije odstupanje od točnog rješenja koje nastaje kao rasterećenje nakon potpunog gubitka nosivosti kontaktnog sloja u po jedinoj integracijskoj točki. Ta se pojava može uočiti i kod gušćih mreža, ali su tada odstupanja od točnog rješenja manja. Uočeno je da prikazani rezultati odgovaraju rezultatima iz literature [3] koji su dobiveni koristeći izotropne i ortotropne konačne elemente za ravninsko stanje deformacija u geometrijski linearnoj analizi.



Slika 2. Rezultati testova za: a) uzdužno raslojavanje (oblik II) i b) mješovito raslojavanje.

Literatura

- [1] Škec, L., Jelenić, G., "Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection", *Acta Mech.*, Vol. 225, No. 2, 2014, pp. 523–541.
- [2] Alfano, G., Crisfield, M.A., "Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues", *Int. J. Numer. Mech. Eng.*, Vol. 50, No. 7, 2001, pp. 1701–1736.
- [3] Mi, Y., Crisfield, M., Davies, G., Hellweg, H., "Progressive Delamination Using Interface Elements", *J. Compos. Mater.*, Vol. 32, No. 14, 1998, pp.1246–1272.